Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Mészáros Márk Ádám

Görbék rektifikálhatósága és ívhossza

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Pfeil Tamás

ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Pfeil Tamásnak a rengeteg segítséget és tanácsot, melyek segítettek szakdolgozatom elkészültében, továbbá szeretném megköszönni a határtalan türelmét és szakmai odaadását. Szeretném még megköszönni a családomnak, barátaimnak és csoporttársaimnak a támogatást és segítséget az elmúlt években.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **4**

2. Elméleti összefoglaló **5**

2.1. Egyváltozós differenciálszámítás 5

2.2. Egyváltozós integrálszámítás 8

2.3. Vektor értékű függvények differenciálszámítása 12

2.4. További analízisbeli ismeretek 12

3. Ívhossz-számítás **13**

3.1. Függvénygrafikonok 13

3.2. Paraméteres megadású görbék 17

3.3. Polárkoordinátás alakban megadott görbék 20

4. Példák **22**

4.1. Függvény grafikonok ívhossza 22

4.2. Paraméteres megadású görbék ívhossza 26

4.3. Polárkoordinátás megadású görbék ívhossza 31

4.4. Példa folytonos, de nem rektifikálható görbére 34

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatom témája a görbék rektifikálhatósága és ívhossza, mivel egy elméleti analízisbeli témakörnek használatával szerettem volna foglalkozni. Így a dolgozat vége, hol egyszerűbb, hol összetettebb, példákon keresztül mutatja majd meg a konkrét számolások menetét, ahol a számolásokban használt görbéknél lehet gondolni akár a körívre, akár a rugóra, mint sík és térbeli görbékre, vagy akár a lógó vezetékre, mint láncgörbére. A szakdolgozat felépítésében először a felhasznált fontosabb fogalmak, tételek, állítások vannak összegyűjtve, majd pedig definiáljuk a rektifikálhatóság fogalmát, és az ívhosszt, először egyváltozós függvények grafikonjain, majd $\mathbb{R}^d$-beli görbéken. Végül pedig foglalkozunk a síkon megadott polárkoordinátás görbékkel is. A munkát pedig a már említett példákkal fejezzük be.

2. fejezet

Elméleti összefoglaló

2.1. Egyváltozós differenciálszámítás

2.1.1. Definíció. Legyen az egyváltozós f függvény az x_0 hely bizonyos környezetében értelmezve. Az x_0 helyről áttérve valamely más x helyre, a függvény megváltozása $f(x) - f(x_0)$, és ennek az $x - x_0$ megváltozáshoz mért aránya, a különbségi hányados, vagy differenciahányados, azaz

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Abban az esetben, amikor ezen differenciálhányadosnak az x_0 pontban van véges határértéke, azaz

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

létezik és véges, az f függvényt az x_0 helyen differenciálhatónak, deriválhatónak mondjuk, és a határértéket a függvény x_0-beli differenciálhányadosának vagy deriváltjának nevezzük, jele: $f'(x_0)$.

2.1.1. Tétel (Konstansszoros függvény deriváltja). *A $c \in \mathbb{R}$ és g differenciálható függvény esetén az $f = c \cdot g$ függvény is differenciálható, és*

$$f' = (c \cdot g)' = c \cdot g'.$$

2.1.2. Tétel (Összegfüggvény deriváltja). *A g és h differenciálható függvények esetén az $f = g + h$ függvény differenciálható minden olyan pontban, ahol g és h is deriválható, és akkor*

$$f' = (g + h)' = g' + h'.$$

2.1.3. Tétel (Szorzatfüggvény deriváltja). *A g és h differenciálható függvények esetén az $f = g \cdot h$ függvény differenciálható minden olyan pontban, ahol g és h is deriválható, és akkor*

$$f' = (g \cdot h)' = g \cdot h' + g' \cdot h.$$

2.1.4. Tétel (Hányadosfüggvény deriváltja)**.** *A g és h differenciálható függvények esetén az $f = \frac{g}{h}$ függvény differenciálható minden olyan pontban, ahol g és h is deriválható, valamint $h \neq 0$, és akkor*

$$f' = \left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}.$$

2.1.2. Definíció. Az f függvény folytonosan differenciálható egy intervallumon, ha differenciálható, és a deriváltfüggvénye folytonos az intervallumon.

$D(f)$	$D(f')$	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	c $(c \in \mathbb{R})$	0
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	x^n $(n \in \mathbb{N}^+)$	$n \cdot x^{n-1}$
$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	x^a $(a \in \mathbb{R})$	$a \cdot x^{a-1}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a^x $(a \in (0, +\infty))$	$a^x \cdot \ln a$
$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

2.1. táblázat. Elemi függvények deriváltja

$D(f)$	$D(f')$	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$
$[-1,1]$	$(-1,1)$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$
$[-1,1]$	$(-1,1)$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2.2. táblázat. Szögfüggvények deriváltja

$D(f)$	$D(f')$	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$[1,+\infty)$	$(1,+\infty)$	$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(-1,1)$	$(-1,1)$	$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$	$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$	$\operatorname{arcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

2.3. táblázat. Hiperbolikus függvények deriváltja

2.2. Egyváltozós integrálszámítás

2.2.1. Definíció (Riemann-összeg)**.** Legyen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és legyen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ az $[a,b]$ intervallum egy F felosztása. Az F felosztás $[a,b]$-t n darab zárt intervallumra osztja fel, tehát F az

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

intervallumok halmaza. Az első osztóintervallum hosszát jelölje Δx_1, a másodikét Δx_2, és hasonlóan F k-adik osztóintervallumának hosszát pedig Δx_k, ahol $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Minden osztóintervallumban kiválasztunk egy pontot, a k-adik osztóintervallumban lévő pontot jelölje: c_k. Legyen

$$\sigma_F = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k,$$

ahol σ_F-t az F felosztáshoz tartozó Riemann-összegnek, integrálközelítő összegnek nevezünk.

Ez annyit tesz, hogy minden osztóintervallumban veszünk egy téglalapot, amelynek az alapja az osztóintervallum, és a téglalap függőlegesen az x tengelytől a görbe $(c_k, f(c_k))$ pontjáig nyúlik. Az osztóintervallumokon lévő téglalapok terültét adja meg $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ szorzat, ahol Δx_k a téglalap szélessége, $f(c_k)$ pedig a téglalap magassága. Ezeket a szorzatokat összegeztük.

2.2.2. Definíció. Legyen $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az I szám az f függvény $[a,b]$-n vett Riemann-integrálja, és az $\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$ Riemann-összegek határértéke $||F|| \longrightarrow 0$ esetén, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $[a,b]$ minden olyan F felosztására, melynek osztópontjai $x_0, x_1, \ldots, x_n$, és $||F|| < \delta$, bárhogyan is választjuk ki c_k-t az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumból, teljesül hogy

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k - I \right| < \varepsilon,$$

ahol $||F||$ a felosztás normája, azaz a leghosszabb osztóintervallum hossza. Jelölése:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I = \lim_{||F|| \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

2.2.1. Tétel. *Az $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, és az integrálja I, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan F felosztás, amelyhez tartozó bármelyik σ_F Riemann közelítő összegre $|\sigma_F - I| < \varepsilon$.*

2.2.3. Definíció. A korlátos $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény oszcillációja

$$\omega(f; [a,b]) = \sup R(f) - \inf R(f),$$

ahol $R(f)$ az f értékkészletét jelöli.

2.2.4. Definíció. Az $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvénynek az $F : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ felosztáshoz tartozó oszcillációs összegének nevezzük a következőt:

$$\Omega_F(f) = \sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

2.2.2. Tétel. *Egy korlátos $f; [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor integrálható, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan F felosztás, amelyre $\Omega_F < \varepsilon$.*

2.2.3. Tétel (Newton-Leibniz-tétel)**.** *Legyen f integrálható $[a,b]$-ben. Ha az F függvény folytonos $[a,b]$-ben, és differenciálható (a,b)-ben, illetve $F'(x) = f(x)$ minden $x \in (a,b)$-re, (vagyis f egyik primitív függvénye $[a,b]$-n F), akkor*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

2.2.4. Tétel (Az integrál az intervallum szerint additív). *Legyen $a < b < c$, és legyen f értelmezve $[a, c]$ intervallumon. Ha f integrálható $[a, b]$-ben és $[b, c]$-ben, akkor $[a, c]$-ben is, és*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.2.5. Tétel. *Legyen f függvény páros, és integrálható a $[-a, a]$ intervallumon, ekkor*

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

2.2.5. Definíció. Ha $a > b$ és f integrálható $[b, a]$-n, akkor legyen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.2.6. Tétel (Az integrál additív az integrandus szerint). *Legyenek f és g függvények integrálhatóak az $[a, b]$ intervallumon, akkor*

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.2.7. Tétel (A konstansszoros függvények integrálja). *Legyen f függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor az*

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.2.8. Tétel (Helyettesítési szabály). *Ha a g függvény differenciálható az I intervallumon, és az f értelmezve van a $J = g(I)$ intervallumon, és f-nek van primitív függvénye J-n. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye I-n, és*

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = F(g(t)) + C,$$

ahol $\int f\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

2.2.9. Tétel (Parciális integrálás szabálya). *Ha f és g függvények differenciálhatóak az I intervallumon, és itt az $f \cdot g'$-nek van primitív függvénye, akkor $f' \cdot g$-nek is van, mégpedig*

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.2.10. Tétel (Racionális törtfüggvények integrálása parciális törtekre bontással)**.** *Legyen p_1, p_2 valós együtthatós polinomok, és p_1 fokszáma n, p_2 fokszáma m.*

Ha $n < m$, és $p_2(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_m)$, ahol $x_1, \ldots, x_m$ a p_2 polinom egyszeres gyökei, akkor léteznek olyan $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_m}{x - x_m}\,\mathrm{d}x.$$

Ha $n < m$, és $p_2(x) = (x - r)^m$, ahol r a p_2 polinom gyöke, akkor léteznek olyan $B_1, B_2, \ldots, B_m \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{B_1}{x - r} + \frac{B_2}{(x - r)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x - r)^m}\,\mathrm{d}x.$$

Ha $n < m$, és $x^2 + bx + c$ irreducibilis, és $p_2(x) = (x^2 + bx + c)^i$, akkor léteznek olyan $C_1, D_1, C_2, D_2, \ldots C_i, D_i \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{C_1x + D_1}{x^2 + bx + c} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{C_ix + D_i}{(x^2 + bx + c)^i}\,\mathrm{d}x.$$

Végül általánosan, ha $n < m$, és $p_2(x) = (x - x_1)^{i_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_j)^{i_j} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + b_tx + c_t)^{k_t}$, ahol $x_1, \ldots, x_j$ a p_2 polinom gyökei, és $i_1, \ldots, i_j$ a multiplicitásuk, és $x^2 + b_qx + c_q$ irreducibilis másodfokú polinomok $q = 1, 2, \ldots, t$, akkor léteznek olyan $A_{11}, \ldots, A_{1i_1}, \ldots, A_{j1}, \ldots, A_{ji_j}$ és $C_{11}, D_{11}, \ldots, C_{1k_1}, D_{1k_1}, \ldots, C_{t1}, D_{t1}, \ldots, C_{tk_t}, D_{tk_t} \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre

$$\begin{aligned}\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x = \int & \frac{A_{11}}{x - x_1} + \ldots + \frac{A_{1i_1}}{(x - x_1)^{i_1}} + \ldots + \frac{A_{j1}}{x - x_j} + \ldots + \frac{A_{ji_j}}{(x - x_j)^{i_j}} + \\ & + \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2 + b_1x + c_1} + \ldots + \frac{C_{1k_1}x + D_{1k_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{C_{t1}x + D_{t1}}{x^2 + b_tx + c_t} + \\ & + \ldots + \frac{C_{tk_t}x + D_{tk_t}}{(x^2 + b_tx + c_t)^{k_t}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ha $n \geqslant m$, akkor p_1-et p_2-vel maradékosan osztjuk, az eredmény legyen $p_1 = p_1' \cdot p_2 + p_1^{mar}$, ekkor

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x = \int p_1'(x) + \frac{p_1^{mar}(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x = \int p_1'(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{p_1^{mar}(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ahol az összeg első fele egy polinom integrálja, a második fele egy racionális törtfüggvény integrálja, ahol a p_1^{mar} fokszáma kisebb, mint p_2 fokszáma.

2.2.11. Tétel. *Legyen f az I intervallumon differenciálható és sehol sem nulla, akkor*

$$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$.

2.3. Vektor értékű függvények differenciálszámítása

2.3.1. Definíció. Egy $g : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ görbét akkor nevezünk folytonosnak, differenciálhatónak, folytonosan differenciálhatónak, Lipschitz tulajdonságúnak, stb., ha g minden koordinátafüggvénye rendelkezik az adott tulajdonsággal.

2.3.2. Definíció (Görbe deriváltja)**.** Az $g : [a, b] \to \mathbb{R}^d$,

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_d(t)), \qquad t \in [a, b]$$

görbe deriváltfüggvénye t-ben

$$g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t), \ldots, g_d'(t)), \qquad t \in [a, b],$$

amennyiben minden koordinátafüggvény differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, (végpontokban egy-egy oldalról differenciálható).

2.3.3. Definíció (Simaság)**.** Az g görbe sima, ha g differenciálható, és g' folytonos, és g' sehol sem $0_{\mathbb{R}^d}$.

2.3.4. Definíció (Paraméterezés)**.** Ha $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ görbe és $R(g) = H \subset \mathbb{R}^d$, akkor a g görbét H egy paraméterezésének mondjuk.

2.4. További analízisbeli ismeretek

2.4.1. Lemma. *Legyen $x, y \in \mathbb{R}^d$ vektorok, azaz $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$. Ekkor*

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y| \leqslant |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_d - y_d|.$$

2.4.2. Lemma (Halmazok összegének a szuprémuma)**.** *Ha A, B nemüres halmazok, akkor* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

2.4.1. Tétel (Weierstrass tétele)**.** *Ha $f \in C[a, b]$, akkor van olyan $\alpha \in [a, b]$ és $\beta \in [a, b]$, amelyekre teljesül, hogy $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$ minden $x \in [a, b]$-re. Azaz egy korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek mindig van abszolút maximuma és abszolút minimuma.*

2.4.2. Tétel (Lagrange-középértéktétel)**.** *Ha az f függvény folytonos $[a, b]$-ben és differenciálható (a, b)-ben, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, amelyre*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2.4.3. Tétel. *Ha $g : H \longrightarrow \mathbb{R}^p$, ahol $H \subset \mathbb{R}^q$, és g folytonos H-n, és f folytonos a $g(H)$ halmazban, akkor $f \circ g$ is folytonos a H halmazon.*

2.4.4. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos és zárt, és legyen $f : H \longrightarrow \mathbb{R}^q$ folytonos. Ha f injektív a H halmazon, akkor f^{-1} folytonos az $f(H)$ halmazon.*

3. fejezet

Ívhossz-számítás

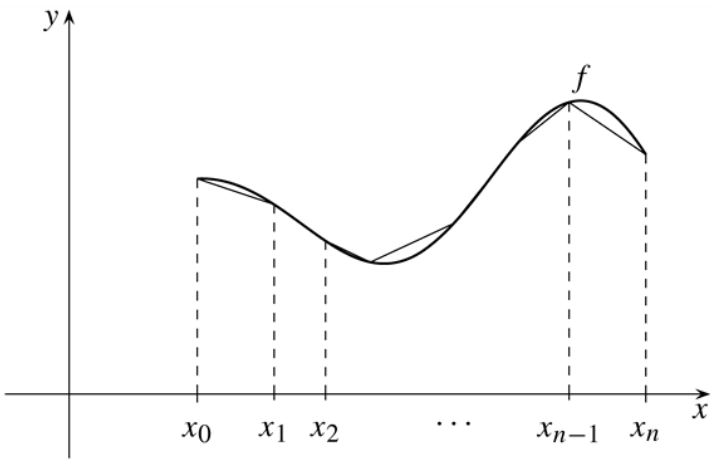
3.1. Függvénygrafikonok

Először a függvények grafikonjának ívhosszúságával, később általánosabb görbékkel is fogunk foglalkozni.

3.1.1. Definíció. Legyen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, és legyen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ az $[a, b]$ intervallum egy F felosztása. Az f függvény grafikonjának az F felosztáshoz tartozó beírt töröttvonala az $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ pontokat összekötő töröttvonal. Az f függvény grafikonjának ívhossza az összes beírt töröttvonal hosszából álló halmaz felső határa. Az f grafikonjának ívhosszát $s(f; [a, b])$-vel jelöljük, és

$$s(f; [a, b]) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |p_i - p_{i-1}| : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, i = 0, \ldots, n \right\},$$

ahol $p_i = (x_i, f(x_i))$, és $|p_i - p_{i-1}|$ az $(i-1)$-edik és az i-edik pont távolsága.



Azt mondjuk, hogy az f függvény grafikonja rektifikálható, ha $s(f; [a, b])$ véges. Ha $a = b$, akkor $s(f; [a, b]) = 0$ minden f függvényre.

3.1.1. Tétel. *Tetszőleges $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényre igaz, hogy*

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2} \leqslant s(f;[a,b]),$$

azaz a görbe kezdő- és végpontját összekötő szakasz hossza nem nagyobb, mint a görbe hossza. Tehát, ha $a < b$, akkor $s(f;[a,b]) > 0$.

3.1.1. Bizonyítás. Az $s(f;[a,b])$, a görbe hossza nem lehet kisebb egyetlen beírt töröttvonal hosszánál sem, így az $(a, f(a)), (b, f(b))$-t összekötő szakasz, az $a = x_0 < x_1 = b$ felosztáshoz tartozó töröttvonal hosszánál sem. A szakasz hossza $\sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2}$, és így a görbe hossza nem lehet ettől kisebb.

3.1.2. Tétel. *Ha $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton, akkor a függvény grafikonja rektifikálható, és*

$$s(f;[a,b]) \leqslant (b-a) + |f(b) - f(a)|.$$

3.1.2. Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f monoton növő, és legyen $F : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ az $[a,b]$ intervallumon egy felosztása, és legyen az $(x_i, f(x_i))$ pont p_i-vel jelölve minden $i = 0, 1, \ldots, n$-re. Ekkor $x_i > x_{i-1}$, és $f(x_i) > f(x_{i-1})$ minden i-re f monotonitása miatt. Tehát

$$|p_i - p_{i-1}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \leqslant (x_i - x_{i-1}) + (f(x_i) - f(x_{i-1})),$$

a háromszög egyenlőtlenségből következik, minden i-re. Amiből, ha őket összegezzük:

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i - p_{i-1}| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\right] + \left[\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\right] =$$
$$= (x_n - x_0) + (f(x_n) - f(x_0)) = (b-a) + (f(b) - f(a)),$$

mert mindkét összeg teleszkópos. Ha f monoton csökkenő, akkor a gondolatmenet ugyanúgy elvégezhető a $-f$ függvénnyel.

3.1.3. Tétel (Az ívhossz az intervallum szerint additív)**.** *Legyen $a < b < c$, és $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$. Ha a függvény grafikonja rektifikálható, akkor*

$$s(f;[a,c]) = s(f;[a,b]) + s(f;[b,c]).$$

3.1.3. Bizonyítás. Jelöljük az $[a,b]$, $[b,c]$ és $[a,c]$ intervallum felosztásaihoz tartozó beírt töröttvonalak hosszainak halmazát rendre S_1, S_2, S-sel. Ekkor az $s(f;[a,b]) = \sup S_1$, $s(f;[b,c]) = \sup S_2$ és az $s(f;[a,c]) = \sup S$, a definíció szerint. Mivel az $[a,b]$ és $[b,c]$ intervallumok egy-egy felosztása együtt az $[a,c]$ egy felosztása, ezért bármely S_1- és S_2-beli érték összege benne van S-ben, tehát $S_1 + S_2 \subset S$, illetve a 2.4.2.-es Lemma miatt $\sup(S_1 + S_2) = \sup S_1 + \sup S_2$, amikből következik, hogy

$$s(f;[a,c]) = \sup S \geqslant \sup(S_1 + S_2) = \sup S_1 + \sup S_2 = s(f;[a,b]) + s(f;[b,c]).$$

Ezzel igazoltuk, hogy $s(f;[a,c]) \geqslant s(f;[a,b]) + s(f;[b,c])$.

Ezután belátjuk, hogy

$$s(f;[a,c]) \leqslant s(f;[a,b]) + s(f;[b,c]).$$

Legyen $F : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = c$ az $[a,c]$ intervallumnak egy felosztása, és p_i legyen az $(x_i, f(x_i))$ pont. Ekkor az F-hez tartozó töröttvonal hosszát jelölje $h_F = \sum\limits_{i=1}^{n} |p_i - p_{i-1}|$. Ha a b pont egyenlő az x_i pontok valamelyikével, mondjuk x_k-val, akkor F_1: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ az $[a,b]$, és F_2: $b = x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = c$ a $[b,c]$ intervallum felosztása, tehát

$$h_{F_1} = \sum_{i=1}^{k} |p_i - p_{i-1}| \leqslant s(f;[a,b]) \qquad \text{és} \qquad h_{F_2} = \sum_{i=k}^{n} |p_i - p_{i-1}| \leqslant s(f;[b,c]).$$

Mivel $h_F = h_{F_1} + h_{F_2}$, ezért $h_F \leqslant s(f;[a,b]) + s(f;[b,c])$. Ha a b pont az x_i pontok egyikével sem egyenlő és $x_{k-1} < b < x_k$, akkor legyen F_1: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < b$ és F_2: $b < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = c$, valamint legyen q a $(b, f(b))$ pont. Így a két töröttvonal hossza:

$$h_{F_1} = \sum_{i=1}^{k-1} |p_i - p_{i-1}| + |q - p_{k-1}| \leqslant s(f;[a,b])$$

és

$$h_{F_2} = |p_k - q| + \sum_{i=k+1}^{n} |p_i - p_{i-1}| \leqslant s(f;[b,c])$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt $|p_k - p_{k-1}| \leqslant |q - p_{k-1}| + |p_k - q|$, ezért

$$h_F \leqslant h_{F_1} + h_{F_2} \leqslant s(f;[a,b]) + s(f;[b,c]).$$

Ebből következik, hogy

$$s(f;[a,c]) = \sup\{h_F : F \text{ az } [a,c] \text{ intervallum felosztása}\} \leqslant s(f;[a,b]) + s(f;[b,c]).$$

3.1.4. Tétel. *Legyen f differenciálható $[a,b]$-ben, és tegyük fel, hogy*

$$A \leqslant \sqrt{1 + (f'(x))^2} \leqslant B$$

minden $x \in (a,b)$-re. Ekkor f grafikonja rektifikálható, és az $s(f;[a,b])$ ívhosszra igaz, hogy

$$A \cdot (b-a) \leqslant s(f;[a,b]) \leqslant B \cdot (b-a).$$

3.1.4. Bizonyítás. Legyen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ az $[a,b]$ intervallum egy F felosztása, és továbbra is jelölje p_i az $(x_i, f(x_i))$ pontot minden $i = 0, 1, \ldots, n$-re. Ekkor a p_{i-1} és a p_i pontok távolsága

$$|p_i - p_{i-1}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

A 2.4.2. Lagrange-középértéktétel miatt van olyan $c_i \in (x_i, x_{i-1})$ pont, amelyre

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

A feltétel szerint $A \leqslant \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \leqslant B$, valamint a fentiek alapján,

$$|p_i - p_{i-1}| = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

melyből következik, hogy

$$A \cdot (x_i - x_{i-1}) \leqslant |p_i - p_{i-1}| \leqslant B \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

A szakaszok hosszát összegezve a beírt töröttvonal hosszára kapunk becslést:

$$A \cdot (b - a) \leqslant h_F \leqslant B \cdot (b - a),$$

végül a beírt töröttvonalak hosszának szuprémumaként a görbe ívhosszára is érvényes ugyanez a becslés.

3.1.5. Tétel. *Legyen f differenciálható $[a, b]$-ben, és tegyük fel, hogy f' folytonos. Ekkor f grafikonja rektifikálható. Legyen $s(x)$ az f függvény grafikonjának $[a, x]$-n vett ívhossza, vagyis $s(x) = s(f; [a, x])$. Ekkor az s is differenciálható és*

$$s'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

minden $x \in [a, b]$-re.

3.1.5. Bizonyítás. A 2.4.1. Weierstrass tétele szerint f' korlátos $[a, b]$-ben, ezért az előző 3.1.4. Tételből következik, hogy f grafikonja rektifikálható. Legyen $c \in [a, b)$ és $\varepsilon > 0$ adott. Mivel a $\sqrt{1 + x^2}$ és az f' függvények folytonosak, ezért a $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ összetett függvény is folytonos. Legyen $D = \sqrt{1 + (f'(c))^2}$. A folytonosság definíciója miatt létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$D - \varepsilon < \sqrt{1 + (f'(x))^2} < D + \varepsilon$$

minden $x \in (c, c + \delta)$-ra. Így az előző tétel szerint, $(x - c)$-vel szorozva

$$(D - \varepsilon) \cdot (x - c) \leqslant s(f; [c, x]) = s(x) - s(c) \leqslant (D + \varepsilon) \cdot (x - c),$$

azaz

$$D - \varepsilon \leqslant \frac{s(x) - s(c)}{x - c} \leqslant D + \varepsilon,$$

ha $x \in (c, c + \delta)$. Jobb oldali határértéket képezve c-ben megkapjuk, hogy $s'_+(c) = D = \sqrt{1 + (f'(c))^2}$. Ugyanígy kijön $s'_-(c) = D = \sqrt{1 + (f'(c))^2}$ minden $c \in (a, b]$-re.

3.1.6. Tétel. *Ha az $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, akkor a grafikonjának az ívhossza*

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

3.1.6. Bizonyítás. Mivel az f függvény folytonosan differenciálható $[a,b]$-ben, ezért azt tudjuk a 3.1.4. Tétel miatt, hogy f függvény grafikonja rektifikálható. Ha $x \in [a,b]$, akkor $s(x) = s(f;[a,x])$ a továbbiakban is legyen a függvény $[a,x]$ intervallumra való leszűkítésének ívhossza. Ekkor s is differenciálható, és $s'(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ minden $x \in [a,b]$-re. Mivel f grafikonjának ívhossza $s(b) = s(b) - s(a)$, így a 2.2.3. Newton-Leibniz-formula szerint

$$s(b) - s(a) = \int_a^b s'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

3.2. Paraméteres megadású görbék

Ebben a fejezetben bevezetjük a paraméteres megadású görbék ívhosszát.

3.2.1. Definíció. Legyen $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ görbe, és legyen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztása. A g görbe beírt töröttvonala a $g(t_0), g(t_1), \ldots, g(t_n)$ pontokat összekötő töröttvonal. A g görbe ívhossza az összes beírt töröttvonal hosszából álló halmaz felső határa. A g görbe ívhosszát $s(g)$-vel jelöljük:

$$s(g) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, n = 1,2,\ldots\right\},$$

ahol a $|g(t_i) - g(t_{i-1})|$ az $(i-1)$-edik és az i-edik pont távolsága. A g görbe rektifikálható, ha $s(g) < \infty$.

3.2.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^d$ halmaz. A H halmazt egyszerű ívnek nevezzük, ha létezik injektív és folytonos paraméterezése.

3.2.1. Tétel. *Ha $H \subset \mathbb{R}^d$ egyszerű ív, akkor a H halmaz bármely injektív paraméterezésének ívhossza ugyanaz.*

3.2.1. Bizonyítás. Legyen $\alpha : [a,b] \longrightarrow H$ és $\gamma : [c,d] \longrightarrow H$ injektív és folytonos paraméterezések. Ekkor a $h = \gamma^{-1} \circ \alpha$ függvény a 2.4.3. és a 2.4.4. Tételek miatt, folytonosan és injektíven leképzi az $[a,b]$ intervallumot $[c,d]$-re. A folytonos és injektív függvényekről tudjuk, hogy szigorúan monotonak is. Ha $F : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztása, akkor a $c = h(a) = h(t_0) < h(t_1) < \ldots < h(t_n) = h(b) = d$, valamint a $c = h(b) = h(t_n) < h(t_{n-1}) < \ldots < h(t_0) = h(a) = d$ egyike a $[c,d]$

intervallum felosztása, attól függően, hogy a h szigorúan monoton növő vagy csökkenő. Mivel $\alpha = \gamma \circ h$, ezért $[c, d]$ előbbi felosztásához γ görbénél, valamint az F felosztáshoz α görbénél tartozó beírt töröttvonal ugyanaz lesz. Tehát $\alpha : [a, b] \longrightarrow H$ minden beírt töröttvonala $\gamma : [c, d] \longrightarrow H$ töröttvonala is, és fordítva is belátható. Ebből következik, hogy a két görbe ívhossza megegyezik, hiszen az ívhossz ezen töröttvonalak halmazának a szuprémuma.

3.2.2. Tétel. *Legyen $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ görbe. Ha g Lipschitz-tulajdonságú, akkor rektifikálható.*

3.2.2. Bizonyítás. Legyen a g görbe Lipschitz-tulajdonságú, ekkor létezik olyan $K_i \in \mathbb{R}$, melyre minden $x, y \in [a, b]$-re $|g_i(x) - g_i(y)| \leqslant K_i \cdot |x - y|$, ahol $i = 1, 2, \ldots, d$. Legyen $K = \max\limits_{i=i}^{d} K_i$, akkor minden i-re $|g_i(x) - g_i(y)| \leqslant K \cdot |x - y|$ igaz. Ezért,

$$|g(x) - g(y)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (g_i(x) - g_i(y))^2} \leqslant \sum_{i=1}^{d} |g_i(x) - g_i(y)| \leqslant K \cdot |x - y| \cdot d$$

Tehát $|g(x) - g(y)| \leqslant K \cdot d \cdot |x - y|$ minden $x, y \in [a, b]$-re. Ebből következik, hogy g bármely beírt töröttvonala nem nagyobb, mint $K \cdot d \cdot (b - a)$, vagyis g rektifikálható.

3.2.3. Tétel. *Legyen $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ differenciálható görbe, továbbá legyen minden koordinátafüggvényének deriváltfüggvénye korlátos $[a, b]$-n, akkor g rektifikálható.*

3.2.3. Bizonyítás. A $g_i : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $[a, b]$-n, és a deriváltja korlátos, és a 2.4.2. Lagrange-középértéktétel miatt g_i Lipschitz-tulajdonságú az $L_i = \sup\{|g_i'(t)| : t \in [a, b]\}$ konstanssal minden i-re. Így az előző 3.2.2. Tétel szerint a g görbe rektifikálható.

3.2.4. Tétel. *Ha egy g görbe folytonosan differenciálható, akkor rektifikálható.*

3.2.4. Bizonyítás. Egy folytonos függvény korlátos és zárt intervallumon korlátos, így a g_i' függvények is korlátosak $[a, b]$-n, így a 3.2.3. Tételt szerint g rektifikálható.

3.2.5. Tétel. *Legyen a $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ görbe differenciálható, és g koordinátafüggvényeinek deriváltjai integrálhatóak az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor a g görbe $s(g)$ ívhossza*

$$s(g) = \int_a^b \sqrt{(g_1'(t))^2 + (g_2'(t))^2 + \ldots + (g_d'(t))^2}\, \mathrm{d}t = \int_a^b |g'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

3.2.5. Bizonyítás. Minden integrálható függvény korlátos, így a $g_i(t)$ koordinátafüggvények is korlátosak minden $i = 1, 2, \ldots, d$-re, amiből a 3.2.3. Tétel alapján g rektifikálható.

Legyen $f(t) = \sqrt{(g_1'(t))^2 + (g_2'(t))^2 + \ldots + (g_d'(t))^2}$, és legyen $F : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása. Ekkor a h_F jelölje az F felosztáshoz tartozó beírt töröttvonal hosszát, így $h_F = \sum\limits_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|$, ahol

$$|g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sqrt{(g_1(t_i) - (g_1(t_{i-1}))^2 + (g_2(t_i) - (g_2(t_{i-1}))^2 + \ldots + (g_d(t_i) - (g_d(t_{i-1}))^2}$$

minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re. A 2.4.2. Lagrange-középértéktétel szerint léteznek olyan $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{id} \in (t_{i-1}, t_i)$ számok, melyekre

$$g_j(t_i) - g_j(t_{i-1}) = g_j'(c_{ij}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, d).$$

Ekkor

$$h_F = \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(g_1'(c_{i1})^2 + (g_2'(c_{i2})^2 + \ldots + (g_d'(c_{id})^2} \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Legyen $\sigma_F(f)$ az F felosztáshoz tartozó Riemann közelítő összege f-nek. Az $e_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tetszőleges szám esetén

$$\sigma_F(f; (e_i)) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(g_1'(e_i)^2 + (g_2'(e_i)^2 + \ldots + (g_d'(e_i)^2} \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Megfelelő F felosztás mellett a h_F és a $\sigma_F(f; (e_i))$ közötti különbség kicsi lesz. Az egyenletekből a gyökös kifejezések közötti különbség, a 2.4.1. Lemmát felhasználva

$$\left| \sqrt{(g_1'(c_{i1})^2 + (g_2'(c_{i2})^2 + \ldots + (g_d'(c_{id})^2} - \sqrt{(g_1'(e_i)^2 + (g_2'(e_i)^2 + \ldots + (g_d'(e_i)^2} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{d} \left| g_j'(c_{ij}) - g_j'(e_i) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{d} \omega\left(g_j'; [t_i - t_{i-1}]\right),$$

ahol $\omega\left(g_j'; [t_i - t_{i-1}]\right) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}$. Tehát a h_F és a $\sigma_F(f; (e_i))$ közötti különbség abszolútértéke:

$$|h_F - \sigma_F(f; (e_i))| \leqslant \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{n} \omega\left(g_j'; [t_i - t_{i-1}]\right) \cdot (t_i - t_{i-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{d} \Omega_F\left(g_j'\right)$$

minden F felosztásra és minden $e_i \in [t_{i-1}, t_i]$ értékre, ahol $\Omega_F\left(g_j'\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega\left(g_j'; [t_i - t_{i-1}]\right) \cdot (t_i - t_{i-1})$.

Az $s(g)$ a h_F értékek szuprémuma, tehát adott $\varepsilon > 0$ számra létezik egy F_0 felosztás, ahol $s(g) - \varepsilon < h_{F_0} \leqslant s(g)$. Ha új osztópontot hozzáveszünk a F_0-hoz, az így kapott F felosztásra, az

$$s(g) - \varepsilon < h_{F_0} \leqslant h_F \leqslant s(g)$$

természetesen igaz, hiszen h_{F_0}-ban egy új osztópont megjelenése azt jelenti, hogy a $|g(t_{k-1}) - g(t_k)|$ tagot helyettesítjük a $\left|g(t_{k-1}) - g(t_k^{uj})\right| + \left|g(t_k^{uj}) - g(t_k)\right|$ összeggel, ami a háromszög-egyenlőtlenségből következően, nem lehet kisebb.

A feltétel szerint g_j' függvények integrálhatóak, és vannak olyan F_j felosztások, ahol az $\Omega_{F_j}(g_j') < \varepsilon$ $(j = 1, 2, \ldots, d)$. Legyen F az $F_1, F_2, \ldots, F_d$ felosztások egyesítése. Ekkor minden $j = 1, 2, \ldots, d$-re

$$\Omega_F(g_j') \leqslant \Omega_{F_j}(g_j') < \varepsilon.$$

Tehát a fentiekből az következik, hogy

$$|\sigma_F(f; (e_i)) - s(g)| \leqslant |\sigma_F(f; (e_i)) - h_F| + |h_F - s(g)| < (d+1) \cdot \varepsilon.$$

Ami annyit tesz, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan F felosztás, ahol tetszőleges $e_i \in [t_{i-1}, t_i]$ pontok mellett $|\sigma_F(f; (e_i)) - s(g)| < (d+1) \cdot \varepsilon$ teljesül, tehát f integrálható és az integrálja $s(g)$.

3.3. Polárkoordinátás alakban megadott görbék

3.3.1. Definíció. Egy P pont polárkoordinátáin az (r, φ) számpárt értjük, ahol r az origótól vett távolság, a φ pedig $\overrightarrow{OP}$ vektornak az x tengely pozitív felével vett pozitív körbejárású szöge. Az origó polárkoordinátája $(0, \varphi)$, ahol φ bármi lehet.

3.3.2. Definíció. Az $r : [\alpha, \beta] \longrightarrow [0, \infty)$ függvényt a

$$g(t) = (r(t) \cdot \cos t, r(t) \cdot \sin t) \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

a görbe polárkoordinátás alakban való megadásának nevezzük.

Itt nem tettük fel, hogy $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$, de erre nincs is szükség, hiszen minden $t \in \mathbb{R}$ és $r > 0$ esetén a $P = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$ pont polárkoordinátás alakja $(r, t - 2k\pi)$, ahol k olyan egész, amire $0 \leqslant t - 2k\pi < 2\pi$.

3.3.1. Tétel. *Legyen az $r : [\alpha, \beta] \longrightarrow [0, \infty)$ függvény differenciálható, és a deriváltja integrálható $[\alpha, \beta]$-n. Ekkor az r által polárkoordinátás alakban megadott görbe rektifikálható, és az ívhossza*

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)}\, \mathrm{d}\varphi.$$

3.3.1. Bizonyítás. Az r függvény által polárkoordinátás alakban megadott g görbéjét felírhatjuk paraméteresen $g(t) = (r(t) \cdot \cos t, r(t) \cdot \sin t)$ alakban is. Ekkor

$$|g'(t)| = \sqrt{(r'(t) \cdot \cos t - r(t) \cdot \sin t)^2 + (r'(t) \cdot \sin t + r \cdot \cos t)^2} = \sqrt{(r'(t))^2 + r^2(t)}$$

és $g'(t)$ koordinátafüggvényeinek deriváltjai integrálhatóak. Tehát

$$s(g) = \int_{\alpha}^{\beta} |g'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(t))^2 + r^2(t)} \, \mathrm{d}t.$$

4. fejezet

Példák

4.1. Függvény grafikonok ívhossza

4.1.1. Feladat (Parabola ívhossza)**.** Az $f(x) = x^2$, $x \in [0, a]$ függvény grafikonjának ívhosszát keressük.

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \sqrt{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Helyettesítsünk!

$$u = 2x, \qquad x = \frac{1}{2}u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2, \qquad \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x.$$

Először számoljuk ki a primitív függvényeket!

$$\int \sqrt{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Helyettesítsünk még egyszer!

$$u = \operatorname{sh} t, \qquad t = \operatorname{arsh} u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \operatorname{ch} t, \qquad \mathrm{d}u = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t.$$

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \sqrt{1 + (\operatorname{sh} t)^2}\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t}\cdot \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{ch}(2t) + 1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} + t + C.$$

Helyettesítsünk vissza!

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} + t + C = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot\operatorname{sh} t\cdot\operatorname{ch} t}{2} + t + C = \frac{1}{4}\cdot\operatorname{sh} t\cdot\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} + t + C =$$
$$\frac{1}{4}\cdot u\sqrt{u^2 + 1} + \operatorname{arsh} u + C = \frac{1}{4}\cdot 2x\sqrt{4x^2 + 1} + \operatorname{arsh}(2x) + C.$$

Ezt használva, az ívhossz

$$s = \int_0^a \sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[2x\sqrt{4x^2+1} + \operatorname{arsh}(2x)\right]_0^a =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\left(2a\sqrt{4a^2+1} + \operatorname{arsh}(2a)\right) - \left(2\cdot 0\cdot\sqrt{4\cdot 0^2+1} + \operatorname{arsh}(2\cdot 0)\right)\right) =$$
$$= \frac{a}{2}\sqrt{4a^2+1} + \frac{\operatorname{arsh}(2a)}{4}.$$

4.1.2. Feladat (Exponenciális függvény grafikonjának ívhossza)**.** Az $f(x) = e^x$, $x \in [0,a]$ függvény grafikonjának ívhosszát keressük.

$$s = \int_0^a \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \sqrt{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x.$$

Helyettesítsünk!

$$t = 1+e^{2x}, \qquad e^{2x} = t-1, \qquad x = \frac{1}{2}\ln(t-1), \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1},$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t.$$

Először számoljuk ki a primitív függvényeket!

$$\int \sqrt{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t.$$

Helyettesítsünk még egyszer!

$$u = \sqrt{t}, \qquad t = u^2, \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u, \qquad \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u.$$

$$\int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int u\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2-1}\cdot 2u\,\mathrm{d}u = \int \frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int 1+\frac{1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u.$$

Bontsuk parciális törtekre!

$$\int 1+\frac{1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int 1+\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}\,\mathrm{d}u.$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases}, \qquad A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{2}.$$

$$\int 1+\frac{1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int 1+\frac{\frac{1}{2}}{u-1}-\frac{\frac{1}{2}}{u+1}\,\mathrm{d}u = u+\frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + C =$$
$$= u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$$

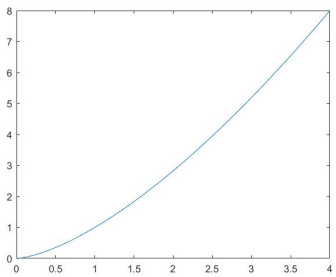
Helyettesítsünk vissza!

$$u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\sqrt{t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\right|+C=\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+C.$$

Ezt használva, az ívhossz

$$s=\int_0^a\sqrt{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x=\left[\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|\right]_0^a=$$
$$=\left(\sqrt{1+e^{2a}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2a}}-1}{\sqrt{1+e^{2a}}+1}\right|\right)-\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right).$$

4.1.3. Feladat. Számoljuk ki a $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, $x\in[0,4]$ függvény grafikonjának ívhosszát.



4.1. ábra. $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, $x\in[0,4]$ grafikonja

$$s=\int_0^4\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x=\int_0^4\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\left[\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}\right]_0^4=$$
$$=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}\cdot 4\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{9}{4}\cdot 0\right)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

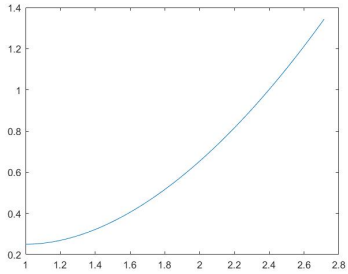
4.1.4. Feladat (Láncgörbe ívhossza)**.** Számoljuk ki $f(x)=\operatorname{ch}x$, $x\in[-a,a]$ függvény grafikonjának ívhosszát.

$$s=\int_{-a}^a\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^a\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^a\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x.$$

A ch függvény páros, ezért

$$\int_{-a}^a\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x=2\cdot\int_0^a\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x=2\cdot[\operatorname{sh}x]_0^a=2\cdot\operatorname{sh}a.$$

4.1.5. Feladat. Számoljuk ki az $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$, $x\in[1,e]$ függvény grafikonjának ívhosszát.



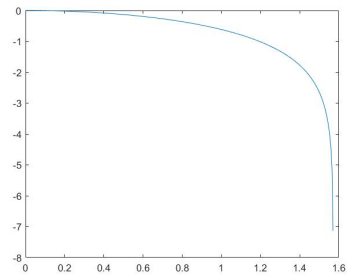
4.2. ábra. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $x \in [1, e]$ grafikonja

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x},$$
$$(f'(x))^2 = \frac{x^2}{4} - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}.$$

A grafikon ívhossza:

$$s = \int_1^e \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \sqrt{\frac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_1^e \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(2x)^2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{x^2+1}{2x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln|x|\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + 0\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

4.1.6. Feladat. Legyen $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Számoljuk ki az $f(x) = \ln\cos x$, $x \in [0, a]$ függvény grafikonjának ívhosszát.



4.3. ábra. $f(x) = \ln\cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ grafikonja

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x), \qquad (f'(x))^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

A grafikon ívhossza:

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\,\mathrm{d}x.$$

Helyettesítsünk!

$$u = \frac{\pi}{2} - x, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1, \qquad \mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}x.$$

$$s = \int_{x=0}^{x=a} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\,\mathrm{d}x = \int_{u=\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}-a} \frac{-1}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{u}{2} \cdot \cos\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u = \left[\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \ln 1 - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right).$$

4.2. Paraméteres megadású görbék ívhossza

4.2.1. Feladat (Az origó középpontú r sugarú kör kerülete)**.**

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

$$x'(t) = -r \cdot \sin t \qquad (x'(t))^2 = r^2 \cdot \sin^2 t$$
$$y'(t) = r \cdot \cos t \qquad (y'(t))^2 = r^2 \cdot \cos^2 t.$$

A vizsgált kör kerülte:

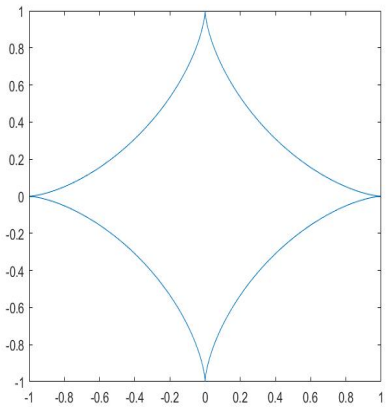
$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 t + r^2 \cdot \cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t)}\,\mathrm{d}t = r \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2r\pi.$$

Visszakaptuk azt a képletet, amelyet geometriából már ismerünk.

4.2.2. Feladat (Az asztroid ívhossza).

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos^3 t \\ y = r \cdot \sin^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

ahol r az asztroid köré írt kör sugara.



4.4. ábra. asztroid

$$x'(t) = 3r \cdot \cos^2 t \cdot (-\sin t) \qquad (x'(t))^2 = 9r^2 \cdot \cos^4 t \cdot \sin^2 t$$
$$y'(t) = 3r \cdot \sin^2 t \cdot \cos t \qquad (y'(t))^2 = 9r^2 \cdot \sin^4 t \cdot \cos^2 t.$$

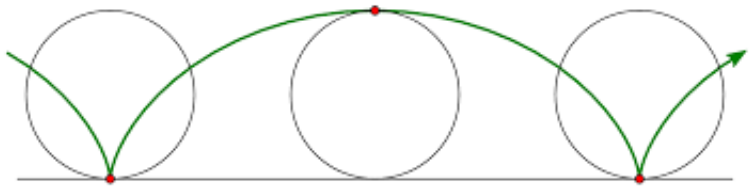
Az asztroid első síknegyedbe eső részének ívhossza:

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9r^2 \cdot \cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9r^2 \cdot \sin^4 t \cdot \cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9r^2 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^2 t \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t)}\,\mathrm{d}t = 3 \cdot r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t =$$
$$= 3 \cdot r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = 3 \cdot r \cdot \left[\frac{-\cos(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 \cdot r \cdot \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{-1}{4}\right)\right) = \frac{3}{2} \cdot r.$$

Ezzel megkaptuk az asztroid első síknegyedbeli ívhosszát, így a teljes kerület a kapott érték négyszerese, vagyis $6r$.

4.2.3. Feladat (A ciklois ívhossza).

$$g(t) = (a \cdot t - a \cdot \sin t, a - a \cdot \cos t) \qquad t \in [0, 2\pi],$$



4.5. ábra. ciklois

ahol a a generáló kör sugara.

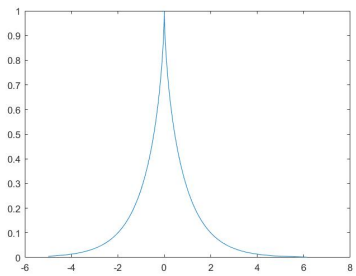
$$g_1'(t) = a - a \cdot \cos t \qquad (g_1'(t)^2 = a^2 - 2a^2 \cdot \cos t + a^2 \cdot \cos^2 t$$
$$g_2'(t) = a \cdot \sin t \qquad (g_2'(t))^2 = a^2 \cdot \sin^2 t.$$

A ciklois ívhossza:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(g_1'(t))^2 + (g_2'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2 \cdot \cos t + a^2 \cdot \cos^2 t + a^2 \cdot \sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cdot \cos t}\,\mathrm{d}t = a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(2 \cdot \frac{t}{2}))}\,\mathrm{d}t = a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2a \cdot \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a \cdot \left[-2 \cdot \cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2a \cdot (2 - (-2)) = 8a.$$

4.2.4. Feladat. Legyen $0 < a < b < \pi$. Számoljuk ki a következő görbe ívhosszát.

$$\begin{cases} x = \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \\ y = \sin t \end{cases} \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$



4.6. ábra. A 4.2.4. Feladatbeli görbe $a = 0,1$, $b = \pi - 0,1$ esetén

$$x'(t) = -\sin t + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} = -\sin t + \frac{1}{2 \cdot \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} \cdot \cos^2\frac{t}{2}} = -\sin t + \frac{1}{\sin t}$$

$$(x'(t))^2 = \sin^2 t - 2 \cdot \sin t \cdot \frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\sin^2 t} = \sin^2 t - 2 + \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$(y'(t))^2 = \cos^2 t.$$

Behelyettesítve a görbe ívhossza:

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\sin^2 t - 2 + \frac{1}{\sin^2 t} + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{|\cos t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Ha $\frac{\pi}{2} \in (a, b)$, akkor ott a $\cos t$ előjelet vált, ezért

$$s = \int_a^b \frac{|\cos t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{-\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= [\ln\sin t]_a^{\frac{\pi}{2}} - [\ln\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^b = (0 - \ln\sin a) - (\ln\sin b - 0) = -\ln(\sin a \cdot \sin b).$$

Ha $b \leqslant \frac{\pi}{2}$, akkor

$$s = \int_a^b \frac{|\cos t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = [\ln\sin t]_a^b = \ln\sin b - \ln\sin a.$$

Ha $a \geqslant \frac{\pi}{2}$, akkor

$$s = \int_a^b \frac{|\cos t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{-\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = -[\ln\sin t]_a^b = \ln\sin a - \ln\sin b.$$

4.2.5. Feladat (Hengerre írható csavarvonal ívhossza)**.**

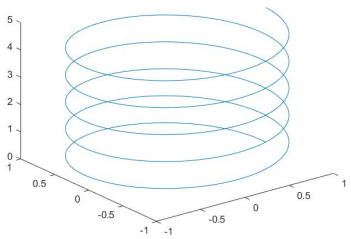
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \\ z = \frac{m}{2\pi} \cdot t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad a > 0,$$

ahol a a csavarvonal sugara, m pedig a menetemelkedése, azaz, egy fordulat alatt m egységet emelkedjen a görbe.

$$x'(t) = -a \cdot \sin t \qquad (x'(t))^2 = a^2 \cdot \sin^2 t$$

$$y'(t) = a \cdot \cos t \qquad (y'(t))^2 = a^2 \cdot \cos^2 t$$

$$z'(t) = \frac{m}{2\pi} \qquad (z'(t))^2 = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2.$$



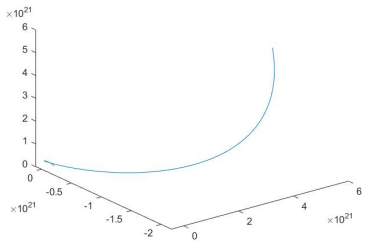
4.7. ábra. Csavarvonal

A fenti csavarvonal ívhossza:

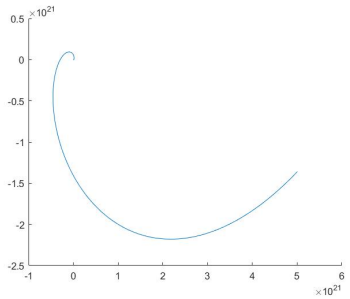
$$s = \int_0^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 t + a^2 \cdot \cos^2 t + \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^T \sqrt{a^2 + \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2 + \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2} \cdot T.$$

4.2.6. Feladat. Számoljuk ki a $g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ görbe ívhosszát, amikor a t paraméter az $[a, b]$ intervallumot futja be.



4.8. ábra. $g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in [0, 50]$ görbéje



4.9. ábra. A $g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in [0, 50]$ görbe az (x, y) síkra vetítve

$$g_1'(t) = e^t \cdot \cos t + e^t \cdot (-\sin t), \qquad g_2'(t) = e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t, \qquad g_3'(t) = e^t,$$
$$(g_1'(t))^2 = e^{2t} \cdot (\cos^2 t - 2 \cdot \cos t \cdot \sin t + \sin^2 t) = e^{2t} \cdot (1 - \sin(2t)),$$
$$(g_2'(t))^2 = e^{2t} \cdot (\sin^2 t + 2 \cdot \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t) = e^{2t} \cdot (1 + \sin(2t)),$$
$$(g_3'(t))^2 = e^{2t}.$$

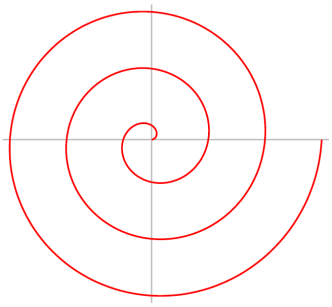
A görbe ívhossza:

$$s = \int_a^b \sqrt{(g_1'(t))^2 + (g_2'(t))^2 + (g_3'(t))^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^b \sqrt{e^{2t} \cdot (1 - \sin(2t)) + e^{2t} \cdot (1 + \sin(2t)) + e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3} \cdot \int_a^b e^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{3} \cdot \left[e^t\right]_a^b =$$
$$= \sqrt{3} \cdot (e^b - e^a).$$

4.3. Polárkoordinátás megadású görbék ívhossza

4.3.1. Feladat (Arkhimédészi spirál)**.**

$$r(\varphi) = a\varphi \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \qquad a > 0.$$



4.10. ábra. Arkhimédészi spirál

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\,\mathrm{d}\varphi = a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\,\mathrm{d}\varphi.$$

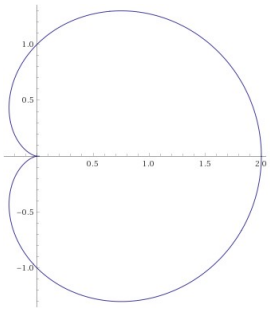
Ehhez nagyon hasonlót már számoltunk a 4.1.1. Feladatban, ezért tudjuk, hogy a primitív függvények $\frac{1}{2} \cdot \left(\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + \operatorname{arsh}\varphi\right) + C$ alakúak, ezért a görbe ívhossza

$$s = a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + \operatorname{arsh}\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{a}{2}\left(2\pi \cdot \sqrt{4\pi^2 + 1} + \operatorname{arsh}(2\pi)\right).$$

4.3.2. Feladat (Kardioid).

$$r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi) \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \qquad a > 0,$$

ahol a a gördülő kör sugara.



4.11. ábra. Kardioid

$$r(\varphi) = a + a \cdot \cos\varphi \qquad r^2(\varphi) = a^2 + 2a^2 \cdot \cos\varphi + a^2 \cdot \cos^2\varphi$$
$$r'(\varphi) = a \cdot (-\sin\varphi) \qquad (r'(\varphi))^2 = a^2 \cdot \sin^2\varphi.$$

A feladatbeli kardioid ívhossza:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + 2a^2 \cdot \cos\varphi + a^2 \cdot \cos^2\varphi + a^2 \cdot \sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \sqrt{2}a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cdot \cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| \mathrm{d}\varphi$$

$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \geqslant 0$, ha $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, és $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \leqslant 0$, ha $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, ezért

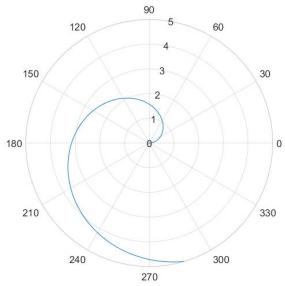
$$s = 2a \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathrm{d}\varphi + 2a \int_{\pi}^{2\pi} -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathrm{d}\varphi = 2a \left[2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi} + 2a \left[2 \cdot \left(-\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} =$$
$$= 2a \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 0) + 2a \cdot (-2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1)) = 8a.$$

Az $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ görbe is a fenti kardioidot paraméterezi, ezért másképpen

$$s = 2a \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| \mathrm{d}\varphi = 4a \cdot \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathrm{d}\varphi = 4a \left[2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi} = 8a.$$

4.3.3. Feladat. Számoljuk ki a következő görbe ívhosszát:

$$r(\varphi) = \frac{1}{\varphi} \qquad 0 < a \leqslant \varphi \leqslant b.$$



4.12. ábra. $r(\varphi) = \frac{1}{\varphi}$, $\varphi \in (0, 5]$ grafikonja

$$r(\varphi) = \frac{1}{\varphi} \qquad r^2(\varphi) = \frac{1}{\varphi^2}$$
$$r'(\varphi) = \frac{-1}{\varphi^2} \qquad (r'(\varphi))^2 = \frac{1}{\varphi^4}.$$

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}}\,\mathrm{d}\varphi = \int_a^b \frac{1}{\varphi}\sqrt{1 + \frac{1}{\varphi^2}}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Helyettesítsünk és számoljuk ki először a primitív függvényeket!

$$u = \frac{1}{\varphi}, \qquad \varphi = \frac{1}{u}, \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \frac{-1}{u^2}, \qquad \mathrm{d}\varphi = \frac{-1}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

$$\int \frac{1}{\varphi}\sqrt{1 + \frac{1}{\varphi^2}}\,\mathrm{d}\varphi = \int u \cdot \sqrt{1+u^2} \cdot \frac{-1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{u} \cdot \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Helyettesítsünk még egyszer!

$$u = \operatorname{sh} x, \qquad x = \operatorname{arsh} u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \operatorname{ch} x, \qquad \mathrm{d}u = \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}
&-\int \frac{1}{u} \cdot \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\operatorname{sh}^2 x + 1}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\operatorname{ch} x - \int \frac{1}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ch} x - \int \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sh}\frac{x}{2} \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ch} x - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\operatorname{ch} x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ch} x - \frac{1}{2}\ln \operatorname{th}\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

Mivel $\operatorname{th} y = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$, és az $\operatorname{arsh} u = \ln(u + \sqrt{u^2+1})$, ezért

$$\operatorname{th}\frac{\operatorname{arsh} u}{2} = \frac{e^{\ln(u+\sqrt{u^2+1})} - 1}{e^{\ln(u+\sqrt{u^2+1})} + 1} = \frac{u + \sqrt{u^2+1} - 1}{u + \sqrt{u^2+1} + 1} = 1 - \frac{2}{u + \sqrt{u^2+1} + 1}.$$

Helyettesítsünk vissza!

$$-\operatorname{ch} x - \frac{1}{2}\ln\operatorname{th}\frac{x}{2} + C = -\sqrt{u^2+1} - \ln\left(1 - \frac{2}{u+\sqrt{u^2+1}+1}\right) + C =$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+1} - \ln\left(1 - \frac{2}{\frac{1}{\varphi}+\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+1}+1}\right) + C.$$

Ezt felhasználva az ívhossz

$$s = \int_a^b \frac{1}{\varphi}\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}} = \left[-\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+1} - \ln\left(1 - \frac{2}{\frac{1}{\varphi}+\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+1}+1}\right)\right]_a^b =$$

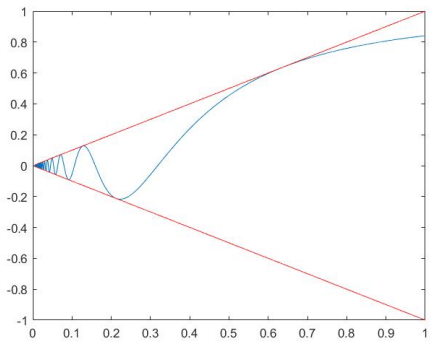
$$= \left(-\sqrt{\frac{1}{b^2}+1} - \ln\left(1 - \frac{2}{\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}+1}\right)\right) +$$

$$+ \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}+1} + \ln\left(1 - \frac{2}{\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}+1}\right)\right).$$

4.4. Példa folytonos, de nem rektifikálható görbére

4.4.1. Feladat. Vegyük a $g(t) = (t, f(t))$, $t \in [0,1]$ görbét, ahol

$$f(t) = \begin{cases} t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right), & \text{ha} \quad t \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad t = 0. \end{cases}$$



4.13. ábra. $g(t) = (t, f(t))$, $t \in [0,1]$ grafikonja

Lássuk be, hogy g görbe nem rektifikálható. Ehhez vegyük az

$$x_i = \frac{2}{(2i-1)\pi} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

sorozatot. Ilyenkor az

$$f(x_i) = (-1)^{i+1}\frac{2}{(2i-1)\pi},$$

amely értékek a g görbe és az $x = |y|$ halmaz origótól különböző közös pontjainak távolsága az x tengelytől. Ilyenkor a $[g(x_i), g(x_{i+1})]$ szakasz hossza, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ esetén,

$$|g(x_{i+1}) - g(x_i)| \geqslant |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i+1}\right) > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{i+1}.$$

A sorrendben $g(x_0) = (0,0)$, $g(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ és $g(x_{n+1}) = (1, \sin 1)$ csúcsú beírt töröttvonal hossza nagyobb, mint

$$\sum_{i=1}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| > \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1}.$$

Mivel $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \longrightarrow \infty$, ha $n \longrightarrow \infty$, ebből látszik, hogy a beírt töröttvonalak hossza nem korlátos, tehát a g görbe nem rektifikálható, holott a g-t megadó t és $f(t)$ függvények folytonosak.

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Valós Analízis I.-II., Typotex Elektronikus Kiadó Kft., 2012

[2] Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei I., Typotex Kiadó, 2000

[3] George B. Thomas – Maurice D. Weir – Joel Hass – Frank R. Giordano: Thomas-féle kalkulus I., II., III., Typotex Elektronikus Kiadó, 2006-2007

[4] Obádovics J. Gyula – Szarka Zoltán: Felsőbb matematika, Scolar Kiadó, Budapest, 2002

[5] Obádovics J. Gyula – Szarka Zoltán: Felsőbb matematika (feladatgyűjtemény), Scolar Kiadó, Budapest, 2002

[6] B. P. Gyemidovics: Matematikai analízis (feladatgyűjtemény), Tankönyvkiadó, Budapest, 1974

Nyilatkozat

Név: Mészáros Márk Ádám

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc.

NEPTUN azonosító: ALUAEQ

Szakdolgozat címe: Görbék rektifikálhatósága és ívhossza

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020. május 26.

a hallgató aláírása