SZAKDOLGOZAT

Projektív sík egy általánosítása

Tímár Zsuzsanna

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematika Bsc

Témavezetők: Lénárt István, Szeghy Dávid

Geometria Tanszék

Budapest, 2019.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Lénárt Istvánnak, a hat féléven keresztül nyújtott segítségért, valamint végtelen türelméért mind a kurzusok, mind a konzultációk alatt. Köszönetet szeretnék még mondani, másik témavezetőmnek, Szeghy Dávidnak, akitől geometriai ismereteimet is szereztem, hogy idejét nem sajnálva támogatott ezen egyedi témaválsztásban.

Végezetül Kiss Emilnek és Halasi Zoltánnak szeretném megköszönni algebrai ismereteimet ami nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **3**

1. A megértéshez szükséges gömbi geometriai alapismeretek **4**

2. Projektív rendszer a gömbön **6**

2.1. Alapgondolat 6

2.2. Axiómarendszer felépítése 8

2.3. Új jelölésmód bevezetése 13

3. Axiómarendszerünk a projektív geometria tételein **14**

3.1. Pappos-tétel 14

3.1.1. 6 elemmel megadott Pappos konfiguráció 15

3.1.2. 5 elemmel megadott Pappos konfiguráció 15

3.2. Desargues-tétel 17

3.3. Napier: Pentagramma Mirificum 18

3.4. Hesse-tétel 21

4. Projektív rendszer véges modelleken **22**

4.0.1. 3 elemű modell 23

4.0.2. 7 elemű modell 24

4.0.3. 13 elemű modell 26

4.1. Összefoglaló 27

Hivatkozások **28**

Bevezetés

A történelem folyamán már korábban is foglalkoztak a geometria és az algebra viszonyával. Leibniz 1679-ben, Huygensnek írt levelében nagyon fontos gondolatot fejtett ki a geometria és algebra összekapcsolásáról. Szerinte olyan geometriai algebrára lenne szükség, amelyben a geometriai alakzat helye játssza azt a szerepet, amit a számok között a szám nagyságrendje játszik; és erre az alapra épülne a számok közti algebrának megfelelő geometriai algebra. Ezt az utat követték a 19. század - főleg francia és német - matematikusai: Poncelet, Gergonne, Plücker, von Staudt, Hesse, Chasles, Möbius és mások, akik a klasszikus projektív geometriát megalkották; és lényegében ezen az úton próbál haladni az itt leírt geometriai algebra is.

Alapötletünket a gömbi-, projektív és a véges geometriák motiválták. Hazánkban, véges geometriákban a legjelentősebb alkotó Kárteszi Ferenc volt, aki 1950 és 1977 között az egyetem Ábrázoló Geometriai Tanszékének vezető professzora is volt. Bevezetés a véges geometriákba című könyve nagy hatást gyakorolt ezen dolgozatra is.

A témakörrel való fogalkozás aktualitását jelzi, hogy napjainkban is foglalkoznak a geometriára épített algebra gondolatával. Charles G. Gunn: Projectiv Geometry Algebra című művében ír erről (euklideszi geometriából indul ki).

Jelen dolgozat felépítése azt a folyamatot követi, ahogyan a Bsc folyamán a nem euklideszi geometriáktól eljutottam az axiomatizálási ismereteim megszerzéséig, ez a szemléletmód a megértés megkönnyítésést szolgálja.

Klasszikus projektív geometriában pontok és egyenesek vannak mint alapobjektumok. Ismert, hogy ha homogén koordináta-rendszert használunk, akkor van egy dualitás a pontok és az egyenesek között. Egy homogén koordináta reprezentálhat pontot és egyenest is. Olyan axiómákat próbálunk felépíteni, ami ezt a dualitást magában foglalja - egyesíti a pontokat és az egyeneseket - azaz csak egy féle alakzatunk lesz.

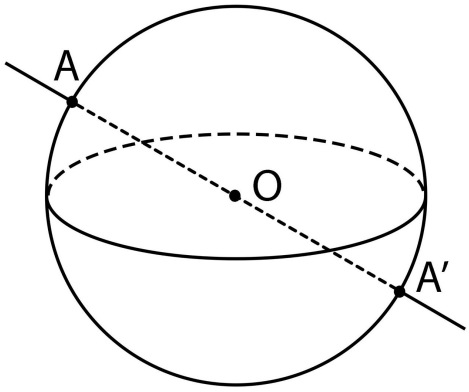
Megnézzük, hogy ez az axiomatika hogyan illeszkedik a klasszikus projektív geometria tételeihez.

1. A megértéshez szükséges gömbi geometriai alapismeretek

Klasszikus megközelítésekben a gömbi geometriát a 3 dimenziós euklideszi térben elhelyezett (általában egység sugarú) gömb, és a 3 dimenziós euklideszi tér pontjaival, egyeneseivel és síkjaival értelmezzük. Például:

Átellenes pontpár: A gömb középpontján áthaladó egyenes által kidöfött két pont. (Lásd 1 ábra)

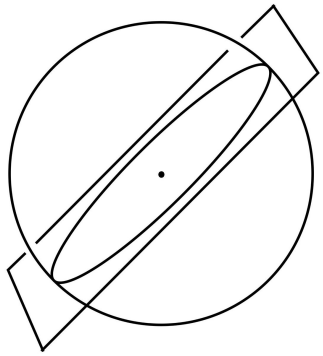
Gömbi főkör: A gömb középponján áthaladó sík által kimetszett egyenes. (Lásd 2 ábra)



1. ábra

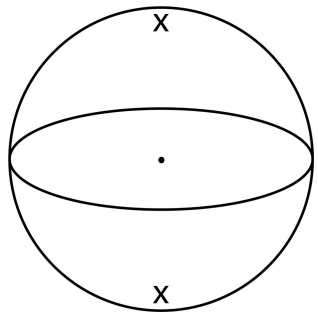
Jelen dolgozat más felépítést használ. Csak a gömb alakzatait és metrikáját használjuk az axiómák megértéséhez és bizonyos összefüggések szemléltetéséhez. Ilyenek az átellenes pontpárok, főkörök, távolságok.

Ahogy a síkgemetriában, a legegyszerűbb elemnek a pontot fogadjuk el a gömbön is. A gömbi ponthoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy másik pontot, ez lesz az átellenes pont.



2. ábra

Egy átellenes pontpár egyértelműen meghatároz egy főkört, azaz egy gömbi egyenest. Ez a mindkét ponttól egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok halmaza. Valamint, egyetlen olyan átellenes pontpár létezik, amelyhez tartozó főkör pont ez az egyenes lesz. Tekinthetünk rá úgy is mint egyenlítőre, az átellenes pontpárra meg mint sarkpontokra. (Lásd 3 ábra) Két gömbi főkör közös merőleges főköre, a metszéspontjaikhoz mint átellenes



3. ábra

pontpárhoz tartozó főkör lesz.

2. Projektív rendszer a gömbön

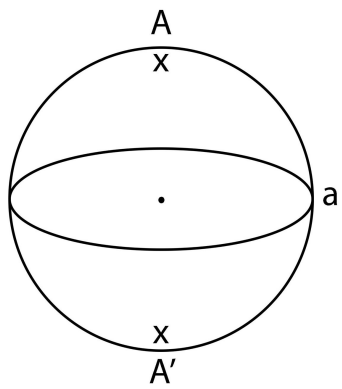
A klasszikus projektív geometriákban az illeszkedést nem tudjuk bináris művelettel leírni, mert az alapelemeink két különböző halmazhoz tartoznak (pontok és egyenesek), nem teljesülne rá, hogy két azonos halmazból vett elemen a műveletet elvégezve ugyanabból a halmazból kapjuk az eredményelemünket is.

Megpróbálunk olyan alapidomokat, elemeket, és hozzátartozó olyan műveletet megadni az illeszkedésre, amely ilyen értelembe bináris műveletet ad.

2.1. Alapgondolat

Ahhoz, hogy az alapelemeink ne két különböző halamazból származzanak, legyen az alapidom olyan, amelyben pont és egyenes is van. Ebből olyan kombinációra van szükségünk, amely részei egyértelműen meghatározzák egymást. A gömbi geometria tulajdonságai közt láthattuk, hogy az átellenes pontpár és a hozzájuk tartozó egyenlítő (egyenes) teljesíti az elvárásainkat.

Válasszuk tehát alapidomnak ezt a konstrukciót. (Lásd 4 ábra)

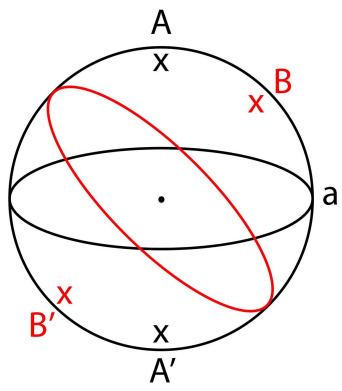


4. ábra

Ez nem csak azért szerencsés, mert így alapidomaink egy halmazból valók, hanem mert

olyan alakban kezelhetjük - legyen akár pont, akár egyenes - ahogy könnyebb beleilleszteni az adott konstrukcióba.

Már csak egy műveletre van szükségünk. Azt mondjuk, hogy van a és b két különböző elemünk, és azt vizsgáljuk, hogy erre milyen egyértelmű megfeleltethetést illeszthetünk, milyen harmadik elemet ad vissza a és b? (Lásd 5 ábra)



5. ábra

Az a, b elemek eredménye legyen egy harmadik c elem, amelyet úgy kapunk meg, hogy c egyenlítője A, A' és B, B' pontokon átmenő egyenes lesz, c sarkpontjai a és b egyenlítők metszéspontjai (átellenesek) lesznek.

Művelet: Ilyen értelemben a művelet általánosított, ahogy felsőbb algebrában szokványos, egymás mellé írással jelöljük: $ab = c$. Az egyszerűség kedvéért c-t, a és b elem szorzatának nevezzük el.

Vegyük észre, hogy a projektív sík homogén koordinátás modelljében egy homogén koordináta jelenthet pontot és egyenest is. Ha két homogén koordinátára, úgy gondolunk, hogy pontokat reprezentálnak, akkor a két pont egyenesének homogén koordinátáit a pontok homogén koordinátáinak vektoriális szorzatával számoljuk ki. És fordítva, ha a két homogén koordinátára, mint egyenesekre gondolunk, akkor a metszetük egy pont, mely homogén koordinátáját az egyenesek homogén koordinátájának vektoriális szorzata

adja.

De mi a helyzet, ha az egyikre, mint pontra és a másikra, mint egyenesre gondolunk, akkor mit ír le a vektoriális szorzat. A fenti gömbi modellben ez épp a pontból az egyenesre bocsájtott merőleges egyenest adja meg.

Azaz ez a szemlélet geometriai értelmet tud tulajdonítani az ilyen típusú szorzatnak is.

Megnézzük, hogy hogyan írhatunk fel valamilyen értelmes axióma rendszert ezzel a szorzattal, ami illeszkedik a gömbi modellünkhöz, majd, hogy ez a rendszer illeszkedik-e esetleg más ismert modellekhez is.

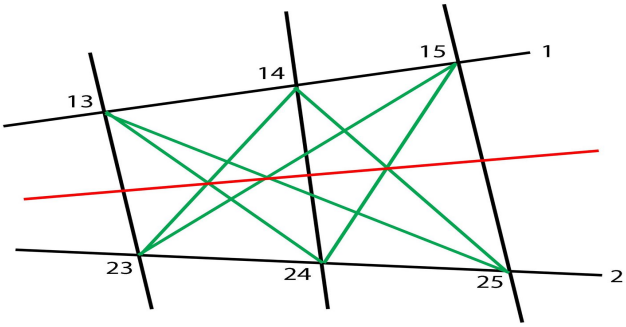
2.2. Axiómarendszer felépítése

A gömbön, mint modellen vizsgáljuk a művelet tulajdonságait, ezen a szinten úgy látjuk be, hogy a gömbigeometriára hivatkozunk, vagy a projektív sík ismert tételeire, ha a felírt formális szorzatokat ott értelmezni tudjuk homogén koordináták vektoriális szorzataként.

Összegyűjtjük az alap tulajdonságokat és pár tételt, amelyekből más tulajdonágok vagy tételek következhetnek, és megnézzük hogyan lehetne egy jó axiómarendszert létrehozni belőlük, vagyis melyeket válasszuk ki axiómának.

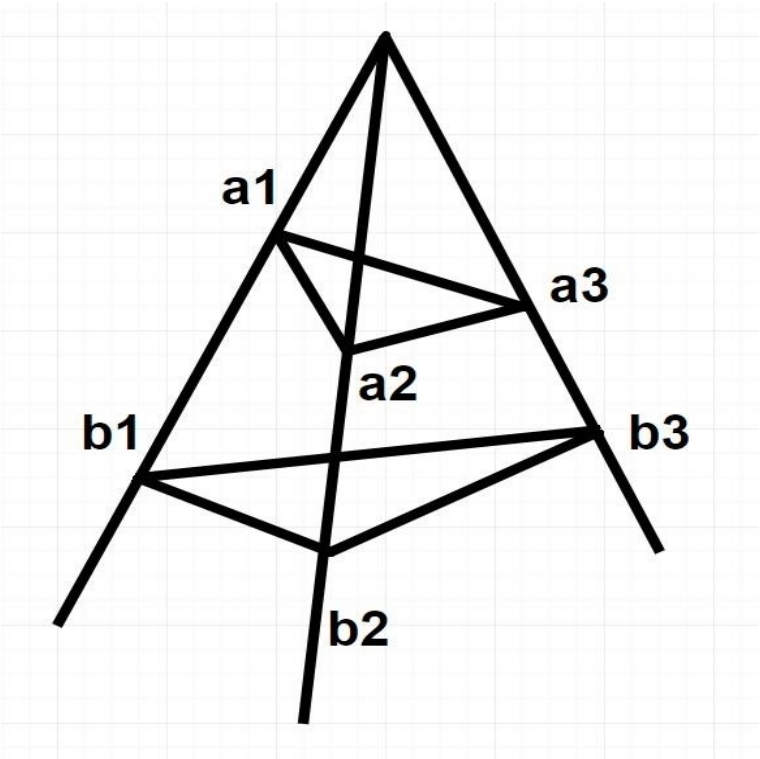
- minden $x, y \in S$ esetén, ha $x \neq y$ akkor értelmezve van xy szorzat, ami az S alaphalmazunk egy eleme
- $xy = yx$ azaz a szorzatuk kommutatív
- nem létezik általános egységelem (azaz olyan e, hogy $ea = a$ sőt $ab = a$ vagy $ba = a$ sem oldható meg)
- aa értelmezetlen (mert nincs egyértelmű eredménye)
- $ab = ac$ felírásból nem következik feltétlenül hogy $b = c$
- $ab = ac$ esetén vagy $b = c$ vagy $b \neq c$ de $ab = ac = bc$ a modellben ezek az elemek kollineáris pontoknak felelnek meg, mint illeszkedő elemek fogjuk ezeket definiálni
- Ha a, b, c, d különböző elemek, akkor $ab = ac$ esetén $ab = ac = ad = bc = bd = cd$ mivel mind a négy pont kollineáris ekkor a gömbi modellben.

- $(ab)(ac) = a$ hiszen az AB pontok egyenese és az AC pontok egyenese épp A-ban metsz. Ezt a tulajdonságot főaxiómának fogunk hívni később.
- $ab = c$ és $bc = a \implies ca = b$, hiszen $ab = c$ miatt c egyenesén van az A és B pont, azaz C-től $\pi/2$ távol vannak ezek a pontok, de hasonlóan $bc = a$ miatt A is $\pi/2$ távol van B és C pontoktól, azaz az ABC gömbi háromszög egy gömbnyolcad (oktáns) lesz. Ezt oktáns tételnek hívjuk később.
- inverz művelet: a, b ismert és adva van $ax = b$
  eltérően csoport/test elmélettől inverz létezése a és b viszonyától függ
  - ha a és b merőlegesek egymásra (ez alatt azt értjük hogy a két elem főkörei zárnak be egymással derékszöget) akkor végtelen sok x létezik
  - ha a és b nem merőlegesek egymásra $\nexists$ megoldás
- az előző tulajdonság következménye, hogy ha a-hoz és b-hez $\exists$ olyan x, hogy $ax = b$ akkor a gömbön végtelen sok olyan y létezik, amelyre $by = a$
- általában az asszociativitás nem igaz hiszen a gömbi modellben sem igaz
  $(ab)c \neq a(bc)$
- az asszociativitás továbbvitele
  $[(ab)c][(bc)a] = [(bc)a][(ca)b] \implies$
  $[(ab)c][(bc)a] = [(bc)a][(ca)b] = [(ca)b][(ab)c]$
  ezt geometrialilag úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontpáron mennek át a gömbön
- Pappos tétel (Lásd 6 ábrán):
  $13 \mid 24 \mid\mid 14 \mid 23 \mid\mid\mid 13 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 23 =$
  $13 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 23 \mid\mid\mid 14 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 24 =$
  $13 \mid 24 \mid\mid 14 \mid 23 \mid\mid\mid 14 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 24$
  képlet összefüggés igaz, mert az elemekre, mint pontokra és a szorzatra, mint az egyenesükre gondolva, épp a projektív sík Pappos tételét fogalmaztuk meg, ami igaz.
- Desargues tétel (Lásd 7 ábra)
  $(a_1b_1)(a_2b_2) = (a_2b_2)(a_3b_3) = (a_1b_1)(a_3b_3)$
  $[(a_1a_2)(b_1b_2)][(a_1a_3)(b_1b_3)] = [(a_1a_3)(b_1b_3)][(a_2a_3)(b_2b_3)] = [(a_1a_2)(b_1b_2)][(a_2a_3)(b_2b_3)]$



6. ábra

Ami hasonlóan az előzőhöz igaz, hiszen itt az elemeinkre, gondolva, a kettős szorzatok egyeneseket adnak, ezek szorzata metszéspontjaikat stb...



7. ábra

Az axiómáinkat az "Ockham borotvája" elv alapján választjuk meg, ez a mi esetünkben azt jelenti, hogy nem szaporítjuk feleslegesen a létezők számát - minél kevesebb axiómából szeretnénk minél több következtetést levonni.

Mivel saját rendszerünkbe nem geometriailag, hanem algebrailag szeretnénk leírni az összefüggéseket, a két véleményem szerint leghatékonyabb állítást választjuk axiómának, amelyből a legtöbb kihagyoott tulajdonságot le tudjuk vezetni. Így az axiómáink:

* kommutativitás: $ab = ba$
* főaxióma: $(ab)(ac) = a$,ha a műveletek elvégezhetőek, ami alatt azt értjük, hogy ha $a \neq b, c \neq a, ab \neq ac$

Azért van erre a kitételre szükség, mert a gömbi modellben, ha a, b, c különböző, de kollineáris pontok, akkor (ab)=(ac) és nem tudjuk elvégezni az (ab)(ac) műveletet.

Elméletileg, ha egyetlen elemünk lenne, kielégítené az axiómáinkat ha $aa = a$, de csak a legalább 2 elemű eseteket tárgyaljuk a továbbiakban. Vizsgáljuk meg, mely állítások következnek az axióma rendszerünkből, és melyek függetlenek tőle.

- kommutativitás és főaxióma miatt:
  $(ac)(ab) = (ac)(ba) = (ca)(ab) = (ca)(ba) = (ab)(ac) = (ba)(ac) = (ab)(ca) = (ba)(ca) = a$
- aa értelmezetlen. Általában ez a két axiómából következik, hogy nem lehet egyértelműen definiálni; ezt indirekt módon láthatjuk be. A fő axióma és a kommutativitás miatt: $a = (ab)(ab) = (ba)(ba) = b$ azaz $a = b$ ellentmond $a \neq b$ -nek. Tehát csak akkor lehet értelmes egy ilyen rendszer (több mint 1 elemen), ha az önmagával vett művelet nem (vagy legalábbis nem mindig) értelmezett. Pontosabban, ha egy elem két másik szorzataként áll elő, akkor ennek az elemnek az önmagával vett szorzata nem lehet értelmes, mert ellentmondásra jutnánk. Ez összhangban van a gömbi és projektív modellekkel, valamint a vektoriális szorzattal, ha a homogén koordináták körében tekintjük.

  Érdemes megjegyezni, hogy az axiómák megengednek elvileg egy olyan rendszert, hogy van benne egy univerzális elem u és bármely két különböző elem szorzata u lesz, és az "önszorzatok" nincsenek értelmezve (azaz az aa, uu alakú szorzatok nem értelmesek). Ez nem mond ellen a főaxiómának, hiszen az csak akkor "érvényes" ha

el tudjuk végezni a műveletet, de uu-t nem tudjuk elvégezni. Innen látszik, hogy néha fel kell majd tenni összefüggéseket, ha ki akarjuk zárni ezen patológikus eseteket.

- ha a, b, c három különböző elem akkor
  $ab = ac \Longrightarrow ab = ac = bc$, ezt könnyen beláthatjuk az axiómáinkból
  tegyük fel, hogy $ab = ac$ de $ab \neq bc$, ekkor ekkor az egyenlet mindkét oldalát beszorozhatjuk bc-vel
  $(ab)(bc) = (ac)(bc) \Longrightarrow b = c$ ellentmondáshoz jutunk

- ha a, b, c, d négy különböző elem akkor $(ab) = (cd) \Longrightarrow (ab) = (cd) = (ac) = (ad) = (bd) = (bc)$
  előzőhöz hasonlóan láthatjuk be, indirekt tegyük fel például, hogy $(ab) = (cd)$ de $\neq (ac)$
  beszorozhatjuk mindkét oldalt (ac)-vel
  $(ab)(ac) = (cd)(ac) \Longrightarrow a = c$ elentmondáshoz jutunk

- oktáns tétel: ha a,b,c három különböző elem akkor $ab = c, bc = a \Longrightarrow ac = b$
  Mivel $c \neq a$ ezért beszorozhatjuk $ab = c$-t $bc = a$-val így
  $(ab)(bc) = ca \Longrightarrow b = ca$

- ha a és b két különböző elem és $ab \neq b$
  $ax = b \Longrightarrow \exists y$ hogy $by = a$
  például y-nak megfelel az ab
  $by = (ax)(ab) = a$
  Azaz ha az axiómáknak megfelel egy modell, ahol pl. $ab \neq b$ minden a, b elempárra teljesül, akkor itt igaz a fenti állítás. Ilyen pl. a gömbi modellünk.

- Az asszociativitást nem tudjuk levezetni az axiómákból, hiszen se gömbi modellen, se a homogén koordinátákra nem igaz.

- Ha van egység elem, akkor csak azt a rendszert tudom hozzáilleszteni, amelyben bármely $a, b \neq e$ és $a \neq b$ szorzata az egység elem lenne (ha értelmezett). Hiszen $ae = a$ és $be = b$ tehát $(ae)(be) = e$.

2.1. Definíció. Ha $ab = bc = ac$ teljesül három különböző elemre, akkor azt mondjuk, hogy a három elem illeszkedik egymáshoz. Megjegyzés: A modellben ez azt jelentette, hogy a három pont 1 egyenesre illeszkedett vagy másképp a három egyenes 1 ponton ment át.

Definiáltuk az alapelemünket, a műveletet és az axiómarendszerünket is, ezzel geometriai alapokon nyugvó algebrai rendszert határoztunk meg.

A következő fejezetekben azt fogjuk vizsgálni, hogy a klasszikus projektív geometria fontos tételei hogy néznek ki algebrailag, illetve látni fogjuk, hogy az illeszkedésre megadott bináris művelet miatt egyes konstrukciók sokkal könnyebben írhatók le ilyen módon.

2.3. Új jelölésmód bevezetése

A "projektív gömböt" definiáló műveletet egymás mellé írással jelöljük ab; a kapott c eredmény elemet szorzatnak neveztük el.

A művelet átalános esetben nem asszociatív: $(ab)c \neq a(bc)$. Az abc kifejezés tehát értelmezhetetlen lenne zárójelek nélkül. Összetett kifejezéseknél zárójelek sokaságára lenne van szükség, ami a jelölést nehézkessé teszi. Ennek elkerülésére, megállapodhatunk egy másféle jelölésrendszerben, amely kezdetben szokatlannak akár zavarónak tűnhet, de a hosszabb távú használat során a hátrányokkal szemben az előnyök javára billen a mérleg.

A jelölésrendszer legyen a következő:

A műveletek végrehajtása szigorúan balról jobbra történik. Az ettől való eltérést függőleges vonalakkal jelöljük. Legerősebb kötést az egymás mellé írás jelenti; ennél gyengébb az egyszeres vonal; még gyengébb a kétszeres vonal; és így tovább. Az általunk vizsgált esetekben háromnál több vonalra nincs szükség.

Bármilyen kifejezés átírható a lehető legkevesebb vonalat tartalmazó alakba, a jobb megértés kedvéért néha érdemes lehet a minimálisnál több vonalat tartalmazó alakot használni.

Példák zárójeles és vonalas alakokra:

$$123 = (12)3;\ 231 = (23)1;\ 312 = (31)2$$

$$123 \mid 231 = [(12)3][(23)1]$$

Hesse konfiguráció:
A három asszociatív elem egy közös elemre illeszkedik (a magasságpont-tétel általánosítása).

- Zárójelekkel: $[(ab)c][(bc)a] = [(bc)a][ca)b] = [(ca)b][(ab)c]$
- Vonalas jelöléssel:$abc \mid bca = bca \mid cab = cab \mid abc$

Négy elemre épülő kifejezés: $1234 = [(12)3]4$
Ennek megfelelően a következő vonalas kifejezések valamennyien egyenlők egymással, ahol a kommutativitást is vegyük figyelembe:
$1234 = 3 \mid 12 \mid 4 = 3 \mid 21 \mid 4 = 4 \mid 123 = 4 \mid\mid 3 \mid 12$

Fano konfiguráció
- Zárőjelekkel: $[(12)(34)][(13)(24)] = [(13)(24)][(14)(23)] = [(14)(23)][(12)(34)]$
- Vonalas jelöléssel: $12 \mid 34 \mid\mid 13 \mid 24 = 13 \mid 24 \mid\mid 14 \mid 23 = 14 \mid 23 \mid\mid 12 \mid 34$

Pappos konfiguráció:
- Zárőjelekkel:
$\big\{[(12)(34)][(14)(23)]\big\}\big\{[(13)(25)][(15)(23)]\big\} =$
$\big\{[(13)(25)][(15)(23)]\big\}\big\{[(14)(25)][(15)(24)]\big\} =$
$\big\{[(14)(25)][(13)(24)]\big\}\big\{[(13)(24)][(15)(24)]\big\}$
- Vonalas jelöléssel:
$13 \mid 24 \mid\mid 14 \mid 23 \mid\mid\mid 13 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 23 = 13 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 23 \mid\mid\mid 14 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 24 = 14 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 24 \mid\mid\mid 13 \mid 24 \mid\mid 15 \mid 24$

3. Axiómarendszerünk a projektív geometria tételein

3.1. Pappos-tétel

Ebben a fejezetben a projektív geometria egy fontos tételét tárgyaljuk a mi algebrai rendszerünkben, nem tudjuk közvetlen az axiómákból levezetni, de ez nem meglepő, hiszen az általános projektív sík axiómáitól is független.

Az eredeti tétel azt mondja ki, hogy adott A és B egyenesem, ezen felveszem A_1, A_2, A_3 és B_1, B_2, B_3 pontokat, akkor az A_1B_2 és A_2B_1 egyenes metszete A_1B_3 és A_3B_1 metszete valamint az A_2B_3 és A_3B_2 metszéspontja egy egyenesre illeszkedik.

A mi projektív rendszerünkben ez kétféleképpen is megoldható hiszen nem teszünk különbséget pont és egyenes között, tehát kifejezhetjük 6 (itt pont formában interpretáljuk

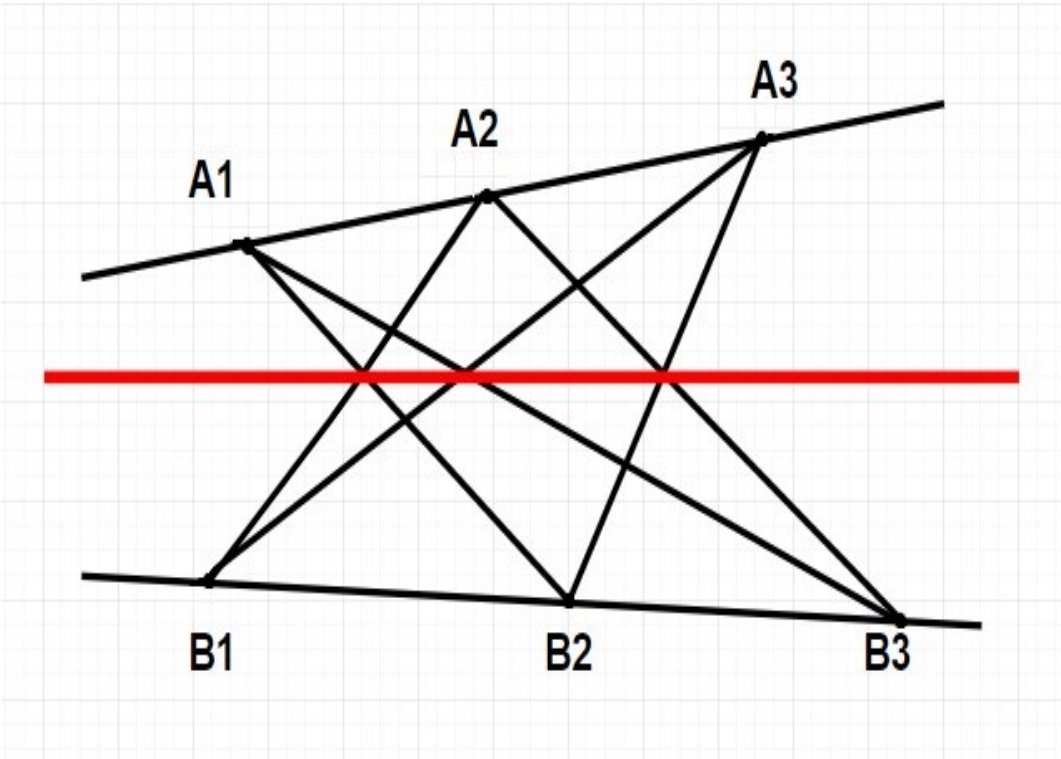
az elemeket) illetve 5 (mint egyeneseket interpretáljuk az elemeket) elem megadásával.

3.1.1. 6 elemmel megadott Pappos konfiguráció

Feltétel lefordítása a mi nyelvünkre:

A_1, A_2, A_3 egy egyenesen vannak $\Longrightarrow A_1A_2 = A_2A_3 = A_1A_3$

B_1, B_2, B_3 egy egyenesen vannak $\Longrightarrow B_1B_2 = B_2B_3 = B_1B_3$ (Lásd 8 ábra)



8. ábra

$\Longrightarrow A_1B_2 \mid A_2B_1 \mid\mid A_2B_3 \mid A_3B_2 = A_2B_3 \mid A_3B_2 \mid\mid A_1B_3 \mid A_3B_1 = A_1B_2 \mid A_2B_1 \mid\mid A_1B_3 \mid A_3B_1$

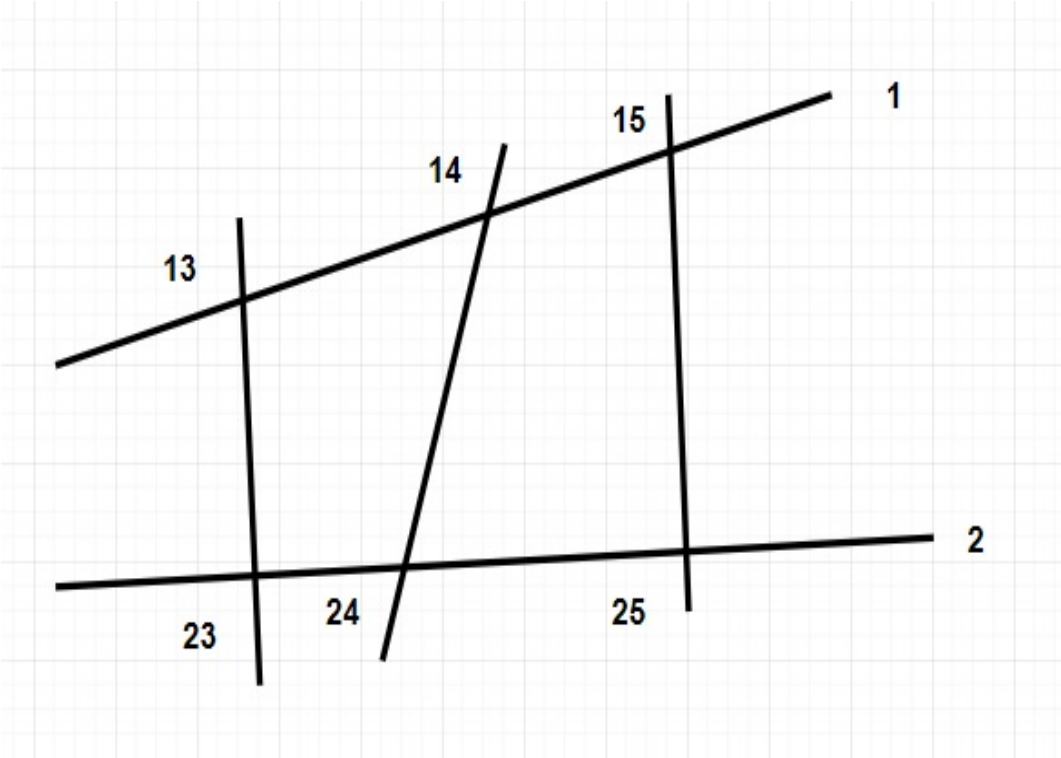
3.1.2. 5 elemmel megadott Pappos konfiguráció

A főaxióma miatt feltételek egyből láthatóak (mivel itt a modell hozzáillesztésénél más formában tekintek az elemeinkre, új jelölést használunk) (Lásd 9, 10 ábrák)

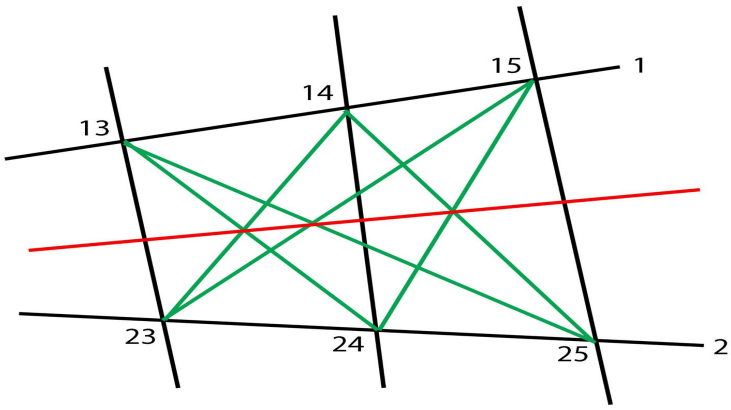
$13 \mid 14 = 14 \mid 15 = 13 \mid 15 = 1$

$23 \mid 24 = 24 \mid 25 = 23 \mid 25 = 2$

Azaz a pappos tétel a következőképpen fogalmazható meg:



9. ábra



10. ábra

$$13 \mid 24 \mid\mid 14 \mid 23 \mid\mid\mid 13 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 23 =$$

$$13 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 23 \mid\mid\mid 14 \mid 25 \mid\mid 15 \mid 24 =$$

13 | 24 || 14 | 23 ||| 14 | 25 || 15 | 24

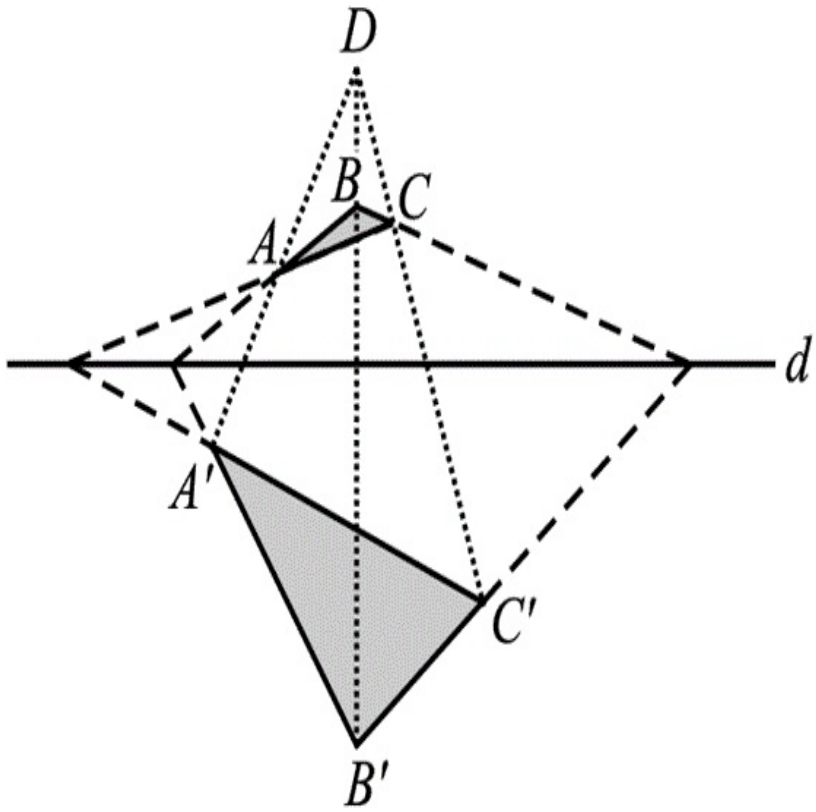
3.2. Desargues-tétel

3.1. Definíció. Két háromszöget oldalaira nézve perspektívnek nevezünk, ha az egymásnak megfelelő oldalegyenesek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.

3.2. Definíció. Két háromszöget csúcsaira nézve perspektívnek nevezünk, ha az egymásnak megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást. ([1])

Vizsgáljuk meg, hogyan tudnánk felírni a mi értelmezésünk szerint a Desargues-tételt.

A tétel azt mondja ki hogy, ha két háromszög egy egyenesre nézve perspektív, akkor egy pontra nézve is perspektív, és ez fordítva is igaz. (Ha két háromszög perspektív egy pontra nézve, akkor egy egyenesre nézve is.) (Lásd 11 ábra)



11. ábra

A mi rendszerünkbe nézve:

$AA' \mid BB' = BB' \mid CC' = AA' \mid CC'$ a perspektív centrum

$AC \mid A'C' \mid\mid AB \mid A'B' = AB \mid A'B' \mid\mid BC \mid B'C' = AC \mid A'C' \mid\mid BC \mid B'C'$ a perspektív tengely

Azt sejtjük, hogy mivel a Desargues tétel 3 Pappos tétel segítségével bizonyítható, ezért az elemeink alkalmas kiosztásával csak a Pappos tételt feltéve az eddigi algebrai azonosságokkal ez igazolható, hiszen az illeszkedést jól megfogja a mi rendszerünk is. Idő hiányában ennek alapos végigvitele nem történt sajnos meg.

3.3. Napier: Pentagramma Mirificum

Ebben a fejezetben a rendszerünk viselkedését vizsgáljuk Napier 400 éves konstrukcióján.

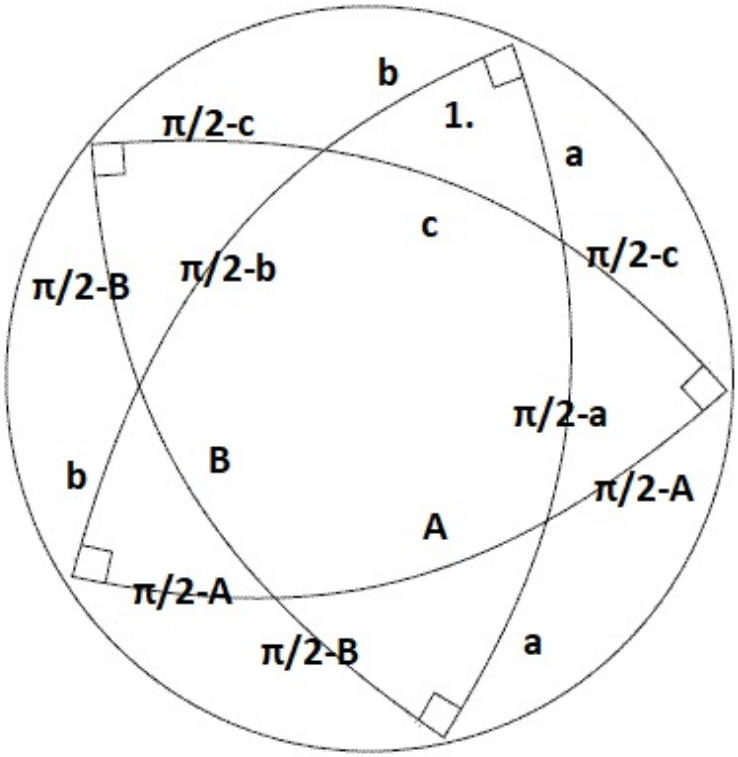
A csodálatos ötszög egy csillag alakú sokszög a gömbön, amely 5 főkörből áll, amelyek belsőszöge derékszögű. Ezt a formát John Napier a Mirifici Logarithmorum canonis descriptio (1614) a logaritmusok csodálatos szabályának leírása - című művében találhatjuk meg. [2]

Egy derékszögű háromszögbefogóját és átfogóját meghosszabbítjuk, úgy, hogy az átfogó hossza $\pi/2$ - negyed főkör a gömbön - hosszúságúra egészítjük ki, és ennek végpontjából bocsátunk merőlegest a befogó meghosszabbítására. Ezzel a lépéssel megkapjuk a következő derékszögű háromszögünket, a kezdeti derékszögű háromszögből kiindulva 4 lépés megtétele után visszaérünk a kiindulási háromszögönkbe. (Lásd 12 ábra)

Szeretnénk megmutatni, hogy a rendszerünkben felírva a gömbi elemeket könnyen láthatjuk az feni állítás igazságát.

Ehhez kezdetben 3 különböző elemre (a, b, c) lesz szükségünk amelyek egy derékszögű háromszöget határoznak meg. Ezt több féleképpen is interpretálhatjuk pont és egyenesek formájában.

A 13 ábrán látható interpretációban azt az esetet használtuk fel amikor mind a három elemünk egy pont. Ekkor a derékszögű háromszögünket úgy kaphatjuk meg, hogy a és b elemekből képzem ab-t, b-t továbbiakban nem használom fel, a és c elemekből ac-t, a derékszögnél lévő csúcsot nem használom fel, hanem ab és c elemek szorzatából abc-t veszem ami épp a csúcs lesz. Így a háromszögünket az illeszkedési lánc egy speciális



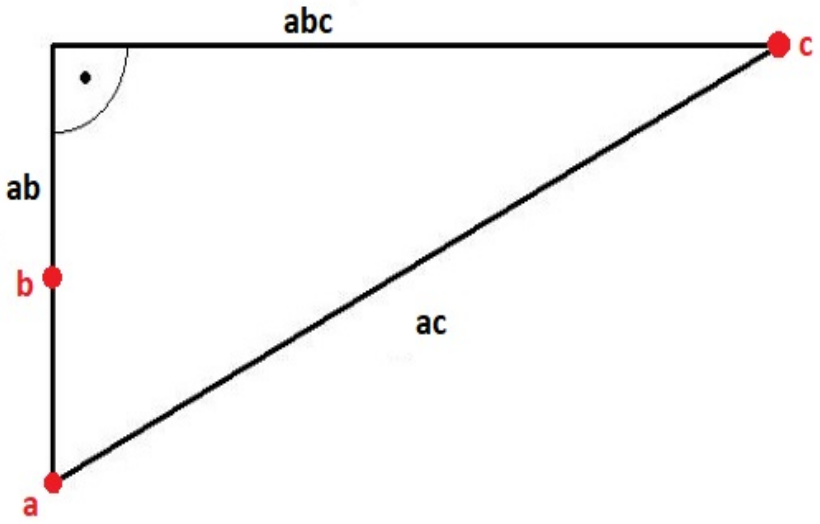
12. ábra

formájával, (5 elemű) ciklussal adtuk meg: $a - ab - abc - c - ac$ csúcs-oldal-oldal-csúcs-oldal ami a mi rendszerünkbe annyit jelent, hogy bármely elem pontosan a két mellette lévő elem szorzata. (Lásd (13 ábra)

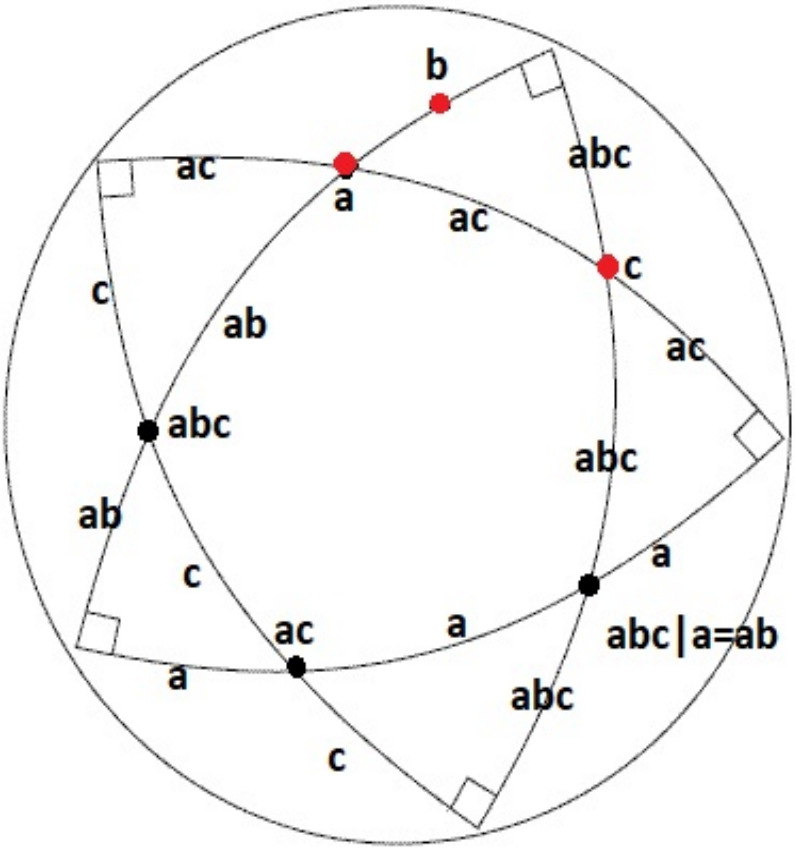
$$ab \mid c = abc;\ abc \mid ac = c;\ c \mid a = ac;\ ac \mid ab = a;\ a \mid abc = ab$$

A pentagrammát alkotó 5 darab háromszög mind az
$a - ab - abc - c - ac$ ötciklus különféle megjelenései. Lásd 14 ábrát ahol sorba haladva a háromszögeken, használva a $\pi/2$ meghosszabbítás és szögek miatt az új háromszögek új befogóit fel tudjuk írni korábbi elemekkel. Pl a 2. háromszögben abc, ac, a az a oldalt.

Táblázatba szedve jól látható az egyes elemek háromszögbeli elem szerepe, például, hogy az adott elem mindig két szomszédos háromszög közös csúcsa. (Lásd 15 ábra)



13. ábra



14. ábra

	a	ab	abc	c	ac
1.Δ	csúcs	befogó	befogó	csúcs	átfogó
2.Δ	befogó	csúcs	átfogó	csúcs	befogó
3.Δ	átfogó	csúcs	befogó	befogó	csúcs
4.Δ	befogó	befogó	csúcs	átfogó	csúcs
5.Δ	csúcs	átfogó	csúcs	befogó	befogó

15. ábra

3.4. Hesse-tétel

A klasszikus projektív geometriában Chasles és Hesse foglalkoztak az alábbi konfigurációval, véges geometriákban nem foglalkoztak vele, mert megkülönböztették a pontot és az egyenest (nem volt értelme ponból merőlegest húzni az egyenesre). Feltették, hogy;

- bármely két ponthoz egyetlen rájuk illeszthető egyenes tartozik
- bármely két egyenes metszéspontja egyértlműen meghatároz egy pontot
- létezik legalább 4 különböző pont

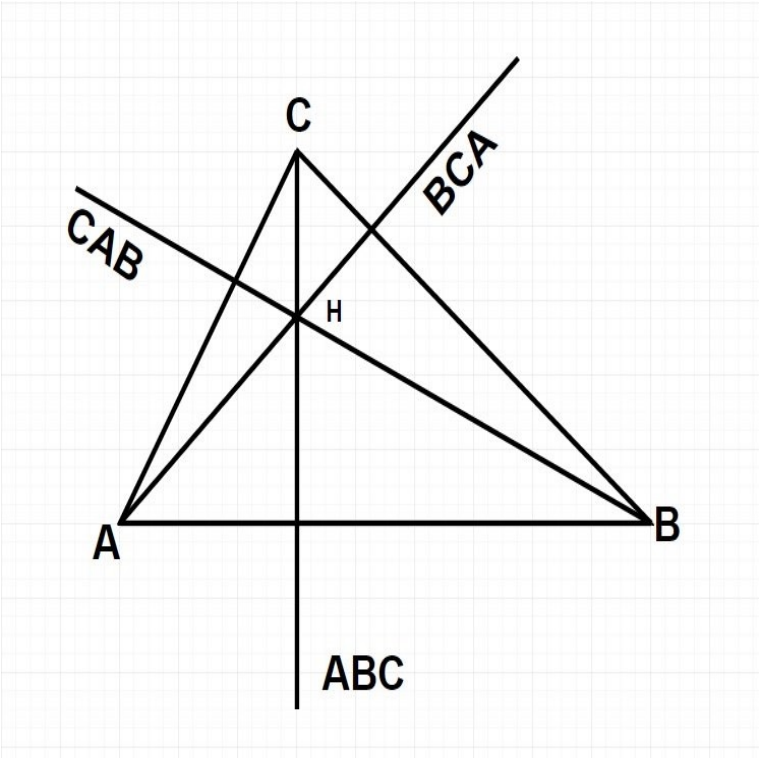
•• de pont és egyenes viszonyáról nem állít semmit

Próbáljuk meg, Hesse klasszikus projektív geometriában alkotott tételét átvenni a mi rendszerünkbe. Ezt a továbbiakban Hesse-tételnek nevezzük.

$$ABC \mid BCA = BCA \mid CAB = CAB \mid ABC$$

Ha ABC Hesse eleme H, akkor AHB Hesse eleme C, a négy idom szerepe szimmetrikus.

Ez gömbi modellen triviálisan igaz, és létezik véges modell amelyben teljesül, például 4.0.2 illeszkedési táblájában a nem önilleszkedő elemek Hesse konfigurációt alkotnak. A gömbön vegyük észre, hogy hogyha $H = ABC|BCA$ azaz ACB Hesse idoma H, akkor pl. ABH Hesse idoma C. A 16 ábráról könnyen leolvasható, hogyha egy olyan modellünk



16. ábra

van, ahol szorzás interpretációja épp a ábra szerinti illeszkedési tulajdonságnak felel meg, akkor $ABCH$ "négyidom" egy olyan alakzat, hogy bármely 3 elem Hesse idoma épp a 4. elem. Ez pl. a 7 pontú véges geometriában is megjelenik, amire az előbb hivatkoztunk.

4. Projektív rendszer véges modelleken

A korábbi fejezetekben az elemeink számának minimumára tettünk csak kikötést, a továbbiakban olyan véges elemszámú modelleket vizsgálunk, amelyekhez hozzá tudjuk illeszteni a projektív rendszerünket. Számos projektív síkon értelmezett tételt vizsgálhatunk ilyen modelleken is.

A véges elemszámú modelljeinkben megjelennek az önilleszkedő elemek, ami azt jelenti, ha a önilleszkedő elem akkor a-nak az összes ráilleszkedő elemmel vett szorzata egyenlő a-val.

A véges modelljeinket jól szemlélteti az illeszkedés-, és művelet tábla, amelyben az önilleszkedő elemeket pirossal jelöltük az átláthatóság végett.

Fontos, hogy önilleszkedő elem nem illeszkedhet másik önilleszkedő elemre.
Ezt indirekt mutathatjuk meg.
Tegyük fel, hogy a, b két különböző önilleszkedő elem és b illik a-ra. Ekkor:
a-hoz $\exists$ b, hogy $ab = a$
b-hez $\exists$ c, hogy $bc = b$
akkor az $ab \mid bc$-nek főaxióma miatt egyenlőnek kéne lennie b-vel, de $ab = a$ és $bc = b$ miatt $ab \mid bc = a \mid b = a$ ellentmondáshoz jutunk.

Ez az illeszkedési táblában úgy jelenik meg, hogy önilleszkedő (piros) elem oszlopában - rá illeszkedő elemek - nem szerepel másik önilleszkedő (piros) elem.

4.0.1. 3 elemű modell

A legegyszerűbb modell amely kielégíti az axióma rendszerünket 3 elemből áll (kissebb elemszámú modellt nem érdemes vizsgálni).

Már három elemből két nem izomorf modell építhető fel. Az ismertebb modell nem tartalmaz önilleszkedő elemet és bármely két elem szorzata mindig a harmadik elemmel egyenlő. Ez gömbi interpretációban az oktánsnak felel meg (Lásd17 ábra).

Illeszkedés tábla		
1	2	3
3	2	1
3	1	2

Művelet tábla			
-	1	2	3
1	-	3	2
2	3	-	1
3	2	1	-

17. ábra

A másik három elemű modellben két önilleszkedő elem is megjelenik (Lásd 18 ábra).

Illeszkedés tábla		
1	2	3
2	3	1
3	2	1

Művelet tábla			
–	1	2	3
1	–	3	1
2	3	–	1
3	1	2	2

18. ábra

4.0.2. 7 elemű modell

Háromnál több elemű modellt már nem tudunk létrehozni önilleszkedő elemek nélkül, vizsgáljuk meg hogy néz ki ha hét elemből építjük fel (Lásd 19 ábra). Ezen a modellen már vizsgálhatjuk a Napier és a Fano konfigurációt is.

A Napier féle csodálatos ötszög létezéséhez elég egy öt elemű ciklust keresnünk, ennek a különböző mejelenései már megadják az egész konstrukciót.

A ciklus első két elemét szabadon tudjuk kiválasztani, a harmadiktól már figyelni kell, hogy semelyik három idom nem illeszkedhet egy idomra, ezt az illeszkedési tábla segítségével könnyen ellenőrizhetjük. Ilyen megválasztés alapján:

$$2 - 1 - 4 - 6 - 3$$

minden feltételnek eleget tesz, minden elem a két mellette lévő elem szorzataként áll elő.

$$(24 = 1;\ 16 = 4;\ 43 = 6;\ 62 = 3;\ 31 = 2)$$

Vizsgáljuk meg a klasszikus projektív geometria Fano-síkját és próbáljuk meg hozzáilleszteni a rendszerünkhez. Az eredeti tételben, egy valódi négyidom (4 elem közöl semelyik 3 nem illik egy idomra) átló elemeiről azt tudjuk mondani, hogy nem illenek egy idomra - geometriailag annyit jelent, hogy nem illeszkedhetnek egy egyenesre.

Keressünk tehát egy valódi Hesse idomot az illeszkedés táblánkon, a négy nem önilleszkedő elem pont jó lesz - nincs olyan oszlopa amelyben egy elemre 3 nem önilleszkedő - fekete - elem illene, szorzataikkal is ellenőrizhetjük (ha minden szorzat eredménye kü-

Illeszkedés tábla						
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3
1	7	6	5	4	3	2

Művelet tábla							
-	1	2	3	4	5	6	7
1	-	1	2	1	4	4	2
2	1	-	7	1	7	3	3
3	2	7	-	6	7	6	2
4	1	1	6	-	5	6	5
5	4	7	7	5	-	4	5
6	4	3	6	6	4	-	3
7	2	3	2	5	5	3	-

19. ábra

lönböző elem, akkor semelyik három nem illik egy idomra):

$$74 = 5;\ 73 = 2;\ 72 = 3;\ 43 = 6;\ 42 = 1;\ 32 = 7$$

Ekkor az átló elemek rendre: $\underbrace{74 \mid 32}_{5|7}; \underbrace{72 \mid 43}_{3|6}; \underbrace{73 \mid 42}_{2|1}; \Longrightarrow 5;\ 6;\ 1;$ ezekről pedig leolvashatjuk az illeszkedési táblában, hogy az eredeti tételtől eltérően egy idomra (4) illeszkednek.

4.0.3. 13 elemű modell

Felépíthetünk 13 elemből is modellt, amelyet a rendszerünkhöz tudunk illeszteni (Lásd 20 ábra), és például ezen is megvizsgálhatjuk a Fano-konfigurációt. Az előzőhöz hasonlóan itt is egy négyidomot keresek, majd megizsgálom az átló elemeit. A lépések semmiben nem különböznek az előzőekben használtaktól, csak most a 13 elemű illeszkedési tábla alapján hajtom végre őket. Így a négyidomunk: 13, 12, 11, 10 lesznek. Láthatjuk az illeszkedési táblán, hogy semelyik három elem nem illeszkedik egyre. Az ezekből képzett átló elemeink tehát:

Illeszkedés tábla												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3	4
7	8	9	10	11	12	13	1	2	3	4	5	6
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

20. ábra

$$\underbrace{13 \mid 12 \,||\, 11 \mid 10}_{2|4}, \quad \underbrace{13 \mid 11 \,||\, 12 \mid 10}_{7|8}, \quad \underbrace{13 \mid 10 \,||\, 12 \mid 11}_{5|3}$$

$$24 = 3, \quad 78 = 7, \quad 53 = 2$$

ezek az elemek pedig nem illeszkednek egy egyenesre.

A Fano sík mintájára létrehozott rendszereink tehát függetlenek az axiómáinktól, tudunk olyan esetet is létrehozni ahol az átló idomok egy idomra illeszkednek, és olyat is ahol nem.

4.1. Összefoglaló

Az előbbiekben felépített algebrai rendszer természetesen csak egyik lehetséges megközelítése a projektív geometria tárgykörébe tartozó fogalmaknak.

Bizonyos esetekben előnyös lehet, hogy az algebrai fogalmakat gömbi geomatria segítségével szemléletessé tehetjük, egyes bizonyítások egyszerűbbekké, algebrailag pontosabban megfogalmazhatóbbá válnak.

Hivatkozások

[1] Papp Ildikó Hoffmann Miklós. *Affin és projektív geometria.* https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0038_matematika_Hoffmann_Miklos_Papp_Ildiko-Affin_es_projektiv_geometria/ch06s03.html (Hozzáférés ideje: 2019. december 12).

[2] Napier John. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.* https://archive.org/details/mirificilogarit00napi/page/n31 (Hozzáférés ideje: 2019. december 12).