Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

A Hénon–Heiles modell vizsgálata

Szakdolgozat

Vilmos Mónika

Matematika BSc

Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Dr. Csomós Petra

egyetemi adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2020

NYILATKOZAT

Név: VILMOS MÓNIKA

ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA BSC

NEPTUN azonosító: HU73IB

Szakdolgozat címe:
A HÉNON-HEILES MODELL VIZSGÁLATA

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020.05.25

Vilmos Mónika

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, Dr. Csomós Petrának, aki szakértelmével és fáradhatatlan munkájával hatalmas segítséget nyújtott dolgozatom elkészítésében. Segített a téma kiválasztásában, a konzultációk során hasznos magyarázatokkal, tanácsokkal szolgált, gondosan átnézte a szakdolgozatomat. Külön köszönöm türelmét és megértését, a rengeteg belém fektetett idejét és energiáját és nem utolsó sorban azt a végtelen motivációt és bíztatást, ami nélkül ez a dolgozat nem készülhetett volna el.

Hálásan köszönöm szüleimnek és testvéremnek, amiért tanulmányaim során mindig feltétel nélkül támogattak, folyamatosan ösztönözték munkámat, bíztattak céljaim elérésében.

Köszönet illeti barátaimat, akik mindig mellettem álltak, lelkileg támogattak.
Továbbá köszönöm szaktársaimnak, hogy végig lelkesítettük egymást, és segítettük egymásnak kisebb-nagyobb felmerülő probléma esetén.

Végül szeretném megköszönni az ELTE valamennyi oktatójának, akik tudásukkal és szakértelmükkel segítettek idáig eljutnom és hozzájárultak, hogy a diplomámhoz szükséges tudást elsajátítsam.

Bevezetés

Szakdolgozatom témája a galaxisok dinamikájának leírásakor fontos szerepet játszó Hénon–Heiles modell és annak vizsgálata matematikai módszerekkel. A fizikában, azon belül is a káosz, a kaotikus viselkedés vizsgálatában ez a modell fontos szerepet tölt be. A dolgozatomban mi inkább ennek a modellnek a matematikai vonatkozásával foglalkozunk.

Az 1950-es évek végén és a 60-as évek elején újra felmerült az érdeklődés a galaxis potenciáljában mozgó csillagok mozgásának harmadik izoláló integrálja iránt. (A galaktikus dinamikai irodalomban az első integrál két típusát különböztetik meg: izoláló és nemizoláló. Ezek fontos szerepet töltenek be dinamikai rendszerek pályáinak vizsgálata során.)

1964-ben Michel Hénon és Carl Heiles egy cikket tettek közzé *The Applicability of the Third Integral Of Motion: Some Numerical Experiments* címmel [1]. Ebben a csillagok nemlineáris mozgását vizsgálták egy galaktikus középpont körül, síkra korlátozva. Azaz egy olyan egyszerűsített, idealizált galaxismodellt tanulmányoztak, amelyben a csillagok a szabályos pályák mellett kaotikus pályákon is mozoghatnak.

Eddig a galatikus dinamikában csak két izoláló integrál volt ismeretes: a teljes energia és a galaxis szimmetriatengelye körüli impulzusmomentum. Felmerül a kérdés, hogy létezik-e esetleg még ezeken kívül izoláló integrál. Eredeti ötletük tehát a mozgás harmadik izoláló integráljának megtalálása volt.
Annak ellenére, hogy eddig csak két izoláló integrált ismertek, a Nap közelében lévő csillagok megfigyelése és a pályák számszerű kiszámítása során azt kapták, hogy bizonyos esetekben ezek a közeli pályák olyan viselkedést mutattak, mintha három izoláló integráljuk lenne.
Ennek vizsgálata céljából egyszerűsített, kétdimenziós, nemlineáris, tengelyszimmetrikus potenciált vettek fel, és megállapították, hogy a harmadik izoláló integrál csak korlátozott számú kezdeti feltételnél létezik. Arra az eredményre jutottak, hogy kis energiával indítva a csillagot, a megoldás még reguláris, viszont az energia növelésével a vizsgált pálya egyre „zavarosabb” lett. Ebből az egyszerűsítésből a potenciált Hénon–Heiles potenciálnak nevezzük.

Ebben az esetben ez azt jelenti, hogy bizonyos esetekben nem létezik a harmadik izoláló integrál a Hénon–Heiles-féle galaxismodellben. A modern perspektívában a kezdeti feltételeket, amelyek nem rendelkeznek a mozgás harmadik izoláló integráljával, kaotikus pályáknak nevezzük. A harmadik izoláló integrál léte a Tejútrendszer kinematikájának statisztikája szempontjából jelentős. Az, hogy a Galaxisnak van-e harmadik izoláló integrálja, még nem eldöntött kérdés. Ha nem létezne a harmadik izoláló integrál, az azt jelentené, hogy valószínűleg léteznek kaotikus pályák is a Tejútrendszerben. [4]

A dolgozatban ezzel a modellel foglalkozunk, ezt vizsgáljuk matematikai szemmel. Megmutatjuk, hogy a Hénon és Heiles által felírt egyenlet egy Hamilton-rendszert alkot. Megvizsgáljuk a rendszer egyensúlyi pontjait és azok stabilitását, valamint ezeket fázisképek és Poincaré-metszetek segítségével szemléltetjük. Ez részletesen a következőképpen épül fel:

Az első fejezetben bevezetjük a modell tanulmányozásához szükséges matematikai hátteret. Kimondjuk a vizsgálat során használandó, eddig tanult alapvető fogalmakat és tételeket.

A második fejezet a Hénon–Heiles modell felírásáról szól. Ebben a fejezetben térünk ki a tanulmányaim során eddig nem tanult matematikai fogalmakra. Bevezetjük a Hamilton-rendszerek és a Poincaré-metszetek definícióját, kimondjuk az ezekkel kapcsolatos, a továbbiakban szükséges tételeket és állításokat.

A harmadik fejezetben megvizsgáljuk a modellt az eddig jól ismert módszerek alapján. Megmutatjuk, hogy a Hénon és Heiles által felírt egyenlet Hamilton-rendszert alkot. Meghatározzuk a rendszer egyensúlyi helyzeteit, valamint azok stabilitását. Programozási ismereteink segítségével kirajzoljuk a stabilitás szemléltetésére általában alkalmazott fázisképeket. Megvizsgáljuk ezek alakját és típusát. Ezenkívül szemléltejük még a kapott eredményeket Poincaré-metszetek segítségével is. Ezeket mind a MATLAB numerikus programcsomag segítségével hoztuk létre. A programkódok megtalálhatóak a Függelékben.

A dolgozatban szeretném megmutatni, hogy egy ilyen bonyolult fizikai tartalommal rendelkező modellt is tudunk egyszerű módszerek segítségével vizsgálni.

A modell vizsgálata ezenkívül több szempontból is hasznos. A rendszer dinamikája fontos a nemlineáris Hamilton-rendszerek aktív területén végzett kutatás szempontjából. Poincaré-metszeteknél ez az egyik legegyszerűbb modell, melyben a kaotikus viselkedés megjelenik.

1. fejezet

Alapvető fogalmak és tételek

Az első fejezetben bevezetünk néhány eddig tanult alapfogalmat. Kimondjuk a fontos kapcsolódó definíciókat, tételeket és állításokat, áttekintjük a matematikai hátteret. Az itt található tételeket és állításokat nem bizonyítjuk, mert a dolgozat keretei ezt nem teszik lehetővé. A megadott forrásokban minden bizonyítás megtalálható.

1.1. Differenciálegyenletek

Differenciálegyenleteket a matematikán kívül számos más területen használhatunk. Ezek segítségével leírhatunk bonyolultabb fizikai, kémiai, biológiai vagy akár közgazdasági modelleket is. Segít értelmeznünk számos időben változó modellt, viszonylagos képet kapunk ezek folyamatairól.
Ennek a résznek a célja, hogy bevezessük a differenciálegyenleteket, valamint kimondjuk azok egzisztenciájának és unicitásának feltételeit.
E részben Simon L. Péter: *Differenicálegyenletek: Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba* [5], *Közönséges differenicálegyenletek* [6], valamint *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek* [7] című művei voltak segítségemre. Ezenkívül felhasználtam még a Differenciálegyenletek [10] és a Folytonos modellezés [9] kurzusok során íródott jegyzeteimet is.

1.1.1. Definíció. *Differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan egyenleteket, melyekben az ismeretlen egy egyváltozós vagy többváltozós függvény, és az egyenletben az ismeretlen függvény valamely deriváltja is előfordul.

1.1.2. Definíció. *Közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük azokat a differenciálegyenleteket, melyben az ismeretlen függvény egyváltozós.
Legyen $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, ahol $d \in \mathbb{N}$, $f\colon T \to \mathbb{R}$ képező folytonos függvény, $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ képező folytonosan differenciálható függvény. Ekkor az

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1.1}$$

egyenletet *közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük.

1.1.3. Definíció. A differenciálegyenlet *rendjének* nevezzük az ismeretlen függvény legmagasabb deriváltjának rendjét az egyenletben.

1.1.4. Definíció. Legyen $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, a keresett Y függvény pedig valamilyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett n-szer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor az *explicit n-edrendű (közönséges) differenciálegyenlet általános alakja:*

$$Y^{(n)}(t) = f(t, Y(t), Y^{(2)}(t), \dots, Y^{n-1}(t)), \tag{1.2}$$

ahol a t idő szerint deriválunk ($t \geq 0$).

1.1.5. Definíció. Adott $(t_0, y_0) \in T$ esetén az

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

feladatot *kezdetiérték-feladatnak* vagy más néven *Cauchy-feladatnak* nevezzük.

1.1.6. Definíció. Az $y'(t) = f(t, y(t))$ differenciálegyenletnek az $y(t_0) = y_0$ plusz feltételét *kezdeti feltételnek* nevezzük.

1.1.7. Tétel (Átviteli elv)**.** *Minden n-edrendű lineáris differenciálegyenlet átírható n darab elsőrendű egyenletből álló differenciálegyenlet rendszerré a következőképpen:*
Az (1.2) *explicit n-edrendű differenciálegyenlet az*

$$\begin{cases} Y_1 = Y \\ Y_2 = Y' \\ \quad\vdots \\ Y_n = Y^{(n-1)} \end{cases}$$

új függvények bevezetésével az alábbi rendszerré alakítható:

$$\begin{cases} Y_1'(t) = Y_2(t) \\ Y_2'(t) = Y_3(t) \\ \qquad\vdots \\ Y_n'(t) = f(t, Y(t), Y_2(t), \dots, Y_{(n-1)}(t)). \end{cases} \tag{1.4}$$

Ennek megoldása megegyezik (1.2) *megoldásának megfelelő koordinátafüggvényével.*

1.1.8. Tétel (Picard–Lindelöf egzisztencia–és unicitástétel)**.** *Tegyük fel, hogy a következő feltételek teljesülnek:*

- $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *egy tartomány*
- $f\colon T \to \mathbb{R}^n, T \in C(T)$, *azaz f folytonos T-n*
- *f a második változójában Lipschitz-tulajdonságú, azaz létezik olyan* $L > 0$ *állandó, hogy minden* $(t, y_1), (t, y_2) \in T$ *esetén igaz, hogy*

$$||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| \leq L||y_1 - y_2||.$$

Ekkor az (1.3) *kezdetiérték-feladatnak létezik megoldása, és az egyértelmű valamely* $\overline{K(t_0)}$ *halmazon, vagyis* t_0 *valamely zárt környezetében.*

1.1.9. *Megjegyzés.* Ha a Picard-Lindelöf tételben a feltétel csak lokális Lipschitz-tulajdonságot követel, akkor a megoldás csak lokálisan egyértlemű.
Ha a megoldás mindenütt lokálisan egyértelmű, akkor globálisan is egyértelmű.
A globális (lokális) Lipschitz-tulajdonságból következik a globális (lokális) egyértleműség, fordítva viszont ez nem teljesül.

Már a Bevezetésben láthattuk, hogy az első integrál fontos szerepet játszik a Hénon–Heiles modell vizsgálata során. Ennek meghatározása továbbá segítséget jelenthet a fázisképek kirajzolása során is.

1.1.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $I\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény (1.3) közönséges differenciálegyenlet *első integrálja*, ha

$$I(y(t)) = \text{állandó} \quad \forall t \geq t_0.$$

Az első integrálok lehetővé teszik a differenciálegyenletek vizsgálatát azok megoldásának ismerete hiányában is. Egy n-dimenziós differenciálegyenlet rendszerben n darab első integrál segítségével meg tudjuk oldani a differenicálegyenlet rendszert.
Az első integrál meghatározására nincsen általános szabály vagy eljárás. Később látni fogjuk, hogy speciális esetben viszont, amikor a rendszer Hamilton-rendszer, az első integrál egyértleműen megadható.

A következő definíció a 3. fejezetben lévő vizsgálat során lesz hasznos számunkra.

1.1.11. Definíció. A Jacobi-mátrix egy vektorértékű függvény elsőrendű parciális deriváltjait tartalmazó mátrix. Legyen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény. Ekkor a vektorértékű függvény egyes komponensei:

$$\mathbf{f}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \begin{pmatrix} f_1(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \\ f_2(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \\ \vdots \\ f_n(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \end{pmatrix}.$$

Ebből az n darab n-változós függvény parciális deriváltjaiból egy $n \times n$-es mátrixot készíthetünk:

$$\mathbf{f}'(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial Y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial Y_n} \end{pmatrix},$$

ezt hívjuk *Jacobi-mátrixnak* vagy más néven *deriváltmátrixnak*.

1.2. Mátrixok néhány tulajdonsága

A következő részben a számunkra lényeges lineáris algebrai alapokat fektetjük le.
Ebben a részben Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába* [8] című művéből dolgoztam fel a későbbi vizsgálathoz szükséges definíciókat és tételeket.

1.2.1. Definíció. Legyen az A mátrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

valamely $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ számokra, ahol $i, j = 1, 2, \dots, n$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az A mátrix *karakterisztikus polinomja* a

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

polinom, ahol $|.|$ a mátrix determinánsát jelöli.

1.2.2. Definíció. Egy $\lambda \in \mathbb{C}$ skalárt az $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix *sajátértékének* nevezünk, ha létezik olyan $v \in \mathbb{C}^n$ nemnulla vektor, melyre $Av = \lambda v$ teljesül. Az ilyen v vektorokat az A mátrix λ sajátértékhez tartozó *sajátvektorának* nevezzük. Ezen vektorok és a nullvektor által alkotott alteret pedig a λ sajátvektorhoz tartozó *sajátaltérnek* hívjuk.

1.2.3. Tétel. *Minden sajátvektorhoz csak egy sajátérték tartozik.*

1.2.4. Állítás. *Az A mátrix sajátértékeit úgy határozhatjuk meg, hogy a mátrix karakterisztikus polinomját nullával tesszük egyenlővé.*

1.2.5. Tétel. *Egy $\lambda \in \mathbb{C}$ skalár akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha az $(A - \lambda I)$ mátrix determinánsa nulla.*

1.2.6. Tétel (Kifejtési tétel)**.** *Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$ és $A = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az A mátrix determinánsát a következőképpen kaphatjuk meg:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}),$$

ahol $det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldetermináns.
Az i-edik sor j-edik, a_{ij} elemhez tartozó aldetermináns a következő:

- *a mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot*
- *a kapott $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsát megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-vel*

Az $n \times n$-es mátrixok determinánsát $n = 3$ esetben az 1.2.6. Tételnél (Kifejtési tétel) egyszerűbben is meghatározhatjuk. Ez lényegében ugyanazt jelenti, viszont ha megjegyezzük ezt a szabályszerűséget, a 3×3-as mátrixok esetében megspórolhatjuk az aldeterminánsokra bontást. Az eljárás a következő:

1.2.7. Tétel (Sarrus-szabály). *Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$ és $A = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$ egy 3×3-as mátrix. Ekkor*

$$\begin{aligned}\det A =& a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

Azaz lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára. A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat összeszorozzuk, és ezek összegéből kivonjuk a három mellékátlóval párhuzamos egyenesen lévő számok szorzatát.

$$\begin{bmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \underline{a_{13}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & \underline{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \underline{a_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \underline{a_{21}} & a_{22} \\ \underline{a_{31}} & \underline{a_{32}} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & \underline{a_{23}} \\ \underline{a_{31}} & \underline{a_{32}} & \underline{a_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} \\ \underline{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

1.2.8. Definíció. Lineáris algebrában az A mátrix főátlójában álló elemek összegét a mátrix *nyomának* nevezzük, jelölése: $\operatorname{tr} A$.

1.3. Egyensúlyi helyzetek

A különböző tudományágok modelljei olykor annyira bonyolultak, hogy az őket leíró differenciálegyenletek kiszámítása, analitikus megoldása is komplikált, bizonyos esetben lehetetlen művelet. Ennek kiküszöbölésére stabilitásvizsgálatot hajtunk végre, mely során egy viszonylagos képet kaphatunk a modell megoldásának időbeli viselkedéséről, változásáról.
Egy közönséges differenicálegyenlet időben állandó megoldását *egyensúlyi helyzetnek* vagy *egyensúlyi pontnak* nevezzük.
Ebben a részben Simon L. Péter: *Közönséges differenicálegyenletek* [6], *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek* [7], Differenciálegyenletek előadásjegyzet [10] és a Folytonos modellezés előadásjegyzet [9] forrásokat használtam fel.

1.3.1. Definíció. A $y^* \in \mathbb{R}^n$ vektort *egyensúlyi pontnak* vagy *egyensúlyi helyzetnek* nevezzük, ha $y(t) = y^*$, ahol $t \in \mathbb{R}$ konstans függvény a (1.1) egyenlet megoldása, azaz $f(y^*) = 0$.

1.3.2. Definíció. Az (1.1) alakú közönséges differenciálegyenlet $y^* \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi helyzetét

- *stabilnak* nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $||y_0 - y^*|| < \delta \Rightarrow ||y(t) - y^*|| < \varepsilon$ minden $t \geq 0$ esetén;
- *aszimptotikusan stabilnak* nevezzük, ha stabil és $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y^*$;
- *instabilnak* nevezzük, ha nem stabil.

Az 1.3.2. Definíció használata azonban a feladatok során nagyon sok időt és számolást venne igénybe. Egyszerűbben meghatározhatjuk az egyensúlyi helyzet stabilitását a következő tétel segítségével.

1.3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kétszer folytonosan differenciálható és $y^* \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi helyzete a következő feladatnak:*

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}. \tag{1.5}$$

Ekkor ha az $f'(y^*) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix λ_i sajátértékeire

- $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ *teljesül $\forall i$ esetén, akkor az y^* egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil,*
- $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0$ *teljesül $\forall i$ esetén és λ_i egyszeres gyök $\forall i$ esetén, akkor az y^* egyensúlyi helyzet stabil.*
- *Ha létezik legalább egy sajátérték, melyre* $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$*, akkor instabil.*

1.3.4. Következmény. *Az $y'(t) = f(y(t))$ egyensúlyi helyzetei f zérushelyei.*

1.4. Fáziskép meghatározása

Kettő- vagy többdimenziós rendszer esetében az egyensúlyi helyzetnek nemcsak a stabilitását tudjuk meghatározni, hanem bizonyos esetekben az egyensúlyi helyzet típusát is. Ehhez először meghatározzuk a fázistér, illetve az egyes típusok fogalmát. Mindezt 2-dimenziós rendszer segítségével tesszük meg. Kettőnél nagyobb dimenzió esetén az egyensúlyi helyzet típusát már sokkal nehezebb egyértelműen meghatározni, valamint a fázisteret is csak 2- illetve 3-dimenziós esetben tudjuk pontosan felrajzolni.
Ebben a részben leginkább a *Differenciálegyenletek kurzus* során íródott jegyzeteimet használtam. [10]

1.4.1. Definíció. Kétdimenziós nemlineáris autonom rendszernek nevezzük a következő egyenletrendszert:

$$y'(t) = f(y(t)),$$

ahol $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $t \in \mathbb{R}$ konstans függvény, $y^* \in \mathbb{R}^n$ vektor.
Speciálisan két dimenzió esetén:

$$\begin{cases} x'(t) = P(x(t), y(t)) \\ y'(t) = Q(x(t), y(t)) \end{cases}, \tag{1.6}$$

ahol $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvények.

1.4.2. Tétel. *Egy autonom differenciálegyenlet rendszer egyenértékű egy dinamikai rendszerrel. Legyen $T = \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ekkor létezik olyan dinamikai rendszer, melynek pályái megegyeznek az $y'(t) = f(y(t))$ differenciálegyenlet pályáival. Valamint megfordítva, bármely dinamikai rendszerhez van olyan $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény hogy az $y'(t) = f(y(t))$ differenciálegyenlet megoldásai a dinamikai rendszert adják.*

A *fázistér* vagy *állapottér* egy olyan geometriailag érzékeltethető tér, melyet a dinamikai rendszert meghatározó független változók (fázisváltozók) feszítenek ki. A fázistérben egy dinamikai rendszer állapotai szerepelnek, minden egyes állapot a fázistér egyetlen pontjával egyezik meg. Ezek az állapotok a rendszer adott időpontbeli állapotai. A rendszer állapotának időbeli változását követve ez a pont elmozdul, és egy utat jár be. Ezt az utat *trajektóriának* nevezzük. Egy fázistérben akár több lehetséges állapotot és azok változásait is ábrázolhatjuk.

1.4.3. Definíció. Az $y'(t) = f(y(t)), f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *fázisképe* a $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ halmazon a különböző pályák, rajtuk a haladási iránnyal, különös tekintettel az egyensúlyi pontokra és a típusára.

1.4.4. Definíció. A (1.6) rendszernek a $y^* \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi pontja *nyeregpont*, ha van olyan U környezete, melyben két pálya $t \to \infty$ esetén befut y^*-be (azaz $(x(t), y(t)) \to y^*$, ha $t \to \infty$), van olyan két pálya, ami $t \to -\infty$ esetén befut y^*-be (azaz $(x(t), y(t)) \to y^*$, ha $t \to -\infty$), a többi pálya e környezetben mindkét irányban ($t \to \infty$ esetén és $t \to -\infty$ esetén is) elhagyja U-t, kivéve a y^* egy pontú pályáját.

1.4.5. Definíció. A (1.6) rendszernek a $y^* \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi pontja *centrum*, ha van olyan U környezete, melyben minden pálya periodikus (a pálya zárt, és rajta $(x(t), y(t))$ periodikusan körbejár).

1.4.6. Definíció. A (1.6) rendszernek a $y^* \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi pontja *stabil fókusz*, ha egy U környezetében minden megoldásra $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = 0$ és $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t)| = \infty$; az egyensúlyi pont *instabil fókusz*, ha egy U környezetében minden megoldásra $\lim\limits_{t\to-\infty} r(t) = 0$ és $\lim\limits_{t\to-\infty} |\varphi(t)| = \infty$.

1.4.7. Definíció. A (1.6) rendszernek a $y^* \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi pontja *stabil csomó*, ha egy U környezetében minden megoldásra $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = 0$ és $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t)| < \infty$; az egyensúlyi pont *instabil csomó*, ha egy U környezetében minden megoldásra $\lim\limits_{t\to-\infty} r(t) = 0$ és $\lim\limits_{t\to-\infty} |\varphi(t)| < \infty$.

1.4.8. Tétel. *Kétdimenziós esetben az* (1.6) *rendszer* $y^* \in \mathbb{R}^2$ *egyensúlyi pontjának típusát a*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

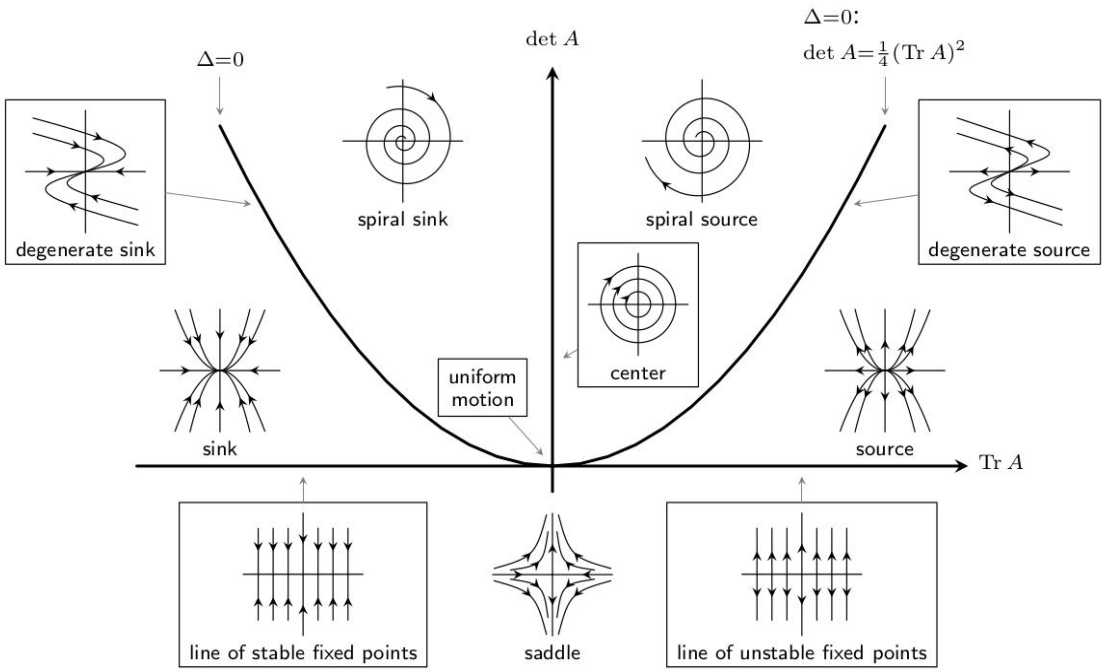
Jacobi-mátrix sajátértékei mutatják meg, ha a sajátértékekre teljesül, hogy $Re\lambda_{1,2} \neq 0$. *Ekkor az egyensúlyi helyzetre igaz, hogy:*

- *ha* $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ $\Longrightarrow$ y^* *stabil csomó,*
- *ha* $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\Longrightarrow$ y^* *instabil csomó,*
- *ha* $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $\Longrightarrow$ y^* *nyeregpont,*
- *ha* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\,\mathrm{i}$ *és* $\alpha < 0$ $\Longrightarrow$ y^* *stabil fókusz,*
- *ha* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\,\mathrm{i}$ *és* $\alpha > 0$ $\Longrightarrow$ y^* *instabil fókusz,*
- *ha* $\lambda_{1,2} = \pm\beta\,\mathrm{i}$ $\Longrightarrow$ y^* *centrum.*

1.4.9. Állítás. *A* (1.6) *rendszer esetén elég a Jacobi-mátrix determinánsát és nyomát kiszámolni. Ezek segítségével meghatározható az egyensúlyi helyzet típusa, ha felrajzoljuk a* $\operatorname{tr} A$ *és* $\det A$ *síkon.*

- $\det A < 0$ $\Longrightarrow$ *nyerepont,*
- $\det A > 0, \operatorname{tr} A = 0$ $\Longrightarrow$ *centrum,*
- $\det A > 0, \operatorname{tr} A < 0$ *és* $\operatorname{tr}^2 A/4 < \det A$ $\Longrightarrow$ *stabil fókusz,*
- $\det A > 0, \operatorname{tr} A > 0$ *és* $\operatorname{tr}^2 A/4 < \det A$ $\Longrightarrow$ *instabil fókusz,*
- $\det A > 0, \operatorname{tr} A < 0$ *és* $\operatorname{tr}^2 A/4 > \det A$ $\Longrightarrow$ *stabil csomó,*
- $\det A > 0, \operatorname{tr} A > 0$ *és* $\operatorname{tr}^2 A/4 > \det A$ $\Longrightarrow$ *instabil csomó.*

Szemléletesen egy egyensúlyi pont típusai a következőképpen nézhetnek ki a $\det A$ és $\operatorname{tr} A$ síkon:



1.1. ábra. Egyensúlyi pontok típusai [13]

2. fejezet

A Hénon–Heiles modell

A következő fejezetben bevezetjük magát a Hénon–Heiles modellt. Megmutatjuk, hogyan is következtették ki az általunk később vizsgált egyenletet. Ezekhez [1] és [2] szakirodalmakat használtam. Bemutatjuk továbbá az eddig tanulmányaim során nem tanult definíciókat és tételeket, állításokat. Ezekkel a 3. fejezetben történő vizsgálat során fogunk találkozni.

2.1. A Hénon–Heiles modell

Hénon és Heiles arra törekedtek, hogy találjanak bizonyítékot arra, hogy létezik a mozgás harmadik izoláló integrálja. A modellt először hengerkoordináta-rendszerben, azaz (R, θ, z)-ben írták fel, ahol $R \geq 0$, a pont tengelytől mért távolsága; $0 \leq \theta \leq 2k\pi$, a pont és a tengely által meghatározott sík hajlásszöge; $z \geq 0$, a pont és a pont merőleges vetületének távolsága. Maga a rendszer 6-dimenziós fázistérben $(R, \theta, z, \dot{R}, \dot{\theta}, \dot{z})$ van, ahol (R, θ, z) a kezdeti helyzet koordinátái, $(\dot{R}, \dot{\theta}, \dot{z})$ pedig a sebesség három megfelelő irányú komponense.
Ekkor a megoldáshoz léteznie kell 5 darab $I_j(R, \theta, z, \dot{R}, \dot{\theta}, \dot{z})$ első integrálnak $(j = 1 \ldots 5)$, melyek konstansok a 6-dimenziós fázistérben. Ezekkel tudjuk leírni a rendszer mozgását. Az $I_j = C_j$, ahol $C_j \in \mathbb{R}$ egyenletek mindegyike egy hipersík a 6-dimenziós fázistérben és a trajektória ezeknek a metszéspontja.
De ezek az első integrálok lehetnek izoláló és nem izoláló integrálok is. A nemizoláló integrálok általában kitöltik a fázisteret, és nem korlátozzák a trajektóriát. Ez a fizikai tartalom miatt fontos, a dolgozatban azonban nem ez kap elsődleges hangsúlyt.
Amikor Hénon és Heiles megírták a cikküket, még csak két izoláló integrált ismertek: a teljes energiát és a galaxis szimmetriatengelye körüli impulzusmomentumot:

$$\begin{aligned} I_1 &= U_g(R, z) + \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + R\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \\ I_2 &= R^2\dot{\theta}^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Belátható, hogy az integrálok közül legalább kettő nem izoláló integrál. Azt is feltételezték, hogy a harmadik is nem izoláló, mert nem találtak erre analitikus megoldást. A Nap közelében lévő csillagok megfigyelése és a pályák numerikus kiszámítása azonban megmutatta, hogy ezen közeli pályák viselkedése esetenként arra ad következtetést, hogy három izoláló integráljuk van.

A könnyebb tanulmányozás érdekében a kutatók nem tartották olyan fontosnak a probléma csillagászati jelentését, és csak azt követelték meg, hogy a vizsgált potenciál tengelyirányban

szimmetrikus legyen, és a mozgás csak egy síkra korlátozódjon, azaz a rendszer négydimenzióban van.
A derékszögű fázistérben a mozgás $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ koordinátákkal adható meg, ahol a pontok $\dot{x}$ koordinátái az x irányú sebességet, $\dot{y}$ koordinátái pedig az y irányú sebességet adják. Egységnyi tömeget használtak, az impulzusvektor koordinátái: $p_x = \dot{x}$ és $p_y = \dot{y}$.
Ekkor a teljes energia

$$I_1 = U(x, y) + \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{2.2}$$

alakban írható fel, ahol $U(x, y)$ a potenciális energiát jelöli.
Néhány kísérlet után úgy döntöttek, hogy az alábbi egyszerűsített, kétdimenziós potenicált alaposabban megvizsgálják:

$$U(x, y) = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \tfrac{2}{3}y^3), \tag{2.3}$$

ugyanis ezt analitikusan egyszerű vizsgálni, így a keringési pályák meglehetősen könnyen kiszámíthatók, de még mindig elég bonyolultak ahhoz, hogy a keringési típusok nem triviálisak. Ezt a potenciált Hénon–Heiles potenciálnak nevezik.

2.2. Hamilton-rendszerek

A dinamikai rendszerek egy bizonyos osztályát Hamilton-rendszereknek nevezzük. Ezek meghatározhatóak egyetlen függvénnyel, a Hamilton-függvénnyel. Ebben a részben ezen rendszerek sajátosságait mutatjuk be. Mindehhez Ernst Hairer, Christian Lubich, Gerhard Wanner: *Geometric Numerical Integration* [11] című művét ,valamint [14] forrást vettem alapul.

2.2.1. Definíció. Legyenek $p, q\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^n$ függvények. Tegyük fel, hogy létezik olyan $H\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^n$ függvény, melyre

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial q} \\ \dfrac{dq(t)}{dt} = \dfrac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial p} \end{cases}, \tag{2.4}$$

ahol a $H(p(t), q(t), t)$ függvény p és q szerint is kétszer differenciálható. Ekkor a fenti egyenletrendszert *Hamilton-rendszernek*, a H függvényt *Hamilton-függvénynek* nevezzük.

2.2.2. Állítás. *A Hamilton-függvényre igaz, hogy*

$$\frac{dH(p(t), q(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial t}, \quad \textit{ahol} \quad t \leq 0. \tag{2.5}$$

2.2.3. Állítás. *Ha a Hamilton-függvény nem függ expliciten az időtől, akkor az általa meghatározott Hamilton-rendszer konzervatív.*

Bizonyítás. Deriváljuk a Hamilton-függvényt az alábbi módon:

$$\frac{dH(p(t), q(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial H(p(t), q(t), t)}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

Helyettesítsük be a 2.2.2 Állítás alapján a következőt:

$$\frac{dH(p(t),q(t),t)}{dt} = \frac{\partial H(p(t),q(t),t)}{\partial t}$$

Tehát ha a Hamilton-függvény nem függ expliciten az időtől, azaz

$$\frac{\partial H(p(t),q(t),t)}{\partial t} = 0,$$

akkor az ennek a Hamilton-függvénynek megfelelő Hamilton-rendszer konzervatív, vagyis

$$\frac{dH(p(t),q(t),t)}{dt} = 0.$$

Ez továbbá azt jelenti, hogy a $H(p(t),q(t))$ konstans a trajektóriák mentén. □

2.2.4. Következmény. *Ha a Hamilton-függvényre teljesül, hogy $H = H(p(t),q(t))$, azaz nem függ expliciten az időtől, akkor a Hamilton-függvény állandó. Ez a rendszer első integrálja. (A fizikában ez a mozgásállandó, úgynevezett energia).*

2.2.5. *Megjegyzés.* Fizikai alkalmazások során sokszor szokták az adott rendszer Hamilton-függvényét vizsgálni. A leggyakoribb ilyen esetekben a Hamilton-függvény értéke a rendszer összenergiájával egyezik meg. Éppen ezért szokás a Hamilton-függvényt a következő alakban írni:

$$H(x,y) = T(x,y) + U(x,y), \tag{2.6}$$

ahol a $T(x,y)$ a mozgási energiát, a $U(x,y)$ pedig a potenicális energiát jelöli.

Az alábbiakban a *gyengén zavart Hamilton-rendszerekről* ejtünk pár szót a későbbi könyebbb érthetőség kedvéért, mindezt a teljesség igénye nélkül.
A Hamilton-rendszerek gyakran felbonthatóak két részre: egy integrálható részre és egy kis perturbációra (a csillagászatban ez a zavaró hatást jelenti) a következőképpen:

$$H = H_0 + \Delta H$$

ahol ΔH a perturbáció, H_0 pedig az integrálható Hamilton-függvény, azaz

$$\begin{cases} Y'(t) = f(Y(t)) \\ H_0(Y(t)) = \text{állandó} \qquad \forall t \text{ esetén.} \end{cases}$$

Ha ΔH elég kicsi, azaz a rendszerben csak kis perturbáció van jelen, akkor a Hamilton-rendszert *gyengén zavart Hamilton-rendszernek* nevezzük. Ezekben az esetekben a rendszer úgy viselkedik, mint a teljesen zavartalan rendszer. Nagy perturbáció esetén viszont zavarniuk kell a megoldás szabályszerűségét, ezáltal a rendszer fázisképét és Poincaré-metszeteit. Ilyenkor a görbék alakja kissé megváltozik, de ugyanabban a fázistérben maradnak, mint a nem zavart.

2.3. Poincaré-metszetek

A következő részben a Poinceré-metszetekről szóló szükségest tudást fogjuk megalapozni. Mindezt a [12], [15], valamint [16] alapján tesszük.

Amikor a vizsgált dinamikai rendszer leírható folytonos egyenletekkel, általában differenciálegyenletekkel, akkor a rendszer viselkedését görbék jellemzik a fázistérben.
Az általános definíció szerint a *Poincaré-metszet* dinamikai rendszerek ábrázolásának egy olyan módszere, melyet a trajektória és a fázistér dimenziószámánál egyel kisebb dimenziójú hipersík egyirányú metszéspontjai alkotják, azaz csak azok a pontok tartoznak bele, melyeknél a trajektória a hipersíkon azonos irányban halad át.
Ez azt jelenti, hogy egy n-dimenziós fázisteret egy $(n-1)$-dimenziós térrel szemléltetünk. Az új, $(n-1)$-dimenziós rendszer görbéinek csak azon pontjait írjuk le, melyek a fázistér egy alterébe esnek. Ekkor a folytonos pályák helyett egy olyan pontsorozatot kapunk, melynek egymást követő pontjai között maga a dinamikai rendszer teremt kapcsolatot. Ez egyértelműen megmutatja, hogy egy adott pontból hova jut a rendszer a következő lépésben. Ezt *Poincaré-leképezésnek* nevezzük.
Könnyen látszik, hogy periodikus pályák esetén a Poincaré-leképezés csak néhány pontot tartalmaz.
Mivel az új, alacsonyabb dimenziójú rendszer megőrzi az eredeti rendszer periodikus és kváziperiódikus pályáinak sok tulajdonságát, és alacsonyabb dimenziós állapotterülettel rendelkezik, gyakran használják az eredeti rendszer egyszerűbb elemzésére.
Népszerű módszerré vált a gyengén zavart Hamilton-rendszerek elemzéséhez.

2.3.1. *Megjegyzés.* Ahogy már eddig is láthattuk, a későbbiekben is tapasztalni fogjuk, hogy a káosz, illetve a kaotikus pályák fontos szerepet töltenek be a modell fizikai vonatkozásaiban.
A káosz fogalmának bevezetése, valamint részletes tárgyalása azonban túlmutat ezen dolgozat keretein, hiszen rengeteg különféle értelmezése létezik. Számunkra ez kizárólag a fizikai háttér miatt érdekes, így csak 2 tulajdonságát tüntetjük fel: aperiodikusság és a kezdeti feltételtől való érzékeny függés. A kaotikus pályáról pedig a következőket szükséges tudnunk: korlátos, nem aszimptotikusan periodikus, valamint érzékenyen függ a kezdeti feltételtől.
Ezek leginkább a 3.5 részben, a Poincaré-metszetek ábrázolásánál kapnak nagy szerepet, ahol saját példán keresztül mutatjuk be a kaotikus viselkedést.

3. fejezet

A Hénon–Heiles modell vizsgálata

Ebben a fejezetben az eddig bevezetett Hénon–Heiles modellt fogjuk matematikai szempontok alapján vizsgálni. Bemutatjuk, hogy a modell egy Hamilton-rendszer. Megvizsgáljuk a rendszer egyensúlyi helyzeteit, majd meghatározzuk az egyensúlyi helyzetek stabilitását. Ábrázoljuk a kapott eredményeket fáziskép meghatározásával, illetve Poincaré-metszetek segítségével.
A továbbiakban a matematikai könnyebbség miatt kicsit elvonatkoztatunk a modell fizikai tartalmától.

3.1. A Hénon–Heiles modell, mint Hamilton-rendszer

Hénon és Heiles kutatásuk során az eddig már ismert izoláló integrálok segítségével próbálták vizsgálni a harmadik izoláló integrál létezését. Ezt azt jelentette, hogy a teljes energia (2.2) és az analitikus vizsgálat szempontjából egyszerű Hénon–Heiles potenciál (2.3) segítségével felírtak egy Hamilton-rendszert. A továbbiakban ezt a rendszert fogjuk vizsgálni.

A modell egy egyszerű, klasszikus, nemlineáris Hamilton-rendszert ír le, amely a részecskék dinamikájának széles skáláját kínálja: a szabályos pályáktól egészen a kaotikus trajektóriákig.
Ez egy klasszikus példa egy az időtől expliciten nem függő Hamilton-rendszerre, amely számítási szempontból egyszerű és általános az alapvető tulajdonságaiban [3] .
A rendszer dinamikája fontos a nemlineáris Hamilton-rendszerek aktív területén végzett kutatás szempontjából.

A Hamilton-függvény polárkoordináta-rendszerben a következő:

$$H(R, \theta, p_R, p_\theta) = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_\theta^2) + \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{3}R^3 \sin(3\theta), \tag{3.1}$$

ahol $p_R = R'$ és $p_\theta = \theta'$.
Ez a derékszögű koordináta-rendszerben, az impulzusvektor $p_x = x'$ és $p_y = y'$ koordinátái mellett a következő alakú:

$$H(x, y, x', y') = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{y^3}{3}. \tag{3.2}$$

Vizsgáljuk meg a 2.2.1 Definíció alapján (ahol $p, q\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^4$ és $q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $p = (x', y') \in \mathbb{R}^2$) az egyenletből kapható értékeket.

$$q \text{ pozícióra felírt egyenletek} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial u} = \dfrac{1}{2} \cdot 2x' = x' \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial v} = \dfrac{1}{2} \cdot 2y' = y', \end{cases}$$

$$p \text{ momentumra felírt egyenletek} \begin{cases} \dfrac{d\dot{x}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -x - 2xy = x'' \\ \dfrac{d\dot{y}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -y - x^2 + y^2 = y''. \end{cases}$$

Ezek egy nemlineáris, másodrendű differenciálegyenlet rendszert alkotnak.

Az 1.1.7 Tételt (Átviteli elv) alkalmazva írjuk át a kapott egyenleteket négy elsőrendű egyenletből álló egyenletrendszerré. Ehhez bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ u = x' \\ v = y' \end{cases} \tag{3.3}$$

és definiálunk egy koordinátavektort a változókkal:

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \quad .$$

Ezt deriválva a következő, Y-tól függő vektort kapjuk:

$$Y' = F(Y) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -x - 2xy \\ -y - x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -x - 2xy \\ -y - x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

és ez éppen (1.5) alakú.

3.2. Egyensúlyi helyzetek

Ebben a részben a rendszer egyensúlyi helyzeteit számoljuk ki. Az egyensúlyi helyzeteket az (x, y, u, v) koordinátákkal szeretnénk megadni.

A fenti egyenletrendszer egyensúlyi helyzeteit az 1.3.1 Definíció szerint a következő feltétel mellett kapjuk meg:

$$F(x, y, x', y') = F(x, y, u, v) = 0$$

Ez az 1.3.4 Állítás alapján akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ u' = 0 \\ v' = 0 \quad . \end{cases}$$

A (3.3)-ben bevezetett változókat visszahelyettesítve a következő egyenletekből álló egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ -x - 2xy = 0 \\ -y - x^2 + y^2 = 0 \quad . \end{cases} \tag{3.4}$$

Az első két egyenlettel az egyensúlyi helyzetek harmadik, illetve negyedik koordinátájának értékét meg is kaptuk. Emiatt a továbbiakban csak az utolsó két egyenletet vizsgáljuk.
Tekintsük a harmadik egyenletet és emeljünk ki belőle x-et a következőképpen:

$$\begin{aligned} -x - 2xy &= 0 \\ x(-1 - 2y) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Oldjuk meg az egyenletet, majd helyettesítsünk vissza a negyedik egyenletbe.
A (3.5) egyenlőség csak két esetben teljesülhet:

- **1. eset:** Ha $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} -y - 0^2 + y^2 &= 0 \\ y(-1 + y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$y_1 = 0 \qquad\qquad y_2 = 1$$

- **2. eset:** Ha $-1 - 2y = 0 \Longrightarrow y_3 = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} -(-\frac{1}{2}) - x^2 + (-\frac{1}{2})^2 &= 0 \\ \frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{4} &= 0 \\ x^2 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A kapott értékek az egyensúlyi helyzetek első, illetve második koordinátáit adják meg.
Ezekből tehát a következő egyensúlyi helyzeteket kaptuk:

$$\begin{aligned} &Y_1^*(0, 0, 0, 0) \\ &Y_2^*(0, 1, 0, 0) \\ &Y_3^*(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 0) \\ &Y_4^*(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 0) \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.3. Stabilitás

A következő részben a négy egyensúlyi helyzet stabilitását fogjuk megvizsgálni.
Ehhez először ki kell számolnunk a rendszer Jacobi-mátrixát.

Deriváljuk az Y mátrixot:

$$Y' = F(Y) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -x - 2xy \\ -y - x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

ennek a Jacobi-mátrixa vagy más néven deriváltmátrixa az 1.1.11 Definíció alapján a következő:

$$F'(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1-2y & -2x & 0 & 0 \\ -2x & -1+2y & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Ezután egyesével behelyettesítve a kapott egyensúlyi helyzeteket, kiszámoljuk azok karakterisztikus polinomját. Ebből meghatározzuk a sajátértékeket, valamint azok valós részét. Ezek segítségével pedig megállapítjuk az egyensúlyi helyzetek stabilitását.

Első egyensúlyi helyzet: Vizsgáljuk meg elsőként $Y_1^*(0,0,0,0)$ stabilitását:
Ehhez helyettesítsük be Y_1^*-et Jacobi-mátrixba (3.7)

$$F'(Y_1^*) = F'(0,0,0,0) = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Számoljuk ki a mátrix karakterisztikus polinomját az 1.2.1. Definíció szerint:

$$A_1 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Az 1.2.6. Tétel (Kifejtési tétel) segítségével kiszámoljuk a mátrix determinánsát:

$$\det(A_1 - \lambda I) = (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} -$$
$$-0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Mivel az aldeterminánsok 3×3-asak, alkalmazhatjuk az 1.2.7. Tételt (Sarrus-szabály) a további aldeterminánsok elkerülése végett:

$$\begin{aligned} \det(A_1 - \lambda I) = (-\lambda) \cdot [&(-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) + 0 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot 0 - \\ &-1 \cdot (-\lambda) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 \cdot (-\lambda) - (-\lambda) \cdot 0 \cdot 0] + \\ &+1 \cdot [0 \cdot 0 \cdot (-\lambda) + (-\lambda) \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - \\ &-1 \cdot 0 \cdot 0 - (-\lambda)(-1)(-\lambda) - 0 \cdot 0 \cdot (-1)]. \end{aligned}$$

Az egyenlet összevonás után a következő:

$$\det(A_1 - \lambda I) = (-\lambda)(-\lambda^3 - \lambda) + 1 \cdot (1 + \lambda^2).$$

Ebből kapjuk, hogy az A_1 karakterisztikus polinomja az 1.2.1. Definíció alapján:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1.$$

Ebből a mátrix sajátértékei az 1.2.4. Állítás és az 1.2.5. Tétel alapján a következő egyenletből kaphatóak meg:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Látszik, hogy egy olyan negyedfokú polinomot kaptunk, melyet könnyen visszavezethetünk másodfokúra. Vezessük be a $\lambda^2 = \mu$ jelölést. Ekkor az egyenlet alakja:

$$\mu^2 + 2\mu + 1 = 0.$$

Ebből a gyökök:

$$\mu_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2},$$

melyből a következő gyök adódik:

$$\mu = -1.$$

Ezt visszahelyettesítve $\lambda^2 = \mu$ egyenletbe:

$$\lambda^2 = -1$$
$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$$

Tehát a $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ karakterisztikus polinom gyökei és egyúttal a sajátértékek a következőek:

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$$

Megvizsgálva a sajátértékek valós részét:

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$$

Az 1.3.3. Tétel alapján látjuk, hogy $Y_1^*(0,0,0,0)$ egyensúlyi helyzet **stabil** egyensúlyi helyzet.

Második egyensúlyi helyzet: Tekintsük most $Y_2^*(0,1,0,0)$ egyensúlyi helyzet stabilitását:
A Jacobi-mátrixba (3.7) behelyettesítve Y_2^*-t:

$$F'(Y_2^*) = F'(0,1,0,0) = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Számoljuk ki a karakterisztikus polinomját az 1.2.1. Definíció alapján:

$$A_2 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Az 1.2.6. Tétel (Kifejtési tétel) segítségével aldeterminánsokra bontjuk:

$$\det(A_2 - \lambda I) = (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$-0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ -3 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Mivel az aldeterminánsok 3×3-asak, ezért az egyszerűbb számolás kedvéért alkalmazhatjuk az 1.2.7. Tételt (Sarrus-szabály):

$$\begin{aligned} \det(A_2 - \lambda I) = (-\lambda) \cdot [&(-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 - \\ &-1 \cdot (-\lambda) \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot (-\lambda) - (-\lambda) \cdot 0 \cdot 0] + \\ &1 \cdot [0 \cdot 0 \cdot (-\lambda) + (-\lambda) \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) \cdot 1 - \\ &-1 \cdot 0 \cdot 0 - (-\lambda)(-3)(-\lambda) - 0 \cdot 0 \cdot 1]. \end{aligned}$$

Összevonás után az egyenlet a következő:

$$\det(A_2 - \lambda I) = (-\lambda)(-\lambda^3 + \lambda) + 1 \cdot (-3 + 3\lambda^2).$$

Tehát A_2 karakterisztikus polinomja:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 3.$$

Ebből a mátrix sajátértékei az 1.2.4. Állítás és az 1.2.5. Tétel alapján a következőek:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 3 = 0.$$

Könnyen látható, hogy ebben az esetben is egy másodfokúra visszavezethető negyedfokú polinomot kaptunk. Vezessük be a $\lambda^2 = \mu$ jelölést. Ekkor az egyenlet alakja a következő:

$$\mu^2 + 2\mu - 3 = 0.$$

Alkalmazzuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$\mu_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2}.$$

Ebből az egyenlet gyökei:

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 \\ \mu_2 = -3 \end{cases}$$

Helyettesítsünk vissza $\lambda^2 = \mu$ egyenletbe. A karakterisztikus polinom gyökei, azaz a sajátértékek:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^2 &= 1 \\ \lambda_{3,4}^2 &= -3 \\ \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ \lambda_{3,4} &= \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg a sajátértékek valós részét:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_1 = 1 & > 0 \\ \operatorname{Re}\lambda_2 = -1 & < 0 \\ \operatorname{Re}\lambda_{3,4} = 0 \end{cases}$$

Ebből az 1.3.3. Tétel alapján látszik, hogy λ_1 miatt a $Y_2^*(0,1,0,0)$ egyensúlyi helyzet **instabil** lesz.

Harmadik egyensúlyi helyzet: Nézzük meg $Y_3^*(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$ egyensúlyi helyzet stabilitását: Behelyettesítve Y_3^*-at a Jacobi-mátrixba (3.7):

$$F'(Y_3^*) = F'(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 0) = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1+1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -1-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nézzük meg, mi lesz a mátrix karakterisztikus polinomja az 1.2.1. Definíció segítségével:

$$A_3 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & -\lambda & 0 \\ -\sqrt{3} & -2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Az 1.2.6. Tétel (Kifejtési tétel) szerint aldeterminánsokra bontva:

$$\det(A_3 - \lambda I) = (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -\sqrt{3} & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$-0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & -\lambda \\ -\sqrt{3} & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Alkalmazhatjuk az 1.2.7. Sarrus-szabályt, mivel az aldeterminánsok 3×3-asok:

$$\begin{aligned} \det(A_3 - \lambda I) = (-\lambda) \cdot [&(-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) + 0 \cdot 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-\sqrt{3}) \cdot 0 - \\ &-1 \cdot (-\lambda) \cdot (-2) - 0 \cdot (-\sqrt{3})(-\lambda) - (-\lambda) \cdot 0 \cdot 0] + \\ &+1 \cdot [0 \cdot (-\sqrt{3})(-\lambda) + (-\lambda) \cdot 0 \cdot (-\sqrt{3}) + 1 \cdot 0 \cdot (-2) - \\ &-1 \cdot (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) - (-\lambda) \cdot 0 \cdot (-\lambda) - 0 \cdot 0 \cdot (-2)]. \end{aligned}$$

Vonjunk össze az egyenletben:

$$\det(A_3 - \lambda I) = (-\lambda)(-\lambda^3 - 2\lambda) + 1 \cdot (-3).$$

Ebből az A_3 karakterisztikus polinomja a következő lesz:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 3.$$

A mátrix sajátértékei az 1.2.4. és az 1.2.5. alapján a következőképpen számolhatók ki:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 3 = 0.$$

Ez az előzőekhez hasonlóan ugyancsak egy másodfokúra könnyen visszavezethető negyedfokú polinom. A $\lambda^2 = \mu$ jelölést bevezetve az egyenlet alakja:

$$\mu^2 + 2\mu - 3 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva:

$$\mu_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2},$$

melyből a gyökök a következőek:

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 \\ \mu_2 = -3 \end{cases}$$

Visszahelyettesítve $\lambda^2 = \mu$ egyenletbe, a karakterisztikus polinom gyökei, a sajátértékek:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^2 &= 1 \\ \lambda_{3,4}^2 &= -3 \\ \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

A sajátértékek valós része:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_1 = 1 & > 0 \\ \operatorname{Re}\lambda_2 = -1 & < 0 \\ \operatorname{Re}\lambda_{3,4} = 0 \end{cases}$$

Az $Y_3^*(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$ egyensúlyi helyzet λ_1 miatt az 1.3.3. Tétel alapján **instabil** lesz.

Negyedik egyensúlyi helyzet: Végül vizsgáljuk meg $Y_4^*(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$ egyensúlyi helyzetet stabilitás szempontjából.
A Jacobi-mátrixba (3.7) behelyettesítve:

$$F'(Y_4^*) = F'(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 0) = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1+1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -1-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mátrix karakterisztikus polinomját az 1.2.1. Definíció alapján az előzőekhez hasonlóan számoljuk:

$$A_4 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\lambda & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Az 1.2.6. Tétel alapján, kifejtéssel aldeterminánsokra bontva:

$$\det(A_4 - \lambda I) = (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$-0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -\lambda \\ \sqrt{3} & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Alkalmazzuk az 1.2.7. Tételt (Sarrus-szabály):

$$\begin{aligned}\det(A_3 - \lambda I) = (-\lambda) \cdot [&(-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) + 0 \cdot 0 \cdot (-2) + 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 0 - \\ &-1 \cdot (-\lambda) \cdot (-2) - 0 \cdot \sqrt{3} \cdot (-\lambda) - (-\lambda) \cdot 0 \cdot 0] + \\ &+1 \cdot [0 \cdot \sqrt{3} \cdot (-\lambda) + (-\lambda) \cdot 0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot 0 \cdot (-2) - \\ &-1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - (-\lambda) \cdot 0 \cdot (-\lambda) - 0 \cdot 0 \cdot (-2)].\end{aligned}$$

Összevonás után az egyenletünk alakja a következő:

$$\det(A_4 - \lambda I) = (-\lambda)(-\lambda^3 - 2\lambda) + 1(-3).$$

Ebből azt kapjuk, hogy az A_4 karakterisztikus polinomja:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 3.$$

A sajátértékek 1.2.4 és 1.2.5 alapján:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 3 = 0.$$

Ez szintén egy olyan negyedfokú polinom, melyet vissza tudunk vezetni másodfokúra. Vezessük be a $\lambda^2 = \mu$ jelölést. Ekkor az egyenlet alakja:

$$\mu^2 + 2\mu - 3 = 0.$$

Alkalmazzuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$\mu_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2}.$$

A gyökök a következőek lesznek:

$$\begin{cases}\mu_1 = 1 \\ \mu_2 = -3\end{cases}$$

Visszahelyettesítve $\lambda^2 = \mu$-t, a sajátértékek:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}^2 &= 1 \\ \lambda_{3,4}^2 &= -3 \\ \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ \lambda_{3,4} &= \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}\end{aligned}$$

Ebből kiszámítva a sajátértékek valós részét:

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\lambda_1 = 1 & > 0 \\ \operatorname{Re}\lambda_2 = -1 & < 0 \\ \operatorname{Re}\lambda_{3,4} = 0 & = 0\end{cases}$$

Látjuk, hogy Y_4^* egyensúlyi helyzet szintén λ_1 miatt **instabil** egyensúlyi helyzet az 1.3.3. Tétel alapján.

Összegezzük az alábbi táblázatban a kapott eredményeket:

Egyensúlyi helyzet	**Sajátértékek**	**Sajátértékek valós része**	**Stabilitás**
$Y_1^*(0,0,0,0)$	$\lambda_{1,2} = \pm\,\mathrm{i}$	$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = 0$	stabil
$Y_2^*(0,1,0,0)$	$\lambda_{1,2} = \pm 1$ $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$	$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = \pm 1$ $\mathrm{Re}\,\lambda_{3,4} = 0$	instabil
$Y_3^*(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$	$\lambda_{1,2} = \pm 1$ $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$	$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = \pm 1$ $\mathrm{Re}\,\lambda_{3,4} = 0$	instabil
$Y_4^*(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$	$\lambda_{1,2} = \pm 1$ $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$	$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = \pm 1$ $\mathrm{Re}\,\lambda_{3,4} = 0$	instabil

Az eredmények egyértelműen megmutatják, hogy miért is ezt a potenciált választották ki részletesebb vizsgálatra. Az egyensúlyi helyzetek elhelyezkedése tengelyszimmetrikus, sajátértékeik 3 esetben is megegyeznek. Emiatt a fázistérben való ábrázolásuk során a keringési pályák könnyen kiszámíthatóak.

Stabilitás típusa

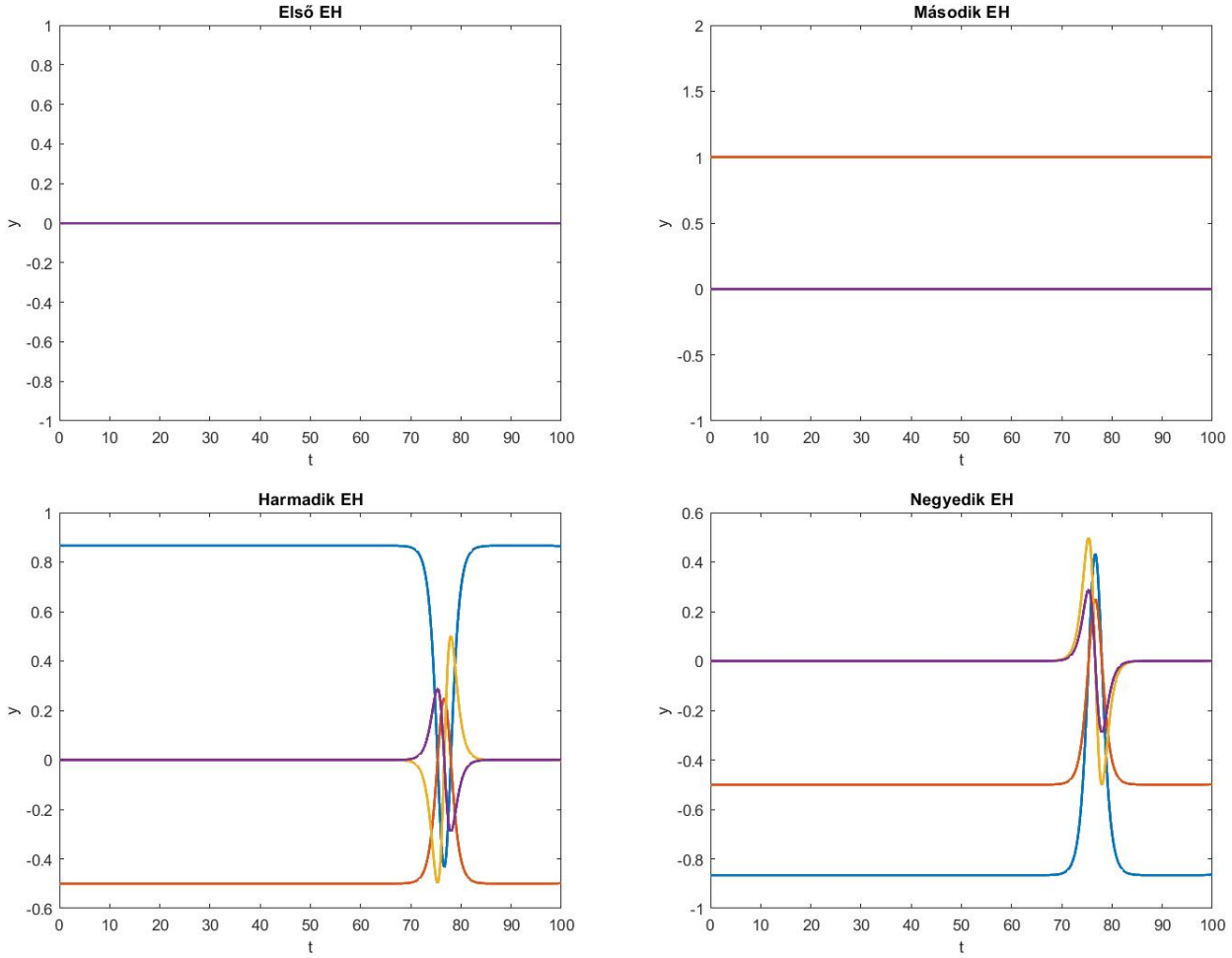
Kettőnél nagyobb dimenzió esetén az egyensúlyi helyzetek típusát nagyon nehéz egyértelműen meghatározni. Éppen ezért a Hénon–Heiles modell négydimenziós rendszerében az egyensúlyi helyzetek típusát is komplikált feladat megállípítani. Erre nem találtunk egyértelmű módszert.

Ennek ellenére mivel a centrum 1.4.5. Definíciója csak a pályák periodicitását, valamint az 1.4.8. Tétel csak sajátértékek tisztán képzetes voltát követeli meg, ezért az $Y_1^*(0,0,0,0)$ egyensúlyi helyzetről így is meg tudjuk állíptani, hogy centrum.

3.4. Fázisképek

Ebben a részben a kapott eredményeket ábrázoljuk fázisképek segítségével. Az ábrák elkészítéséhez minden esetben a MATLAB numerikus programcsomagot alkalmaztuk, az egyes programkódok megtalálhatóak Függelékben.

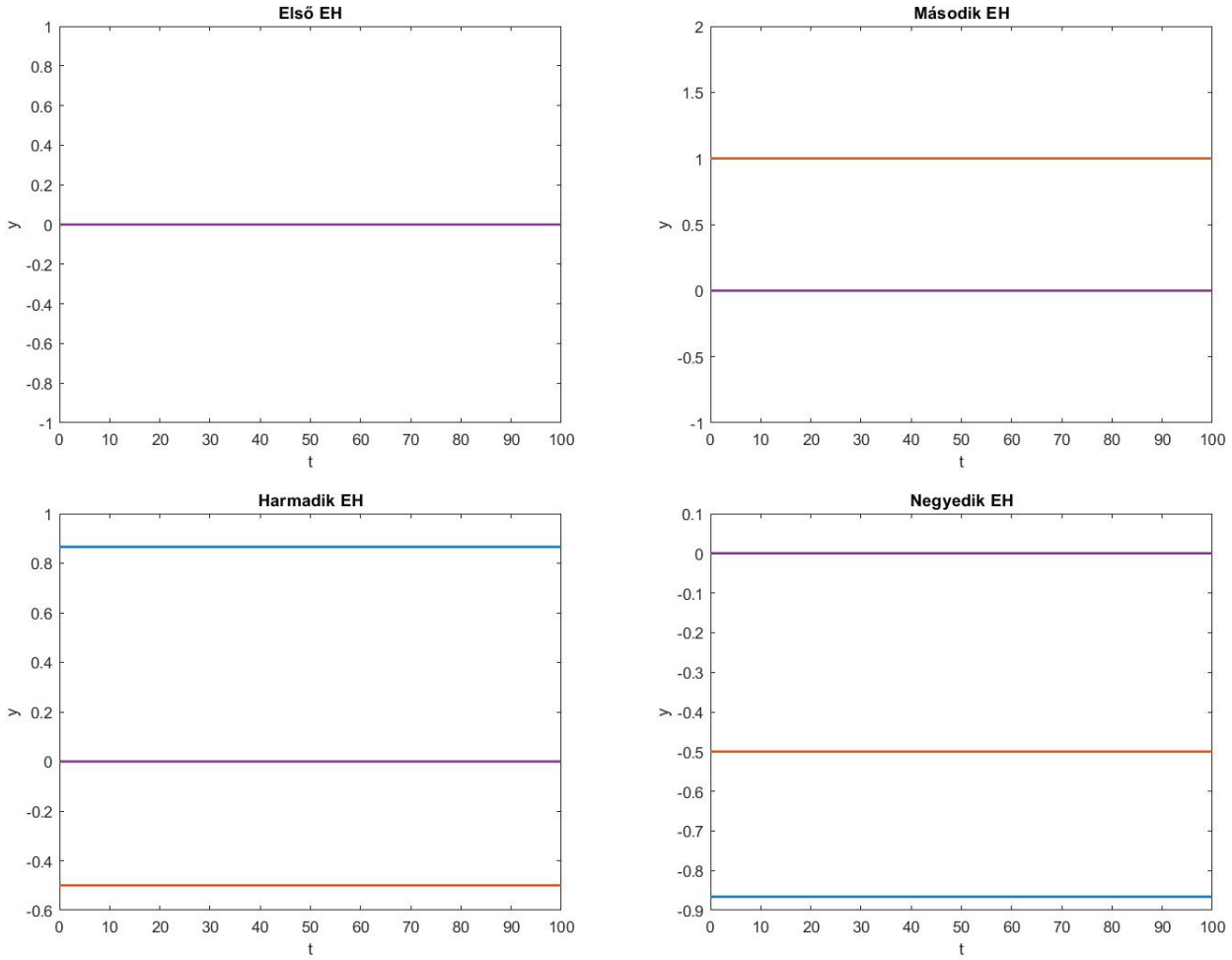
Az ábrák készítése során először numerikus módszerek segítségével próbáltunk fázisképeket rajzolni. Negyedrendű Runge-Kutta módszerrel kirajzoltuk a differenciálegyenlet rendszer egyensúlyi helyzeteinek (3.6) időbeli függvényét. Mivel az egyensúlyi helyzetek (EH-k) időben állandóak, ezért egyenesekre számítottunk.



3.1. ábra. EH-k az idő függvényében RK4-el

A harmadik, illetve negyedik egyensúlyi helyzet kirajzolásakor azonban érdekes eredményekre lettünk figyelmesek, amik numerikus hibára engedtek következtetni. Ez azt jelenti, hogy a differenciálegyenlet rendszer egy merev rendszer, amely numerikusan nehezen kezelhető. Rajtuk az explicit módszerek nem működnek elég hatékonyan, így az ismert módszereket, mint Explicit-Euler, Runge-Kutta módszerek, valamint az $ode45$, $ode113$ és $ode23$ beépített függvényt sem tudjuk használni.

A MATLAB-ban azonban vannak ezek megoldására is beépített függvények, mint például az $ode15s$, $ode23t$, $ode23tb$ és az $ode23s$.
Ezért az $ode23s$ segítségével is kirajzoltuk az egyensúlyi helyzetek időbeli változását. Az előző esethez hasonlóan itt is egyenesekre számítottunk.

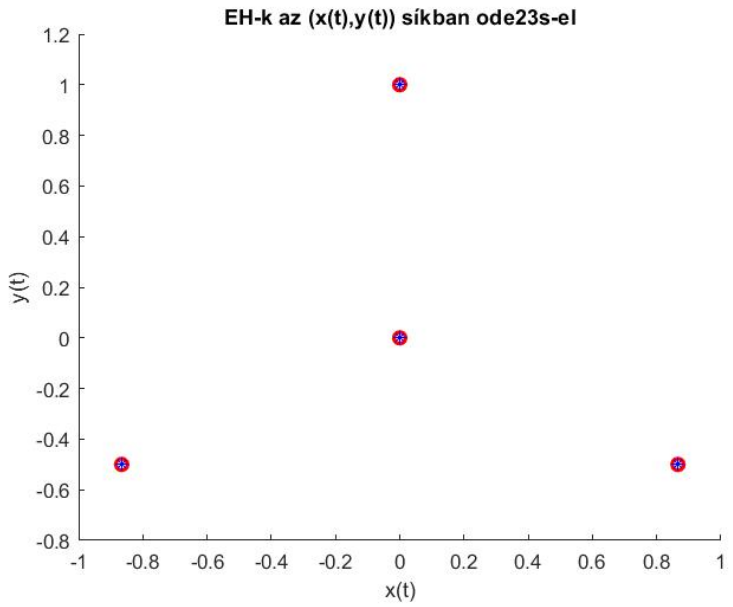


3.2. ábra. EH-k az idő függvényében *ode23s*-el

Az így kapott ábrák esetében már egyértelműen látszódik, hogy az egyensúlyi helyzeteink minden esetben állandóak az időben. Ezek emellett bizonyítják a rendszer merevségét is.

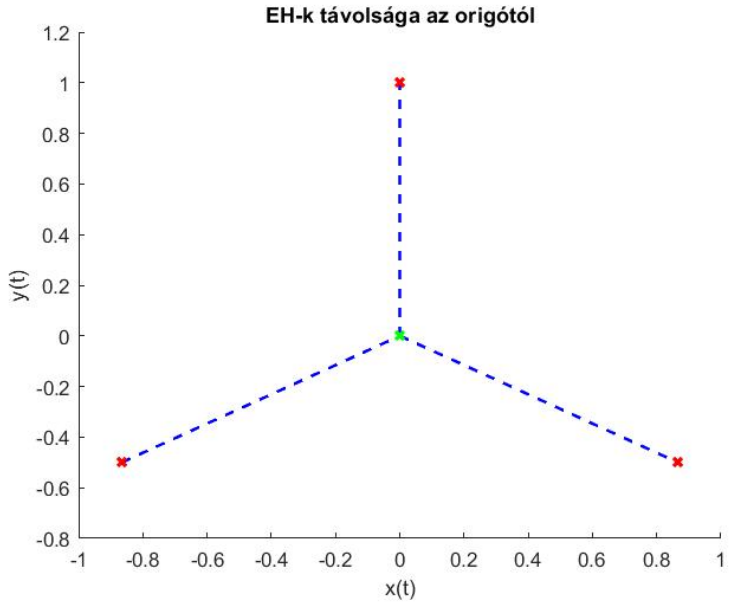
A (3.2) egyenlet vizsgálata során olyan egyensúlyi helyzeteket határoztunk meg, melyek az $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ fázistérben vannak. Mivel ebben a fázistérben a pontok u koordinátái az x irányú sebességet, v koordinátái pedig az y irányú sebességet adják, ezért egyértelműen látszik, hogy az egyensúlyi helyzetek harmadik, illetve negyedik koordinátája 0 lesz. Ellenkező esetben az EH-k kezdeti sebességgel rendelkeznének, ami miatt trajektóriát járnának be.
Ez természtesen nem jelenti, hogy az egyensúlyi helyzeteken kívül minden pont u és v koordinátája csak nulla lehet.

Az egyensúlyi helyzeteket tehát a továbbiakban vizsgáljuk az (x, y) síkban.
Elsőként megvizsgáltuk a négy egyensúlyi helyzet viselkedését az $(x(t), y(t))$ fázistérben az $ode23s$ beépített függvény segítségével. Ezek megoldását szemléltettük egy közös ábrán.



3.3. ábra. EH-k az (x,y) síkban *ode23s*-el

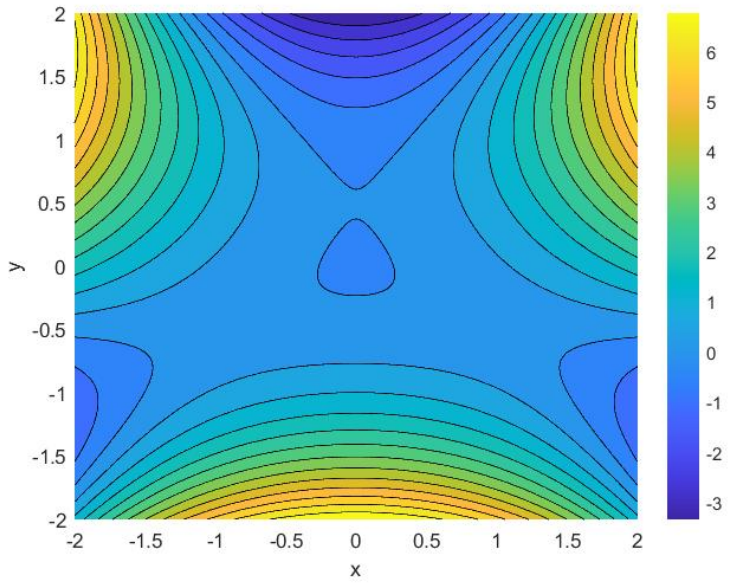
Látszódik, hogy a megoldás minden esetben az egyensúlyi helyzet körül mozog, ettől alig észrevehető eltérést mutat.



3.4. ábra. EH-k távolsága az origótól

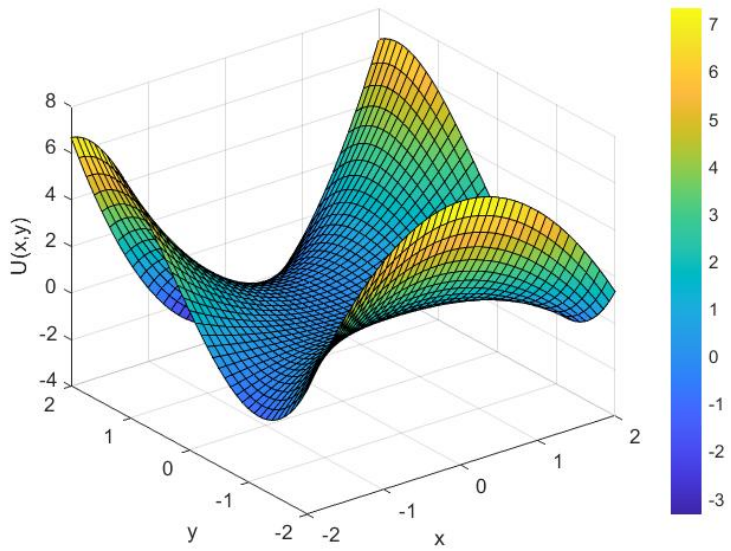
Észrevehető még, hogy az egyes egyensúlyi helyzetek (kivéve nyilván magát az origót) origótól való távolsága minden esetben 1. Ez azt jelenti, hogy a rendszer origó középpontú, tengelyszimmetrikus rendszer, ami további magyarázatot ad arra, hogy Hénon és Heiles miért éppen az (2.3) potenciált választották részletesebb vizsgálatra.

Megvizsgáltuk továbbá a (3.2) egyenletet az egyes sebességek figyelembe vétele nélkül az (x, y) síkban. Ekkor az egyenlet éppen a (2.3) Hénon–Heiles potenciál (HH-potenciál) alakú lesz. A következő ábrán ekvipotenicális, azaz azonos potenciálú görbéket láthatunk.



3.5. ábra. HH-potenciál az (x,y) síkban

Az $E = \frac{1}{6}$ energiaérték alatt a potenciálgörbék zártak, nagyobb érték esetén azonban ezek a görbék kinyílnak. Ebből arra következtetünk, hogy ezen érték felett a rendszer kaotikus tulajdonságot fog mutatni.



3.6. ábra. HH-potenciál a térben

3.5. Poincaré-metszetek

Ebben a részben már a Hénon–Heiles modell fizikai vonatkozásai kapnak nagy szerepet. Poincaré-metszetek segítségével tanulmányozzuk a dinamikai rendszer viselkedését, valamint érzékeltetjük a modellben rejlő kaotikus tulajdonságot.
Az ábráink elkészítéséhez ezesetben is a MATLAB numerikus programcsomagot használtuk, a programkódok megtalálhatóak a Függelékben .

Ahogy a 2.3. Poincaré-metszetek részben láttuk, a Poincaré-metszetek n-dimenziós dinamikai rendszerek egy kétdimenzióbeli ábrázolási módszere. Használata során egy olyan pontsorozatot kapunk, amely egyértelműen megmutatja, hogy egy adott pontból a rendszer a következő lépésben melyik pontba jut. Népszerű módszer a gyengén zavart Hamilton-rendszerek (mint a Hénon–Heiles modell Hamilton-rendszere) ábrázolása esetén. Poincaré-metszetek esetén a Hénon–Heiles modell az egyik legegyszerűbb modell a kaotikus pályák szemléltetésére.

Ezek segítségével szeretnénk szemléltetni a dinamika rendszer viselkedését különböző energiaértékek esetén, a pontokat kicsivel az egyensúlyi helyzetek mellől indítva.

Ábráinkat az $(y(t), v(t))$ síkban szeretnénk felrajzolni az $x(t) = 0$ feltétel mellett. A dinamikai rendszer pályái az $(y(t), v(t))$ síkot pozitív irányból fogják metszeni, ezzel az $(y(t), v(t))$ fázistérben egy pontsorozatot alkotva.

A Poincaré-metszetekhez szükséges feltételeket a következőképpen határoztuk meg.
A 2.2.5. Megjegyzésben láthattuk, hogy a Hamilton-függvény fizikai alkalmazások során az összenergiát is jelenti. A Hénon–Heiles modell Hamilton-függvénye épp (2.6) alakú, ezért az (3.2) egyenlet értéke megegyezik az energiával, tehát:

$$H(x, y, u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{y^3}{3} = E,$$

ahol $E \in \mathbb{R}$ az adott energia, $x, y, v \in \mathbb{R}$ adottak.
Az egyenletből emiatt egyszerűen kiszámítható az u értéke:

$$u = \sqrt{2E - y^2 - v^2 + \tfrac{2}{3}y^3 - x^2 - 2x^2 y}. \tag{3.8}$$

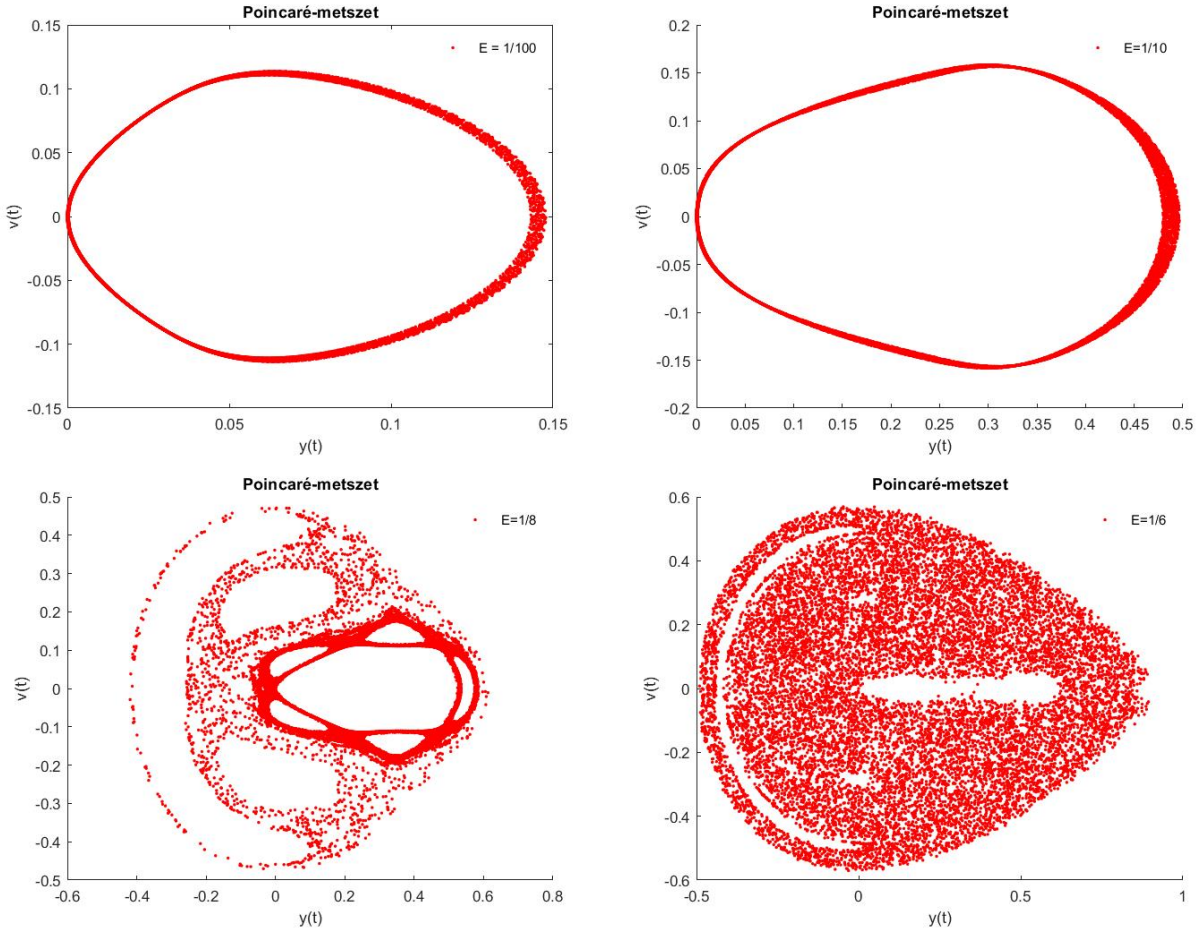
Az így kapott $P(x, y, u, v)$ pont éppen egy kicsivel az egyensúlyi helyzet mellett helyezkedik el.

Ábrázoljuk a $P(x, y, u, v)$ pályáját a következő kezdeti feltételek mellett:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 \\ v_0 &= 0 \\ u_0 &= \sqrt{2E - y_0^2 - v_0^2 + \tfrac{2}{3}y_0^3 - x_0^2 - 2x_0^2 y} \end{aligned}$$

Mivel az egyes ábráinkat eltérő energiaértékek mellett készítettük el, ezért az u_0 minden esetben más értéket fog kapni. Így minden ábrán más-más pontból indul a trajektória, emiatt a pályák más alakot fognak ölteni.

Hénon és Heiles tanulmánya alapján arra számítunk, hogy kis energiákkal indítva, a pályák periodikusak, kváziperiodikusak lesznek, az energia növelésével viszont kaotikus irányba mozdulnak el. Szabályos mozgás esetén a Poincaré-metszeten egy görbét láthatunk, míg kaotikus mozgásnál a pontsorozat egy felületet alkot.



3.7. ábra. Poincaré-metszetek

Látszódik, hogy $E = \frac{1}{100}$ energia esetén a pálya a y-tengely 0 és 0, 15 pontjai között periodikusan mozog.
Ez az $E = \frac{1}{10}$ esetében elkezd kitolódni, $[0; 0,5]$ intervallumra módosul.
A harmadik ábrán látványos változást tapasztalunk. Szembetűnik, hogy a pálya mind az $y(t)$-tengely, mind az $v(t)$-tengely irányában nagyon kiszélesedik, és az eddig látott trajektóriák csak a fázistér egy belső részeként jelennek meg, ahol a pontok sűrűbben helyezkednek el.
A negyedik ábrán, $E = \frac{1}{6}$ esetben már minden szabályszerűség nagyjából teljesen eltűnik, a pálya majdnem a teljes tartományt bejárja.
Megfigyelhető azonban, hogy minden energiaérték mellett, így a jobb alsó,negyedik ábra esetén is a fázistér egy tartományára korlátozódik, amely az energia további növelésével nem tágul tovább. Emellett kétségkívül látszódik, hogy a pályák viselkedése érzékeny függést mutat a kezdeti feltételektől. Ezek éppen a kaotikus pályák tulajdonságai.

Összefoglalás

A szakdolgozat során bemutattuk a galaxisdinamikában fontos szerepet betöltő Hénon–Heiles modellt, amely a csillagok nemlineáris mozgásának vizsgálata egy galaktikus középpont körül, síkra korlátozva. Ezt a modellt tanulmányoztuk különböző matematikai módszerekkel.
A fizikában ez a modell fontos szerepet játszik a káosz, a kaotikus viselkedés vizsgálatában. A dolgozatban bepillantást adtunk erre is, viszont mi inkább a modell matematikai vonatkozásaira fókuszáltunk.

Elsőként áttekintettük a vizsgálathoz szükséges matematikai hátteret. Kimondtuk az alapvető fogalmakat, a kapcsolódó tételeket és állításokat. Külön kitértünk a Hamilton-rendszerekre és Poincaré-metszetekre, valamint ezek tulajdonságaira.
Ezek segítségével ismertettük a modellt, felvetettük az alapvető problémát, amely a galaxis potenciáljában mozgó csillagok mozgásának harmadik izoláló integráljának megtalálása volt. Megvizsgáltuk a Hénon és Heiles által részletesebben tanulmányozott egyszerűsített, kétdimenziós, nemlineáris, tengelyszimmetrikus potenciált.
Megmutattuk, hogy az általuk felírt rendszer Hamilton-rendszert alkot.
Kiszámoltuk a rendszer egyensúlyi helyzeteit, valamint meghatároztuk azok stabilitását. Az így kapott eredményeket fázisképek alkalmazásával szemléltettük először az idő függvényében, majd az $(x(t), y(t))$ síkban.
Végül Poincaré-metszetek segítségével betekintést nyújtottunk a modell fizikai vonatkozásaiba. Bemutattuk, hogy a modellben szereplő pályák kis energiaértékek esetén periodikusak, kváziperiodikusak, az energia növelésével viszont kaotikussá válnak. Ezzel bizonyítottuk az eredeti feltevést, miszerint a Hénon–Heiles-féle galaxismodellben bizonyos esetekben nem létezik a mozgás harmadik izoláló integrálja.

A szakdolgozat eredményeként képet kaptunk a csillagok mozgásáról egy galaktikus középpont körül. Megmutattuk, hogy a modell feltételei mellett a csillagok mozgása olykor szabályos, olykor viszont kaotikus tulajdonságú. Bemutattuk a szabályos és a kaotikus pályák megkülönböztetésére bevezetett Poincaré-metszeteket is.
Az, hogy a Galaxisnak van-e harmadik izoláló integrálja, még nem eldöntött kérdés. Ha nem létezne a harmadik izoláló integrál, az azt jelentené, hogy valószínűleg léteznek kaotikus pályák is a Tejútrendszerben. [4]

Irodalomjegyzék

[1] Michel Hénon – Carl Heiles: *The Applicability of the Third Integral Of Motion: Some Numerical Experiments*, Princeton University Observatory, Princeton, New Jersey, 1964

[2] Christian Emanuelsson: *Chaos in the Hénon–Heiles system*, University of Karlstad, 2011

[3] Sergey Antipov – Sergei Nagaitsev: *Hénon–Heiles Single Particle Dynamics At Iota*, University of Chicago, Chicago, USA; Fermilab, Batavia, USA, 2017

[4] Magyar Csillagászati Egyesület, *Csillagászati évkönyv*, Budapest, 1991

[5] Simon L. Péter – Tóth János: *Differenicálegyenletek: Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, Typotex Kiadó, Budapest, 2005

[6] Simon L. Péter : *Közönséges differenciálegyenletek jegyzet*, Budapest, 2007

[7] Simon L. Péter: *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek*, Budapest, 2012

[8] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, Typotex Kiadó, Budapest, 2007

[9] Csomós Petra: *Folytonos modellezés előadásjegyzet*, ELTE, Budapest, 2019

[10] Pfeil Tamás: *Differenciálegyenletek előadásjegyzet*, ELTE, Budapest, 2019

[11] Ernst Hairer – Christian Lubich – Gerhard Wanner: *Geometric Numerical Integration*, Springer – Verlag, Berlin, 2006

[12] Bagoly Zsolt – Dobos László: *Káosz*, 2016

[13] `https://en.wikipedia.org/wiki/Stability_theory#/media/File:Stability_Diagram.png`

[14] `http://phys.ubbcluj.ro/~zneda/nemlin-math/c6.pdf`

[15] `https://www.wikiwand.com/hu/Káoszelmélet`

[16] `https://mathworld.wolfram.com/SurfaceofSection.html`

Függelék

A modell vizsgálata során MATLAB (R2019b) numerikus programcsomagokat használtunk. A programkódok a következők.

A differenciálegyenlet rendszer

```
function F = f(t,Y)
    x = Y(1);
    y = Y(2);
    u = Y(3);
    v = Y(4);
F = [u; v; - x - 2*x*y; - y - x.^2 + y.^2];
```

A negyedrendű Runge-Kutta módszer

```
function [h, t, y] = RK4(a,b,y0,N)
h = (b-a)/N;
t = linspace(a,b,N+1);
m = length(y0);
y = zeros(m,N+1);
y(:,1) = y0;

for j = 1:N
    k1 = f(t(j), y(:,j));
    k2 = f(t(j)+0.5*h, y(:,j)+0.5*h*k1);
    k3 = f(t(j)+0.5*h, y(:,j)+0.5*h*k2);
    k4 = f(t(j)+h, y(:,j)+h*k3);

    y(:,j+1) = y(:,j) + h*(1/6*k1 + 1/3*k2 + 1/3*k3 + 1/6*k4);
end
```

HH-potenciál az (x,y) síkban (3.5. ábra)

```
clear all
%Az intervallum:
x = -2:0.01:2;
y = -2:0.01:2;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
%A potenciál:
Z = 1/2.*(X.^2 + Y.^2) + X.^2.*Y - 2/3.*Y.^3;

%Ábrázolás:
figure;
hold on
contourf(X,Y,Z,18)
colorbar
xlabel('x')
ylabel('y')
```

HH-potenciál a térben (3.6. ábra)

```
clear all
%Az intervallum:
[X,Y] = meshgrid(-2:0.1:2,-2:0.1:2);
%A potenciál:
Z = 1/2.*(X.^2 + Y.^2) + X.^2.*Y - 2/3.*Y.^3;

%Ábrázolás:
surf(X,Y,Z)
colorbar
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('U(x,y)')
```

Poincaré-metszetek (3.7. ábra)

A Poincaré-metszetek programkódjának megírásához a MATLAB beépített *orbitode* példáját vettem alapul.

```
%Az Events feltétel paraméterei:
function [value,isterminal,direction] = event(t,Y)
    %x(t)=0 ra akarunk ábrázolni
    value = Y(1);
    %megállási feltétel
    isterminal = 0;
    %honnan szúrja át a síkot a pálya
    direction = 1;

hold on
%Az egyenletrendszer paraméterei:
E = 1/6;    %adott energia
x0 = 0;     %EH első koordináta
y0 = 0;     %EH második koordináta
v0 = 0;     %EH negyedik koordináta
%az egyenletből kiszámolandó:
u0 = sqrt(2*E - y0.^2 + 2*y0.^3/3 - v0.^2 - x0.^2 - 2*x0.^2.*y0);
EH = [x0 y0 u0 v0];     %EH
tspan = [0 100000];     %időintervallum
options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-9,'Events',@event);     %feltételek

%Megoldás:
[t,Y,te,YE,ie] = ode23(@f, tspan, EH, options);

%Ábrázolás:
figure;
plot(YE(:,2),YE(:,4),'r.','LineWidth',1.5);
title('Poincaré-metszet');
xlabel('y(t)');
ylabel('v(t)');
legend('E = 1/6');
```