Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Karsai Richárd Mihály

N-DIMENZIÓS GÖMB TÉRFOGATA

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Fehér M. László

Analízis Tanszék

Budapest, 2019

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**

2. A Gömb térfogatának kiszámítása integrállal **2**
2.1. Térfogat definíciója, kapcsolata a felszínnel 2
2.2. A Gömb térfogata integrállal 5
2.3. Forgástest felszíne 6
2.4. Fubini tétel, szukcesszív integrálás 9
2.5. Integráltranszformáció polárkoordinátákká 10

3. Az improprius integrál **15**
3.1. Az improprius integrál 15
3.2. Gábriel harsonája 16
3.3. A Pszeudoszféra 18
3.4. Improprius integrál polárkoordináták esetén 21
3.5. A normális eloszlás 22

4. A Gamma függvény **25**
4.1. Történelmi háttér 25
4.2. A Gamma függvény nevezetes tulajdonságai 28

5. Az n-dimenziós Gömb térfogata **31**
5.1. Az általános képlet bizonyítása 31
5.2. Hogyan változik a térfogat klönböző n-ekre 35

Ábrák jegyzéke **38**

Felhasznált irodalom **39**

1. fejezet

Bevezetés

> *„I now understand the need for faith—pure, blind, fly-in-the-face-of-reason faith—as a small life preserver in the wild and endless sea of a universe ruled by unfeeling laws and totally indifferent to the small, reasoning beings that inhabit it."*
>
> - Dan Simmons, *Hyperion*

Szakdolgozatomban az n-dimenziós gömb térfogatának kiszámításával foglalkozom. A dolgozati témaválasztásomat illetően egyértelműen befolyásolt az érdeklődés a végtelenek, a végtelenség gondolatkörével foglalkozó témák. Mivel úgy gondolom, hogy a matematika legszebb és legfigyelemreméltóbb szakterülete az analízis, ezért kézenfekvő volt, hogy egy olyan toposzt emeljek ki, mely módfelett inspiráló számomra. A dolgozat írása során szem előtt tartottam továbbá azt is, hogy az elkészült munka akár egy nem szakmabeli számára is gondolatébresztő erővel bírjon.

A dolgozat négy fő részre oszlik fel. Az első részben egy 3-dimenziós gömb térfogatának integrállal történő kiszámolásával foglalkozunk, ahol a térfogat alapdefinícióját is bevezetjük, valamint megvizsgáljuk kapcsolatát a felszínnel. A második részben rátérünk az improprius integrál fogalmára, valamint megnézünk néhány érdekes példát végtelen testekre vonatkozólag. Ezután rátérünk a Gamma függvényre, ahol kis történeti bevezetés után legfőbb tulajdonságait elemezzük. Az utolsó részben pedig az eddig bevezetett fogalmakat, tételeket és definíciókat felhasználva adunk általános képletet az n-dimenziós gömb térfogatára.

Munkám elkészüléséért köszönetet mondok témavezetőmnek, Fehér László tanár úrnak a rendkívül inspiráló ötleteiért, odaadó munkájáért, hogy elméleti, gyakorlati információkkal segítette munkámat, valamint megosztotta velem tapasztalatait, észrevételeit, ezáltal értékes gondolatokkal gazdagíthattam tudásomat és elkészíthettem dolgozatomat. Köszönöm továbbá mindazoknak, akik segítettek, motiváltak, támaszt, segítő kezet nyújtottak számomra az évek során.

Valamint köszönöm Apámnak, aki mindvégig hitt bennem.

2. fejezet

A Gömb térfogatának kiszámítása integrállal

„...assuming that the galaxy's most advanced civilizations are protoplasmic. But beings whose chemistry is based on molten copper, say, would want a hotter environment. They might have evolved faster, in temperatures where chemistry and biochemistry would move far faster. There might be a lot more of them than of us. And their red-hot Dyson spheres would look deceptively like red giant or supergiant stars. One wonders."

- Larry Niven, *Bigger Than Worlds*

2.1. Térfogat definíciója, kapcsolata a felszínnel

Kezdjük a legelején a gömb definíciójával. Ebben segítségemre volt *Hajós György - Bevezetés a Geometriába* [3] c. könyve.

1. Definíció. Gömbfelületnek (szféra) nevezzük az n-dimenziós tér olyan pontjainak mértani helyét, amelyek egy megadott ponttól megadott (0-tól különböző) távolságra vannak. A gömb *középpontja* (centrum) az a pont, amelyiktől a gömb pontjai egyenlő távolságra vannak. A gömb *sugara* (rádiusz) épp ez a közös távolság, de ugyanígy nevezzük azokat a szakaszokat is, amelyek a középpontot a gömbfelület pontjaival összekötik.

A gömböt (ahogyan a kört is) egyértelműen meghatározza a középpontja és a sugara, vagy pedig a középpontja és egy pontja. Ha egy R sugarú gömbre igaz, hogy $R = 1$, abban az esetben egységgömbről beszélünk.

Egy pont a gömbfelületen *belül* vagy *kívül* van aszerint, hogy a gömbközépponttól sugárnyi távolságnál kissebb, vagy nagyobb disztanciára van. A gömbfelületen belül elhelyezkedő pontok a gömbfelület pontjaival együtt a gömbfelület által határolt *gömbtestet* (tömör gömb, golyó) alkotják.

1. Megjegyzés. Használni fogjuk a későbbiek során még az ún. *n-gömb* fogalmát. Ez lényegében egy általánosítása a gömb definíciójának a tér magasabb dimenzióira vonatkozólag. Veszünk egy olyan n-dimenziós teret, mely $n + 1$ dimenziós térbe ágyazható. Ez alapján például egy *0-gömb* felfogható úgy, mint egy pontpár, az *1-gömb*, mint egy körvonal, és a *2-gömb*, mint egy általános gömbfelület alakzataként.

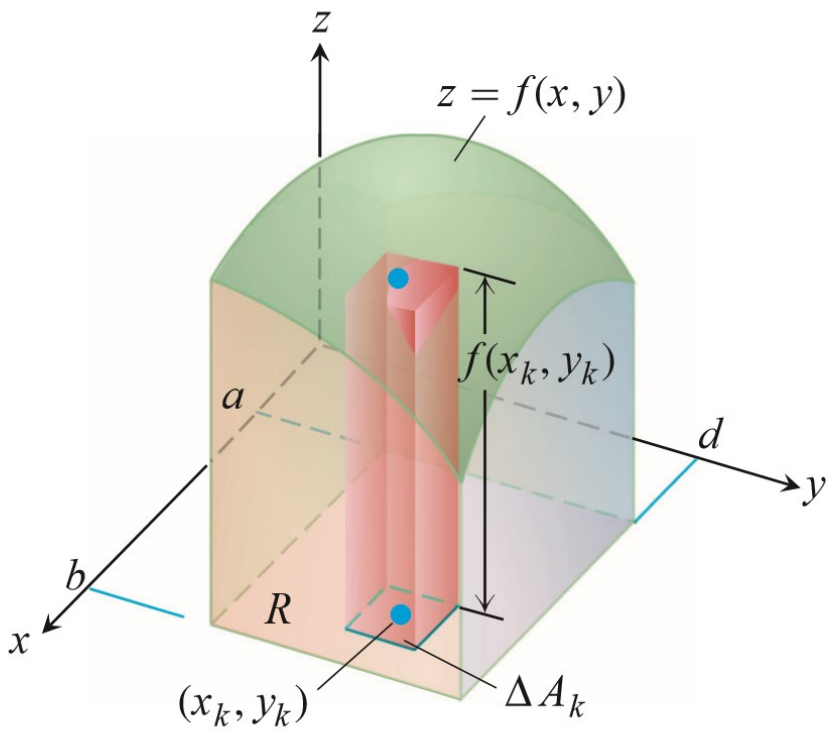
Lényegében egy $n+1$ dimenziós Euklideszi térbe ágyazva az *n-gömb* egy $n+1$-dimenziós, tömör golyó külső felületét, külsejét adja meg. Így bármely n természetes számra definiálhatunk egy r sugarú *n-gömb* -öt, melyre úgy tekinthetünk, mint egy $n+1$ dimenziós Euklideszi térbe való beágyazást, amely ponthalmazt határoz meg egy centrumtól r távolságra, ahol $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Így S_n-t definiálhatjuk, mint:

$$S_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}$$

A továbbiakban általános definíciót adunk a térfogatra. Ebben segítségemre a *Thomas' Calculus* [1] c. könyv volt.

Vegyünk egy pozitív $f(x, y)$ kétváltozós függvényt egy négyzetes R tartományon az xy-síkban. Ekkor az f függvény R feletti kettős integrálját tekinthetjük úgy, mint azt a 3-dimenziós térfogatot az xy sík fölött, melyet alulról R, felülről pedig az f-függvény által meghatározott felület határol.



2.1. ábra. Térfogat meghatározása közelítő oszlopok térfogatával

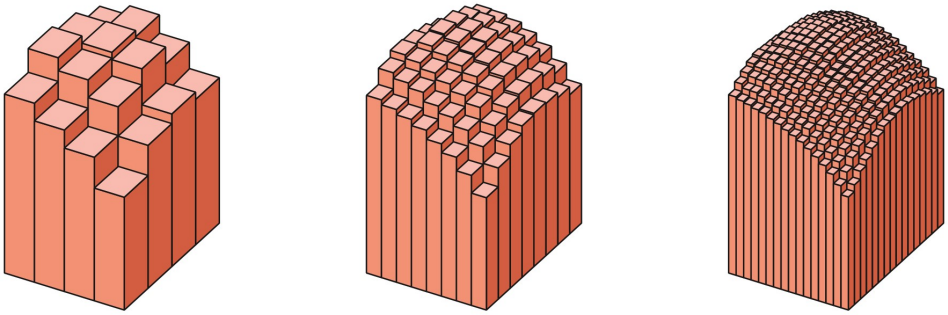
Minden egyes $f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$ szorzat az $S = \sum f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$ összegben megadja a térfogatát egy négyzetes oszlopnak, ami közelíti a térfogatát a test azon részének, amely közvetlenül ΔA_k fölött áll. Így az S összeg közelíti a test teljes térfogatát. Ha az alapnégyzetet $n \times n$ részre osztjuk, akkor a definíciónk az alábbi:

2. Definíció.

$$V = \lim_{n \to \infty} S_n = \iint_R f(x, y) dA,$$

ahol $n \to \infty$ esetén $\Delta A_k \to 0$.

Így ezen oszlopok finomításával kaphatjuk meg a térfogatot.



(a) $n = 16$ (b) $n = 64$ (c) $n = 256$

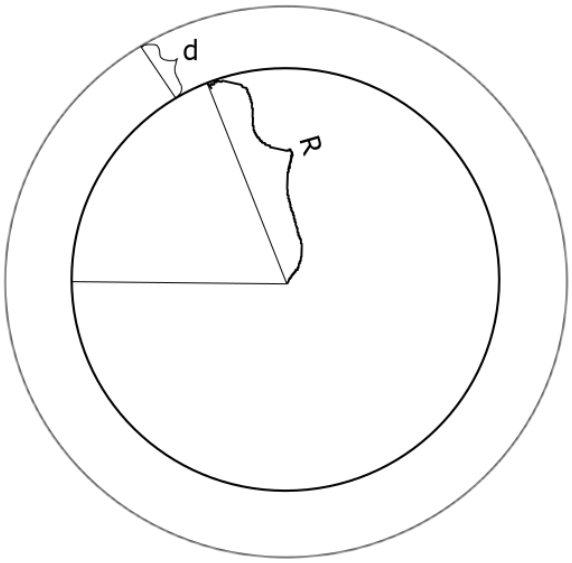
2.2. ábra. A térfogatközelítő oszlopok finomítása

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen kapcsolatban áll a gömb térfogata a felszínével. Folytassuk gondolatmenetünket R sugarú gömbre.

A középiskolából is ismert képletünk a gömb felszínére $4R^2\pi$, amely sokat sejtetően kapcsolatban áll a térfogat $\frac{4R^3\pi}{3}$ ismert képletével - látszólag éppen a deriváltja. A következő feladatban *Fehér László - Felszín származtatása térfogatból* [4] jegyzete volt segítségemre.

2.1.1. Feladat Mutassuk meg, hogy a gömb felszíne definiálható, mint a gömb térfogatának deriváltja!

Vegyük a következő példát. Van egy R sugarú gömbünk, amit d vastagságban befestünk. Nyilván, mivel egy felületet szeretnénk kapni, ezért d-vel mindenképp le kell osztanunk, mivel a dimenziónknak valamilyen négyzetes mértékűnek kell lennie. Azt feltesszük azonban, hogy d nagyon kicsi.



2.3. ábra. R sugarú gömb lefestése d vastagságban

Ekkor, ha a felhasznált festék térfogatára vagyunk kíváncsiak, akkor ki kell számolnunk az R, és az $R+d$ sugarú gömbök térfogatának különbségét. Jelölje A a gömb felszínét.

$$A = \frac{1}{d}\left(\frac{4(R+d)^3\pi}{3} - \frac{4R^3\pi}{3}\right) = \frac{1}{d}\cdot\frac{4\pi}{3}((R+d)^3 - R^3) = \frac{4\pi}{3}(3R^2 + 3Rd + d^2).$$

Mivel feltettük, hogy d nagyon kicsi, ezért a d-s szorzatok elhanyagolhatóak, s így megkapjuk a gömb felszínének ismert képletét: $4R^2\pi$. Eme intuitív állítás precízebbé tehető, ha átfogalmazzuk a példát, tehát azt mondjuk , hogy d-vel tartunk 0-hoz. Legyen $V(R)$ az R sugarú gömb térfogata, míg $A(R)$ annak felszíne. Mindezt átírva kapjuk, hogy

$$A(R) = \lim_{d\to 0}\frac{V(R+d) - V(R)}{d} = V'(R). \tag{2.1}$$

2.2. A Gömb térfogata integrállal

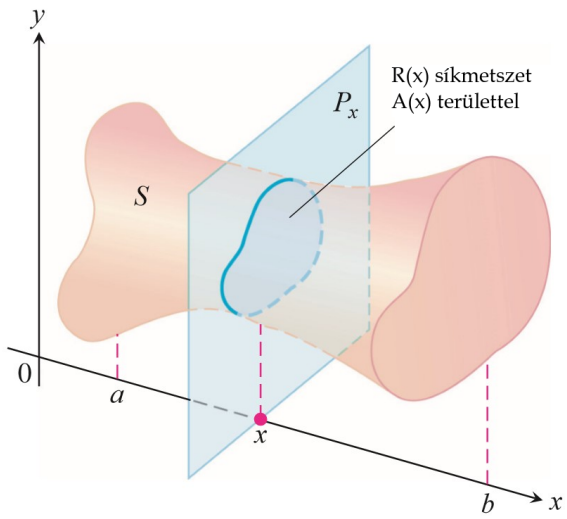
A gömb térfogatát integrálás segítségével fogjuk kiszámolni, ehhez felhasználjuk az analízis egyik alaptételét, más néven a $Newton - Leibniz$ tételt.

1. Tétel. (Newton-Leibniz-tétel) H f folytonos $[a,b]$ minden pontjában és F az f primitív függvénye $[a,b]$-n, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

2.2.1. Feladat Mutassuk meg integrálás segítségével, hogy az R sugarú gömb térfogata $\frac{4R^3\pi}{3}$!

A térfogat kiszámításához síkmetszetek összegét fogjuk venni. Egy S térbeli test síkmetszetének nevezzük azt az alakzatot, mely az S-et metsző sík ad meg.



2.4. ábra. Az S test x pontban vett síkmetszete

Egy test térfogatának kiszámításához az alábbi lépésekre van szükség:

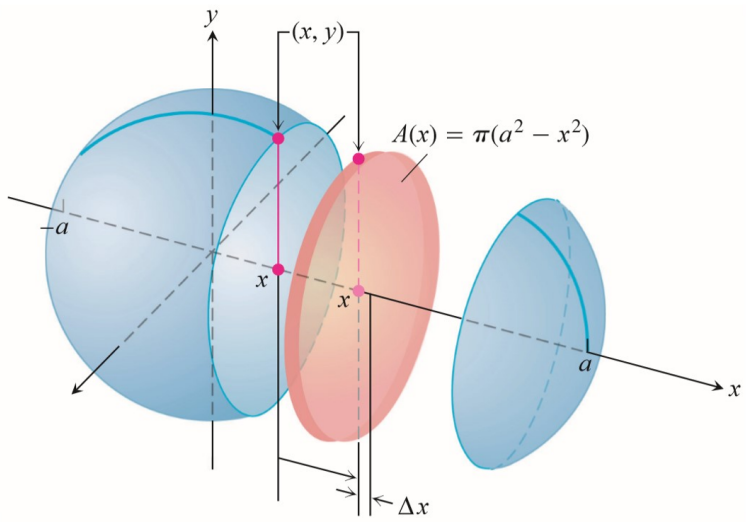
1. *Vázoljuk fel a testet és egy általános síkmetszetét*
2. *Találjunk képletet $A(x)$-re, ami a síkmetszet területe lesz*
3. *Állapítsuk meg az integrandus határait*
4. *Az analízis alaptételének megfelelően hajtsuk végre az integrálást $A(x)$-en*

Definiáljuk gömbünket az alábbi képlettel:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

ahol x és y a kör centrumát, míg R annak rádiuszát határozzák meg.

A síkmetszeteket úgy képzeljük most el, mint a gömböt az x tengelyre merőleges síkokkal, vékony körlemezekre való felbontását. Ezen síkmetszetek összege megadja a gömb teljes térfogatát.



2.5. ábra. A Gömb és síkmetszete

Egy ilyen síkmetszet területe valamely x helyen, $-R$ és R között

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2).$$

Így a térfogatunkra az alábbi képlet adódik:

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)dx = \int_{-R}^{R} \pi(a^2 - x^2)dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4R^3\pi}{3}. \tag{2.2}$$

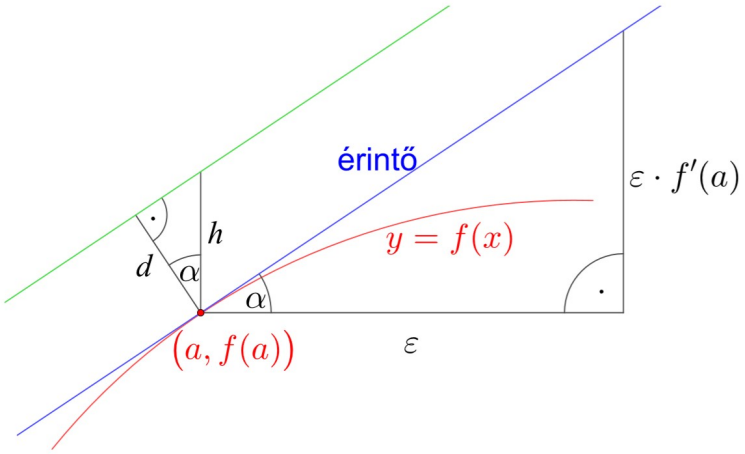
2.3. Forgástest felszíne

Amennyiben szeretnénk más geometriájú felületek kiszámítását is végrehajtani, úgy némiképp más módszert kell alkalmaznunk. Számolásunkat ugyanis megnehezítheti, hogy a d távolság-ra lévő függvény nem minden esetben tartja meg az eredeti

alakzatunk formáját. Gondoljunk csak pl. egy parabolára, ahol a felső határnál már nem ugyanaz a függvényünk lesz d távolságra, mint amiből eredetileg elindultunk.

A megoldáshoz az ívhossz-t fogjuk visszavezetni területre, vagyis besatírozzuk a görbénket d vastagon, ahol d nagyon kicsi, és a satírozott tartomány területét osszuk d-vel.

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy deriválható függvény és ki akarjuk számolni a grafikon ívhosszát. Tegyük fel, hogy d olyan kicsi, hogy ezen a skálán már f grafikonját egy adott x-re az x-beli érintő jól közelíti.



2.6. ábra. Egy függvény erintője adott a pontban, és ennek d távolságra lévő eltoltja

Ebben az esetben az ábrán látható derékszögű hasonló háromszögek oldalaira kapjuk, hogy

$$\frac{h}{d} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + (\varepsilon \cdot f'(a))^2}}{\varepsilon} = \sqrt{1 + f'(a)^2},$$

tehát $x = a$-ban a d-távolságra lévő párhuzamos görbe nagyjából $h = d\sqrt{1 + f'(a)^2}$-tel van "feljebb".

Definiáljuk ekkor f-nek a d-vel való eltoltját az alábbi formulával:

$$f_d(x) := f(x) + d\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Ekkor kis d-re $f_d(x)$ grafikonja jól közelíti a d távolságra lévő párhuzamos görbét.

Az $f(x)$ és $f_d(x)$ közti normáltartomány területét integrállal tudjuk meghatározni, a már ismert módon:

$$T(d) = \int_a^b (f_d(x) - f(x))dx = d\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Az ívhosszt így $\lim\limits_{d\to 0} \dfrac{T(d)}{d}$ fogja adni, így kapott formulánk

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx \tag{2.3}$$

lesz.

A továbbiakban térjünk rá a forgástestek felszínére. Először vegyük egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deriválható függvény grafikontjának megforgatottját az x-tengely körül. Ekkor felhasználjuk a forgástest térfogatára ismert képletet:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Alkalmazzuk tovább előző gondolatmenetünket, és fessük le a kapott alakzatot d vastagságban, tehát tekintsük az $f_d(x) := f(x) + d\sqrt{1 + f'(x)^2}$ függvény grafikonjának megforgatásával keletkezett forgástestet. Így ennek térfogata az alábbi lesz:

$$V_d = \pi \int_a^b f_d^2(x)dx$$

Ekkor a felhasznált festék térfogata az alábbiak szerint alakul:

$$V_d - V = \pi \int_a^b (f_d^2(x) - f^2(x))dx = \pi \int_a^b (f(x) + d\sqrt{1 + f'(x)^2})^2 - f^2(x)dx =$$

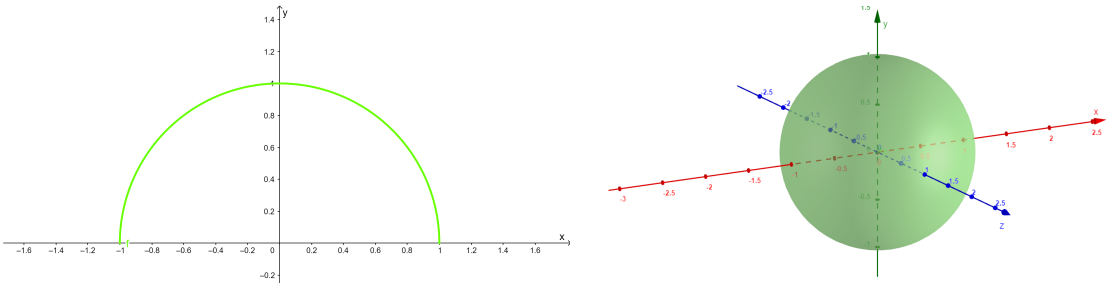
$$d \cdot 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx + d^2 \cdot \pi \int_a^b (1 + f'(x)^2)dx.$$

Hasonlóképp most is d-vel osztunk, majd d-vel tartunk 0-hoz, így a felszínre kapott képletünk

$$A = \lim_{d\to 0} \frac{V_d - V}{d} = \lim_{d\to 0} \left(2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx + d \cdot \pi \int_a^b (1 + f'(x)^2)dx \right) =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx \tag{2.4}$$

2.3.1 Példa Vegyük az $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) := \sqrt{1 - x^2}$ függvény grafikonjának megforgatottját az x-tengely körül:



2.7. ábra. Az $\sqrt{1 - x^2}$ és annak x-tengely körüli megforgatottja

Ekkor $f'(x)$ (a láncszabály) miatt:

$$f'(x) := \frac{1}{2}(-2x)(1 - x^2)^{-1/2} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Így

$$1 + f'(x)^2 = \frac{1 - x^2 + x^2}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2},$$

tehát az integrálandó függvényünk a felszínképletből

$$f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = 1.$$

Így a felület felszíne

$$A = 2\pi\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx = 2\pi\int_{-1}^{1} 1dx = 4\pi,$$

ami jelenleg $R = 1$ esetre megegyezik a (2.2.1.) Feladatban kapott eredménnyel.

2.4. Fubini tétel, szukcesszív integrálás

A továbbiakban a terület, térfogat fogalmaira közösen a *mérték* szót fogjuk használni, melynek definiálásához *Laczkovich Miklós - T. Sós Vera - Analízis II.* [2] tankönyvét vettem alapul. Valójában a mértéket mindegyik $\mathbb{R}^n$ térben definiálni fogjuk, és a területet, illetve a térfogatot az így kapott közös fogalomnak az $n = 2$, illetve $n = 3$ speciális eseteként kapjuk meg.

Nyilvánvaló, hogy $n > 3$ esetén nehéz idealizálnunk a tér fogalmát, de szerencsére matematikai eszközeink segítségével $\mathbb{R}^n$ -re általánosítva idealizálhatjuk a síkban és térben megalkotott fogalmaink nagy részét bármilyen n esetre. A legkézenfekvőbb eset a tengelyekkel párhuzamos téglalap, illetve téglatest fogalma. Mivel a síkban, illetve a térben ezek az $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, illetve $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ alakú halmazok, ezért $\mathbb{R}^n$ ben **tengelypárhuzamos téglatestnek**, röviden **téglának** fogjuk nevezni az

$$[a_1, b_1] \times \ldots [a_n, b_n]$$

alakú halmazokat, ahol $a_i < b_i$ minden $i = 1, \ldots, n$-re. Az $n = 1$ esetre így a tégla fogalma egybeesik a nem elfajuló, korlátos, zárt intervallum definíciójával.

Ahhoz, hogy többszörös integrálokkal is tudjunk számolni, az alábbiakban néhány fontos tételt fogalmazunk meg, melyek szerint majd minden integrált visszavezethetünk alacsonyabb dimenziójú integrálokra.

2. Tétel. (**Fubini-tétel**) Legyen f folytonos az $R = [a, b]\times[c, d] \subset \mathbb{R}^2$ téglán, ekkor

$$\iint\limits_R f(x, y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx.$$

Így a tétel azt mondja ki, hogy a kettős integrálja egy folytonos függvénynek valamely normáltartományon kiszámítható az integrálás egymás utáni végrehajtásával, a sorrendtől függetlenül.

A tétel többszöri alkalmazásával következtethetünk egy újabb tételre.

3. Tétel. (**A szukcesszív integrálás tétele**) Legyen f folytonos az $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ téglán. Ekkor

$$\int\limits_R f dx = \int_{a_n}^{b_n} \ldots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\right) dx_2\right) \ldots dx_n.$$

2.4.1. Példa Az e^{x+y} függvény integrálható a $[0,1]\times[0,1]$ négyzeten, mert folytonos. A szukcesszív integrálás tétele szerint itt az integrálja

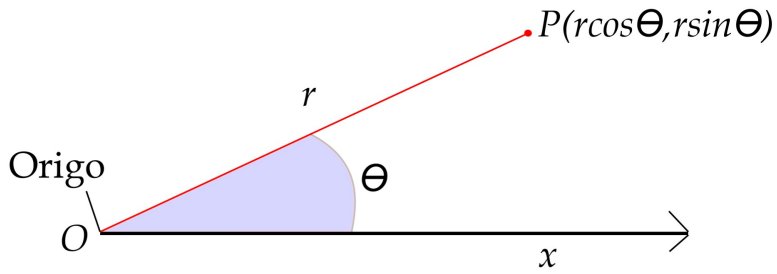
$$\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} e^{x+y}dxdx = \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{x+y}dy\right) dx = \int_0^1 e^x \cdot \left(\int_0^1 e^y dx\right) dx =$$

$$\int_0^1 e^x \cdot (e-1)dx = (e-1)^2.$$

A feladatból következik annak általánosítása, miszerint, hogy ha az egyváltozós $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ és $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ függvények integrálhatóak, akkor az $f(x)\cdot g(y)$ függvény integrálható $[a,b]\times[c,d]$-n és az integráljának értéke $\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_c^d g(y)dy\right)$.

2.5. Integráltranszformáció polárkoordinátákká

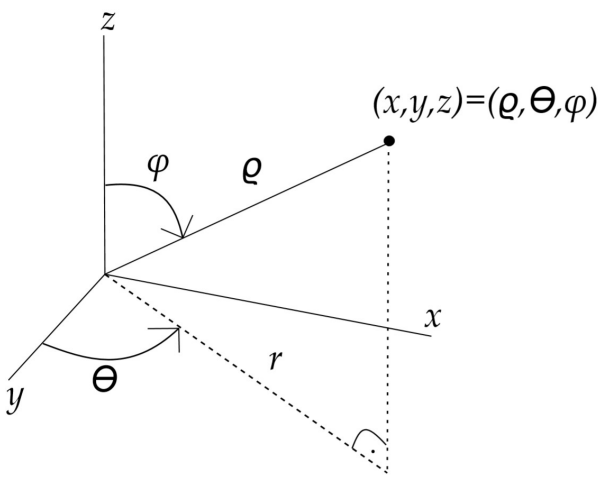
A továbbiakban bevezetjük a *polárkoordináták* fogalmát. A polárkoordináta meghatározásához először is rögzítünk egy O origót, és egy θ-t, amely az $\overrightarrow{OP}$ félegyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szöge.



2.8. ábra. A polárkoordináta meghatározása kezdeti O centrummal és θ szöggel

Az ábra szerint tehát P polárkoordinátái (r,θ), s így Descartes-féle koordinátái $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ lesznek. Az origo polárkoordinátái $(0,\theta)$, ahol θ tetszőleges.

Mindez gömbi koordinátákra az alábbiak szerint néz ki:



2.9. ábra. Gömbi koordináták

2.5.1. Feladat Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát polárkoordinátás alakban!

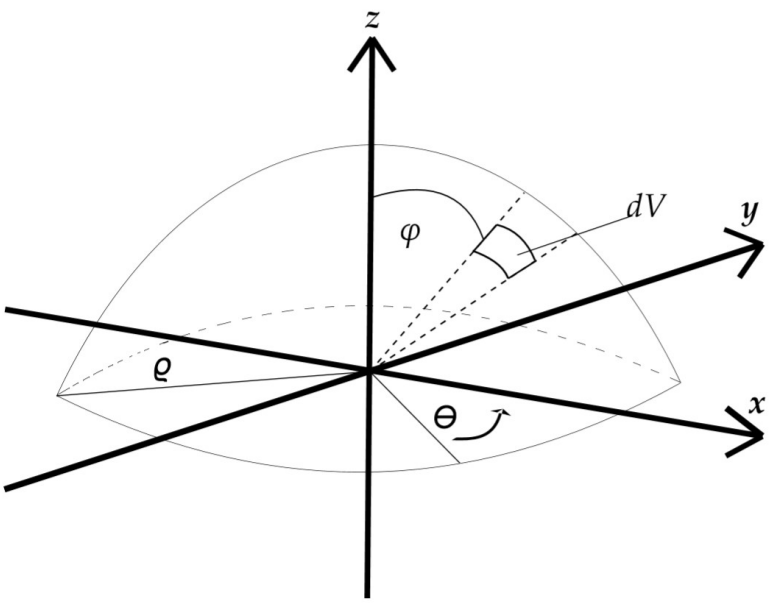
Először is nézzük az alapképletünket:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Megoldásként azt a megközelítést fogjuk alkalmazni, hogy csak a felső félgömbre vonatkozólag a számítjuk ki a térfogatot, így a végén elég lesz, hogy csak megduplázzuk az eredményünket.

Mivel gömbi koordinátákat használunk, ezért tudjuk, hogy három féle változónk lesz: két szögváltozó, és egy sugár-változó. Az integrálunk így valamilyen D tartományra:

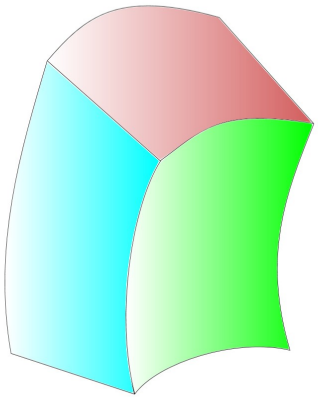
$$V = \iiint_D dV.$$



2.10. ábra. A félgömb paraméterezése

Az ábráról leolvasható, hogy a θ paraméter egy teljes kört jár végig az xy síkon, így $[0, 2\pi]$, a φ csak a zx síkon $[0, \frac{\pi}{2}]$, illetve a ϱ sugár paraméter a $[0, R]$ intervallumon mozog.

Ahhoz, hogy a dV infinitezimális térfogatelemet meghatározzuk, kicsit át kell fogalmaznunk a térfogatról alkotott definíciónkat. Azt láttuk, hogy Descartes-féle koordináta-rendszerben az infinitezimális térfogatelemekre úgy gondoltunk, mint kis négyzetes oszlopelemekre. Gömbi koordináták esetén azonban úgy kell ezeket elképzelni, mint kicsit görbített objektumok, amik "körbeölelik" a gömböt.

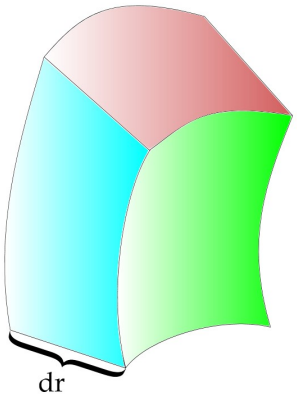


2.11. ábra. A gömb egy térfogateleme

Mivel a többszörös integrálás során minden egyes különálló integrál a tőle különböző változójút konstansként kezeli, éppen ezért ha szeretnénk azt látni, hogy a darabkákat hogyan rakja össze a három integrál együttese, akkor érdemesebb arra gondolni, hogy ezen darabkák térfogata kifejezhető a különböző koordináták megváltozásaként.

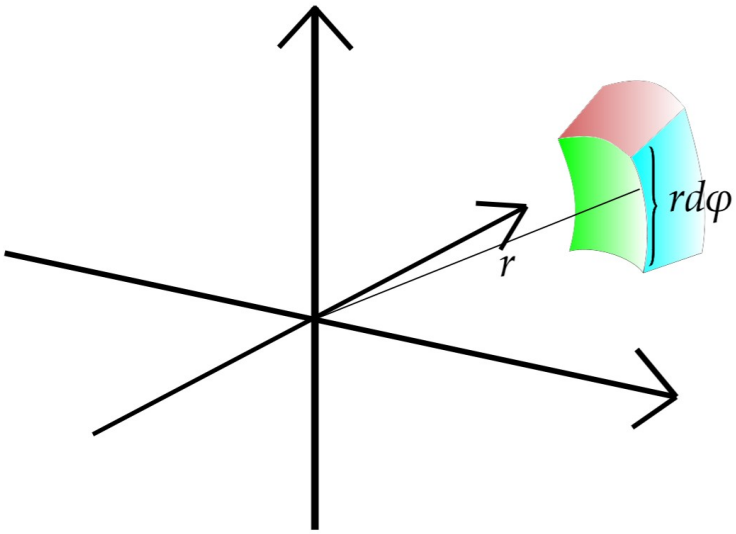
Ahogyan ezen kis blokkok 0-hoz tartanak, úgy a görbületük olyannyira elhanyagolhatóvá válik, hogy négyzetes elemként kezelhetőek.

Az egyik oldal hosszban pici változást reprezentál a középponttól.



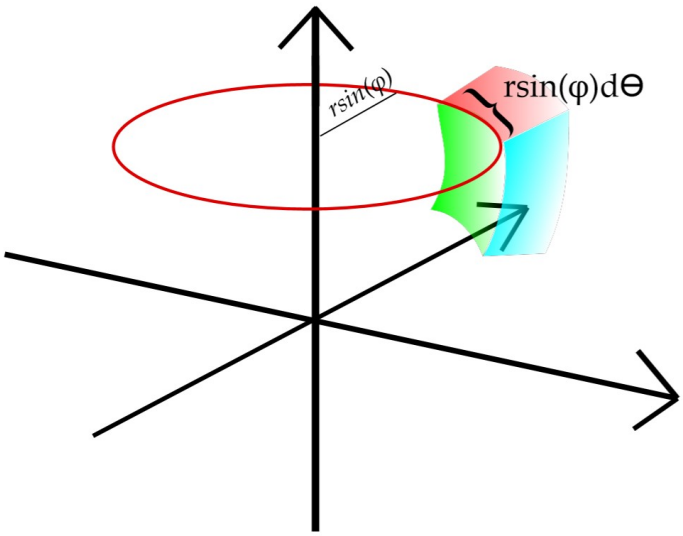
2.12. ábra. R változása a középponttól

A másik két oldal pedig a másik két koordinátabeli változásokat, vagyis $d\theta$ és $d\varphi$ változást mutatja. Mivel azonban θ és φ csak szöget ad meg, ezért be kell őket szoroznunk egy hossz mértékegységgel is, hogy megfelelőképpen tudja a négyzetes kis objektumunk méretbeli változásait reflektálni. Így például az az oldal, mely a φ változó szerinti változást reprezentálja $rd\varphi$ hosszú lesz.



2.13. ábra. φ változása

Az oldal, mely θ megváltozásával van összefüggésben egy olyan körvonal része, mely a z-tengelyt körbefutja, de ennek már nem r a hossza, hanem a hajlásszög változásának függvényében $r \cdot \sin\varphi$. Így kis változásra a θ változóhoz tartozó ívhossz $r \sin\varphi d\theta$ lesz.



2.14. ábra. θ változása

Így a dV infinitezimális térfogatelemre adódik a

$$\varrho^2 \sin\varphi d\varrho d\theta d\varphi$$

összefüggés. A félgömb térfogatának kiszámítására tehát az alábbi képletet használjuk:

$$V = \iiint_D dV = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^{R} \varrho^2 \sin\theta d\varrho d\theta d\varphi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^R \sin\varphi d\theta d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\theta d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\theta]_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi =$$

$$\frac{2\pi R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi R^3}{3} [-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2^3}{2} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)\right] =$$

$$\frac{2R^3\pi}{3}.$$

Így tehát a teljes gömb térfogatára kapjuk, hogy

$$\frac{4R^3\pi}{3},$$

ami természetesen megegyezik (2.2)-vel.

3. fejezet

Az improprius integrál

„An interesting idea," Professor Johnson said. "I had not thought of it, and it will be interesting to try. Very well, I shall not . . ." There was no paradox at all. The cube remained. But the entire rest of the Universe, professors and all, vanished.

- Fredric Brown, *Experiment*

3.1. Az improprius integrál

A továbbiakban olyan integrálokat fogunk vizsgálni, melyek határai nem korlátosak. Ahhoz, hogy tudjuk ezeket mégis értelmezni, bevezetjük az *improprius integrál* definícióját *Laczkovich Miklós - T. Sós Vera - Analízis II.* [2] alapján.

3. Definíció. Legyen f értelmezve az $[a, \infty)$ félegyenesen, és tegyük fel, hogy f integrálható $[a, b] - n$ minden $b > a$-ra. Amennyiben a

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = I$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény $[a, \infty)$-beli *improprius integrálja konvergens és értéke I.* Ezt úgy jelöljük, hogy $\int_a^\infty f(x)dx = I$.

Amennyiben a $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)$ dx határérték nem létezik, vagy létezik, de nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az *improprius integrál divergens.* Ha

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \infty \qquad (vagy - \infty),$$

akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál létezik és az értéke $\infty, (illetve - \infty)$.

Hasonlóképp értelmezzük a $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ improprius integrált.

Szükségünk lesz még egy olyan tételre is, amely konvergenciára, divergenciára vonatkozó igen erős feltételt fog tudni megadni számunkra. Segítségével bonyolult integrálszámítási feladatokat tudunk megoldani anélkül, hogy hosszasabb számolgatásokba bocsájtkoznánk.

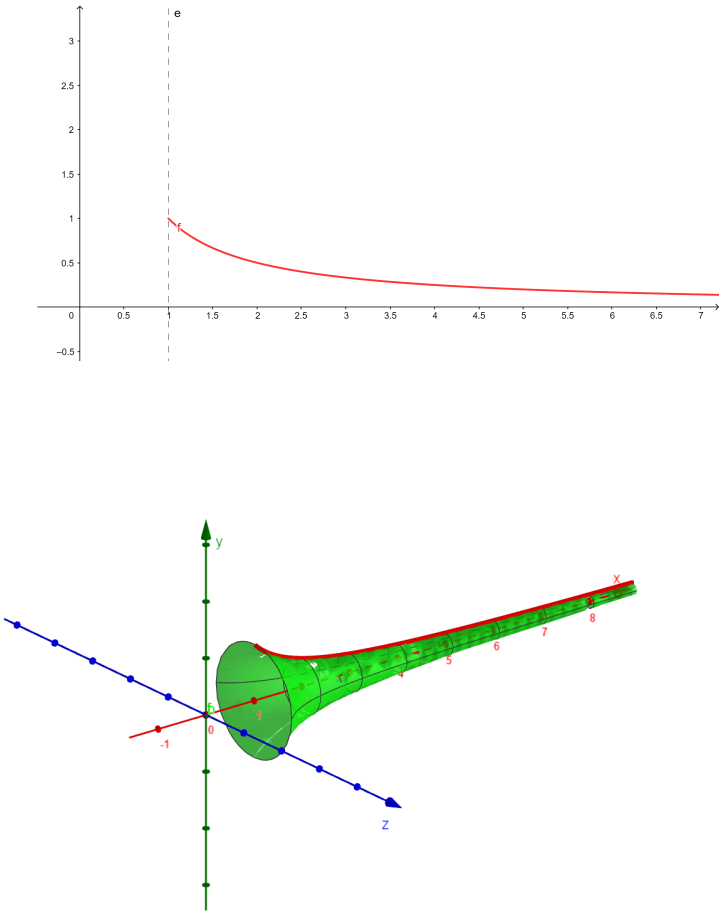
4. Tétel. (**Majorizációs-elv**) Legyen f és g integrálható $[a, \beta)$ minden korlátos és zárt részintervallumában, és tegyük fel, hogy van olyan $b_0 \in [a, \beta)$, hogy $|f(x)| \leq g(x)$ minden $x \in (b_0, \beta)$-ra. Ha $\int_a^\beta g(x)dx$ konvergens, akkor $\int_a^\beta f(x)dx$ is konvergens.

2. Megjegyzés. A majorizációs tétel a divergencia kimutatására is alkalmas: ha $g(x) \geq |f(x)|$ minden $x \in (b_0, \beta)$-ra és $\int_a^\beta f(x)dx$ divergens, akkor ebből következik, hogy $\int_a^\beta g(x)dx$ is divergens. Persze nyilvánvaló, ha az utóbbi konvergens lenne, akkor $\int_a^\beta f(x)dx$ is konvergens lenne. Így a tételt ilyetén formájában *minorizálásnak* szokás nevezni.

3.2. Gábriel harsonája

A következő példa *Evangelista Torricelli (1608-1647)* nevéhez köthető, aki *Galileo Galilei (1564-1642)* tanítványa volt, és leginkább a barométer feltalálása miatt ismerhetjük nevét. Azonban szintén hozzá köthető a *Gábriel Harsonája*, avagy "festő paradoxon" néven is ismert feladat.

Tekintsük az $\frac{1}{x}$ függvényt az $[1, \infty)$ intervallumon, majd vegyük ennek az x-tengely körüli megforgatottját.



3.1. ábra. Az $\frac{1}{x}$ és annak x-tengely körüli megforgatottja

A forgástestünk ekkor tehát egy végtelenbe futó alakzat. Azt szeretnénk kiszámolni, hogy mi lehet ennek a testek a térfogata, illetve a felszíne. A forgástestünk felszínének képletére (2.4)-es egyenletet használjuk fel, térfogatára pedig a már korábban látott tételt:

5. Tétel. Ha f nemnegatív és integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor az f által meghatározott forgástest mérhető, és a térfogata

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Ahhoz, hogy a feladatot megoldjuk, a **4. Tételen** kívül szükségünk lesz még egy, konvergenciát biztosító feltételre is.

6. Tétel. Az $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ integrál akkor és csak akkor konvergens, ha $p > 1$. Azaz:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{ha } c > 1, \\ \infty & \text{ha } x \leq 1. \end{cases}$$

Fentieket felhaszálva számítsuk ki az alapfüggvényünkből az x -tengely körül megforgatott forgástestünk térfogatát, vagyis

$$\frac{1}{x} \implies V_{GH} = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{b \to \infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx =$$

$$\lim_{b \to \infty} \pi \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \pi$$

Most nézzük a testünk felszínét. A (2.4) -es egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$2\pi \int_1^b \frac{1}{x} \sqrt{1 + x^{-4}} dx$$

A gyökjel alatti kifejezést vizsgáljuk meg. Mivel jelenleg $x \in [1, \infty)$, ezért nyilván $x^{-4} > 0$. Ahhoz, hogy a felszínre kapjunk egy értéket felhasználjuk a **4. Tételt**, tehát keresünk egy olyan függvényt, amely kissebb egyenlő, mint a mi függvényünk, de emellett divergens is. Egy ilyen függvény a **6. Tétel** szerint

$$2\pi \int_1^b \frac{1}{x} \sqrt{1} dx.$$

Ennek eredménye $2\pi \cdot \ln(b)$, amely $\lim_{b \to \infty}$ esetén ∞.

Tehát azt az különös eredményt kaptuk, hogy míg a testünk felszíne végtelen, addig ezt a végtelen felületű testet egy véges mennyiségű festékkel, π -vel, mégis be tudjuk belülről „festeni" úgy, hogy beleöntjük a festéket, és az a belső oldalára tapadva bemázolja. Mi lehet az intuitív magyarázat minderre? Két dolgot kell figyelembe vennünk: egyrészt a valóságban nincs olyan objektum, amelynek nincs vastagsága, de mégis be lehetne festeni, másrészt viszont a festéknek magának van minimális vastagsága, ami az atom átmérője (10^{-10} m), így lesz egy olyan távoli pont az x-tengely mentén haladva, ahol olyan kicsi lesz a harsona átmérője, hogy ezt a szűk rést a festék „betömíti".

3.3. A Pszeudoszféra

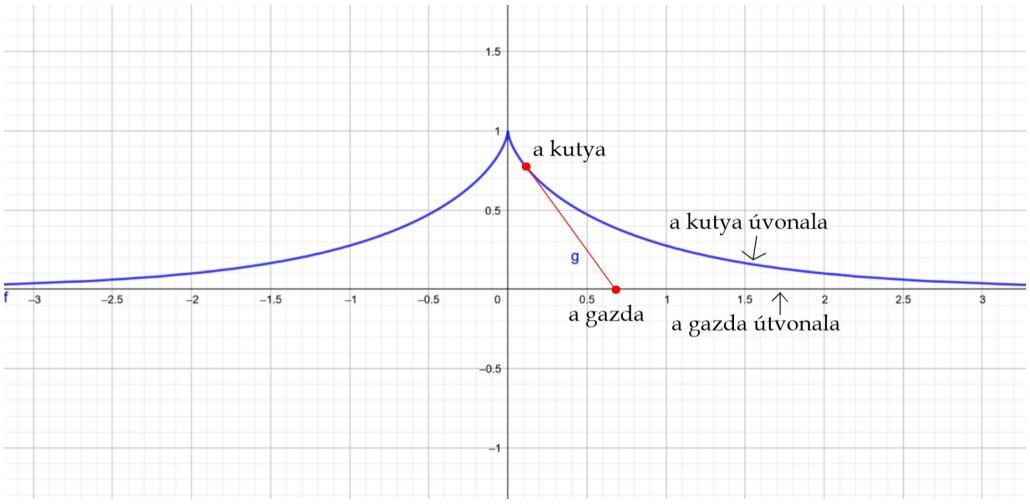
A következő példánkban segítségemre volt a *Szolcsányi Endre - Defferenciálgeometria és Vektoranalízis* [5] című jegyzet. Ebben a részben egy olyan felülettel foglalkozunk, mely egy specális görbe megforgatásával keletkezik, és mellyel legelőször *Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)* foglalkozott. Az alapfeladat a következőképp volt megfogalmazva: Mi az útvonala egy objektumnak, amely egy párhuzamos állásból indul, miközben egy állandó hosszúságú fonallal van rögzítve, és egy egyenes, horizontális vonalon húzzuk végig? Szemléletesen úgy képzelhetjük el, hogy az objektumnak egy kutyát, az állandó hosszúságú fonalnak a pórázát, míg a horizontális vonalnak a kutya gazdájának útvonalát képzeljük el. Az így kapott görbét ezért is nevezik németül *hundkurve*, azaz *"kutyagörbének"*. A görbe precízebben megfogalmazva:

4. Definíció. Az olyan síkgörbét, amelynek minden pontjában van érintője, és ez az érintő mindig metsz egy, a görbe síkjában lévő e egyenest, és továbbá az érintőnek az érintési pont és az e-vel való metszéspont közötti szakasza állandó a hosszúságú, *tractrix*-nak, vagy *vontatási görbének* nevezzük. Az e egyenes a tractrix tengelye.

A tractrix egyenlete Descartes koordinátákkal megadva:

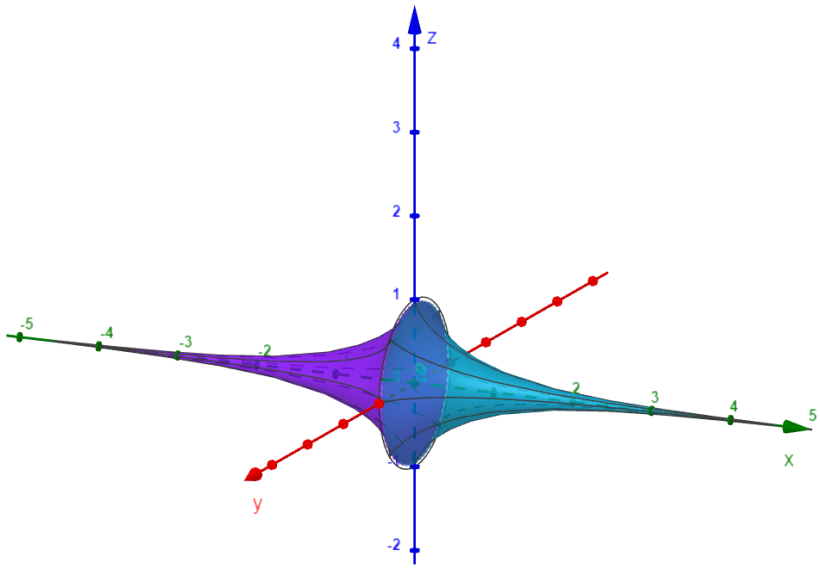
$$x = a \cdot \ln\left(\frac{1+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2-y^2},$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ paramétert szokás *pszeudorádiusznak* is nevezni.



3.2. ábra. A tractrix görbéje

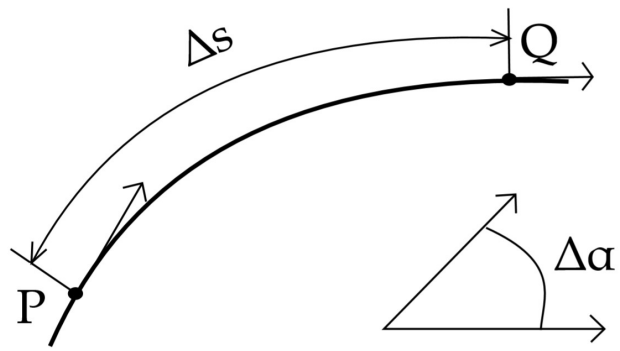
A tractrix x-tengely körüli megforgatottja adja meg a *pszeudoszféra* alakzatát.



3.3. ábra. A pszeudoszféra alakzata

A pszeudoszféra egy olyan alakzat, melynek görbülete negatív. A görbület jelentését nem nehéz meggondolni: egyszerűen annyit jelent, hogy a felület egy része mennyire tér el attól, hogy "lapos" legyen. Ez alapján a görbület lehet pozitív, negatív, vagy nulla. Ha mindezt úgy képzeljük el, hogy a felület felszínén állva vizsgálódunk, akkor például egy nagy gömbön állva a felület minden irányban távolodva elgörbül a felület. Ezt pozitív görbületnek nevezzük. Ha azonban egy nyeregfelületen vagyunk, akkor ahol a lábaink helyezkednek el a pozitív görbületű, amelyik azonban előttünk, és mögöttünk van, az a mi irányunkba görbül, és ezért negatív görbületű. A zéró görbületű felület egy sík.

5. Definíció. Legyen a térgörbe P, Q pontjaiban vett érintők hajlásszöge $\Delta\alpha$, a $\overline{PQ}$ ív hossza $\overline{PQ} = \Delta s$. A $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ számot a $\overline{PQ}$ ív *átlaggörbületének* nevezzük. a $K = \lim_{Q\to P} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ határértéket a térgörbe P pontbeli *görbületének* nevezzük, feltéve, hogy ez a határérték mindig létezik.



3.4. ábra. A görbület definíciója

Ez a három típusú görbület a kétdimenziós geometria három alaptípusával van összefüggésben: a pozitív görbület a gömbivel, a zéró görbületű a hagyományos Euklideszivel, míg a negatív görbületű a hiperbolikussal, melynek jelentős tanulmányozása *Bolyai János* (*1802-1860*) nevéhez fűződik.

A görbületet testek felszínére kicsit másképp kell elképzelni. Ha fogunk egy sima papírlapot, és finoman behajlítjuk, akkor mindig csakis egyféle irányba görbül. Bármely pillanatban tudunk találni a papíron legalább egy olyan irányt, amely mentén létezik egy egyenes vonal. Vagyis hajlíthatunk belőle hengert, kúpot, de olyan alakzatra sohasem tudjuk formálni, hogy a gömbfelület egy darabkájára hasonlítson anélkül, hogy valamilyen torzítást, gyűrést, ne végeznénk el menet közben a papíron.

Ha veszünk egy gömbfelületet, akkor azt nem tudjuk úgy kisimítani, hogy valamelyest ne torzítanánk rajta. Gondoljunk csak a térképekre - egy gömfelület síkba terített megjelenítése csakis torzításokkal lehetséges. Hasonlóképp egy narancsnak a héját sem lehet úgy „kilapítani", hogy közben ne roncsolnánk össze. Kis héjdarabkára persze ez a torzolás is kicsi.

Aszerint teszünk tehát különbséget a felszínek görbületei között, hogy egy síkba rajzolható, ε sugarú kör területe, és az adott felszínre rajzolt kör (tehát egy olyan zárt görbe, amely a felszínen adott ponttól ε távolságra van) területe mennyiben tér el egymástól, s ez alapján pozitív, illetve negatív, ún. *Gauss-görbületű* a felszín. Ennek kiszámítására használható az alábbi formula

$$K = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 12 \frac{\pi\varepsilon^2 - A(\varepsilon)}{\pi\varepsilon^4}$$

Lényeges különbség, hogy míg egy térgörbe görbülete *extrinsic* (külsődleges, külső hatások által befolyásolható), addig a Gauss-görbület *intrinsic* (belsődleges, lényegi természetét megtartó) tulajdonságú, azaz mindegy hogyan hajlítgatjuk a felszínt, amíg nem végzünk rajta eltorzítást, nyújtást, vagy összenyomást görbületét megtartja.

Maga a *pszeudoszféra* elnevezés onnan ered, hogy egy rendkívül fontos tulajdonságban megegyezik a *gömb*-bel: a görbülete állandó. Ugyanígy a pszeudoszféra, kivéve a közepénél lévő éles gyűrűt, állandó negatív görbületű. Emiatt adódik, hogy a pszeudoszféra a hiperbolikus geometria egy ideális alapkörnyezetét szolgálja, ahogyan a gömb szolgálja a gömbi geometria alapját. Egy háromszög belső szögeinek összege így a gömbi koordinátarendszerben 180°-nál nagyobb, Euklidesziben 180°, míg hiperbolikus rendszerben 180°-nál kisebb lesz.

Érdekesség még, hogy a pszeudoszféra felszínének nagysága megegyezik a gömbével, azonban térfogata éppen a fele, azaz

$$A_{PS}(a) = 4\pi a^2$$

$$V_{PS}(a) = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

3.4. Improprius integrál polárkoordináták esetén

Mint azt már láthattuk, egy integrálnak a határai nem feltétlenül korlátosak, de limesz segítségével konvergenciát vagyunk képesek megállapítani. A továbbiakban felhasználjuk a **3. Tételt**, hogy kiszámoljuk az alábbi integrált:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \tag{3.1}$$

Ahhoz, hogy ezt kiszámolhassuk, némiképp át kell alakítanunk az egyenletet. Ezt úgy tesszük meg, hogy hozzáveszünk még egy változót. Ezt megtehetjük, mivel nem számít, hogy egy változót minek nevezünk el, egymástól ezek ugyanúgy függetlenek lesznek. Gondoljunk példának okért arra, hogy pl.

$$\int f(x)dx = \int f(y)dy.$$

Ezzel a gondolatmenettel folytatva az integrálunk az alábbi alakot fogja ölteni:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy \tag{3.2}$$

Ezzel számolunk tovább, azaz a **2. Tételből** következően

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy = \int_0^\infty e^{-x^2} \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) dx =$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Vagyis megkaptuk az eredeti integrálunk négyzetét. Innen áttérünk polárkoordinátákra. Transzformáció után az alábbi integrált kapjuk:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta$$

Ezzel továbbhaladva kapjuk, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty e^{-r^2} r dr \right) d\theta = \int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\theta \right) dr =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2} \left(\frac{-e^{-0}}{2} + \frac{e^{-\infty}}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Végeredményül tehát $\frac{\pi}{4}$ -et kaptunk, de ez az érték az eredeti integrálunk négyzete, vagyis a gyökvonás utáni eredményünk

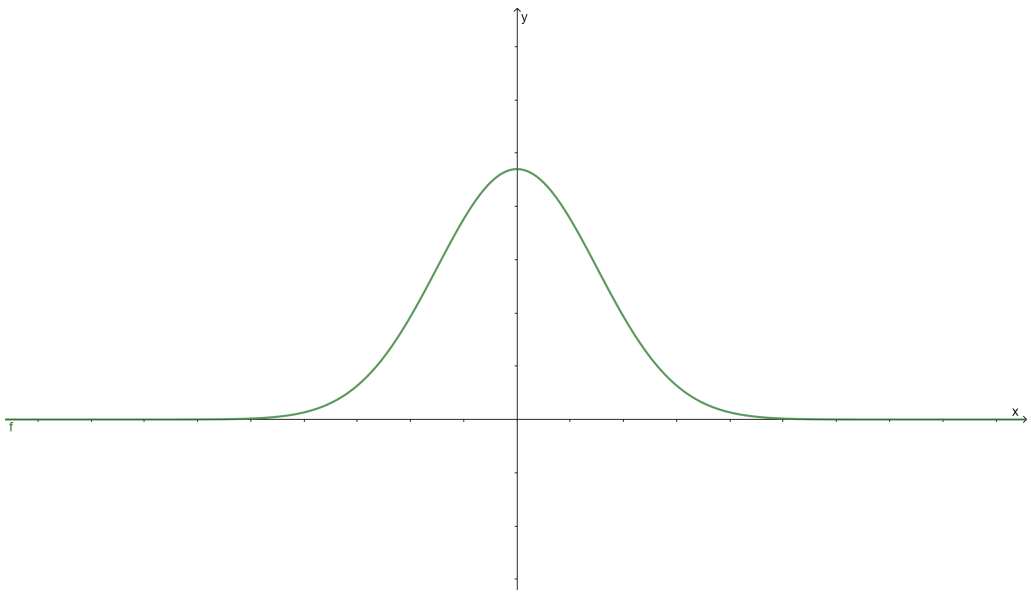
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{3.3}$$

3.5. A normális eloszlás

Egy másik számolás útján is eljuthatunk (3.3) -as eredményünkhöz. Ismeretes a normális eloszlás képlete:

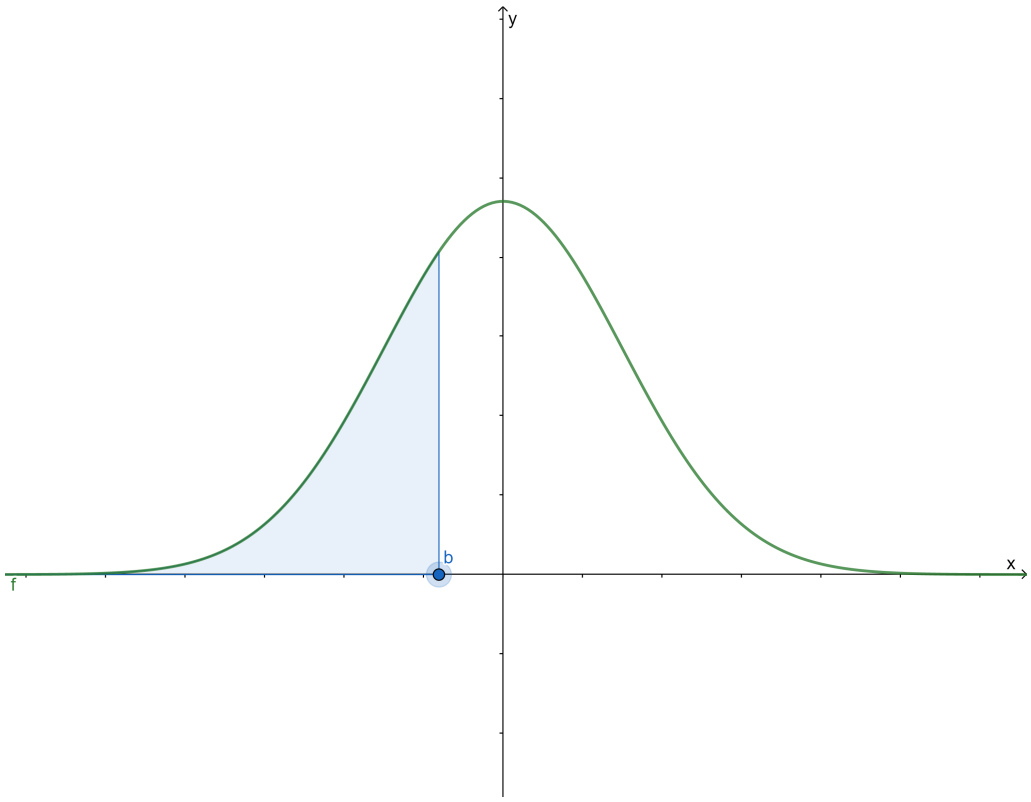
$$N(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = 1,$$

ahol x egy normális valószínűségi változó. A függvény grafikonját két érték befolyásolja: az átlag (μ) és a szórás (σ). Az eloszlás átlaga határozza meg, hogy hol lesz a függvény centruma, a szórás pedig meghatározza, hogy milyen magas és széles lesz az ábra (lásd *Interaktív GeoGebra ábra* [11]). A normális eloszlás képe minden esetben egy szimmetrikus haranggörbe formáját veszi fel, ahol az x-tengely a függvény aszimptotája.



3.5. ábra. A normális eloszlás sűrűségfüggvényének grafikonja

A normális eloszlás egy valószínűségi eloszlás, és emiatt a görbe alatti terület értéke a μ, σ paraméterek tetszőleges változtatása esetén is mindig 1-gyel lesz egyenlő, hiszen egy esemény bekövetkezésének valószínűsége mindig maximum 1 lehet. Annak a valószínűsége, hogy az x változó nagyobb, mint b megegyezik a görbe alatti, $(-\infty, b]$ intervallum által határolt területtel.



3.6. ábra. Valószínűség a $(-\infty, b]$ intervallumon

Legyen most $\mu = 0$ és $\sigma = 1$, tehát az átlag 0, és a szórás 1. Így kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 1.$$

A következő lépéshez szükségünk lesz egy tételre, amelyet *integráltranszformációs formulának* neveznek.

7. Tétel. Tegyük fel, hogy a g függvény differenciálható az I intervallumon, f értelmezve van a $J = g(I)$ intervallumon, és f-nek van primitív függvénye J-n. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye I-n, és

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = F(g(t)) + c,$$

ahol $\int f dx = F(x) + c$.

Legyen

$$x = \sqrt{2}u$$
$$dx = \sqrt{2}du$$

Amit az integrálunkba beírva kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} du = 1.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

adódik.

Mivel a normális eloszlás egy páros függvény, jelenleg [0,0] centrummal, ezért

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{3.4}$$

4. fejezet

A Gamma függvény

„Madam, I have just come from a country where people are hanged if they talk."

- Leonhard Euler, *Remarkable Mathematicians - From Euler to Von Neumann*

4.1. Történelmi háttér

A gamma függvény születése 1729 környékére datálható két ikonikusnak számító elme levelezései nyomán. Egyikük az akkor épp Szentpétervároon élő, svájci matematikus, *Leonhard Euler (1707 - 1783)*, míg másikuk az akkor Moszkvában élő német matematikus, a méltán híres, máig megoldatlan *Goldbach-sejtés* atyja, *Christian Goldbach (1690-1764)* volt.

Érdekes tény, hogy bár mindkettejük anyanyelve a német volt, levelezésük latin nyelven folyt. Könnyen lehet, hogy a XVIII. században egy elfogadott séma volt a tudományos levelezésben a latin nyelv, hiszen a formális matematikai kifejezések csak jóval később alakultak ki.

A gamma függvény többféle matematikai irányzat vegyítésének eredményeképp született. Egyik ilyen volt az interpolációelmélet, mely leginkább a XVII. századi angol matematikusok eredményeire támaszkodott, míg egy másik az integrálkalkulus és azon belül is a határozatlan integrálokkal foglalkozó ág volt.

Egy bizonyos, látszólag egyszerű problémával indult a történet, amely megfordult többek között Goldbach-nál, *Daniel Bernoulli (1700 - 1782)* -nál, valamint *James Stirling (1692 - 1770)* -nél is, míg végül Eulerhez is eljutott. Euler eredményét két levélben osztotta meg Goldbach-hal, mellyel tulajdonképpen egy olyan kiterjedt levelezés indult el kettejük között, amely Goldbach haláláig tartott.

Az egyik legegyszerűbb sorozat egész számokra az $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, + \cdots + n$, melyre egy ismert összegző formula az $\sum_n = (\frac{1}{2}n(n+1)$. A formulának nyilván van egy előnyös tulajdonsága, miszerint egy végtelen hosszú összeadást leegyszerűsít három rögzített műveletre: egy összeadásra, egy szorzásra, illetve egy osztásra. Egyrészt nyilván praktikusabb például az első 100 egész szám összegét ily módon kiszámolni, másrészt választ kaphatunk így arra is, hogy például hogyan néz ki az első $7\frac{1}{2}$ szám összege, ami jelen esetben $\sum_{7\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(7\frac{1}{2})(7\frac{1}{2}+1) = 37,875$. Eképp a formula kibővíti az eredeti probléma értékkészletét olyan elemekre is, melyek eredetileg nem képezték a részét a feladatnak.

Eljuthatunk egy lényegesen nehezebb feladathoz, ha az összeadásjelet szorzásra cseréljük, vagyis $1, 1{\cdot}2, 1{\cdot}2{\cdot}3, 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4, \cdots, {\cdot}n$, ami persze nem más, mint a faktoriális funkció, azaz $n!$. Mivel a faktoriálisok mindenhol jelen vannak a matematikában (leginkább a kombinatorika és valószínűségszámítás területén), könnyen adódik a kérdés: van-e olyan függvény, mely meg tudja határozni (egyszerű eszközökkel) az első n szám szorzatát? Ebben az esetben vajon milyen értéket kapunk $7\frac{1}{2}!$ esetén?

Ennek az interpolációs problémának a felvetése vezetett a gamma függvény megszületéséhez, hiszen ez összefüggésben áll az előzővel, ugyanis ha van egy formulánk egy adott problémára, akkor a lehetőség ugyanúgy fennáll, hogy közbülső elemeket rakjunk az értékek közé. Azonban nem létezik olyan egyszerű formula, mint $\sum_n$ esetén adódott, ugyanis a probléma ebben az esetben túlmutat az egyszerű algebrai függvények határain.

Az interpolációs feladat persze mai szemmel nézve annyit jelentene, hogy egyszerűen állítsunk egy függvényt azokra a pontokra, melyek áthaladnak az $(1,1), (2,2)$, $(3,6)$, $(4,24)$, satöbbi pontokon, vagyis a faktoriális $(n, n!)$ értékein. Egy ilyen függvény felrajzolása persze nem jelentene akadályt, végtelen sokféleképp lehetne mindezt megtenni görbék rajzolásával. Viszont nem ez volt Euler eredeti elképzelése. Számára egy analitikus kifejezés, egy *expressio analytica* megtalálása volt a fő feladat, mely, ha képes megalkotni, lehetőséget nyújthat arra, hogy pozitív egész számokra a faktoriális értékeit adja meg, de mindemellett értelmes kifejést adhat attól eltérő változókra is.

Végülis Euler kísérletezgetése a végtelen szorzatokkal a következő összefüggést eredményezte:

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\cdots = n!.$$

A tudós megfigyelte, hogy némi átalakítással $n = \frac{1}{2}$ esetén a baloldalból *John Wallis (1616 - 1703)* egy híres egyenlete adódik:

$$\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\left(\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\right)\cdots = \frac{\pi}{2}$$

Bár a feladat látszólag megoldódott, Euler ennél továbbment: azt tapasztalta, hogy a képlete egész n-ekre egész egész eredményeket, míg $n = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\cdots$, stb.-re olyan értéket ad, mely valahogyan kapcsolatban áll π-vel. A konstant megjelenése nem lehetett véletlen, és a megfigyelés arra késztette, hogy egyenletét áttranszformálja integrállá.

Az itt következő számítások Euler saját tollából valók, és szakmai szemmel nézve nem feltétlenül tűnnek konvencionálisnak, de a matematikus méltán volt híres egyedi megoldásairól, és zsenialitása kétségtelenül eltér a megszokottól.

Kezdetben vett egy olyan integrált, mellyel korábban már foglalkozott Wallis, *Isaac Newton (1642 - 1726/27)*, valamint Stirling is:

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx.$$

Az egyenletet először a binomiális tétel szerint kifejtette $(1-x)^n$ szerint:

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx = \frac{1\cdot 2\cdots n}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n+1)},$$

ahol $n \in \mathbb{Z}, e$ pedig egy mesterséges változó.

Itt már megjelenik az első n szám szorzata, vagyis $n!$, amit szeretett volna izolálni az egyenletből. Behelyettesített e helyére f/g-t, majd $f = 1$-et, valamint $g = 0$-át beírva a képletbe kapta, hogy

$$\int \frac{x^{1/0} dx (1-x)^n}{0^{n+1}}.$$

Ezután már ennek a kifejezésnek a megoldására fókuszált. Először helyettesítette x -et $x^{g/(f+g)}$ -vel, majd a kapott eredményre ismét használta az $f = 1$, illetve $g = 0$-át, mely végül eredményezte az

$$\int \frac{(1-x^0)^n}{0^n} dx$$

alakot. Ezután *L'Hopital*-szabályt alkalmazott, majd újabb helyettesítés után, kapta, hogy

$$\frac{(1-x^0)^n}{0^n} = (\log x)^n,$$

melyből adódott, hogy

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n dx$$

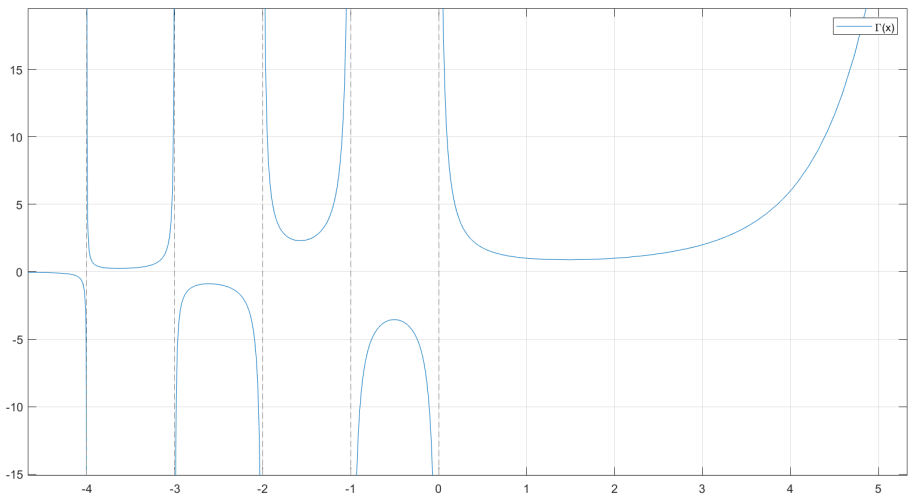
.

A Γ függvénnyel persze ma már valamelyest más formában találkozhatunk:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \tag{4.1}$$

Ahol $e = 2.71828\cdots$, vagyis a természetes logaritmus alapja, $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex szám és $\Re(z)>0$. A függvény mai alakját, ahogyan a görög Γ jelölést is, a francia matematikusnak, *Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833)*-nek köszönhejtük.

Bár a Γ függvény, mint definiálva volt, minden $z \in \mathbb{C}$ számra értelmezve van (beleértve a szinguláris pontjait nempozitív egészeknél) a továbbiakban csak az $n \in \mathbb{N}^+$-beli értékeivel fogunk foglalkozni.



4.1. ábra. A Γ függvény valós számokra

4.2. A Gamma függvény nevezetes tulajdonságai

A Γ függvény tehát egy folytonos kiterjesztést ad a faktoriális funkciónak a komplex számokra bezárólag. Pozitív egészekre könnyen meghatározhatjuk a függvényt:

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Azonban ahogy később látni fogjuk, a nehezebb feladatunk a nem egész, azon belül is az $\frac{n}{2}$ -ed alakú számok meghatározásával lesz. Egy nagyon fontos tulajdonsága a függvénynek, hogy analitikus.

6. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény *analitikus az x_0 pontban*, ha f akárhányszor differenciálható x_0-ban, és az x_0 ponthoz tartozó Taylor-sora előállítja f-et az x_0 pont egy környezetében. Így például az e^x, $\sin x$, $\cos x$, x, x függvények minden pontban analitikusak.

Ahhoz, hogy a továbbiakban a Γ függvény néhány nevezetes tulajdonságát beláthassuk, szükségünk lesz egy hasznos tételre.

8. Tétel. A parciális integrálás szabálya határozott integrálokra vonatkozólag. Tegyük fel, hogy az f és g függvények differenciálhatóak, f', g' pedig integrálhatóak $[a, b]$-ben. Ekkor

$$\int_a^b f'g\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b fg'dx.$$

4.2.1. Feladat Lássuk be, hogy $\Gamma(1) = 1$!
Behelyettesítve (4.1) -es képletbe:

$$\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^0 \cdot e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty =$$

$$-e^{-0} - (-e^{-\infty}) = 1$$

4.2.2. Feladat Mutassuk meg, hogy $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$!
Ismét behelyettesítve (4.1)-be:

$$\int_0^\infty x^{(n+1)-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx$$

Most alkalmazni fogjuk a **8.-as Tételt**, tehát parciális integrálást hajtunk végre. Ehhez kiválasztunk egy f' és egy g függvényt. Célszerű f'-nak e^{-x}-et kiválasztani, g-nek pedig az x^n-t. Vagyis legyen

$$f = -e^{-x}, f' = e^{-x}$$
$$g = x^n, g' = n \cdot x^{n-1}.$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \left[(-e^{-x}x^n)\right]_0^\infty - \int_0^\infty n \cdot x^{n-1}(-e^{-x})dx =$$

$$\left(-\frac{1}{e^{\infty}} \cdot \infty^n\right) - (-1 \cdot 0) + n \cdot \int_0^{\infty} (e^{-x})(x^{n-1})dx.$$

Az egyenlet baloldaláról látszik, hogy 0-át ad, hiszen $\frac{1}{e^{\infty}}$ exponenciálisan, tehát gyorsabban tart 0-ba, mint ∞^n. A jobboldal viszont pont megegyezik (4.1.) n-szeresével. □

4.2.3. Feladat Lássuk be, hogy $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$!

Behelyettesítve a képletbe kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx$$

Legyen

$$x = u^2$$

$$dx = 2udu$$

Az integrálunk így az alábbiak szerint alakul:

$$\int_0^{\infty} (u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-u^2} 2udu = \int_0^{\infty} u^{-1} e^{-u^2} 2udu = \int_0^{\infty} e^{-u^2} 2du = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} du,$$

amely integrál megegyezik (3.4) kétszeresével. □

4.2.4. Feladat Lássuk be, hogy $\Gamma(n) = (n-1)!$

Először is helyettesítsünk be $\Gamma(n)$-be:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Alkalmazzuk ismét a parciális integrálás tételét:

$$f = -e^{-x}, f' = e^{-x}$$

$$g = x^{n-1}, g' = (n-1)x^{n-2},$$

azaz

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \left[(-e^{-x} \cdot x^{n-1}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x}(n-1)x^{n-2} dx =$$

$$(-e^{-\infty} \cdot \infty^{n-1}) - (-e^{-0} \cdot 0) + \int_0^{\infty} e^{-x}(n-1)x^{n-2} dx$$

Amint látszik, a baloldal 0-val egyenlő, tehát a jobboldallal kell csak továbbszámolnunk. Ismét parciális integrálást hajtunk végre:

$$f = -e^{-x}, f' = e^{-x}$$

$$g = (n-1)x^{n-2}, g' = (n-2)(n-1)x^{n-3}$$

Tehát:

$$\int_0^\infty e^{-x}(n-1)x^{n-2}dx = \left[(-e^{-x}(n-1)x^{n-2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\cdot(n-1)(n-2)x^{n-3}dx =$$

$$\left[(e-^\infty \cdot(n-1)\infty^{n-2} - (-e^{-0}\cdot(n-1)0^{n-2})\right] + \int_0^\infty e^{-x}\cdot(n-1)(n-2)x^{n-3}dx$$

Az egyenlet baloldala ismét 0-val lesz egyenlő, tehát a jobboldallal számolunk tovább.

Hasonlóan értelmezzük most is a parciális integrálokat, azaz:

$$f = -e^{-x}, f' = e^{-x}$$

$$g = (n-1)x^{n-2}, g' = (n-3)(n-2)(n-1)x^{n-4}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cdot(n-1)(n-2)x^{n-3}dx = \left[(-e^{-x}(n-1)(n-2)x^{n-3}\right]_0^\infty +$$

$$+\int_0^\infty e^{-x}\cdot(n-3)(n-2)(n-1)x^{n-4}dx$$

Az egyenlet baloldala ebben az esetben is 0-t eredményez, mivel az exponenciális tag minden esetben gyorsabban tart 0-ba. Írjuk fel egy általános tagját ennek a számolásnak valamelyik i. lépésnél, $(i > k)$:

$$\int_0^\infty e^{-x}(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-i)(n-(i-1))(n-(i-2)\cdots$$

$$\cdots(n-(i-k))x^{n-i-k-1}dx$$

Végül az utolsó parciális integrálás után az alábbi alakot fogjuk kapni:

$$\int_0^\infty e^{-x}(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-i)(n-(i-1))(n-(i-2)\cdots$$

$$(n-(i-k))(n-(i-k-1))(n-(i-k-2))\cdots(3)(2)(1)x^0dx$$

Az egyenletben megjelenik az $(n-1)!$ kifejezés, ez kihozható az integrálunk elé, vagyis:

$$(n-1)!\int_0^\infty e^{-x}x^0dx$$

Az integrál értéke pedig

$$\int_0^\infty e^{-x}\cdot 1dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1,$$

amivel beláttuk eredeti állításunkat. □

5. fejezet

Az n-dimenziós Gömb térfogata

„Of course it is happening inside your head Harry, but why on earth should that mean that it is not real?"

- J.K. Rowling, *Harry Potter and the Deathly Hallows*

5.1. Az általános képlet bizonyítása

Ebben a fejezetben az összes eddig megvizsgált tételt, definíciót és képletet felhasználva adunk egy általános képletet az n-dimenziós gömb térfogatára vonatkozólag.

5.1.1. Feladat Adjunk általános képletet n-dimenziós gömb térfogatára vonatkozólag!

Elkezdjük ezzel a már ismert képlettel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

majd a korábban látottakhoz hasonlóan kezeljük a változókat, tehát

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} dx_1 dx_2 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2.$$

Így kaptunk egy könnyebben kiszámolható egyenletet, mint amilyen az eredeti integrál volt.

Ezután átváltunk polárba:

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2$$

$$x_1 = r\sin\theta$$

$$x_2 = r\cos\theta$$

$$dx_1 dx_2 = r dr d\theta.$$

$$\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta$$

Itt kicsit átírjuk, majd helyettesítünk

$$\int_{r^2=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2}\frac{1}{2}dr^2 d\theta$$

$$\int_{u=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-u}\frac{1}{2}dud\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-u}du = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot \left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = \pi$$

Ez persze hasonló a már korábban kiszámolt $\sqrt{\pi}$ -hez - pont a négyzete.

Legyen most

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^3 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2}dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2}dx_2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_3^2}dx_3\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2}dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2}dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_3^2}dx_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}dx_1dx_2dx_3$$

Ezután átváltunk gömbi koordinátákra, tehát legyen

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = r^2,$$

valamint

$$dx_1dx_2dx_3 = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Utóbbit hozzuk $r^2 dr d\Omega_2$ alakra, ahol $d\Omega_2$ -vel jelöljük a szögváltozókat, aminek indexe a változók számát jelöli, jelen esetben ez 2, hiszen 3D-ban vagyunk. Mindezt azért tesszük, mert szeretnénk különválasztani a sugárváltozót a szögváltozóktól, hogy tisztábban láthassuk, mi történik.

Tehát az eredeti integrálunk polárkoordinátás alakban

$$\int\int\int e^{-r^2}r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi = \int e^{-r^2}r^2 dr \int d\Omega_2$$

Az egyenlet baloldalán szereplő integrál értéke:

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2}r^2 dr = \int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\cdot r dr$$

Legyen most

$$f = \frac{1}{2}e^{-r^2}\cdot r, f' = e^{-r^2}\cdot r$$

$$g = r, g' = 1$$

$$\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\cdot r\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\cdot 1dr$$

Az integrál baloldali a korábban látottakhoz hasonlóan ismét 0-t eredményez, így csak a jobboldallal számolunk tovább, azaz

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{r^2}dr = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{r^2}dr,$$

amely integrál értéke (3.3) valamint (3.4) alapján

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Míg a jobboldali integrál értéke:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}[-\cos(\theta)]_0^{\pi}\,d\varphi = \int_0^{2\pi}[-\cos(\pi)-(-\cos(0))]\,d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}2d\varphi = [2\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$$

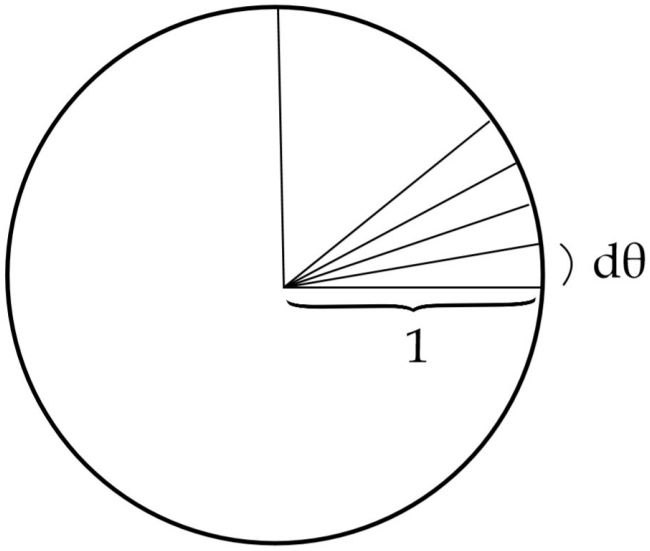
A két integrál szorzata $(\sqrt{\pi})^3$, ami evidens, hiszen éppen abból indultunk ki, hogy az eredeti függvényünknek vettük a köbét, melynek értéke $\sqrt{\pi}$ volt.

Térjünk tehát most át n-dimenzióra.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^n = \left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_1^2}dx_1\right)\dots\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_n^2}dx_n\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(x_1^2+\dots+x_n^2)}dx_1\dots dx_n$$

Majd váltsunk n-dimenziós hipergömb-koordinátákra. Hasonlóan gondolkodunk, ahogyan azt tettük a **2. Fejezet** -ben, amikor a gömb térfogatát tárgyaltuk. De előtte kicsit foglalkozzunk most azzal, hogy $d\Omega_n$ mit is reprezentál. 2D-s esetben, amikor $\int d\Omega_1$-ről, azaz $\int_0^{2\pi}d\theta$ beszélünk, akkor tulajdonképpen egy körvonalon megyünk végig, és a kis darabkákat adogatjuk össze rajta.



5.1. ábra. A körvonal infinitezimális elemei

Ezeknek az összege megadja ennek a körnek a kerületét, ami nekünk most annyit jelent, minthogy ez egy *2-gömb*-nek a felülete. 3D-s esetre az $\int d\Omega_2 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\ pi}\sin\theta d\varphi d\theta$ a 2.10. -es ábrához hasonlóan most egy infinitezimális felületelemet ad meg, melynek összege kiadja a *3-gömb*, vagyis a *gömb* teljes felületét.

Tehát

$$(x_1^2+\dots+x_n^2) = r^2,$$

$$dx_1 dx_2 \dots dx_n = r^{n-1} dr d\Omega_{n-1},$$

ahol $d\Omega$ indexe nyilván $n-1$, mivel csak 1 változónk van a sugárra, viszont $n-1$ a szögekre.

Így kapjuk tehát az alábbi kifejezést:

$$\int \cdots \int e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \int e^{-r^2} r^{n-1} dr \int d\Omega_{n-1},$$

ahol $\int d\Omega_{n-1}$ nem más, mint az *n-gömb* felülete, amit nevezzünk el S_n-nek.

Az integrálunk első felét szeretnénk r^2-es alakra hozni, majd egy u-val való helyettesítést végrehajtani, ahhoz hasonlóan, ahogyan azt már korábban is láttuk. Ehhez kicsit alakítunk a képleten.

$$\int e^{-r^2} r^{n-1} dr = \int e^{-r^2} r^{n-2} \frac{1}{2} 2r dr$$

az $\frac{1}{2}$ -es szorzót kihozzuk az integrál elé, az r^{n-2} -t pedig átírjuk $(r^2)^{\frac{1}{2}(n-2)}$ alakra. Ezután helyettesítunk:

$$u = r^2$$

$$du = 2r dr.$$

Az így kapott integrálunk tehát az alábbi alakot veszi fel

$$\frac{1}{2} \int e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du,$$

ami nem más, mint

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

Így a két integrálunk szorzat alakban felírható, mint

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) S_n,$$

ami megegyezik a kezdeti integrálunk n-edik hatványával, azaz

$$\int \cdots \int e^{(-x_1^2+\dots+x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \left(\int e^{-x^2} dx \right)^n.$$

Így ennek értéke

$$\left(\sqrt{\pi}\right)^n.$$

Ebből következik az N-gömb felületének általános formulája:

$$S_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Ahogyan azt (2.1) - nél láthattuk, innen integrálással eljuthatunk ugyanennek a gömbnek a térfogatához, és mivel S_n független r től, ezért kijön az integrálunk elé:

$$V_n(r) = \int S_n(r) dr = S_n \int r^{n-1} dr = S_n \frac{r^n}{n}.$$

Egységsugarú gömbre, azaz $r = 1$-gyel számolva:

$$V_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Ami, felhasználva a 4.2.2. feladat eredményét a következő, végső alakra hozható:

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{5.1}$$

5.2. Hogyan változik a térfogat klönböző n-ekre

Először ellenőrizzük le, hogy 2-illetve 3D-s esetre jó-e a kapott eredményünk, vagyis megkapjuk-e az ismert térfogatképleteket körre és gömbre. Helyettesítsünk be (5.1)-be.

$n = 2$ -re:

$$\frac{\pi^{\frac{2}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{2}+1)} = \frac{\pi}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{(n-1)!} = \frac{\pi}{1} = \pi$$

ami r=1 esetén valóban a kör területét adja meg.

$n = 3$ -ra:

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}$$

Nézzük a nevezőt:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

Válasszuk le a $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ tagot.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Tehát így

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

Vagyis $n = 3$-ra kapjuk, hogy

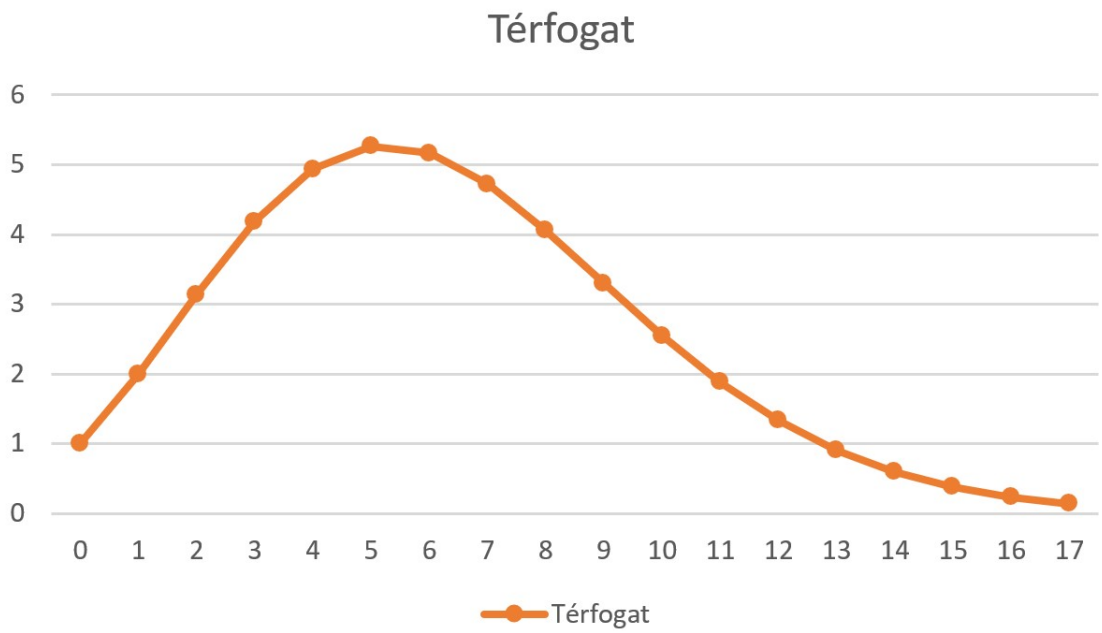
$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{4\pi}{3},$$

ami $R = 1$ esetén épp a gömb térfogatát adja meg.

A további dimenziókra az alábbi táblázat tartalmazza az értékeket.

n	$V_n(R)$	$V_n(1)$
0	$1R$	1
1	$2R$	2
2	πR^2	3.141592654
3	$\frac{4\pi R^3}{3}$	4.188790205
4	$\frac{\pi^2 R^4}{2}$	4.934802201
5	$\frac{8\pi^2 R^5}{15}$	5.263789014
6	$\frac{\pi^3 R^6}{6}$	5.16771278
7	$\frac{16\pi^3 R^7}{105}$	4.72476597
8	$\frac{\pi^4 R^8}{24}$	4.058712126
9	$\frac{32\pi^4 R^9}{945}$	3.298508903
10	$\frac{\pi^5 R^{10}}{120}$	2.55016404
11	$\frac{64\pi^5 R^{11}}{10395}$	1.884103879
12	$\frac{\pi^6 R^{12}}{720}$	1.335262769
13	$\frac{128\pi^6 R^{13}}{135135}$	0.910628755
14	$\frac{\pi^7 R^{14}}{5040}$	0.599264529
15	$\frac{256\pi^7 R^{15}}{2027025}$	0.381443281
16	$\frac{\pi^8 R^{16}}{40320}$	0.23533063
l7	$\frac{512\pi^8 R^{17}}{34459425}$	0.140981107

Mint az látható, ahogyan növekedik a dimenzió, úgy a térfogat eleinte szintén növekedést mutat, de néhány érték után radikálisan lecsökken.



5.2. ábra. R-sugarú gömb térfogatának változás n-dimenzió változása esetén

Az ábrán az látszik, hogy $n = 5$-nél éri el a maximumot, majd csökkenni kezd. A képletünkből ez persze rögtön következik, hiszen a Γ-függvény a nevezőben van, és nagy n-nekre a faktoriálisok nagyon gyorsan „felrobbannak", így az értéket hamar 0-a viszi be. Vagyis az az érdekes eredmény következik mindebből, hogy $n \to \infty$ esetén $V_n(R) = 0$.

Mi lehet az intuitív magyarázat? Gondoljunk arra, hogy ha egy $R = 1$ sugarú n-gömb felületén szeretnénk tartózkodni, akkor fenn kell, hogy álljon az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ összefüggés. De ez nagy n-re azt eredményezi, hogy az x_i-knek javarészt nagyon közel kell lenniük 0-hoz. Ha vesszük az $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ egyenest, akkor ez a gömb hélyát a $\pm(\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}})$ pontokon döfi. Azonban a hipergömböt magába foglaló, 1 oldalhosszúságú hiperkocka sarkai a $\pm(1, \cdots, 1)$ pontokban helyezkednek el, $\sqrt{n}$ távolságra az origotól. Éppen ezért a hipergömb egyre kevésbé fogja kitölteni azt a hiperkockát, ami azt körülzárja.

Ábrák jegyzéke

2.1. Térfogat meghatározása közelítő oszlopok térfogatával 3
2.2. A térfogatközelítő oszlopok finomítása 4
2.3. R sugarú gömb lefestése d vastagságban 4
2.4. Az S test x pontban vett síkmetszete 5
2.5. A Gömb és síkmetszete 6
2.6. Egy függvény erintője adott a pontban, és ennek d távolságra lévő eltoltja 7
2.7. Az $\sqrt{1-x^2}$ és annak x-tengely körüli megforgatottja 8
2.8. A polárkoordináta meghatározása kezdeti O centrummal és θ szöggel 10
2.9. Gömbi koordináták 10
2.10. A félgömb paraméterezése 11
2.11. A gömb egy térfogateleme 12
2.12. R változása a középponttól 12
2.13. φ változása 13
2.14. θ változása 13

3.1. Az $\frac{1}{x}$ és annak x-tengely körüli megforgatottja 16
3.2. A tractrix görbéje 18
3.3. A pszeudoszféra alakzata 19
3.4. A görbület definíciója 20
3.5. A normális eloszlás sűrűségfüggvényének grafikonja 22
3.6. Valószínűség a $(-\infty, b]$ intervallumon 23

4.1. A Γ függvény valós számokra 27

5.1. A körvonal infinitezimális elemei 33
5.2. R-sugarú gömb térfogatának változás n-dimenzió változása esetén . . 36

Irodalomjegyzék

[1] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano
Thomas' Calculus, 11th Edition
ISBN 10: 0321185587 ISBN 13: 9780321185587
Addison Wesley - 2004

[2] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera
Analízis II.
ISBN: 978-963-19-6084-6
Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest, 2007

[3] Hajós György
Bevezetés a Geometriába
ISBN: 963-19-0116-5
Nemzeti Tankönykiadó Rt, Budapest, 1999

[4] Fehér László
Felszín származtatása térfogatból - előadásjegyzet

[5] Szolcsányi Endre
Defferenciálgeometria és Vektoranalízis
Tankönyvkiadó, Budapest, 1973

* * *

[6] *n-sphere*
`https://en.wikipedia.org/wiki/N-sphere`

[7] *Volume of an n-ball*
`https://en.wikipedia.org/wiki/Volume_of_an_n-ball`

[8] *Volume of a Hypersphere - C.E. Mungan, Spring 2010*
`https://www.usna.edu/Users/physics/mungan/_files/documents/Scholarship/HypersphereVolume.pdf`

[9] *Correspondence entre Léonhard Euler et Chr. Goldberg 1729-1763*
`http://eulerarchive.maa.org//correspondence/fuss/goldbach1-59`

[10] *Philip J. Davis - Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function: In Memoriam: Milton Abramowitz, The American Mathematical Monthly, Vol. 66, No. 10 (Dec., 1959), pp. 849-869*
http://www.jstor.org/stable/2309786

[11] *Interaktív GeoGebra ábra - Normális eloszlás sűrűségfüggvénye μ és σ változása esetén*
https://www.geogebra.org/graphing/nc42qzq3

[12] *Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian - Volume/Surface Area Relations for n-Dimensional Spheres, Pseudospheres, and Catenoids, The American Mathematical Monthly Vol. 122, No. 8 (October 2015), pp. 745-756*
https://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.122.8.745?seq=1

[13] *Weszely Tibor - Bolyai János - Az első 200 év, Vince Kiadó, 2002*
http://mek.niif.hu/05400/05456/05456.pdf

[14] *Normal distribution*
https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution

[15] *Normal distribution*
https://www.mathsisfun.com/data/standard-normal-distribution.html

[16] *Curvature of surface*
https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_curvature