NYILATKOZAT

Név: Hegyi Krisztina

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: IJ2LQS

Szakdolgozat címe:

Az irigységmentesség relaxációi és a Nash-féle jólét osztozkodási feladatokban

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020, 12.13.

Hegyi Krisztina

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi kar

Hegyi Krisztina

AZ IRIGYSÉGMENTESSÉG RELAXÁCIÓI ÉS A NASH-FÉLE JÓLÉT OSZTOZKODÁSI FELADATOKBAN

Szakdolgozat

Matematika BSc - Matematikai elemző szakirány

Témavezető:
Bérczi-Kovács Erika
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2020

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. A modell **3**
2.1. Hasznossági függvények . . . 3
2.2. Szétosztások . . . 5

3. Tetszőleges hasznossági függvények **8**
3.1. Megegyező hasznossági függvények . . . 10
3.2. Hasznossági függvények rossz tárgyak esetén . . . 13
3.3. Diszjunkt-normalizált hasznossági függvény . . . 17

4. Boolean és negatív Boolean hasznossági függvények **18**
4.1. Boolean függvények . . . 18
4.2. Negatív Boolean függvények . . . 19

5. Additív hasznossági függvények **21**
5.1. Példák általános esetben . . . 21
5.2. Double Round Robin algoritmus . . . 22
5.3. EFX és PO algoritmus . . . 24

6. Harmadrendű additív hasznossági függvények **25**
6.1. Pareto optimális EFX algoritmusa . . . 25
6.2. Pareto optimális EFX^3 algoritmusa . . . 28

7. Bináris additív hasznossági függvények **30**
7.1. A bináris modell . . . 30
7.2. Determinisztikus szabályok . . . 31
7.3. MNW^{tie} determinisztikus szabály . . . 31

8. Összefoglalás **36**

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani elsősorban témavezetőmnek, Bérczi-Kovács Erikának, aki visszaadta a motivációmat a matematikusi pálya iránt, bíztatott és segített; emellett nekem való témát ajánlott, és kitartóan tekintette át munkámat. Továbbá szeretném megköszönni középiskolai matematika tanáraimnak, hogy jobban megszerettették velem a matematikát, támogattak és lelkesítettek; barátaimnak és családomnak, hogy mellettem álltak, és bíztattak a nehéz időkben is.

1. Bevezetés

Sokszor találkozunk azzal a feladattal, hogy egy vagy több tárgyat el kell osztanunk emberek között, úgy, hogy ne legyen belőle túl nagy konfliktus, a lehető legigazságosabbak legyünk. Ezzel nincs sok probléma, ha mondjuk egy emberről van szó, vagy a tárgyak feldarabolhatóak. Azonban ha egyik helyzet sem áll fenn, már nem is olyan egyszerű ez a feladat. Gondoljunk bele, milyen nehéz dolgunk lenne, ha egy csokit például nem tudnánk feldarabolni két gyermek között; ha az egyiküknek odaadnánk az egészet, minden bizonnyal a másik nem nézné olyan jó szemmel.

Természetesen a problémakört tovább bonyolíthatja, hogy nem mindenkinek egyezik a véleménye, a preferenciája a tárgyakkal kapcsolatban. Egy családi fotó a rokonságnak lehet felbecsülhetetlen, míg egy számukra ismeretlen embernek semmit sem jelent. Továbbá, ha például egy családban el kell osztani a házimunkákat meg ajándékokat karácsonykor, már azt is számításba kell vennünk, hogy nem feltétlen örülünk ezeknek a "tárgyaknak". Emellett az is előfordulhat, hogy a tárgyak egy részhalmaza együtt sokat ér, de önmagukban szinte semmit; gondoljunk bele, ha egy ikeás asztalhoz csak két lábat kapnánk.

Mint az előbbiekben láthattuk, nem mindig érhető el olyan egyszerűen, hogy mindenki ugyanolyan elégedett legyen; így ezt is figyelembe véve többféle koncepciót adok meg arra, hogy ne legyen nagy különbség az emberek hasznai között. Természetesen sejthető, és a későbbiekben látni is fogjuk, hogy a teljesen tetszőlegesnek vett hasznossági függvények nem kezelhetők annyira könnyen, így különböző kikötéseket fogunk megvizsgálni a preferenciákra. Többféle algoritmust is látni fogunk, melyek valamilyen szempontból igazságosnak tekinthető szétosztását adják vissza a tárgyaknak.

Tetszőleges hasznossági függvények esetén tudunk találni olyan szétosztást, amely irigységmentes valamely tárgy elvételére, azonban nem mindig létezik olyan, ahol ez tetszőleges, nem nulla értékű tárgyra teljesülne; monoton csökkenő hasznossági függvények esetén már található hasonló szétosztás. Ha a megegyező hasznossági függvények irányába indulunk el, ebben az esetben még mindig lesznek esetek, ahol nem tudunk ilyen szétosztást találni; viszont ha emellett még additívnak is vesszük a függvényeinket, már polinomiális időben találhatunk. Emellett az additív hasznossági függvények esetében további szétosztásokat is vizsgálunk, például amelyek maximalizálják a Nash-féle jólétet, amely igazából az összes ügynök hasznának szorzata.

2. A modell

Dolgozatomban az embereket, akik között a tárgyakat a lehető legigazságosabban el kell osztanunk; ügynököknek fogom nevezni. Mindegyik ügynöknek lesz egy külön hasznossági függvénye, amellyel az egyéni preferenciájukat jellemezzük. Az ügynökök halmazát N-nel, a tárgyak halmazát S-sel jelöljük a továbbiakban.

2.1. Hasznossági függvények

2.1. Definíció (Hasznossági függvény). Minden $i \in N$ ügynökre a hasznossági függvénye: $u_i : 2^S \to R$ amely megmondja, hogy a tárgyak egyes részhalmazai mennyit érnének i-nek. Az üreshalmaz értéke mindig 0, vagyis $u_i(\varnothing) = 0$ minden $i \in N$-re.

Az $u = (u_1, ..., u_n)$ függvények együttesét **érték-profilnak** nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a hasznossági függvények **megegyezőek**, ha $u_i(X) = u_j(X)$ minden $X \subseteq S$ és minden $i, j \in N$-re; és nem megegyező, ha ez nem feltétlenül teljesül.

Egy hasznossági függvényt **additívnak** nevezünk, ha $u(X) = \sum_{s \in X} u(s)$ minden $X \subseteq S$-re.

Egy hasznossági függvény **monoton növő**, ha $u(X) \leq u(Y)$; minden $X \subseteq Y$ esetén; hasonlóan **monoton csökkenő**, ha $u(X) \geq u(Y)$ minden $X \subseteq Y$ esetén.

Az egyszerűség kedvéért nem-monotonnak ill. nem-additívnak fogjuk nevezni a nem feltétlenül monoton ill. nem feltétlenül additív eseteket.

2.2. Definíció (Szétosztások, zsákok). S egy szétosztása egy $\pi : N \to 2^S$ függvény, amely minden ügynök számára a tárgyak egy részhalmazát adja (lehet üres is), amelyek együtt S-nek egy partícióját adják. Ezeket a részhalmazokat zsákoknak vagy batyuknak nevezzük.

Tárgyak egy halmazára $T \subseteq S$ és $k \in \mathbb{N}$-re legyen $\Pi_k(T)$ a T halmaz a k zsákba osztott partícióknak halmaza.

A π egy teljes szétosztás, ha $\pi \in \Pi_n(S)$.

A π egy részszétosztás, ha $\pi \in \Pi_n(T)$ egy $T \subseteq S$ részhalmazra.

Továbbiakban alapból a szétosztás egy teljes szétosztást fog jelenteni, kivéve, ha külön kitérünk rá, hogy csak részszétosztás.

Marginális érték

2.3. Definíció (Marginális érték). A marginális értékek i ügynök, $o \in S$ tárgy és a tárgyak egy $M \subseteq S \backslash \{o\}$ részhalmaza esetén:

$E_i^M(o) = u_i(M \cup \{o\}) - u_i(M)$.

Egy $M \subseteq S$ részhalmazra és i ügynökre jelölje:

$S_i^+(M) = \{s \in M | E_i^{M \backslash \{s\}}(s) > 0\}$,

$S_i^-(M) = \{s \in M | E_i^{M \backslash \{s\}}(s) < 0\}$,

$S_i^0(M) = \{s \in X | E_i^{M \backslash \{s\}}(s) = 0\}$.

Ezen kívül **additív hasznossági függvények** esetén:

$S^+ = \{o \in S | \exists i \in N : u_i(o) > 0\}$

Amiről megjegyezhetjük, hogy $S^+ = \bigcup_{o \in S} \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i^+(o) \right)$.

$S^- = \{o \in S | \forall i \in N : u_i(o) < 0\}$

Amiről megjegyezhetjük, hogy $S^- = \bigcup_{o \in S} \left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i^-(o) \right)$.

$S^0 = \{o \in S | \forall i \in N : u_i(o) \leq 0, \exists j \in N : u_j(o) = 0\}$

Amiről megjegyezhetjük, hogy $S^0 = \bigcup_{o \in S} \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i^0(o) \right) \backslash S^+$.

Tárgytípusok

2.4. Definíció (Kevert tárgyak). Egy o tárgyat kevertnek nevezünk, ha létezik két ügynök (i és j), illetve két részhalmaza a tárgyaknak: $M \subseteq S \backslash \{o\}, I \subseteq N \backslash (M \cup \{o\})$, amelyekre $u_i(M \cup \{o\}) > u_i(M)$ és $u_j(I \cup \{o\}) < u_j(I)$ teljesül.

2.5. Definíció (Jó tárgyak). Egy o tárgyat jónak nevezünk i ügynök számára a tárgyaknak egy $M \subseteq S$ részhalmaza esetén, ha $u_i(M \cup \{o\}) \geq u_i(M)$.

Egy o tárgyat általánosan jónak nevezünk i ügynök számára, ha az előbbi bármely $M \subseteq S$ részhalmazra teljesül.

2.6. Definíció (Rossz tárgyak). Egy o tárgyat rossznak nevezünk i ügynök számára egy $M \subseteq S$ részhalmaz esetén, ha $u_i(M \cup \{o\}) \leq u_i(M)$.

Egy o tárgyat általánosan rossznak nevezünk i ügynök számára, ha az előbbi bármely $M \subseteq S$ részhalmazra teljesül.

2.2. Szétosztások

2.7. Definíció (Pareto optimalitás). Egy π_2 szétosztás Pareto javítja π_1 szétosztást, ha $i \in N : u_i(\pi_2(i)) \geq u_i(\pi_1(i))$ és van egy ügynök, akire $j \in N : u_j(\pi_2(j)) > u_j(\pi_1(j))$. Egy π_1 szétosztás Pareto optimális (PO), ha nem létezik olyan π_2 szétosztás, amely Pareto javítja.

2.8. Definíció (Irigységmentesség). Azt mondjuk, hogy i ügynök irigy j ügynökre, ha: $u_i(\pi(i)) < u_i(\pi(j))$. Irigységmentesség akkor áll fenn, ha nincs olyan ügynök, amelyik irigy lenne bármelyik másikra. Az irigységmentesség tehát azt jelenti, hogy minden $i, j \in N$ ügynökre fennáll az $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j))$ egyenlőtlenség.

2.9. Definíció (Leximin megoldás). Olyan szétosztás, amely maximalizálja a legkisebb értéket a szétosztásban, amit ügynök kaphat; majd maximalizálja a második legkisebbet és így tovább.

Azt mondjuk, hogy egy π_2 szétosztás leximin-dominálja π_1-t, vagyis $\pi_1 \prec \pi_2$; ha $u_i(\pi_1(i)) = u_{p_i}(\pi_2(p_i))$ minden $i < j$ esetén valamely $j \in N$-re, és $u_j(\pi_1(j)) < u_{p_j}(\pi_2(p_j))$; ahol $u_1(\pi_1(1)) \leq ... \leq u_n(\pi_1(n))$ a hasznossági sorrendje π_1-nek; és $u_{p_1}(\pi_2(p_1)) \leq ... \leq u_{p_n}(\pi_2(p_n))$ a hasznossági sorrendje π_2-nek.

Tehát a leximin megoldás a "$\prec$" alapján a szétosztások maximális eleme.

Nash-féle jólét

2.10. Definíció (Nash-féle jólét). A **Nash-féle jólét** π szétosztás esetén, ahol N az ügynökök halmaza:

$$NW(\pi) = \prod_{i \in N} u_i(\pi(i))$$

Veszteséges Nash-féle jólétnek nevezzük a következőt:

$$dNW(\pi) = \prod_{i \in N} (-u_i(\pi(i)))$$

Általános jólétnek nevezzük a következőt:

$$EW(\pi) = \min_{i \in N} u_i(\pi(i))$$

Hasznossági jólétnek nevezzük a következőt:

$$UW = \sum_{i \in N} u_i(\pi(i)).$$

2.11. Definíció (**Maximális jólét**)**.** Egy szétosztás π_1 maximális egy W jólétre (vagyis MW), ha minden π_2 szétosztásra (ugyanazon ügynökök, tárgyak és hasznossági függvények mellett) $W(\pi_1) \geq W(\pi_2)$.

Az irigységmentesség relaxációi

2.12. Definíció ($EF1$)**.** Egy π szétosztás irigységmentes egy tárgyra ($EF1$), ha minden $i, j \in N$ ügynökre legalább az egyik teljesül az alábbiak közül:

1) $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j))$

2) $\exists o \in \pi(i) \cup \pi(j)$: $u_i(\pi(i) \backslash \{o\}) \geq u_i(\pi(j) \backslash \{o\})$

Vagyis egy $EF1$ szétosztásnál bármely irigység két ügynök között megszüntethető egyetlen egy (nem tetsző-leges) tárgy kiszedésvel valamelyikük zsákjából.

2.13. Definíció (EFX)**.** Egy π szétosztás irigységmentes bármely (nem nulla marginális értékű) tárgyra (EFX), ha minden $i, j \in N$ ügynökre legalább az egyik teljesül az alábbiak közül:

1) $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j))$

2)$\forall o \in S_i^+(\pi(j))$-re: $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j) \backslash \{o\})$,

$\forall o \in S_i^-(\pi(i))$-re: $u_i(\pi(i) \backslash \{o\}) \geq u_i(\pi(j))$,

$S_i^+(\pi(j)) \cup S_i^-(\pi(i)) \neq \varnothing$

Tehát egy szétosztás EFX, ha az irigység megszüntethető egy rossz tárgy kivételével az irigy ügynök batyujából, vagy pedig egy neki jó tárgy kivételével azon ügynök zsákjából, akire irigy. Természetesen ez a szétosztás $EF1$ is, annyi különbséggel, hogy jóval több tárgyra teljesül az összefüggés.

2.14. Definíció ($EF1_a$)**.** Egy szétosztás irigységmentes valamely eltávolított jó tárgyra vagy pedig hozzáadott rossz tárgyra, ha $\forall i, j \in N$-re legalább az egyik teljesül az alábbiak közül:

1) $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j))$

2) $\exists o \in S_i^+(\pi(i) \cup \{o\})$, ahol $o \in \pi(j)$ amelyre: $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j) \backslash \{o\})$,

vagy

$\exists o \in S_i^-(\pi(i) \cup \{o\})$, ahol $o \in \pi(i)$, amelyre: $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j) \cup \{o\})$.

Egy részt hasonlít $EF1$-hez, hiszen szintén j ügynök zsákjából vehetünk ki tárgyat; azonban ha a másik teljesül, akkor arról beszélhetünk, hogy az irigy ügynökünk egy rossz tárgyát hozzávettük a másik batyujához is, így megszüntetve az irigységet.

2.15. Definíció (EFX_a)**.** Egy π szétosztás irigységmentes bármely nem-nulla értékű jó tárgy eltávolítására vagy bármely nem-nulla értékű rossz tárgy hozzáadására, ha $\forall i, j \in N$re legalább az egyik teljesül az alábbiak közül:

1) $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j))$

2) $\forall o \in S_i^+(\pi(i) \cup \{o\})$-ra, ahol $o \in \pi(j)$: $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j) \backslash \{o\})$

$\forall o \in S_i^-(\pi(i) \cup \{o\})$-ra, ahol $o \in \pi(i)$: $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j) \cup \{o\})$

$S_i^+(\pi(i)) \cup S_i^-(\pi(i)) \neq \varnothing$

Lényegében $EF1_a$-hoz hasonló; azonban itt az összes jó ill. rossz tárgyra teljesül az összesfüggés; tehát vagy tetszőlegesen az irigy ügynök számára jó tárgyat elveszünk a másik batyujából, vagy pedig egy tetszőleges rossz tárgyát a másik zsákjához is hozzávesszük.

2.16. Definíció (EFX_0^0)**.** $\forall i, j \in N$ legalább az egyik teljesül az alábbiak közül:

1) $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j))$

2) $\forall o \in S_i^+(\pi(j)) \cup S_i^0(\pi(j))$,-re: $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j) \backslash \{o\})$

$\forall o \in S_i^-(\pi(i)) \cup S_i^0(\pi(i))$-re: $u_i(\pi(i) \backslash \{o\}) \geq u_i(\pi(j))$

$S_i^+(\pi(j)) \cup S_i^0(\pi(j)) \cup S_i^-(\pi(i)) \cup S_i^0(\pi(i)) \neq \varnothing$

Hasonló EFX-hez, azonban ekkor lehetnek 0 marginális értékűek is a tárgyaink, amelyeket elveszünk valamely ügynöktől.

2.17. Definíció (EFX_-^0)**.** Minden $i, j \in N$ legalább az egyik teljesül az alábbiak közül:

1) $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j))$

2)$\forall o \in S_i^+(\pi(j)) \cup S_i^0(\pi(j))$-re: $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j) \backslash \{o\})$

$\forall o \in S_i^-(\pi(i))$-re: $u_i(\pi(i) \backslash \{o\}) \geq u_i(\pi(j))$,

$S_i^+(\pi(j)) \cup S_i^0(\pi(j)) \cup S_i^-(\pi(i)) \neq \varnothing$.

Hasonló EFX_0^0-hoz, azonban jelen esetben az irigy ügynök zsákjából eltávolított rossz tárgy csak tisztán rossz lehet, nem lehet a marginális értéke 0.

2.18. Definíció (EFX_0^+)**.** Minden $i, j \in N$ legalább az egyik teljesül az alábbiak közül:

1) $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j))$

2) $\forall o \in S_i^+(\pi(j))$-re: $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j) \backslash \{o\})$

$\forall o \in S_i^-(\pi(i)) \cup S_i^0(\pi(i))$-re: $u_i(\pi(i) \backslash \{o\}) \geq u_i(\pi(j))$

$S_i^+(\pi(j)) \cup S_i^-(\pi(i)) \cup S_i^0(\pi(i)) \neq \varnothing$.

Szintén hasonlít EFX_0^0-hoz; azonban jelen esetben a másik ügynöktől elvett jó tárgy esetében nem lehet ez a jó tárgy 0 marginális értékű.

2.19. Definíció (EFX^3)**.** Legyen $\pi^+ = (\pi^+(1), ..., \pi^+(n))$, ahol $\pi^+(i) = \pi(i) \cap S^+$.

Hasonlóan $\pi^- = (\pi^-(1), ..., \pi^-(n))$, ahol $\pi^-(i) = \pi(i) \cap S^-$.

Additív hasznossági függvények esetén egy π szétosztás EFX^3, ha minden $i, j \in N$ ügynökre π EFX S-re; π^+ EFX S^+-ra és π^- EFX S^--ra.

Az alábbi irányított gráf az irigységmentesség relaxációi közötti összefüggéseket ábrázolja.

$$\begin{tikzcd}
 & EFX_0^+ \arrow[dr] & & EFX^3 \arrow[dl] & & EF1_a \\
EFX_0^0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & EFX \arrow[dr] & & EFX_a \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
 & EFX_-^0 \arrow[ur] & & EF1 & &
\end{tikzcd}$$

Egy irányított él azt fejezi ki, hogy amely csúcsból mutat a másik csúcsba, abból a szétosztásból következik, hogy egyben a másik is. Tehát a definíciókból könnyen látható, hogy EFX_0^0 esetén EFX_-^0 is a szétosztásunk a magyarázószövegek alapján. Ezen felül EFX_-^0 és EFX közötti kapcsolat is hasonló; hiszen EFX annyiban különbözik tőle, hogy a 0 marginális értékű tárgyakra nem kell feltétlenül teljesülnie az összefüggéseinek. Hasonlóan láthatjuk EFX_0^+ és EFX közötti kapcsolatot. Ezen felül EFX^3-ból triviálisan következik EFX, hiszen a definíciójában is benne van, hogy annak kell lennie.

Az EFX-ből nyilvánvalóan következik $EF1$, hasonlóan EFX_a-ból $EF1_a$ is; azonban EFX_a és $EF1$ közötti kapcsolathoz kell, hogy $o \in S_i^+(\pi(i) \cup \{o\})$, ahol $o \in \pi(j)$ létezzen; hasonlóan EFX_a-ból is következhet $EF1$, bár ott kevesebb esetben lesz meg ez az összefüggés tekintve, hogy $EF1_a$-nál az egyik eset teljesen

más irány, mint $EF1$-nél; tehát abban az esetben nem tudunk sokmindent megállapítani tetszőleges esetben. Később majd látjuk, hogy lesznek olyan hasznossági függvények, amelyek esetében ezen fogalmak, illetve EFX és EFX_a is meg fognak egyezni; de ettől még jelen esetben nem tudunk ennél többet megállapítani.

3. Tetszőleges hasznossági függvények

Ennél a fejezetnél a tételek főleg a [1] és [2]-ből származnak. Belátjuk, hogy tetszőleges hasznossági függvények esetén $EF1$-et mindig tudunk konstruálni polinomiális időben két ügynök esetén; illetve megmutatjuk, hogy az $EF1$ szétosztások nem mindig Pareto optimálisak.

Mindjárt kezdjük is az $EF1$ megtalálásával két ügynökre, amihez felhasználjuk egy tárgyak fix sorrendjét, és az alapján osztjuk ketté a tárgyak halmazát.

1. Tétel. Mindig létezik $EF1$ szétosztás két ügynökre tetszőleges (nem feltétlenül additív vagy monoton) hasznossági függvényekkel. Egy ilyen szétosztás polinomiális időben meghatározható.[1]

Bizonyítás. A tárgyak egy tetszőleges $1, ..., m$ sorrendjére legyenek $F_i = \{1, ..., i\}$ és $L_i = \{i + 1, .., .m\}$ a tárgyak első i elemének ill. utolsó $m - i$ tárgyak szétosztása, ahol $i = 0, ..., m$, és $F_0 = L_m = \varnothing$.
Tegyük fel, hogy $u_i(F_j) = u_i(L_j)$ valamely $i \in \{1, 2\}$ és $j \in \{1, ..., m\}$. Ha $u_{3-i}(F_j) \leq u_{3-i}(L_j)$, akkor legyen $\pi(i) = F_j$ és $\pi(3 - i) = L_j$; egyébként legyen $\pi(i) = L_j$ és $\pi(3 - i) = F_j$. A feltételezésünk szerint $u_i(F_j) = u_i(L_j)$, vagyis π egy irigységmentes szétosztás. Hasonlóan, ha létezik egy olyan j index $j \in \{0, ..., m\}$, amelyre $u_i(F_j) \geq u_i(L_j)$ és $u_{3-i}(F_j) \leq u_{3-i}(L_j)$ valamely $i \in \{1, 2\}$re, akkor $\pi(i) = F_j, \pi(3 - i) = L_j$ ismét irigységmentes szétosztás.

Ezentúl feltesszük, hogy az előbbi két esetből egyik sem teljesül; vagyis $u_1(S) \neq 0$; hiszen ha $i = m$, akkor $F_m = S$; és $L_m = \varnothing$, és mindkettő értéke 0 lenne, vagyis $u_i(F_m) = u_i(L_m)$. Két esetet tekintünk aszerint, hogy az $u_1(S)$ pozitív vagy negatív.

1. eset: $u_1(S) > 0$:

Mivel $u_1(F_0) = u_1(L_m) = u_1(\varnothing) = 0$ és $u_1(F_m) = u_1(L_0) = u_1(S) > 0$, ezért van egy $j \in \{0, ..., m - 1\}$ index, amire $u_1(F_j) < u_1(L_j)$ és $u_1(F_{j+1}) > u_1(L_{j+1})$.

A feltételezésünk alapján $u_2(F_j) < u_2(L_j)$ és $u_2(F_{j+1}) > u_2(L_{j+1})$ szintén teljesülnek.

- **1.1. aleset:** $u_1(F_j) \leq u_1(L_{j+1})$;, ahol $\pi(1) = L_{j+1}$ és $\pi(2) = F_{j+1}$.
- **1.2. aleset:** $u_1(F_j) > u_1(L_{j+1})$, ahol $\pi(1) = F_j$ és $\pi(2) = L_j$.

Mindkét alesetben 1-es ügynök irigy 2-es ügynök batyujára, de ez az irigység megszüntethető azzal, hogy a $j + 1$-es tárgyat töröljük 2-es ügynök batyujából. Ez azért igaz, mert:

- $u_1(L_{j+1}) \geq u_1(F_j)$ az 1.1. alesetnél;
- $u_1(F_j) > u_1(L_{j+1})$ az 1.2. alesetnél.

2. eset: $u_1(S) < 0$:

Mivel $u_1(F_0) = u_1(L_m) = u_1(\varnothing) = 0$ és $u_1(L_0) = u_1(F_m) = u_1(S) < 0$, ezért létezik egy $j \in \{0, ..., m - 1\}$

index, amire $u_1(F_j) > u_1(L_j)$ és $u_1(F_{j+1}) < u_1(L_{j+1})$.
A feltételezésünk alapján $u_2(F_j) > u_2(L_j)$ és $u_2(F_{j+1}) < u_2(L_{j+1})$ szintén teljesülnek.

- **2.1. aleset:** $u_1(F_j) \geq u_1(L_{j+1})$, ahol $\pi(1) = F_{j+1}$ és $\pi(2) = L_{j+1}$.
- **2.2. aleset:** $u_1(F_j) < u_1(L_{j+1})$, ahol $\pi(1) = L_j$ és $\pi(2) = F_j$.

Mindkét alesetben 1-es ügynök irigy 2-es ügynök batyujára, de ez az irigység megszüntethető $j+1$-es tárgy törlésével 1-es ügynök zsákjából; hiszen

- $u_1(F_j) \geq u_1(L_{j+1})$ a 2.1.-es alesetnél;
- $u_1(L_{j+1}) > u_1(F_j)$ a 2.2.-es alesetnél.

Tehát a tételt bebizonyítottuk. □

A Pareto optimális és $EF1$ szétosztások elég más megközelítései a problémának, így nem is várhatjuk el általános esetben, hogy egyszerre teljesüljenek. A következő tétel is ezt bizonyítja.

2. Tétel. Léteznek osztozkodási feladatok kevert tárgyakkal, és általános, de nem megegyező hasznossági függvényekkel, amelyeknél a tárgyak marginális értéke sehol sem nulla; ahol egyetlen egy $EF1$ szétosztás sem Pareto optimális. [2]

Bizonyítás. Vegyünk 2 ügynököt és 4 tárgyat. A következő hasznossági függvényt vesszük, amelynél u_i csak az adott részhalmaz méretétől függ:

- $u_1(\varnothing) = u_2(\varnothing) = 0$,
- $u_1(M) = u_2(M) = 3$ ha $|M| = 3$, és
- $u_1(M) = u_2(M) = 4$ ha $|M| = 4$.
- Ha $|M| = 1, u_1(M) = -1$ és $u_2(M) = 1$.
- Ha $|M| = 2, u_1(M) = -2$ és $u_2(M) = 2$.

Ahhoz, hogy $EF1$-et kapjunk, 1-es ügynök nem kaphat 3 vagy 4 elemes batyut. Ha mégis ilyet kapna, akkor 2-es ügynök legfeljebb 1 elemű batyut kaphat. Viszont ekkor 2-es ügynök haszna 1; 1-es ügynök batyujából pedig ha kiveszünk egy tárgyat, akkor is 2-es ügynök számára továbbra is minimum 2-t fog érni; illetve ha az ő egyetlen tárgyát hagyjuk figyelmen kívül, akkor is még mindig fenn fog állni az irigység.

Tehát 1-es ügynök 0, 1 vagy 2 tárgyat kaphat. Ha nincs egy tárgya sem, az ő haszna 0 lenne, viszont a másiknak a zsákjából 4 lenne neki, amelyet egy tárgy elvételével csak 3-ra tudunk csökkenteni.

Maradt két esetünk, hogy 1 vagy 2 tárgyat kapjon. Ha csak egy tárgya van, akkor a két ügynök haszna rendre -1 és 3. Ha viszont 2 tárgyat, akkor -2 és 2. Látható, hogy ezek mindegyike $EF1$. Azonban mindkét esetre igaz, hogy ha 1-es ügynök nem kap egy tárgyat se, és 2-es ügynök megkapja mind a 4-et, akkor mindkét ügynök jobban járna.

Tehát egyik $EF1$ sem volt Pareto optimális.

□

3.1. Megegyező hasznossági függvények

Ennél a fejezetnél a tételek [1] és [2]-ből származnak. Belátjuk, hogy megegyező hasznossági függvények esetén nem mindig található EFX; azonban a leximin megoldás mindig EFX_a lesz és Pareto optimális, ennek kapcsán meg fogjuk állapítani, hogy ezek nem feltétlenül EFX-ek; ami természetesen logikusan következik eleve abból, hogy leximin megoldást mindig tudunk találni.

3. Tétel. Nem feltétlenül létezik EFX szétosztás két ügynökre nem-monoton, nem-additív, megegyező hasznossági függvényekkel. [1]

Bizonyítás. Legyen $S = \{1, 2, 3\}$ 3 tárgy halmaza, és legyen a hasznossági függvényünk:
$u(\varnothing) = 0, u(1) = 1, u(2) = 2, u(3) = 0, u(\{1, 2\}) = 3, u(\{1, 3\}) = 0, u(\{2, 3\}) = 3$, és $u(\{1, 2, 3\}) = 4$.

Azt állítjuk, hogy 2 ügynök esetén nincsen EFX szétosztás. Mivel megegyező a hasznossági függvényünk, ezért feltehető, hogy 1-es ügynök több tárgyat kap (2-t vagy 3-at).

- Ha minden tárgy 1-es ügynöknél van, akkor $u(\pi(1)) = u(\{1, 2, 3\}) = 4$ és $u(\pi(2)) = u(\varnothing) = 0$; vagyis 2-es ügynök féltékeny 1-es ügynökre.
  Azonban ez nem EFX, hisz 1-es és 3-as tárgy is jó 2-es ügynöknek, és eltávolításukkal nem szűnik meg az irigység.

- Ha $\pi(1) = \{1, 2\}$ és $\pi(2) = 3$, ekkor $u(\pi(1)) = u(\{1, 2\}) = 3$; és $u(\pi(2)) = u(3) = 0$; vagyis 2-es ügynök féltékeny 1-es ügynökre.
  Ekkor szintén ha tekintjük 1-es tárgyat, ami jó tárgy 1-es ügynöknek; azonban az eltávolításával most sem szűnik meg az irigység a két ügynök között.

- Ha $\pi(1) = \{2, 3\}$ és $\pi(2) = 1$, akkor $u(\pi(1)) = 3$ és $u(\pi(2)) = 1$; vagyis 2-es ügynök irigy 1-es ügynökre. Ez szintén nem EFX, hiszen 3-as tárgy jó 1-es ügynöknek, de elvételével továbbra is fenn áll a féltékenység.

- Végül ha $\pi(1) = \{1, 3\}$ és $\pi(2) = 2$, akkor $\pi(1) = 0$ és $(\pi(2) = 2$, vagyis 1-es ügynök féltékeny 2-es ügynökre.
  Ekkor a 3-as tárgy rossz tárgy 1-es ügynöknek, azonban eltávolításával 1-es ügynök továbbra is irigy marad 2-es ügynökre.

Tehát minden szétosztásra láttuk, hogy egyik sem EFX ebben az esetben.

□

4. Tétel. Léteznek osztozkodási feladatok kevert tárgyakkal és megegyező hasznossági függvényekkel, amelyek marginális értéke nem nulla; amelyben egyik szétosztás sem EFX. [2]

Bizonyítás. Vegyük a következő feladatot 2 ügynökre és 4 tárgyra, ahol a következők a (megegyező) hasznossági függvényünk értékei:

$u(\varnothing) = 0$, $u(a) = 5$,$u(b) = 5$,$u(c) = 5$,$u(d) = 5$,$u(\{a, b\}) = 6$, $u(\{a, c\}) = 3$, $u(\{b, c\}) = 3$, $u(\{a, d\}) = 6$, $u(\{b, d\}) = 6$, $u(\{c, d\}) = 3$, $u(\{a, b, c\}) = 7$, $u(\{a, b, d\}) = 8$, $u(\{a, c, d\}) = 7$, $u(\{b, c, d\}) = 7$, és $u(\{a, b, c, d\}) = 9$.

Tekintsük a leximin megoldást, ami ebben az esetben a következő:

$\pi = (\{c\}, \{a, b, d\})$.

Itt az a rossz tárgy 1-es ügynöknek, hiszen $u(\pi(1) \cup \{a\}) - u(\pi(1)) = 3 - 5 = -2 < 0)$; viszont jó tárgy 2-es ügynöknek: $u(\pi(2)) - u(\pi(2) \backslash \{a\}) = 8 - 6 = 2 > 0)$.

Tehát a probléma kevert tárgyas. Ezután megmutatjuk, hogy egyik szétosztás sem EFX; ezért az összes szétosztást nézzük, ahol 1-es ügynök más-más zsákot kap, és minden esetben megindokoljuk, miért nem EFX. Elegendő ezt csak az egyik ügynökre megnézni, hiszen a két ügynökre szimmetrikusan működik a feladat a megegyező hasznossági függvény miatt.

- $\pi = (\varnothing, \{a, b, c, d\}) : u(\pi(1)) = 0, u(\pi(2)) = 9, u(\pi(2)) - (\pi(2) \backslash \{c\}) = 1$ és $u(\pi(1)) = 0 < 8 = u(\pi(2) \backslash \{c\})$

  Itt c jó tárgy 2-es ügynöknek, viszont a zsákjából kivéve nem múlik el 1-es irigysége.

- $\pi = (\{a\}, \{b, c, d\}) : u(\pi(1)) = 5, u(\pi(2)) = 7, u(\pi(2)) - u(\pi(2) \backslash \{c\}) = 1$ és $u(\pi = (1)) < 6 = v(\pi(2) \backslash \{c\})$

  Szintén c jó tárgy 2-es ügynöknek, viszont a zsákjából kivéve 1-es ügynök továbbra is féltékeny rá.

- $\pi = (\{b\}, \{a, c, d\}) : u(\pi(1)) = 5, u(\pi(2)) = 7, u(\pi(2)) - u(\pi(2) \backslash \{c\}) = 1$ and $u(\pi(1)) < 6 = u(\pi(2) \backslash \{c\})$

  Itt c még mindig jó tárgy 2-es ügynöknek, viszont a zsákjából kivéve 1-es irigysége továbbra is fennáll.

- $\pi = (\{c\}, \{a, b, d\}) : u(\pi(1)) = 5, u(\pi(2)) = 8, u(\pi(2)) - u(\pi(2) \backslash \{d\}) = 2$ és $u(\pi(1)) < 6 = u(\pi(2) \backslash \{d\})$

  Most már d a jó tárgyunk, amely elvételével még mindig nem szűnik meg az irigység.

- $\pi = (\{d\}, \{a, b, c\}) : u(\pi(1)) = 5, u(\pi(2)) = 7, u(\pi(2)) - u(\pi(2) \backslash \{c\}) = 1$ és $u(\pi(1)) < 6 = u(\pi(2) \backslash \{c\})$

  Megint c a jó tárgyunk; ha kivesszük 2-es ügynök zsákjából, 1-es továbbra is irigy marad.

- $\pi = (\{a, b\}, \{c, d\}) : u(\pi(1)) = 6, u(\pi(2)) = 3, u(A1) - u(\pi(1) \backslash \{a\}) = 1$ és $u(\pi(2)) < 5 = u(\pi(1) \backslash \{a\})$

  Ennél az esetnél a egy jó tárgy 1-es ügynöknek; viszont elvételével még mindig többet fog érni a batyuja, mint 2-es ügynöknek.

- $\pi = (\{a, c\}, \{b, d\}) : u(\pi(1)) = 3, u(\pi(2)) = 6, u(\pi(2)) - u(\pi(2) \backslash \{b\}) = 1$ és $u(\pi(1)) < 5 = u(\pi(2) \backslash \{b\})$

  Most pedig b jó tárgy 2-es ügynöknek; de ennek eltávolítása most sem oldja meg 1-es ügynök irigységét.

- $\pi = (\{b, c\}, \{a, d\}) : u(\pi(1)) = 3, u(\pi(2)) = 6, u(\pi(2)) - u(\pi(2) \backslash \{d\}) = 1$ és $u(\pi(1)) < 5 = u(\pi(2) \backslash \{d\})$

  Végül pedig d jó tárgy 2-es ügynöknek, de most sem oldódik meg a helyzet.

Tehát minden esetben elmondható, hogy a szétosztás nem EFX, hisz mutattunk egy olyan tárgyat mindenhol, amit tekintve a szétosztás valóban nem EFX.

□

5. Tétel. Általános, de megegyező hasznossági függvények esetén a leximin megoldás EFX_a és Pareto optimális. [2]

Bizonyítás. Legyen π egy leximin szétosztás. Ez egyértelműen Pareto optimális; hisz ha lenne egy olyan szétosztás, amely ehhez képest ügynökök egy csoportjának jobb, viszont senkinek se rosszabb, akkor nem lehetne leximin megoldás.

Tehát csak azt kell belátni, hogy ez a szétosztás EFX_a. Tegyük fel, hogy π nem EFX_a egy $i, j \in N$ ügynök párosra, ahol $i \neq j$. És $u(\pi(i)) < u(\pi(j))$.

Legyen $u(\pi(1)) \leq u(\pi(2)) \leq ... \leq u(\pi(n))$ a hasznossági sorrend.Továbbá legyen $k = argmax\{h \in N | u(\pi(h)) \leq u(\pi(i))\}$. Vegyük észre, hogy $i \leq k$ és $k < j$ teljesül, továbbá $u(\pi(i)) = u(\pi(k))$ és $u(\pi(k)) < u(\pi(j))$.
Ahhoz, hogy erre a két ügynökre ne legyen EFX_a a szétosztás az alábbiak közül az egyiknek teljesülnie kell:

(a) $\exists o \in \pi(j)$:
$u(\pi(i) \cup \{o\}) > u(\pi(i))$, de $u(\pi(i)) < u(\pi(j) \backslash \{o\})$

(b) $\exists o \in \pi(i)$:
$u(\pi(i)) < u(\pi(i) \backslash \{o\})$, de $u(\pi(i)) < u(\pi(j) \cup \{o\})$

1. eset: (a) teljesül.

Ekkor a feltételt sértő o tárgyat áttesszük j batyujából i batyujába, az így kapott szétosztást nevezzük π_2-nek.:
$\pi_2(i) = \pi(i) \cup \{o\}$, $\pi_2(j) = \pi(j) \backslash \{o\}$ és $\pi_2(h) = \pi(h)$ minden további $h \in N \backslash \{i, j\}$ ügynökre.
Belátjuk, hogy ez a szétosztás leximin-dominálja π-t, vagyis $\pi \prec \pi_2$.
Legyen $u(\pi_2(p_1)) \leq ... \leq u(\pi_2(p_n))$ a hasznossági sorrendje π_2-nek. Látható, hogy ebben a sorrendben i és j ügynök helye legalább a k-adik; ebből következik, hogy $\pi_2(p_q) = \pi(q)$ minden $q \in \{1, ..., k-1\}$.

Most 3 esetet nézünk a k-adik ügynökre, hogy ő most i, j vagy $k+1$.

- 1. eset: $p_k = i$

  (a) alapján tudjuk, hogy $u(\pi_2(i)) = u(\pi(i) \cup \{o\}) > u(\pi(i)) = u(\pi(k))$, vagyis $\pi \prec \pi_2$.

- 2. eset: $p_k = j$

  (a) alapján tudjuk, hogy $u(\pi_2(j)) = u(\pi(j) \backslash \{o\}) > u(\pi(i)) = u(\pi(k))$, vagyis $\pi \prec \pi_2$.

- 3. eset: $p_k = k+1$

  Látható, hogy $u(\pi_2(k+1)) = u(\pi(k+1)) > u(\pi(k)) \geq u(\pi(i))$, π_2 konstrukciója és k választása alapján.

  Tehát ebben az esetben is $\pi \prec \pi_2$.

Vagyis az (a) esetén π nem lehetett a leximin megoldás.

2. eset: (b) teljesül.

Ekkor a feltételt sértő o tárgyat áttesszük i batyujából j batyujába, az így kapott szétosztást nevezzük π_2-nek, vagyis:

$\pi_2(i) = \pi(i)\backslash\{o\}; \pi_2(j) = \pi(j) \cup \{o\}$ és $\pi_2(h) = \pi(h)$ minden $h \in N\backslash\{i, j\}$-re.
Tekintsük ismét a hasznossági sorrendet π_2-nél:
$u(\pi_2(p_1)) \leq ... \leq u(\pi_2(p_n))$. Könnyű látni, hogy i és j ügynökök helye a sorban legalább k. Ebből következik, hogy $\pi_2(p_q) = \pi(q)$ minden $q \in \{1, ..., k-1\}$-re. Hasonlóan nézzük k pozíciót, mint az előző esetben.

- 1. eset: $p_k = i$

  $u(\pi_2(i) = u(\pi(i)\backslash\{o\} > u(\pi(i)$ (b) alapján, vagyis $\pi \prec \pi_2$.

- 2. eset: $p_k = j$

  $u(\pi_2(j)) = u(\pi(j) \cup \{o\}) > u(\pi(i)) = u(\pi(k))$ (b) alapján, vagyis $\pi \prec \pi_2$.

- 3. eset: $p_k = k+1$

  $u(\pi_2(k+1)) = u(\pi(k+1)) > u(\pi(k)) = u(\pi(i))$, π_2 konstrukciója és k alapján; tehát ebben az eseteben is $\pi \prec \pi_2$.

Tehát mindegyik esetben beláttuk, hogy ekkor az alapból megadott π szétosztás nem lehet leximin megoldás; ellentmondásra jutottunk, vagyis a leximin megoldás ebben az esetben tényleg EFX_a.

□

Nyilvánvalóan az EFX_a jobban emlékeztet minket EFX-re, mint a leximin megoldásra; ezért is érdekes a következő tétel, miszerint előfordul, hogy a leximin megoldás nem EFX.

6. Tétel. Vannak osztozkodási feladatok, ahol a leximin megoldás általános, megegyező hasznossági függvények esetén nem EFX.

Bizonyítás. Vegyük a következő példát:

- $u(a) = 4; u(b) = 1; u(c) = 3; u(\{a, b\}) = 0; u(\{b, c\}) = 2, u(\{a, c\}) = 0, u(\{a, b, c\}) = 2.$
- Itt $\pi(1) = \{b, c\}; \pi(2) = \{a\}$ a leximin megoldás, viszont nem EFX, hiszen ha elvesszük b-t 1-es ügynöktől (ez egy rossz tárgy neki), akkor az irigység továbbra is fenn fog állni.

□

Megjegyzés. Ha monoton, nem-pozitív hasznossági függvényeink vannak:
$u(a) = -3; u(b) = -1; u(c) = -2; u(\{a, b\}) = -6; u(\{b, c\}) = -6, u(\{a, c\}) = -4, u(\{a, b, c\}) = -10.$
Itt a $\pi(1) = \{b\}; \pi(2) = \{a, c\}$ leximin megoldás, viszont nyilvánvalóan nem EFX.

3.2. Hasznossági függvények rossz tárgyak esetén

Ennél a fejezetnél a tételek főleg a [1] és [2]-ből származnak. Most a rossz tárgyas esetet vizsgáljuk; jó tárgyakról tudjuk, hogy mindig létezik EFX_0^0 [7]-ból monoton, megegyező hasznossági függvények esetén, bár most csak a rossz tárgyas esetet fogjuk részletesen megvizsgálni.

Látni fogjuk, hogy megegyező, monoton (csökkenő) hasznossági függvényeknél mindig létezik EFX_0^+, amelynek egy nem teljesen triviális következménye lesz ugyanez nem megegyező hasznossági függvények esetén is két ügynök esetére. Az EFX_0^+ algoritmikus megtalálásához egyrészt rossz tárgya adhatunk a legboldogabb ügynöknek; vagy ha ez sértené EFX_0^+-t, akkor ugyanezen ügynök zsákját ki kell cserélnünk.

Emellett EFX továbbra sem egyezik meg feltétlenül EFX_a-val, illetve nem biztos, hogy Pareto optimális.

7. Tétel. Ha minden ügynöknek monoton, nem additív, megegyező hasznossági függvénye van, EFX_0^+ szétosztása rossz tárgyaknak mindig létezik. [1]

Bizonyítás. Az algoritmusunk pszeudokódja alább látható, mint Algorithm 1. Az ügynökök hasznossági függvényét u jelöli. Az algoritmusunk futása során P-ben tároljuk a jelenleg még nem elosztott rossz tárgyakat; illetve még eltárolunk a szétosztott tárgyakra egy EFX_0^+ szétosztást.

Kezdetben $P = S$. Előfordulhat, hogy egy-egy tárgy visszakerül ezen halmazba később. Tekintsünk bármely fordulóját az algoritmusnak és legyen $\pi = \langle \pi(1), ..., \pi(n) \rangle$ az EFX_0^+ szétosztásunk ezen forduló kezdetén; illetve legyen $\pi' = \langle \pi'(1), ..., \pi'(n) \rangle$ a forduló végén lévő EFX_0^+ szétosztás. Legyen P a forduló kezdetén nem elosztott rossz tárgyak halmaza; míg P' a forduló végén lévő nem elosztott rossz tárgyak halmaza.
Azt állítjuk, hogy az alábbiak közül legalább az egyiknek teljesülnie kell:

(1) $|P'| < |P|$ és $\sum_{i \in N} u(\pi'(i)) \leq \sum_{i \in N} u(\pi(i))$;

(2) $\sum_{i \in N} u(\pi'(i)) < \sum_{i \in N} u(\pi(i))$.

Tehát minden egyes fordulójában az algoritmusnak, vagy csökkentjük az UW-t (hasznossági jólét), vagy az elosztott rossz tárgyak száma nő, anélkül, hogy az UW növekedne.
Egy forduló a következőképpen néz ki:

Mivel minden ügynöknek megegyező hasznossági függvénye van, az ügynökök sorba rendezhetők a zsákjaik értéke alapján. Tehát egy ponton mindig van legalább egy ügynök, akit a legboldogabbnak nevezhetünk; vagyis aki nem irigy senkire. Minden egyes fordulóban veszünk egyetlen s nem elosztott rossz tárgyat, és s-t hozzáadjuk ezen ügynök (legyen k) batyujához. Két esetünk van:

1. eset: Legyen $\langle \pi(1), ..., \pi(k) \cup \{s\}, ..., \pi(n) \rangle$ egy EFX_0^+ szétosztás. Ekkor legyen $\pi'(k) = \pi(k) \cup \{s\}$; és $\pi'(i) = \pi(i)$, ha $i \neq k$.

Megfigyelhetjük, hogy a π' szétosztás teljesíti a fenti (1)-es feltételt.

2. eset: Tegyük fel, hogy $\langle \pi(1), ..., \pi(k) \cup \{s\}, ..., \pi(n) \rangle$ nem EFX_0^+. Mivel minden tárgy rossz tárgy, ezért ez csak akkor lehetséges, ha $u((\pi(k) \cup \{s\}) \backslash \{s'\}) < u(\pi(l))$ valamely $s' \in \pi(k)$-re és $l \in N$-re.

Vagyis találhatunk egy tartalmazásra minimális részhalmazt $\pi'(k) \subset \pi(k) \cup \{s\}$; amelyre $u(\pi'(k)) < u(\pi(l))$ valamely $l \in N$-re.

Mivel $\pi'(k)$ egy minimális ilyen részhalmaza $\pi(k) \cup \{s\}$-nek; ezért minden $X \subset \pi'(k)$-ra: $u(X) \geq u(\pi(i))$ minden $i \in N$-re.

Ekkor a $(\pi(k) \cup \{s\}) \backslash \pi'(k)$-ban szereplő rossz tárgyak visszakerülnek P-be, vagyis
$P' = P \cup ((\pi(k) \cup \{s\}) \backslash \pi'(k))$. Legyen $\pi'(i) = \pi(i)$ minden $i \neq k$-ra.

Állítás: $\pi' = \langle \pi'(1), ..., \pi'(n) \rangle$ szétosztás EFX_0^+.

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy $u(\pi'(i) \backslash \{r\}) \geq u(\pi'(j))$ minden $i, j \in N$ és $r \in \pi'(i)$ -re. Mivel $\pi'(t) = \pi(t)$ minden $t \neq k$-ra, és π egy EFX_0^+ szétosztás; így minden i, j-re, ahol egyik sem k, ez teljesülni fog.

Ha $i = k$:
Mivel $\pi'(k)$ egy minimális "irigy" részhalmaza a $\pi(k) \cup \{s\}$-nek, ezért $u(\pi'(k) \backslash \{r\}) \geq u(\pi(j)) = u(\pi'(j))$ minden $r \in \pi'(k)$-ra és $j \neq k$-ra.

Ha $j = k$:
Azt állítjük, hogy $u(\pi'(k)) < u(\pi(k))$. Valóban, hiszen $u(\pi'(k)) < u(\pi(l))$ valamely $l \in N$-re; mivel $\pi'(k)$ "irigy", és $u(\pi(l)) \leq u(\pi(k))$ for all $l \in N$ mivel k a legboldogabb ügynök π-ben.

Tehát bármely $i \neq k$, legyen $u(\pi'(i) \backslash \{r\}) = u(\pi(i) \backslash \{r\}) \geq u(\pi(k)) > u(\pi'(k))$. Minden $r \in \pi'(i)$-re, ahol a $u(\pi(i) \backslash \{r\}) \geq u(\pi(k))$ egyenlőtlenség teljesül, hiszen π EFX_0^+ volt.

Megjegyezzük, hogy maximum $|S|$ egymást követő forduló lehet, ahol az (1)-es feltétel teljesül. Ezután vagy minden rossz tárgy el lett osztva, vagy van egy folrduló, ahol a (2)-es feltétel teljesül; vagyis az UW szigorúan csökken. Tehát a fordulók száma legfeljebb $|S|/\Delta$ lehet, ahol $\Delta = min\{|u(X) - u(Y)| : X, Y \subseteq S$ és $u(X) \neq u(Y)\}$ a minimális különbség a hasznosságok között. Tehát az algoritmusunk mindenképpen végigér.

□

□

Algorithm 1 EFX_0^+ megtalálása rossz tárgyak monoton, megegyező hasznossági függvények esetén.

Input: ügynökök N halmaza, tárgyak S halmaza, monoton, negatív hasznossági függvény u
Output: Egy EFX_0^+ szétosztás
Legyen $P := S$
$\pi(i) := \varnothing$ minden $i \in N$ -re
while $P \neq \varnothing$ **do**
    Vegyünk egy nem elosztott $s \in P$ rossz tárgyat
    Vegyük a legboldogabb $k \in N$ ügynököt
    if $(\pi(1), ..., \pi(k) + s, ..., \pi(n))$ is EFX_0^+ **then**
        $\pi(k) \leftarrow \pi(k) \cup \{s\}$
        $P \leftarrow P \backslash \{s\}$
    else
        Legyen $X \subset \pi(k) \cup \{s\}$ tartalmazásra a legkisebb olyan halmaz, ahol $u(X) < u(\pi(l))$ valamely $l \in N$ ügynökre
        $\pi(k) \leftarrow X$
        $(P \leftarrow P \cup \pi(k) \cup \{s\}) \backslash X$
return π

Két ügynök esetén már beláttuk, hogy bármikor található $EF1$ szétosztás; most pedig megmutatjuk monoton csökkenő hasznossági függvények esetén, hogy EFX_0^+ létezik. Egészen hasonlóan itt is egyből két felé osztjuk a tárgyhalmazt.

8. Tétel. Mindig létezik EFX_0^+ szétosztása rossz tárgyaknak két ügynök, monoton, nem-additív hasznossági függvények esetén. Egy ilyen szétosztás polinomiális időben meghatározható. [1]

Bizonyítás. Legyenek u_1 és u_2 a hasznossági függvényei rendre 1-es és 2-es ügynöknek. Az előző tétel alapján létezik EFX_0^+, ha mindkét ügynök hasznossági függvénye u_1.

Vegyünk egy ilyen szétosztást; és legyen S-nek ezen partíciója S_1 és S_2. Most hagyjuk 2-es ügynököt választani a 2 batyu közül, nyilván a neki jobbikat fogja.

Nyilvánvalóan 2-es ügynök nem lesz irigy; emellett pedig ha 1-es ügynök féltékeny 2-es ügynökre, akkor az ő számára ez a szétosztás természetesen EFX_0^+ lesz; tehát ez a szétosztásEFX_0^+ lesz, amelyet polinomiális időben meghatároztunk.

□

9. Tétel. Léteznek osztozkodási feladatok általánosan rossz tárgyakkal és megegyező általános hasznossági függvényekkel, amelyek marginális értékei nem nullák, és semelyik EFX szétosztás nem elégíti ki EFX_a-t.

Bizonyítás. Vegyünk 2 ügynököt és 4 tárgyat megegyező hasznossági függvényekkel:

$u(\varnothing) = 0, u(a) = -4, u(b) = -4, u(c) = -4, u(d) = -6, u(\{a,b\}) = -5, u(\{a,c\}) = -5, u(\{b,c\}) = -5, u(\{a,d\}) = -7, u(b,d) = -7, u(\{c,d\}) = -7, u(\{a,b,c\}) = -8, u(\{a,b,d\}) = -8, u(\{a,c,d\}) = -8,$
$u(\{b,c,d\}) = -8$ and $u(\{a,b,c,d\}) = -9$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az egyetlen EFX szétosztás jelen esetben az, hogy $\{a,b,c\}$ -t 1-es ügynöknek adjuk; d-t pedig 2-esnek, ill. ezek a batyuk felcserélve. Minden más szétosztás esetén a 4. *Tételhez* hasonlóan járhatunk el.

Azonban ezt az EFX szétosztást tekintve látható, hogy ez nem EFX_a; hiszen: $u(\pi(1)) = -8 < -7 = u(\pi(2) \cup \{a\})$.

□

Az EFX szétosztások továbbra sem Pareto optimálisak a hasznossági függvényre vonatkozó újabb kikötések ellenére sem.

10. Tétel. Léteznek osztozkodási feladatok általánosan rossz tárgyakkal és megegyező általános hasznossági függvényekkel, amelyek marginális értékei nem nullák; ahol semelyik EFX szétosztás nem PO. [2]

Bizonyítás. Vegyük ismét a 8. *Tételben* vett feladatot; a két EFX szétosztás az alábbiak voltak:

$\pi_1 = (\{a,b,c\},\{d\})$, illetve $\pi_2 = (\{d\},\{a,b,c\})$.

Vegyük továbbá a következő szétosztást:

$\pi_3 = (\{a,b\},\{c,d\})$ és $\pi_4 = (\{c,d\},\{a,b\})$.

Könnyen látható, hogy mindkettő a leximin megoldás; emellett a következők teljesülnek:

$$u(\pi_3(1)) = -5 > -6 = u(\pi_1(1)), u(\pi_3(2)) = -7 > -8 = (\pi_1(2)),$$
$$u(\pi_4(1)) = -7 > -8 = u(\pi_2(1)), u(\pi_4(2)) = -5 > -6 = u(\pi_2(2)).$$

Vagyis rendre π_3 és π_4 Pareto-javítja π_1-et és π_2-t, hiszen mindkét ügynök jobban jár ezekkel a batyukkal.

□

3.3. Diszjunkt-normalizált hasznossági függvény

Ennél a fejezetnél a tételek főleg [2]-ből származnak. Jelen esetben is, bár nem megegyezőek a hasznossági függvényeink; a leximin megoldás továbbra is EFX_a és Pareto optimális, viszont most már EFX is lesz.

3.1. Definíció (Diszjunkt-normalizált hasznossági függvény). Minden $H, K \subseteq S$-re, ahol $H \cap K = \varnothing$ és $H \cup K = S$; $u_i(H) + u_i(K) = c$ minden $i \in N$-re és valamely $c \in \mathbb{R}$-re.

11. Tétel. Diszjunkt-normalizált hasznossági függvények esetén EFX és EFX_a egybeesnek.

Bizonyítás. Legyen $c \in \mathbb{R}$ az előre megadott konstansunk a diszjunkt-normalizáláshoz.Tegyük fel, hogy létezik π szétosztás két ügynök között, amire teljesül, hogy EFX_a, és legyen i ügynök irigy j ügynökre: $u_i(\pi(i)) < u_i(\pi(j))$.

Ez EFX_a, vagyis ha $u_i(\pi(i)\backslash\{o\}) > u_i(\pi(i))$, akkor $u_i(\pi(j) \cup \{o\} \leq u_i(\pi(i))$. Megszorozzuk ezt -1-gyel, majd c-t adunk mindkét oldahoz:

$c - u_i(\pi(j) \cup \{o\}) \geq c - u_i(\pi(i))$
$u_i(\pi(i)\backslash\{o\}) \geq u_i(\pi(j))$

Vagyis ez a szétosztás egyben EFX is, hiszen ekkor o egy rossz tárgy i-nek; hiszen kivettük a zsákjából és megszűnt az irigység.

Ez természetesen csak a rossz tárgyas eset volt, most tekintsük a jó tárgyas esetet.
Az EFX_a jó tárgyas esete:

Ekkor azt tudjuk, hogy $u_i(\pi(i) \cup \{o\}) > u_i(\pi(i))$, illetve $u_i(\pi(i)) \geq u_i(\pi(j)\backslash\{o\})$. Ahhoz, hogy EFX legyen kell, hogy ezen o tárgy $\pi(j)$-t tekintve is jó legyen.
$u_i(\pi(i) \cup \{o\}) > u_i(\pi(i))$
$c - u_i(\pi(j)\backslash\{o\}) > c - u_i(\pi(j))$ a diszjunkt-normalitás miatt
$u_i(\pi(j)\backslash\{o\}) < u_i(\pi(j))$
Tehát jó tárgyas esetben is beláttuk, hogy egybeesik a két fogalom.

□

A következőkben belátjuk, hogy a leximin megoldás egyben EFX_a is, amelyet indirekt fogunk megtenni; feltesszük, hogy nem EFX_a és utána megmutatjuk, hogy ekkor lesz olyan szétosztás, amely ezt leximin-dominálja.

12. Tétel. Általános (nem csak megegyező), diszjunkt-normalizált hasznossági függvényeknél a leximin megoldás EFX_a és PO szétosztás két ügynök esetén. [2]

Bizonyítás. Legyen π egy leximin megoldás; ez egyértelműen Pareto optimális. Tegyük fel, hogy π nem EFX_a, és ez 1 és 2 ügynökök között nem áll fenn. Tehát két esetünk van:

(a) $u_1(\pi(1)) < u_1(\pi(2) \cup \{o\})$ teljesül valamely $o \in \pi(1)$ tárgyra, amelynél $u_1(\pi(1) \backslash \{o\}) > u_1(\pi(1)$; vagy

(b) $u_1(\pi(1)) < u_1(\pi(2) \backslash \{o\})$ valamely $o \in \pi(2)$ tárgyra, amelynél $u_1(\pi(1) \cup \{o\}) > u_1(\pi(1))$.

Két esetet tekintünk:

Ha (a) teljesül egy $o \in \pi(1)$ tárgyra, akkor vegyük a következő két batyut:

$M_1 = \pi(1) \backslash \{o\}$, és $M_2 = \pi(2) \cup \{o\}$.

Ha (b) teljesül egy $o \in \pi(2)$ tárgyra, akkor vegyük a következő két batyut:

$M_1 = \pi(1) \cup \{o\}$, és $M_2 = \pi(2) \backslash \{o\}$.

Konstruálunk egy π_2 szétosztást, amely leximin-dominálja π-t, így ellentmondásra jutva. Legyen $\pi_2(1) = argmin_M u_2(M)$ és $\pi_2(2) = argmax_M u_2(M)$; ahol $M \in \{M_1, M_2\}$.

A konstruálás alapján látható, hogy $u_2(\pi_2(2)) \geq u_2(\pi_2(1))$ teljesül π_2-ben. Sőt, $u_1(M_1) > u_1(\pi(1))$ és $u_1(M_2) > u_1(\pi(1))$ mindkét esetben, (a)-ban és (b)-ben is teljesülnek. A szigorú egyenlőtlenség amiatt keletkezik, hogy 1-es ügynöknek a marginális értéke a mozgatott tárgyakra nem-nulla és 1-es ügynök nem EFX_a 2-es ügynökre. Következésképpen: $u_1(\pi_2(1)) > u_1(\pi(1))$.

Tudjuk, hogy $u_1(\pi(1)) + u_1(\pi(2)) = c$ és $u_2(\pi(1)) + u_2(\pi(2)) = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$, hiszen $\pi(1) \cap \pi(2) = \varnothing$, illetve tudjuk, hogy a hasznossági függvény diszjunkt-normalizált.

$u_1(\pi(1)) < u_1(\pi(2))$-ból látszódik, hogy $u_1(\pi(1)) < c/2$. Mivel π-ről tudjuk, hogy PO, $u_2(\pi(2)) > u_2(\pi(1))$; vagyis $u_2(\pi(1)) < c/2$ és $u_2(\pi(2)) > c/2$. Tehát $u_1(\pi(1) < u_2(\pi(2))$.

Továbbá tudjuk, hogy π_2 olyan, hogy $\pi_2(1) \cap \pi_2(2) = \varnothing$. Tehát $u_2(\pi_2(1)) + u_2(\pi_2(2)) = c$. Mivel $u_2(\pi_2(2)) \geq u_2(\pi_2(1))$, a következő egyenlőtlenség teljesül: $u_2(\pi_2(2)) \geq c/2$.

Adódik, hogy $min\{u_1(\pi(1)), u_2(\pi(2))\} u_1(\pi(1)) < min\{u_1(\pi_2(1)), c/2\} \leq min\{u_1(\pi_2(1)), u_2(\pi_2(2))\}$.

□

4. Boolean és negatív Boolean hasznossági függvények

Ennél a fejezetnél a tételek [1]-ből származnak. Kicsit más irányba megyünk el, mint eddig; a hasznossági függvényeink elég speciálisak, így már lesznek EFX_-^0 és EFX_0^+ szétosztásaink is különböző esetekben.

4.1. Definíció (**Boolean hasznossági függvény**)**.** Egy hasznossági függvényt Boolean-nak nevezünk, ha $u(X) \in \{0, 1\}$ minden $X \subseteq S$ részhalmazra.

4.2. Definíció (**Negatív Boolean hasznossági függvény**)**.** Egy hasznossági függvényt negatív Boolean-nak nevezünk, ha $u(X) \in \{0, 1\}$ minden $X \subseteq S$ részhalmazra.

4.1. Boolean függvények

A következőkben egy algoritmus pszeudokódját láthatjuk; amely egy EFX_-^0 szétosztást ad vissza. Amíg lehet az ügynököknek 1 értékű részhalmazokat osztogatunk; ha nem tudunk már, akkor üreseket; végül pedig

az utolsó ügynöknek odaadajuk a maradék tárgyakat.

Algorithm 2 EFX_-^0 szétosztás megtalálása Boolean hasznossági függvény esetén

Input: ügynökök N halmaza, tárgyak S halmaza, Boolean hasznossági függvény u
Output: Egy EFX_-^0 szétosztás
while $|N| \geq 2$ **do**
  if létezik $i \in N$ és $X \subseteq S$, amelyre $u_i(X) = 1$: **then**
    Legyen $X \subseteq S$ tartalmazásilag a legkisebb ilyen halmaz ($u_i(X) = 1$ valamely $i \in N$-re. Legyen $i \in N$ egy ilyen ügynök, és $\pi(i) := X$.
    $N \leftarrow N \backslash \{i\}$
    $S \leftarrow S \backslash X$
  else
    Legyen $i \in N$ tetszőleges ügynök; és legyen $\pi(i) := \varnothing$
    $N \leftarrow N \backslash \{i\}$
Az egyetlen megmaradott $j \in N$ ügynökre legyen: $\pi(j) := S$
return π

13. Tétel. Ha minden ügynöknek Boolean hasznossági függvénye van, egy EFX_-^0 szétosztás mindig létezik. [1]

Bizonyítás. Meghatározunk egy EFX_-^0 szétosztást az itt látható Algorithm 2-vel. Minden lépés után, a nem elosztott tárgyakra, illetve a batyu nélküli ügynökökre úgy fogunk referálni, hogy "megmaradt tárgyak", illetve "megmaradt ügynökök".

Az algoritmus egy általános lépésénél vesszük egy tartalmazásra minimális X részhalmazát a megmaradt tárgyaknak, amelynek legalább egy megmaradt ügynök számára 1 az értéke; és ezt az X zsákot odaadjuk egy megmaradt ügynöknek, akinek $u_i(X) = 1$. Ha nincs ilyen ügynök, akkor választunk egy tetszőleges i üngyökököt, akinek az üreshalmazt adjuk. Majd töröljük X elemeit S-ből, illetve i-t N-ből. Amikor már egy ügynök maradt, akkor nekiadjuk az összes megmaradt tárgyat.

Azt állítjuk, hogy ez a szétosztás EFX_-^0. Tegyük fel, hogy az ügynökök sorrendje, ahogy a batyujukat megkapják $1, ..., n$. Megjegyezzük, hogy a $u_1(\pi(1)), ..., u_n(\pi(n))$ sorozat monoton csökken, vagyis egy csupa 1-es sorozatot tartalmaz, amit egy csupa 0-ás sorozat követ (természetesen bármelyik lehet üres).

Tehát ha i ügynök irigy j ügynökre, akkor $j < i, u_i(\pi(j)) = 1$, és $u_i(\pi(i)) = 0$. Azonban $\pi(j)$ választásánál $u_i(\pi(j) \backslash \{s\}) = 0$ minden $s \in \pi(j)$-re. Emellett $S_i^+(\pi(j)) \neq \varnothing$, tehát következik az állításunk. □

4.2. Negatív Boolean függvények

Most pedig negatív Boolean függvényekre mutatunk egy algoritmust, amely EFX_0^+ szétosztást ad vissza; megjegyezzük, hogy szimmetrikusan az előbbire, ahol EFX_-^0 volt - most a hasznossági függvényünket úgy is felfoghatjuk, mint az előbbi -1 szerese. Ekkor azonban egy szétosztásból indulunk ki, és menet közben pakolunk át olyan tárgyakat egyik ügynöktől a másiknak, amely nem változtat a köztük lévő irigység irányán.

14. Tétel. Ha minden ügynöknek megegyező negatív Boolean hasznossági függvénye van, egy EFX_0^+ szétosztás mindig létezik. Egy ilyen szétosztás polinomiális időben meghatározható.[1]

Algorithm 3 EFX_0^+ szétosztás megtalálása megegyező negatív Boolean hasznossági függvények esetén

Input: ügynökök N halmaza, tárgyak S halmaza, negatív Boolean hasznossági függvény u
Output: Egy EFX_0^+ szétosztás
Legyen $\pi(1) := S$, különben $\pi(i) = \varnothing$
while π nem EFX_0^+ **do**
    Legyen $i, j \in N$, ahol $u(\pi(i)) < u(\pi(j))$ és az irigység nem EFX.
    Válasszunk egy $s \in \pi(i)$-t, amelyre $u(\pi(i) - s) < u(\pi(j))$
    $\pi(i) \leftarrow \pi(i) \backslash \{s\}$
    $\pi(j) \leftarrow \pi(j) \cup \{s\}$
return π

Bizonyítás. Az ehhez szükséges algoritmus a fentebb látható Algorithm 3. A megegyező hasznossági függvényünk szokás szerint u. Egy tetszőleges szétosztásból indulunk, ahol $\pi(1) = S$ és $\pi(i) = \varnothing$. Az algoritmus egy lépésénél választunk egy $i, j \in N$ ügynökpárt, akik között egy nem-EFX irigység áll fent. Mivel EFX_0^+ szétosztásokat nézünk negatív Boolean hasznossági függvények esetén, ezért léteznie kell egy $s \in \pi(i)$-nek, amelyre $-1 = u(\pi(i)) = u(\pi(i) \backslash \{s\}) < u(\pi(j)) = 0$ teljesül. Az algoritmus egy ilyen tárgyat helyez át i batyujából j batyujába.

Elég belátni, hogy az algoritmus véget ér polinomiális számú lépés után. Természetesen az ügynökök száma n, a tárgyaké pedig m. Definiáljuk a következőt:

$$\varphi(\pi) = m \sum_{i \in N, u(\pi(i)) = -1} 1 + \sum_{i \in N, u(\pi(i)) = 0} |\pi(i)|$$

Tehát φ m-szer számolja az ügynököket, akiknek a haszna -1, majd ehhez hozzáadja azon tárgyak számát, amelyek batyuja 0-át ér.

Állítás: φ szigorúan nő az algoritmus során.

Bizonyítás. Legyen π' az a szétosztás, amelyet úgy kapunk, hogy $\pi(i)$-ből s tárgyat átrakjuk j batyujába, vagyis $\pi'(i) = \pi(i) \backslash \{s\}; \pi'(j) = \pi(j) \cup \{s\}$; és $\pi'(k) = \pi(k)$. Mivel $u(\pi(i)) = -1$, ezért $\pi(i) \neq \varnothing$, vagyis $|\pi(j)| \leq m - 1$.

Ha $u(\pi'(j)) = -1$, akkor

$$\varphi(\pi') = m \sum_{i \in N, u(\pi'(i)) = -1} 1 + \sum_{i \in N, u(\pi'(i)) = 0} |\pi'(i)| \geq$$

$$\geq m \left(\left(\sum_{i \in N, u(\pi'(i)) = -1} 1 \right) + 1 \right) + \left(\sum_{i \in N, u(\pi'(i)) = 0} |\pi'(i)| - (m-1) \right) =$$

$$m \sum_{i \in N, u(\pi'(i)) = -1} 1 + \sum_{i \in N, u(\pi'(i)) = 0} |\pi'(i)| + 1 = \varphi(\pi) + 1$$

Amíg $u(\pi'(j)) = 0$, addig:

$$\varphi(\pi') = m \sum_{i \in N, u(\pi'(i))=-1} 1 + \sum_{i \in N, u(\pi'(i))=0} |\pi'(i)| = m \sum_{i \in N, u(\pi(i))=-1} 1 + \sum_{i \in N, u(\pi(i))=0} |\pi(i)| + 1 = \varphi(\pi) + 1$$

Amiből következik az állítás, hisz mindig 1-gyel fog nőni ez az érték.

□

Mivel φ értéke felülről korlátos mn-nel, ezért az előző állításból következik, hogy az algoritmus polinomiális számú lépés után véget ér, amelyből következik a tétel állítása.

□

5. Additív hasznossági függvények

Ennél a fejezetnél a tételek és algoritmusok főleg a [3]-ből származnak. Most minden hasznossági függvényünk additív; amelyre természetesen igaz az is, hogy diszjunkt normalizált. Ekkor általános esetben megfigyeljük a különféle jólétek kapcsolatát a Pareto optimalitással, illetve az irigységmentesség relaxációival; amelyről nem sokat tudunk majd megállapítani; emellett EFX^3 létezése sem garantált. Később további speciális eseteket nézünk meg, amelyeknél már beláthatunk érdekes összefüggéseket.

5.1. Példák általános esetben

15. Tétel. Vannak osztozkodási feladatok, ahol a Nash jólétet maximalizáló szétosztások (additív hasznossági függvények esetén) nem Pareto optimálisak, és nem $EF1$-ek. [3]

Bizonyítás. $u_1(1) = 2; u_1(2) = -4; u_1(3) = 1; u_2(1) = -4; u_2(2) = 2; u_2(3) = 1$

A $\pi_1 = (\{2,3\},\{1\})$ és $\pi_2 = (\{2\},\{1,3\})$ maximalizálja a Nash jólétet, amelynek jelen esetben az értéke 12. Itt π_1 és π_2 sem PO, hiszen mindkét ügynöknek jobb, ha az 1-e és 2-es tárgyakat kicserélik. Sőt, π_1 és π_2 nem is $EF1$:

- $u_1(\pi_1(1)\backslash\{2\}) = 1 < 2 = u_1(\pi_1(2)), u_1(\pi_1(1)\backslash\{3\}) = -4 < 2 = u_1(\pi_1(2)$ és $u_1(\pi_1(1)) = -3 < 0 = u_1(\pi_1(2)\backslash\{1\})$.
- Hasonlóan,2-es ügynök nem $EF1$ 1-es ügynökre π_2-ben.

□

16. Tétel. Vannak olyan osztozkodási feladatok, ahol egy szétosztás, amely minimalizálja a veszteséges Nash jólétet, nem feltétlenül $EF1$. [3]

Bizonyítás. Vegyük azt a példát, amikor 4 tárgyunk van és 2 ügynökünk; és minden tárgy -1-et ér mindenkinek, vagyis megegyező hasznossági függvényeink vannak, és:

$u(1) = u(2) = u(3) = u(4) = -1$

Ha a veszteséges Nash jólétet szeretnénk minimalizálni, egyértelmű, hogy ebben az esetben valamelyik ügynöknek 0 tárgyat fogunk adni; ez a szétosztás pedig láthatóan nem $EF1$.

Emellett, ha csak azokat a szétosztásokat tekintenénk, ahol mindenki kap legalább egy tárgyat; akkor is az egyik ügynök csak 1-et kapna, a másik 3-at; ez pedig szintén nem lenne $EF1$.

□

17. Tétel. Vannak osztozkodási feladatok, ahol megegyező hasznossági függvények esetén EFX^3 nem létezik. [3]

Bizonyítás. Legyen a hasznossági függvényünk a következő:
$u(1) = 7; u(2) = 6; u(3) = 5; u(4) = -100; u(5) = -2; u(6) = -1$
Megállapíthatjuk, hogy $\pi = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ egy EFX szétosztás. Azonban nincsen EFX^3; két EFX szétosztása van az általánosan jó tárgyaknak, és két EFX szétosztása az általánosan rossz tárgyaknak:

- Jó tárgyaknál: $\pi_1 = (\{1\}, \{2, 3\}); \pi_2 = (\{2, 3\}, \{1\})$

  $u(\pi_1(1)) = 7; u(\pi_1(2)) = 11;$

  $u(\pi_2(1)) = 11; u(\pi_2(2)) = 7;$

- Rossz tárgyaknál: $\pi_3 = (\{4\}, \{5, 6\}); \pi_4 = (\{5, 6\}, \{4\})$

  $u(\pi_3(1)) = -100; u(\pi_3(2)) = -3;$

  $u(\pi_4(1)) = -3; u(\pi_1(2)) = -100$

Ha egyesítjük π_1-et és π_3-at, akkor:
$u(\pi_1(1) \cup \pi_3(1) \backslash \{4\}) = 7 < 8 = u(\pi_1(2) \cup \pi_3(2))$.
Ha egyesítjük π_1-et és π_4-et, akkor: $u(\pi_1(2) \cup \pi_4(2)) = -89 < -3 = u(\pi_1(1) \cup \pi_3(1) \backslash \{1\})$.
Tehát ezen esetek nem EFX^3-ek; hasonlóan nem fog teljesülni π_2 és π_3-ra; illetve π_2 és π_4-re.

□

5.2. Double Round Robin algoritmus

Ez az algoritmus [4]-ból származik. Round robin algoritmus egy mohó algoritmus, amikor is sorban megyünk az ügynökökön, és mindenki kiválaszthatja a megmaradt tárgyak közül a neki legjobbat. Ez az algoritmus additív hasznossági függvények és tisztán jó tárgyak esetén $EF1$-et ad vissza, amihez hasonlóan azt is lehet látni; hogy tisztán rossz tárgyak esetén is. Azonban ha vannak jó és rossz tárgyaink is; akkor ez nem fog teljesülni.

1. *Lemma.* A Round robin algoritmus nem mindig $EF1$-et ad vissza additív hasznossági függvények esetén. [4]

Bizonyítás. Vegyünk 2 ügynököt és 4 tárgyat az alábbi hasznossági függvénnyel: $u(1) = 2; u(2) = u(3) = u(4) = -3$. Ekkor az első ember kiválasztja az egyetlen jó tárgyat; majd a maradék 3 rossz tárgyból 2-t megkap a második ügynök, 1-et az első. Könnyen látható, hogy akármelyik tárgyat is távolítjuk el, az irigység továbbra is fenn fog állni. □

A Double-Round-Robin algoritmus kétszer fogja ezen algoritmust alkalmazni; ellentétes irányban. Először a rossz tárgyakat osztjuk szét így az ügynökök között; majd ha ennek vége, az ellentétes irányban osztjuk szét a jó tárgyakat.

Algorithm 4 Double-Round-Robin

1: **Input:** N, S, u
2: **Output:** Egy $EF1$ szétosztás
3: S tárgyait partícionáljuk: $S_+ = \{o \in S | \exists i \in N$, amire $u_i(o) > 0\}$; $S_- = \{o \in S | \forall i \in N : u_i(o) \leq 0\}$. Tegyük fel, hogy $|S_-| = an - k$ valamely a egészre és $k \in \{0, ..., n-1\}$-re.
4: Hozzunk létre k darab 0 értékű tárgyat, és adjuk hozzá S_--hoz ($|S_-| = an$).
5: Vegyük sorban az ügynököket $(1, 2, ...n)$ és mindenki sorban válassza ki az általa legjobbnak vélt S_--ban lévő tárgyat, míg el nem fogynak a halmazból a tárgyak.
6: Vegyük most az alábbi sorrendben az ügynököket: $(n, n-1, ..., 1)$, és most ez alapján válasszanak sorban tárgyakat S_+-ból, míg el nem fogynak ebből is a tárgyak. Ha valakinek már nincsen szigorúan pozitívat érő tárgy a halmazban, akkor csak úgy tesz, mintha választana egy 0 értékű tárgyat.
7: A keletkező π szétosztásból távolítsuk el a hozzáadott tárgyakat, így az eredeti feladatra kapunk egy π^* szétosztást, ami $EF1$.
return π^*

18. Tétel. A Double-Round-Robin algoritmus egy $EF1$ szétosztást határoz meg polinomiális időben additív hasznossági függvények esetén. [4]

Bizonyítás. Először is látható, hogy minden ügynök ugyanannyi rossz tárgyat fog kapni, hisz hozzávettünk a tárgyak halmazához k darab 0 értékű tárgyat ebből a célból (amiket jelen esetben rossz tárgyaknak tekintünk).Legyen π a szétosztás, amelyet az algoritmusunk visszaad. Ahhoz, hogy lássuk, hogy π egy $EF1$ szétosztás; vegyük bármely $i < j$ ügynökpárt. Elegendő belátni, hogy i és j közötti irigység megszüntethető egyetlen tárgy elvételével.

Tegyük fel először is, hogy i irigy j-re. Figyeljük meg, hogy a k-adik tárgy S_--ban, amely i-hez került, kicsit preferáltabb csak számára, mint a k-adik S_--ból, ami j-hez. Tehát i ügynök nem féltékeny j -re S_--t tekintve.

A jó tárgyakat nézve, vagyis S_+-t, i lehet féltékeny j-re. Azonban ha az első $o*$ tárgyat kiszedjük j batyujából, akkor megszűnik az irigység; hiszen ettől az egy tárgytól eltekintve i mindig előbb választhatott tárgyakat (ha ezt az egyet figyelmen kívül hagyjuk) mint j; és j-nek maximum eggyel több tárgya lehetett.

Tekintsük azt, hogy j irigy i-re. Az S_+-ból j mindig előbb választott egy tárgyat, mint i. Az S_- tárgyakat tekintve pedig, legyen o^* az a tárgy, amit j utoljára választ S_--ból. Ekkor minden $o \in S_- \backslash \{o^*\}$, amelyet i választott; van egy tárgy, amit j előtte választott, és ami j számára legalább ugyanolyan jó. Tehát j nem irigy i-re o^*-ot kivéve, vagyis $u_j(\pi(j) \backslash \{o^*\}) \geq u_j(\pi(i))$.

Mindkét esetben láttuk, hogy egy tárgyat kivéve már nem irigyek egymásra. Vagyis π egy $EF1$ szétosztás, és megállapítható, hogy miután minden hozzáadott tárgyat elveszünk ebből és megkapjuk π^* -ot; semelyik ügynök hasznát nem módosítottuk ezzel.

Már csak az maradt, hogy polinomiális időben fut-e az algoritmus. Az 1.-es ponthoz minden tárgyat meg kell vizsgálnunk minden ügynök szempontjából, vagyis ez $O(mn)$ idő. A 3. és 4. pontnál $O(m^2)$idő kell az m darab iterációhoz legfeljebb m tárgyat kell mindig végignéznünk. Tehát a teljes futási idő $O(max\{m^2, mn\})$.

□

5.3. EFX és PO algoritmus

Most pedig megegyező additív hasznossági függvényeket tekintünk kifejezetten, ahol már találhatunk EFX-et, ami egyben Pareto optimális is. Ha belegondolunk, ez már egy egészen egyszerű modell (természetesen csak a többihez képest); azonban EFX^3-at továbbra sem tudunk találni feltétlenül a *17. Tétel* alapján. A következő algoritmus esetén attól függően, hogy jó vagy rossz tárgyat tekintünk éppen, az előbbit a jelenleg legkisebb hasznú ügynöknek adjuk; a rosszat pedig a legnagyobb hasznúnak.

Algorithm 5 Max-Min-Megegyező(N, S, u_i hasznossági függvények

```
procedure MAX-MIN-MEGEGYEZŐ((N, S, (u_o(o))_nxm))
    ∀i ∈ N : π ← ∅
    σ ← (1, ..., m)
    for j ←: 1 : m, o ← σ(j) do
        if o egy rossz tárgy then
            MaxUtil(π) ← {i ∈ N|∀j ∈ N : u(π(i)) ≥ u(π(j))}
            Válasszunk egy i ∈ MaxUtil(π)
        if o egy jó tárgy vagy 0 értékű then
            MinUtil(π) ← {i ∈ N|∀j ∈ N : u(π(i)) ≤ u(π(j))}
            Válasszunk egy i ∈ MinUtil(π)
        π(i) ← π(i) ∪ {o}
    return π
```

19. Tétel. Megegyező hasznossági függvényekkel, a Max-Min-Megegyező algoritmus egy EFX és PO szétosztást ad vissza. [3]

Bizonyítás. Nézzük meg a visszaadott szétosztást. Azt, hogy ez egy EFX szétosztás, teljes indukcióval látjuk be $o \in S$-re, feltételezve, hogy $\sigma = (1, ..., m)$ olyan, hogy $|u(1)| \geq ... \geq |u(m)|$. Alap állapotban legyen $o = 1$. Ekkor az egyetlen tárgy, amit elosztottunk, az o tárgy, így egyértelműen EFX jelen esetben a szétosztás.

Tegyük fel, hogy $o = j - 1$, és π részszétosztás $\pi = (\pi(1), ..., \pi(n))$ egy EFX szétosztás. Ezután lássuk be $o = j$-re.

1.eset: Az o tárgy jó vagy 0 értékű tárgy.
Feltehető, hogy $1 \in \text{MinUtil}(\pi)$-ra az algoritmus 1-nek adja o-t (megjegyezzük, hogy $u(o) \geq 0$. Tekintsünk egy $\pi_2 = (\pi_2(1), ..., \pi_2(n))$ szétosztást, ahol $\pi_2(1) = \pi(1) \cup \{o\}$ és egyébként $\pi_2 = \pi$ minden $i \in N \backslash \{1\}$-re. Ahhoz, hogy belássuk, hogy ez a π_2 szétosztás EFX, csak azt kell megmutatnunk, hogy bármely $i \in N \backslash \{1\}$-re i ügynök EFX 1-es ügynökre, és 1-es ügynök EFX az i ügynökre. A többi eset az indukciós feltevésből következik.

Ha 1 irigy i-re:
Tudjuk, hogy $u(\pi_2(1)) = u(o) + u(\pi(1)) \geq u(\pi(1))$. A feltevésünk alapján $u(\pi(1)) \geq u(\pi(i) \backslash \{g\}$ minden $g \in \pi(i)$-re, ahol $u(g) > 0$ és $u(\pi(1) \backslash \{b\} \geq u(\pi(i))$ minden $b \in \pi(1)$-re, ahol $u(b) < 0$. Tehát $u(\pi_2(1)) \geq u(\pi(1)) \geq u(\pi(i) \backslash \{g\} = u(\pi(i) \backslash \{g\})$ és $u(\pi_2(1) \backslash \{b\}) \geq u(\pi(i) \backslash \{b\} \geq u(\pi(i)) = u(\pi_2(i))$ mivel $\pi(i) = \pi_2(i)$.

Ha i irigy 1-re:
Tudjuk, hogy $u(\pi(i)) \geq u(\pi(1))$ mivel $1 \in \text{MinUtil}(\pi)$. Vagyis i ügynök irigységmentes 1-re nézve π-ben,

emellett $u(\pi_2(i)) \geq u(\pi_2(1)\backslash\{o\}$ mivel $\pi_2(i) = \pi(i)$ és $\pi_2(1)\backslash\{o\} = \pi(1)$. A tárgyak értékei nemnövekvő sorrendbe vannak rendezve abszolútértékeik alapján, $u(g) \geq u(o)$ minden $g \in \pi(1)$-re, ahol $u(g) > 0$. Vagyis $u(\pi_2(1)) \geq u(\pi_2(1)\backslash\{o\}) \geq u(\pi_2(1)\backslash\{g\}$ valamely $g \in \pi(1)$-re, ahol $u(g) > 0$.

Emellett tudjuk, hogy $u(\pi(i)\backslash\{b\} > u(\pi(1))$ minden $b \in \pi(i)$-re, ahol $u(b) < 0$. Ismételten a tárgyak sorrendje alapján $|u(b)| \geq u(o)$. Tehát $u(\pi_2(i)\backslash\{b\}) \geq u(\pi(1)) + u(o) = u(\pi_2(1))$.

2.eset: Az o tárgy egy rossz tárgy.
Feltehető, hogy $1 \in \text{MaxUtil}(\pi)$ -re az algoritmus o-t 1-nek adja. Tudjuk, hogy $u(o) > 0$. Tekintsük $\pi_2 = (\pi_2(1), ..., \pi_2(n))$ szétosztást, ahol $\pi_2(1) = \pi(1) \cup \{o\}$ és $\pi_2(i) = \pi(i)$ minden $i \in N\backslash\{1\}$. Azt szeretnénk belátni, hogy π_2 egy EFX szétosztás, elegendő ezt belátni 1-es és bármely $i \in N\backslash\{1\}$ ügynökre.

Ha 1 irigy i-re:
Tudjuk, hogy $u(\pi(1)) \geq u(\pi(i))$, ahol $1 \in MaxUtil(\pi)$, vagyis 1-es ügynök irigységmentes i-re π-ben, emellett $u(\pi_2(1)\backslash\{o\}) \geq u(\pi_2(i))$, hiszen $\pi_2(i) = \pi(i)$ és $\pi_2(1)\backslash\{o\} = \pi(1)$.

Mivel a tárgyak nem-növekvő sorrendbe vannak rendezve abszolútértékük szerint, ezért $|u(b)| \geq |u(o)|$ valamely $b \in \pi(1)$-re, ahol $u(b) < 0$.Vagyis $u(\pi_2(1)\backslash\{b\}) \geq u(\pi_2(1)\backslash\{o\}) \geq u(\pi_2(i))$ bármely $b \in \pi(1)$-re, ahol $u(b) < 0$.

Emellett tudjuk, hogy $u(\pi(1)) > u(\pi(i)\backslash\{g\})$ bármely $g \in \pi(i)$-re, ahol $u(g) > 0$. Ismételten a tárgyak sorrendje alapján $u(g) \geq |u(o)|$. Tehát $u(\pi_2(i)\backslash\{g\}) \leq u(\pi_2(i)) - |u(o)| = u(\pi(i)) - |u(o)|$ Mivel $\pi_2(i) = \pi(i)$. Továbbá tudjuk, hogy $u(\pi(i)) - |u(o)| \leq u(\pi(1)) - |u(o)| = u(\pi_2(1))$. Következésképpen $u(\pi_2(1)) \geq u(\pi_2(i)\backslash\{g\})$ minden $g \in \pi_2(i)$-re, ahol $u(g) > 0$.

Ha i irigy 1-re:
Tudjuk, hogy $u(\pi_2(1)) = u(o) + u(\pi(1)) \leq u(\pi(1))$. Feltevésünk alapján $u(\pi(i)) \geq u(\pi(1)\backslash\{g\})$ minden $g \in \pi(1)$-re, ahol $u(g) > 0$ és $u(\pi(i)\backslash\{b\}) \geq u(\pi(1))$ valamely $b \in \pi(i)$-re, ahol $u(b) < 0$. Tehát $u(\pi_2(i)) = u(\pi(i)) \geq u(\pi(1)\backslash\{g\}) \geq u(\pi_2(1)\backslash\{g\})$ mivel $u(\pi(1)) \geq u(\pi_2(1))$ és $u(\pi_2(i)\backslash\{b\}) = u(\pi(i)\backslash\{b\}) \geq u(\pi(1)) \geq u(\pi_2(1))$, hiszen $\pi_2(i) = \pi(i)$.

Az algoritmus egy teljes szétosztást ad vissza, és ahogy már láttuk, egy ilyen szétosztás Pareto optimális.

□

6. Harmadrendű additív hasznossági függvények

Ennél a fejezetnél a tételek és algoritmusok főleg a [3]-ből származnak.

6.1. Definíció (Harmadrendű hasznossági függvény)**.** Azt mondjuk, hogy a hasznossági függvények harmadrendűek, ha minden $i \in N$ ügynökre és minden $o \in S$ tárgyra $u_i(o) \in \{-\alpha, 0, +\alpha\}$, ahol $\alpha \in \mathbb{N} > 0$.

Most már egészen jó szétosztásokat tudunk találni; egyrészt Pareto optimális EFX^3-at, amely nem feltétlenül MEW. Emellett Pareto optimális EFX-et is, ami már MEW; nem meglepő, hiszen EFX^3 speciálisabb EFX-nél.

6.1. Pareto optimális EFX algoritmusa

Polinomiális időben futó algoritmust adunk meg, amely egy MNW szétosztást ad vissza; ami egyben PO és EFX is. [3]

Algorithm 6 Nash-Max-Harmadrendű(N, S, $(u_o(o))_{nxm}$)

procedure NASH-MAX-HARMADRENDŰ((N, S, $(u_i(o))_{nxm}$))
  $\forall i \in N : \pi(i) \leftarrow \varnothing$;
  if $S^+ \neq \varnothing$ **then**
    $A \leftarrow$ legnagyobb ügynökhalmaz, amely S^+-hoz tartozik
    $I \leftarrow (S^+, \varnothing, ..., \varnothing)$
    $\pi \leftarrow$Alg-Bináris$(A, S^+, u_i(o))_{nxm}, I)$
  for $o \in S^-$ **do**
    MaxUtil$(\pi) \leftarrow \{i \in N | \forall j \in N : u_i(\pi(i)) \geq u_j(\pi(j))\}$
    Válasszunk egy $i \in$MaxUtil(π)
    $\pi(i) \leftarrow \pi(i) \cup \{o\}$
  for $o \in S^0$ **do**
    Válasszunk egy $i \in \{j \in N | u_j(o) = 0\}$
    $\pi(i) \leftarrow \pi(i) \cup \{o\}$
  return π

Az első lépésben az algoritmusunk visszaad egy π szétosztást A felett, amely MNW az S^+-ban lévő elemekre; ehhez az Alg-Bináris algoritmust használjuk fel. [6]

Ezután a második lépésben az S^- tárgyait osztjuk szét Mohó-algoritmus alapján, úgy, hogy csökkentsük minden jelenleg π-ben legnagyobb haszonnal rendelkező ügynök hasznát; amíg ezek egyenlőek nem lesznek a második legnagyobbal, feltéve, hogyha van elég tárgy ehhez S^--ban. Ezt addig csináljuk, amíg minden tárgyat elosztottunk S^--ból. Megjegyezzük, hogy azért lehetséges elérni az egyenlőséget, mert harmadrendű additív hasznossági függvényeink vannak, így minden batyu értéke α többszöröse.

Végezetül a harmadik lépésben minden S^0-ás tárgyat szétosztunk azok között, akiknek ez 0-át ér; ezzel S-nek egy teljes szétosztását csináltuk.

20. Tétel. Harmadrendű additív hasznossági függvényekkel a Nash-Max-Harmadrendű algoritmus egy Pareto optimális EFX szétosztást ad vissza. [3]

Bizonyítás. Először az Alg-Bináris algoritmussal meghatározzuk S^+-nek egy szétosztását. Az algoritmus veszi ügynökök egy A halmazát, S^+-t; és egy I szétosztást, amely teljes S^+-ra; és visszaad egy MNW π szétosztást A-n S^+-ra. Korábbi eredmények alapján tudjuk, hogy additív hasznossági függvények esetén az MNW szétosztás Pareto optimális és $EF1$. Jelen esetben nyilvánvaló,hogy ez EFX-et is jelent, hisz $EF1$ esetén a különbség mindenhol α lehet maximum, és minden tárgy vagy α-t, vagy $-\alpha$-t ér.

Most tekintsük S^--t, ezen tárgyak szétosztása ciklusos. Az első fordulóban legyen $\sigma(\pi)$ a hasznossági sorrend π alapján, vagyis:
$u_1(\pi(1)) \geq u_2(\pi(2)) \geq ... \geq u_n(\pi(n))$.
Ekkor minden ügynök maximális haszonnal, vagyis $u_1(\pi(1))$ értékű zsákkal rendelkezők S^--ból round-robinhoz hasonlóan kapnak; míg nem el nem érik a második legnagyobb elemet $\sigma(\pi)$-ben. A lépés végetérhet, mielőtt ez bekövetkezne természetesen, ha nincs elég tárgy S^--ban. Az első forduló végén az algoritmus visszaad egy π^1 szétosztást. Ha van még nem elosztott S^--ben lévő tárgy, akkor az algoritmus a következő fordulóba lép.

A $k > 1$-edig fordulónál legyen π^{k-1} egy részleges szétosztás, amelyet az előző $k-1$ forduló adott vissza, és legyen $\sigma(\pi^{k-1})$ a haszonssági sorrend π^{k-1} alapján, vagyis:
$u_1(\pi^{k-1}(1)) \geq u_2(\pi^{k-1}(2)) \geq ... \geq u_n(\pi^{k-1}(n))$.
Ebben a fordulóban minden ügynöknek, akinek maximális haszna van (egész pontosan $u_1(\pi^{k-1}(1))$), tárgyakat kapnak S^--ból round-robinhoz hasonlóan, amíg a haszonértékek el nem érik $\sigma(\pi^{k-1})$-ben a második legnagyobb értéket; így visszaadva egy π^k szétosztást a k-adik forduló végén. Minden k-adik fordulóra könnyű látni, hogy π^k szétosztás EFX és PO, hiszen π is EFX és PO; és a k-adik fordulóban S^--ból csak round-robin szerűen osztunk szét tárgyakat a maximális hasznúaknak $\sigma(\pi^{k-1})$-ben.

Most pedig tekintsük S^0 tárgyait. Az EFX szempontjából az a "legjobb", ha ezeket olyanok között osztjuk el, akiknek 0-át ér; emellett a végső szétosztás esetén az ügynökök hasznának összege $\alpha*(|S^+|-|S^-|)$, amiből PO következik; hiszen S^0 tárgyai csak csökkenthették volna ezt; az S^+ tárgyai mindenhol pozitívként vannak elosztva, S^- tárgyait pedig kötelező negatívként szétosztani.

□

21. Tétel. Harmadrendű additív hasznossági függvények esetén a Nash-Max-Harmadrendű algoritmus egy MEW szétosztást ad vissza. [3]

Bizonyítás. Vegyünk egy π szétosztást, amely MNW; amelyet az Alg-Bináris algoritmus adott vissza. Azt állítjuk, hogy π maximalizálja az általános jólétet (EW) A felett S^+ elemeire. Mivel a szétosztás PO, ezért $u_i(\pi(i)) > 0$ minden $i \in A$-ra. Tegyük fel, hogy van egy másik π_2 szétosztás, amelyre $EW(\pi_2) > EW(\pi)$. Ezen kívül vegyük azt az i ügynököt, akire $i = argmin_{j \in A} u_j(\pi(j))$.

Ha rögzítjük $\pi(i)$-t, és variáljuk a tárgyakat a $\bigcup_{k \in A \setminus \{i\}} \pi(k)$ az $A \setminus \{i\}$ ügynökök között; nem tudunk elérni egy szétosztást, amelynek EW értéke nagyobb $EW(\pi)$-nél. Tehát ahhoz, hogy $EW(\pi_2) > EW(\pi)$ teljesüljön, π_2-nek újra szét kell osztania π-ben szereplő tárgyakat, $\pi(i)$-t is beleértve; úgy, hogy $u_i(\pi_2(i)) > u_i(\pi(i))$. Ez csak úgy lehet, hogy i ügynöknek jó valamely tárgy $\pi(j)$-ban valamely $j \in A \setminus \{i\}$-re. Két esetet tekintünk j ügynökre nézve.

1. eset: Ha $u_j(\pi(j)) \leq u_i(\pi(i)) + \alpha$
Ekkor egy tárgyat átrakva $\pi(j)$-ből $\pi(i)$-be; akkor maximum egy olyan szétosztást kaphatunk, ahol az általános jólét legfeljebb $EW(\pi)$.

2. eset: Ha $u_j(\pi(j)) > u_i(\pi(i)) + \alpha$, akkor i ügynök semmilyen tárgyat nem szeretne $\pi(j)$-ből. Különben egy ilyen tárgynak az elmozdítása $\pi(j)$-ből $\pi(i)$-be növelné a Nash-féle jólétet π-ben, ellentmondásban azzal, hogy π maximalizálja ezt.

Tehát a 2. esetből kifolyólag csak olyan j ügynököket tekinthetünk, akikre $u_j(\pi(j)) \leq u_i(\pi(i)) + \alpha$ (az 1. esetben csak egy ilyen ügynököt néztünk). Vegyük a tárgyaknak egy $X \subseteq \pi(i)$ részhalmazát. Ha tárgyakat mozdítunk el $\pi(i) \setminus X$-ből olyan ügynököktől, akiknek haszna π-ben maximum $u_i(\pi(i)) + \alpha$, egy olyan szétosztást ad, amelynek az általános jóléte legfeljebb $EW(\pi)$. Ebből látható, hogy $EW(\pi_2) \leq EW(\pi)$-nek kell teljesülnie. Ezen felül S^- és S^0 optimálisan lett szétosztva EW szempontjából; hisz az előbbieknél csak a maximális hasznú ügynökök hasznát csökkentettük; a másodiknál meg nem változtattunk semmin, és azon tárgyakkal maximum csökkenthettük volna csak a hasznokat.

Tehát a szétosztásunk valóban MEW.

□

Most pedig tekintsük a Pareto optimális EFX^3 algoritmusát, és egy példát, amelynél nem MEW ezen szétosztás.

6.2. Pareto optimális EFX^3 algoritmusa

A következőkben egy EFX^3 szétosztás meghatározását láthatjuk harmadrendű additív hasznossági függvények esetén; először S^+ tárgyait osztjuk el, utána pedig S^- tárgyait Round-Robin szerűen adjuk az ügynököknek; majd S^0 tárgyait bárkinek adhatjuk, akinek 0-át érnek.

Algorithm 7 Nash-Max-Min-Harmadrendű(N, S, $(u_o(o))_{nxm}$)

procedure NASH-MAX-MIN-HARMADRENDŰ((N, S, $(u_i(o))_{nxm}$))
  $\forall i \in N : \pi_1(i) \leftarrow \varnothing; \pi_2(i) \leftarrow \varnothing; \pi_3(i) \leftarrow \varnothing;$
  if $S^+ \neq \varnothing$ **then**
    $A \leftarrow$ legnagyobb ügynökhalmaz, amely S^+-hoz tartozik
    $I \leftarrow (S^+, \varnothing, ..., \varnothing)$
    $\pi_1 \leftarrow$Alg-Bináris $(A, S^+, u_i(o))_{nxm}, I)$
  if $S^- \neq \varnothing$ **then**
    $M \leftarrow$ a legnagygobb $M \subseteq A$ ügynökhalmaz, amely S^--hoz is tartozik
    $\sigma_{M,\pi_1} \leftarrow$ egy max-min prioritási sorrend ügynökök között M és π_1 által megadva
    $\pi_2 \leftarrow$Round-Robin$(\sigma_{M,\pi_1}, S^-, u_i(o))_{nxm}, \pi_1)$
  for $o \in S^0$ **do**
    Válasszunk egy $i \in \{j \in N | u_j(o) = 0\}$
    $\pi_3(i) \leftarrow \pi_2(i) \cup \{o\}$
  return π_3

22. Tétel. Harmadrendű additív hasznossági függvényekkel a Nash-Max-Min-Harmadrendű algoritmus egy EFX^3 és PO szétosztást határoz meg.[3]

Bizonyítás. Az előző tételből már tudjuk, hogy S^+-ra π_1 szétosztás, amit az Alg-Bináris algoritmus ad vissza, EFX és PO az S^+ tárgyaira nézve.

Most tekintsük S^- tárgyait, legyen $S^- = \{1, ..., s\}$. Osszuk szét ezen tárgyakat 1-től s-ig. Egy k-ra 0 és s között legyen π^k egy részszétosztás az első k tárgyra ebből az s db tárgyból, π_1-et kiegészítve. Megjegyezzük, hogy $\pi^0 = \pi_1$ és $\pi^s = \pi_2$.

1. lépés: π^k Pareto optimalitása:
Azt állítjuk, hogy π^k szétosztás PO minden rögzített $k = 0, ..., s$-re. A hasznok összege (vagyis a hasznossági jólét UW) minden PO szétosztásra az S^+ tárgyaiból és S^- első k tárgyából: $|S^+| * \alpha - k * \alpha$. Ez ugyanúgy teljesül π^k-ra is, vagyis ennek a szétosztásnak PO-nak kell lennie, különben lenne egy szétosztás, amelynek hasznossági jóléte nagyobb lenne, mint $|S^+| * \alpha - k * \alpha$. Természetesen azért esik egybe PO jelen estben UW-vel, mert additív hasznossági függvényeink vannak.

2. lépés: π^k szétosztás EFX:
Teljes indukcióval látjuk be ezt k-ra, vagyis kezdetben legyen $k = 0$; ahol π_1-ről már tudjuk, hogy EFX.

Tegyük fel, hogy π^{k-1} szétosztás EFX, és tekintsük a k-adik fordulót. Legyen $M = \{1, ..., l\}$; $u_1(\pi_1(1)) \geq ... \geq u_l(\pi_1(l))$ és $\sigma = \sigma_{M,\pi_1} = (1, ..., l)$.

Legyen $a(k)$ az az ügynök, aki megkapja k tárgyat S^--ból. A σ választása alapján belátjuk a következő tulajdonságot:

$(*)$**Tulajdonság:** A π^{k-1}-ben bármely b ügynök $a(k)$ előtt σ-ban EFX; $a(k)$ ügynök EF; és bármely a ügynök $a(k)$ után σ-ban is EFX.

A π^{k-1}-ben valamely $j \in \mathbb{N}_{>0}$-ra legyen b, akinél j tárgy van $k-1$-ből, míg $a(k)$ és a, akiknél az $j-1$ tárgyak.

Ekkor b és c ügynökökre nézve, ahol c előrébb van σ-ban, mint b:

$u_b(\pi^{(k-1)}(b)) = u_b(\pi(b)) - j\alpha \geq u_b(\pi(c)) - \alpha - j\alpha$

Mivel $\pi^{(k-1)}$ egy EFX szétosztás. Ekkor c ügynök j rossz tárgyat kap, tehát

$u_b(\pi(c)) = \alpha - j\alpha = u_b(\pi^{(k-1)}(c)) - \alpha$.

Emellett b és c ügynökökre b után σ-ban:

$u_b(\pi^{(k-1)}(b) = u_b(\pi(b)) - j\alpha \geq u_c(\pi(c)) - j\alpha$.

Ekkor c ügynök j vagy $j-1$ rossz tárgyat kap meg $\pi^{(k-1)}$-ben; vagyis: $u_c(\pi(c)) - j\alpha \geq u_c(\pi^{(k-1)}(c)) - \alpha$.

Mivel $\pi^{(k-1)}$ Pareto optimális, ezért $u_c(\pi^{(k-1)}(c) \geq u_b(\pi^{(k-1)}(c)$, vagyis b ügynök EFX $\pi^{(k-1)}$-ben.

Ezután a és c ügynökre, ahol c az a ügynök előtt van σ-ban:

$u_a(\pi^{(k-1)}(a)) = u_a(\pi(a)) - (j-1)\alpha \geq u_a(\pi(c)) - \alpha - (j-1)\alpha$ mivel $\pi^{(k-1)}$ egy EFX szétosztás.Itt c vagy s vagy $s-1$ rossz tárgyat kapja meg a szétosztásban. Bármely esetben , $u_a(\pi(c)) - \alpha - (s-1)\alpha \geq u_a(\pi^{(k-1)}(c)) - \alpha$. Az a és c ügynökre, ahol c az a után van σ-ban: $u_a(\pi^{(k-1)}(a)) = u_a(\pi(a)) - (s-1)\alpha \geq u_c(\pi(c)) - (s-1)\alpha$. Mivel π egy PO szétosztás, ezért $u_c(\pi(c)) \geq u_a(\pi(c))$. Ekkor c ügynök $(s-1)$ rossz tárgyat kap $\pi^{(k-1)}$-ben; következésképp $u_c(\pi(c)) - (s-1)\alpha \geq u_a(\pi(c)) - (s-1)\alpha = u_a(\pi(k-1)(c))$; tehát a ügynök EFX π^{k-1}-ben.

Az $a(k)$ és b ügynökökre: , $u_{a(k)}(\pi^{(k-1)}(a(k))) = u_{a(k)}(\pi(a(k))) - (s-1)\alpha \geq u_{a(k)}(\pi(b)) - \alpha - (s-1)\alpha$ mivel $\pi^{(k-1)}$ egy EFX szétosztás; amiben b ügynök kapja s rossz tárgyat. Következésképpen $u_{a(k)}(\pi(b)) - \alpha - (s-1)\alpha = u_{a(k)}(\pi^{(k-1)}(b))$. Az $a(k)$ és a ügynökökre: $u_{a(k)}(\pi^{(k-1)}(a(k))) = u_{a(k)}(\pi(a(k))) - (s-1)\alpha \geq u_a(\pi(a)) - (s-1)\alpha$. Mivel π egy PO szétosztás, ezért $u_a(\pi(a)) \geq u_{a(k)}(\pi(a))$. Ekkor a ügynök $(s-1)$ rossz tárgyat kap $\pi^{(k-1)}$-ben; tehát $u_a(\pi(a)) - (s-1)\alpha \geq u_{a(k)}(\pi(a)) - (s-1)\alpha = u_{a(k)}(\pi^{(k-1)}(a))$. Vagyis a és b ügynökökkel ellentétben $a(k)$ ügynök EF a $\pi^{(k-1)}$ szétosztásban.

A $(*)$**Tulajdonság** teljesül. Most tekintsük az M beli ügynököket. Mivel b ügynök EFX a $\pi^{(k-1)}$-ben; és π^k-ban is EFX marad. Az $a(k)$ ügynök EF a $\pi^{(k-1)}$-ben, tehát EFX-é válik π^k-ban, miután megkapta k tárgyat, amely neki $-\alpha$-t ér. Mivel a ügynök EFX a $\pi^{(k-1)}$-ben, ezért EFX marad π^k-ban is. Emellett tekintsük az M-en kívüli ügynököket; minden $b \in N \backslash M$ nem kap semmilyen rossz tárgyat. Vagyis EFX-ek π^k-ban, mert EFX-ek π-ben is. Következésképpen π^k egy EFX szétosztás.

Észrevehető, hogy $(\pi_2(1) \backslash \pi_1(1), ..., \pi_2(n) \backslash \pi_1(n))$ egy EFX szétosztás S^- tárgyaira; emellett PO is, hiszen az ügynökök hasznának összege $-|S^-| * \alpha$, ami a maximálisan elérhető összeg.

Tárgyak S^0-ból:

Az a legjobb, ha S^0 tárgyai olyanhoz kerülnek, akinek 0-át érnek; vagyis a végső szétosztás π_3 egy EFX, PO szétosztás.

□

2. *Lemma.* Harmadrendű additív hasznossági függvények esetén nem létezik olyan algoritmus, amely egy EFX^3, PO és egyben MEW szétosztást ad vissza. [3]

Bizonyítás. Tekintsük a következő osztozkodási feladatot 2 ügynökkel és 4 tárggyal:

$u_1(1) = u_1(2) = 1; u_1(3) = u_1(4) = -1$

$u_2(1) = u_2(2) = 0; u_2(3) = u_2(4) = -1$

Bármelyik algoritmus, amely PO szétosztást ad vissza, az 1-es és 2-es tárgyakat 1-es ügynöknek adná. Amelyik EFX^3-at; egy rossz tárgyat adna oda 1-es ügynöknek, a másikat pedig 2-es ügynöknek. Ekkor az EW értéke -1; azonban egy MEW szétosztásban 0, ahol minden tárgyat az 1-es ügynök kapja. □

7. Bináris additív hasznossági függvények

Elérkeztünk a dolgozat utolsó fejezetéhez, ahol már ugyan kicsit más jelleggel közelítjük meg a problémát; eredményeit összevethetjük az eddigiekkel, amelyek [5]-ból származnak.

7.1. A bináris modell

Ha $u_i(g) \in \{0, 1\}$ $\forall i \in N$ és $g \in S$ (vagyis a tárgyak értékei önmagukban 0-k vagy 1-ek):

- Jelen esetben jó tárgyaknak nevezzük azokat, amik 1-et érnek; és semlegeseknek, amik 0-át.
- Azon tárgyak halmaza, amik jók i-nek (vagyis 1 értékűek): $V_i = \{g \in S : u_i(g) = 1\}$.
- Látható, hogy $u_i(T) = |V_i \cap T|$ $\forall T \subseteq S$.
- Ügynökök egy $P \subseteq N$ halmazára legyen $V_P = \bigcup_{i \in P} V_i$ azon tárgyak halmaza, amelyek legalább egy P beli ügynök számára jónak számít (értéke 1).
- Az $u = (u_1, ..., u_n)$ vektort érték-profilnak nevezzük.
- A $h = (u_1(\pi(1)), ..., u_n(\pi(n))$-t vektort haszonvektornak hívjuk; és ennek nem-csökkenő sorrendbe rendezését haszon-profilnak nevezzük.
- Könnyű látni, hogy additív bináris értékek esetén a Pareto optimalitás ekvivalens azzal, hogy minden tárgy, ami valakinek jó, olyan ügynöknél van, akinek tényleg értékes.

  Vagyis az egyes ügynökök zsákjainak értékeinek a szummája maximális, és pontosan megegyezik az értékes jó tárgyak számával.
- Z: értéktelen tárgyak halmaza

7.1. Definíció. [**Maximum Nash-féle jólét**]Bináris additív hasznossági függvények esetén azt mondjuk, hogy π maximum Nash jólét (MNW) szétosztás, ha a szétosztások halmazában maximalizálja az ügynökök által kapott pozitív értékeket; majd maximalizálja ezek összegét.

Könnyű látni, hogy a mostani MNW definíció egybeesik a korábbiakkal. Természetesen a modellünkben $EF1$ már EFX és még EFX^3 is lesz egyben, hisz minden nem 0 értékű tárgy 1-et ér; így most már mindig találhatunk olyan MNW szétosztást, amely Pareto optimális és $EF1$ is egyben; illetve részletesen most nem bizonyítjuk, de jelen esetben az MNW szétosztások és leximin megoldások halmaza egybe fog esni.

3. *Lemma.* Minden leximin szétosztásnak ugyanaz a haszon-profilja. Sőt, bármely szétosztás ezzel a haszon-profillal leximin megoldás.

Bizonyítás. A leximin megoldás azt jelenti, hogy lexikografikusan a legnagyobb elem a haszonprofilok között; és mivel a haszonprofilokat lexikografikusan egyértelműen sorba tudjuk rendezni, így a legnagyobb elem(ek) egyértelmű(ek). □

4. *Lemma.* (Lemma 21 of Freeman et al. [10]) Bináris additív hasznossági függvények esetén minden maximum Nash jólét szétosztásnak ugyanaz a haszon-profilja. Sőt, bármely szétosztás ezzel a haszon-profillal maximum Nash jólét szétosztás.

Emellett Aziz és Rey [9] megmutatták, hogy a leximin megoldások egyben MNW szétosztások is; amiből következik, hogy a két halmaz megegyezik.

5. *Lemma.* Bináris additív hasznossági függvények esetén a maximum Nash jólét szétosztások halmaza egybeesik a leximin megoldások halmazával.

7.2. Determinisztikus szabályok

Egy f determinisztikus szabály vesz egy u érték-profilt, és visszaad egy π szétosztást.

7.2. Definíció (csoportstratégia-mentes). Egy f determinisztikus szabály csoportstratégia-mentes (GSP), ha nem léteznek u és u' érték-profilok, és ügynökök egy $C \subseteq N$ csoportja, amelyre $u'_k = u_k$ minden $k \in N \backslash C$-ra, és $u_j(\pi' j) > u_j(\pi_j)$ minden $j \in C$-re, ahol $\pi = f(u)$ és $\pi' = f(u')$.

7.3. Definíció (MNW^{tie}). MNW^{tie} egy olyan determinisztikus szabály, amely visszaad egy π szétosztást, amelyre:

1. π egy MNW^{tie} szétosztás; lexikografikusan a legnagyobb hasznossági vektor az összes MNW szétosztás között (vagyis az összes MNW szétosztás között maximalizálja az $u_1(\pi(1))$-t, majd ezután az $u_2(\pi(2))$-t, és így tovább; és

2. π minimálisan teljes, vagyis csak az $S \backslash Z$ tárgyai vannak csak szétosztva.

Ha több szétosztás is van, amely mindkét feltételt teljesíti, MNW^{tie} tetszőlegesen választ egyet.

7.3. MNW^{tie} determinisztikus szabály

Algorithm 8 MNW^{tie} bináris additív hasznossági függvények esetén

```
Vegyünk egy π^0 (üres) MNW szétosztást
for i = 1, ..., n do
    if Ha van egy P út G(π^{i-1}-ben i ügynöktől valamely j > i ügynökhöz, ahol |π^{i-1}(j)| = |π^{i-1}(i)| + 1
    then
        π^i ← P(π^{i-1})
    else
        π^i ← π^{i-1}
return π^n
```

23. Tétel. Bináris additív hasznossági függvények esetén MNW^{tie} $EF1$, PO, csoportstratégia-mentes és polinomiális időben meghatározható. [5]

Bizonyítás. Először is egy szétosztás szétosztási gráfjának azt az irányított $G(\pi) = (V, E)$ gráfot nevezzük, ahol V az ügynököknek megfelelő csúcsok halmaza, és i, j közöt akkor megy irányított él, ha j zsákjában van olyan tárgy, ami i-nek 1-et ér.

Ha tekintünk $G(\pi)$-ben egy $P = (v_1, ..., v_k)$ utat, akkor legyen $P(\pi)$ az a szétosztás, amelyet úgy kapunk, hogy valamely $g \in \pi(v_{l+1}) \cap V_{v_l}$ jó tárgyat áthelyezzük v_{l+1} batyujából v_l batyujába minden $l = 1, ...k-1$-re; ezentúl erre a műveletre úgy hivatkozunk, mint P menti csúsztatás. Az MNW szétosztásokat jelen esetben úgy fogjuk meghatározni, hogy ha egy speciális út (amit a későbbiekben fogunk látni) nem létezik, akkor a szétosztás MNW.

6. *Lemma.* Legyen π egy Pareto optimális szétosztás, P egy út i ügynöktől j ügynökig $G(\pi)$-ben és $\pi' = P(\pi)$ legyen a P menti csúsztatás eredménye. Ekkor $u_j(\pi'(j)) = u_j(\pi(j)) - 1; u_i(\pi'(i)) = u_i(\pi(i)) + 1$, és $u_k(\pi'(k)) = u_k(\pi(k))$ minden $k \in N \backslash \{i, j\}$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogyha g tárgyat v_{l+1}-től átadunk v_l-nek P mentén, akkor nyilvánvalóan g jó v_l-nek. Mivel π Pareto optimális, ezért v_{l+1} számára is jó tárgy g.

Tehát P mentén minden ügynök i-t és j-t leszámítva veszít egy tárgyat, ami jó neki, és kap egyet, ami szintén jó neki; j veszít egy jó tárgyat, i pedig kap egy jó tárgyat. □

7. *Lemma.* Egy Pareto optimális π szétosztás MNW akkor és csak akkor, ha nincsen olyan irányított út bármely i és j ügynökök között $G(\pi)$-ben, amelyre $u_j(\pi(j)) > v_i(\pi(i)) + 1$.

Bizonyítás. Tudjuk [6] alapján, hogy π egy MNW szétosztás, akkor és csak akkor, ha nincs olyan P irányított út, ami mentén ha csúsztatunk, szigorúan növeli a Nash-féle jólétet. Mivel π Pareto optimális; ezért ez a következővel ekvivalens:

$(u_j(\pi(j)) - 1)(u_i(\pi(i)) + 1) > u_j(\pi(j))u_i(\pi(i))$; ami ekvivalens azzal, hogy $u_j(\pi(j)) > v_i(\pi(i)) + 1$. □

Tudjuk [8] alapján, hogy bármely MNW szétosztás egyben $EF1$ és PO is, akár szimpla additív hasznossági függvények esetén is. Így MNW^{tie} triviálisan $EF1$ és PO.

Csoportstratégia-mentesség:

Először is vegyük észre, hogy $\pi = MNW^{tie}(u)$ akkor π minimálisan teljes és PO. Vagyis, ha i ügynök kap egy g tárgyat, akkor neki az biztosan jó. Vagyis $\pi(i) \subseteq V_i$ így $u_i(\pi(i)) = |\pi(i)|$ minden $i \in N$ ügynökre. Hasonlóan $\pi(U) \subseteq V_U$ bármely $U \subseteq N$ ügynökhalmazra.

Ezután egy π szétosztásra és $i \in N$ ügynökre definiáljuk a $L^i_\pi = \{j \in N | u_j(\pi(j)) < u_i(\pi(i)\}$ halmazt, amelyben azon ügynökök vannak, akiknek szigorúan kevesebbet ér a zsákjuk, mint i-nek a sajátja; és emellett K^i_π legyen azon ügynökök halmaza, akik elérhetők $L^i_\pi \cup \{i\}$-ből $G(\pi)$-ben. A következő lemma alapján láthatjuk, hogy minden K^i_π megkapja az összes számukra jó tárgyakat.

8. *Lemma.* Ha $\pi = MNW^{tie}(u)$, akkor minden $i \in N$ ügynök számára $\pi(K^i_\pi) = V_{K^i_\pi}$.

Bizonyítás. A korábbiak alapján tudjuk, hogy $\pi(K^i_\pi) \subseteq V_{K^i_\pi}$. Indirekt tegyük fel, hogy van egy $g \in V_{K^i_\pi} \backslash \pi(K^i_\pi)$ tárgyunk. Ekkor $G(\pi)$ konstruálása alapján lenne egy élünk egy K^i_π-ben szereplő ügynökből, akinek jó tárgy g; ami egy K^i_π-n kívüli csúcsba megy, mégpedig oda, akinél π-ben g van (nyilvánvalóan el van osztva a tárgy, mert valakinek jó tárgy).

Azonban K^i_π definíciója alapján látható, hogy nem vezethet ki belőle él, különben az $L^i_\pi \cup \{i\}$ -ból elérhető ügynökök száma több. Tehát $\pi(K^i_\pi) = V_{K^i_\pi}$. □

Ezután megmutatjuk, hogy amellett, hogy K^i_π minden ügynököt tartalmaz, akik elérhetők $L^i_\pi \cup \{i\}$-ből; K^i_π -ben szereplő bármely ügynöknek nem lehet sokkal nagyobb a haszna, mint i-nek.

9. *Lemma.* Ha $\pi = MNW^{tie}(u)$, akkor bármely $i \in N$ és $j \in K^i_\pi$ esetén $u_j(\pi(j)) \leq u_i(\pi(i)) + 1$ és ha $j \geq i$, akkor $u_j(\pi(j)) \leq u_i(\pi(i))$.

Bizonyítás. Az állítás $i = j$-re triviálisan teljesül, tehát elegendő azt vizsgálnunk, hogy $i \neq j$; és indirekt feltesszük, hogy nem teljesül az állítás. Vagyis létezik egy $i \in N$ és egy $j \in K^i_\pi$, amelyre a $u_j(\pi(j)) > u_i(\pi(i)) + 2$ vagy $u_j(\pi(j)) = u_i(\pi(i)) + 1$ teljesül, és $j > i$.

Mivel $j \in K^i_\pi$, ezért létezik egy út $k \in L^i_\pi \cup \{i\}$-ból j-be. Ezen felül $k \in L^i_\pi \cup \{i\}$-ból tudjuk definíció alapján, hogy $u_k(\pi(k)) \leq u_i(\pi(i))$.

Ha $u_j(\pi(j)) > u_i(\pi(i)) + 2$, és létezik út k-ból j-be, vagyis $u_j(\pi(j)) > u_i(\pi(i)) + 2 \geq u_k(\pi(k)) + 2$; azonban ez ellent mond a kettővel ezelőtti lemmának.

A másik esetben két alesetet tekintünk. Ha $i \neq k$, akkor $k \in L^i_\pi$, vagyis $u_k(\pi(k)) < u_i(\pi(i))$. Ebből következik, hogy $u_j(\pi(j)) = u_i(\pi(i))+1 > u_k(\pi(k))+2$; ami szintén ellentmond a kettővel ezelőtti lemmának.

Ha $i = k$, akkor van egy utunk i ügynöktől $j > i$ ügynökhöz, ahol $u_j(\pi(j)) = u_i(\pi(i))+1$. Mégegyszer, ha ezen út mentén csúsztatunk, akkor kapunk egy π' szétosztást, amelyre $u_t(\pi'(t)) = u_t(\pi(t))$ minden $t \neq i, j$-re; és $u_i(\pi'(i)) = u_i(\pi(i)) + 1 = u_j(\pi(j))$, és $u_j(\pi'(j)) = u_j(\pi(j)) - 1 = u_i(\pi(i))$. Mivel π'-nek ugyanaz a haszonprofilja, mint π-nek; ezért π' egy MNW szétosztás. Ezen felül, mivel egy kisebb indexű ügynöknek nagyobb lesz a haszna, ezért π' lexikografikusan nagyobb, mint π; ami ellentmond annak, hogy π-t MNW^{tie} adta vissza. □

A következő feladatunk, hogy megmutassuk, MNW^{tie} emellett GSP is. Feltételezzük, hogy létezik egy u és egy u' érték-profil, és $C \subseteq N$ ügynökök egy részhalmaza, amire $u_t = u'_t$ és $t \notin C$ és $u_j(\pi^*(j)) > u_j(\pi(j))$ minden $j \in C$-re, ahol $\pi^* = MNW^{tie}(u')$ és $\pi = MNW^{tie}(u)$.

Legyen $i = min[argmin_{t \in C} v_t(\pi(t))]$ az a legkisebb haszonnal rendelkező ügynök C-ben,akinek a legalacsonyabb az indexe. Az egyszerűség kedvéért legyen $K = K^i_\pi$. Minden $j \in C$-re, $|V_j \cap \pi(j)| < |V_j \cap \pi^*(j)|$; és mivel $\pi(j) \subseteq V_j$, ezért egyszerűsödik $|\pi(j)| < |V_j \cap \pi^*(j)|$-re. Ha $j \in K \cap C$, azt kapjuk, hogy $|\pi(j)| < |V_j \cap \pi^*(j)| \leq |V_K \cap \pi^*(j)|$, hiszen $V_j \subseteq V_K$.

Legyen $R \subseteq K$ ügynökök egy halmaza K-ban, amelyből valamennyi ügynök C-ben elérhető $G(\pi^*)$-ban. Azt állítjuk, hogy R-ben valamely ügynököknek szigorúan kevesebb jó tárgyat kell kapniuk π^* esetén, mint π-nél.

10. *Lemma.* Létezik egy $j' \in R \backslash C$ ügynök, akire $|\pi^*(j)| < |\pi(j)|$.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy minden $j \in R \backslash C$ ügynökre $|\pi^*(j)| \geq |\pi(j)|$. Vegyünk egy $j \in R \backslash C$ ügynököt; mivel $j \notin C$, ezért $u'_j = u_j$. Tehát $\pi^*(j) \subseteq V'_j = V_j$. Ezen felül mivel $j \in R \subseteq K$, definíció alapján $V_j \subseteq V_K$. Észrevehetjük, hogy minden $j \in R \backslash C$-re $\pi^*(j) \subseteq V_K$; tehát $|\pi^*(j) \cap V_K| = |\pi^*(j)| \geq |\pi(j)|$.

Minden $j \in R \cap C \subseteq C$-re, tudjuk, hogy $|\pi^*(j) \cap V_K| \geq |\pi^*(j) \cap V_j| > |\pi(j)|$. Mivel egy szétosztás zsákjai diszjunktak; ezért összeadhatjuk ezen egyenlőtlenségeket minden $j \in (R \backslash C) \cup (R \cap C) = R$-re, hogy $|\pi^*(R) \cap V_K| > |\pi(R)|$-t kapjuk. Az egyenlőtlenség szigorú, mert $R \cap C \neq \varnothing$, mivel $i \in R \cap C$ definíció alapján. A kettővel előző lemmából tudjuk, hogy $\pi(K) = V_K$. Vagyis kapjuk, hogy $|\pi^*(R) \cap \pi(K)| > |\pi(R)|$.

Ebből következik, hogy léteznie kell egy g tárgynak, amely szerepel $\pi^*(R)$-ben és $\pi(K)$-ban is, de $\pi(R)$-ben nem. Tehát léteznie kell $t \in R$ és $k \in K \backslash R$ ügynököknek, amelyekre $g \in \pi^*(t)$ és $g \in \pi(k)$. Tudjuk, hogy π Pareto optimális, ezért $u_k(g) = 1$.

Mivel $k \notin R$, ezért definíció alapján k-ból nem vezet út semelyik C-ben lévő ügynökhöz $G(\pi^*)$-ban. Ebből triviálisan következik, hogy $k \notin C$, hiszen minden csúcs elérhető saját magából. Emellett csak C-ben lévő ügynökök haszna változott; $u'_k(g) = u_k(g) = 1$, amiből következik, hogy kell vezetnie egy élnek k ügynökből t ügynökbe $G(\pi^*)$-ban. Tehát minden csúcs, ami elérhető t-ből, elérhető k-ból is; azonban $t \in R$-ből következik, hogy $k \in R$; ami ellentmondásra vezetet. □

Tekintsünk egy $j' \in R \backslash C$-ot, amire teljesül az előző lemma. Mivel $j' \in R$, ezért léteznie kell egy P útnak j'-ből egy $k \in C$ ügynökbe. Legyen π' egy szétosztás, amelyet úgy kapunk, hogy P mentén csúsztatunk. Megmutatjuk, hogy π' jobb MNW^{tie} szempontjából, mint π^* az u' értékprofil esetén; vagyis ellentmondva a $MNW^{tie}(u') = \pi^*$ állításnak.

Megjegyezzük, hogy π^* egy Pareto optimális szétosztás u' esetén, és amikor létrehozzuk π'-t π^*-ból, azt kapjuk, hogy $u'_t(\pi'(t)) = u'_t(\pi^*(t))$ minden $t \neq j', k$-ra; $u'_k(\pi'(k)) = u'_k(\pi^*(k)) - 1$; és $u_{j'}(\pi'(j')) = u_{j'}(\pi^*(j'))+1$ az egyik korábbi lemma alapján; természetesen $j' \notin C$, vagyis $u_{j'} = u'_{j'}$. Emellett a szétosztott tárgyak halmaza nem változik, vagyis minimálisan teljes továbbra is a szétosztás.

Ha $u_{j'}(\pi^*(j')) + 2 \leq u'_k(\pi^*(k))$, akkor π^* sérti a Pigou-Dalton elvet π' létezése miatt; miszerint az MNW^{tie}-nek az igazságosabb szétosztást kell választania; és jelen esetben a leximin megoldások halmaza egybeesik az MNW szétosztások halmazával, ezért π^* nem lehet MNW. Tehát szükséges, hogy

$$(1)\ u_{j'}(\pi^*(j')) + 1 \geq u'_k(\pi^*(k)) = |\pi^*(k)| \geq u_k(\pi^*(k)) \geq u_k(\pi(k)) + 1 \geq u_i(\pi(i)) + 1;$$

ahol az első egyenlőség azért teljesül, mert π^* minimálisan teljes és Pareto optimális u' esetén; $u_k(\pi^*(k)) \geq u_k(\pi(k))+1$ azért, mert $k \in C$; az utolsó egyenlőtlenség meg i választása alapján. Emellett azt is tudjuk, hogy

$$(2)\ u_{j'}(\pi^*(j')) + 1 \leq u_{j'}(\pi(j')) \leq u_i(\pi(i)) + 1,$$

ahol az első egyenlőtlenség az előző lemma alapján teljesül; és a második egyenlőtlenség pedig a kettővel ezelőtti lemma miatt, illetve mivel $j' \in R \subseteq K$.

Az (1)-et és (2)-t összetéve adódik, hogy $u_{j'}(\pi^*(j')) + 1 = u_{j'}(\pi(j')) = u_i(\pi(i)) + 1 = u_k(\pi(k)) + 1 = u'_k(\pi^*(k))$.

A második egyenlőség és a kettővel ezelőtti lemma alapján tudjuk, hogy $j' < i$. A harmadik egyenlőségnél mivel k-nak és i-nek ugyanaz a haszna π esetén, és i definiálása alapján $k \geq i$. Tehát $k > j'$. Az előzőekből már tudjuk, hogy u' értékprofil esetén π'-nek és π^*-nak ugyanaz a haszonprofilja; amiből következik, hogy MNW szétosztások. Emellett π' lexikografikusan nagyobb, mint π^* az u' esetén, ami ellentmond a $\pi^* = MNW^{tie}(u')$-nek.

Polinomiális időben számítható:

Először is legyenek N, S, u a bemeneti adataink. Feltehető, hogy nincsenek olyan tárgyak, amik mindenkinek 0-át érnek; ha mégis lennének, elegendő ezeket leszámítva futtatni az algoritmust, hisz teljesen mindegy, kinek adjuk őket.

Legyen h^{tie} egy haszonvektor, amely lexikografikusan a legnagyobb az MNW szétosztások között. Az a célunk, hogy meghatározzunk egy algoritmust, ami ezt a vetkort adja vissza; amihez szükségünk lesz a következő fontos lemmára.

11. *Lemma.* Feltételezve, hogy π egy MNW szétosztás egy $h = (h_1, ..., h_n) \neq h^{tie}$ hasznossági vektorral. Legyen i a legkisebb index, amire $h_i \neq h_i^{tie}$. Ekkor $h_i^{tie} = h_i + 1$, és létezik egy $j > i$ index, amire létezik i-ből egy út j-be $G(\pi)$-ben és $h_j = h_i + 1$.

Bizonyítás. Legyen π_1 és π_2 két szétosztás; és definiáljunk egy transzformációs gráfot $G(\pi_1, \pi_2)$-t a [10]-ben lévő koncepcióhoz hasonlóan. Minden ügynöknek egy csúcsot feleltetünk meg, és minden g tárgyra van egy (i, j) élünk, ha $g \in \pi_1(i), g \in \pi_2(j)$ és $i \neq j$; természetesen ez lehet multigráf is. Egy él azt fejezi ki, hogy g-t át kell tenni i-től j-hez ahhoz, hogy π_1-ből létrehozhassuk π_2 -t (vagyis π_1-et π_2-be transzformálhassuk). Legyen $\mathcal{E}_+ = \{i \in N : |\pi_1(i)| > |\pi_2(i)|\}$ és $\mathcal{E}_- = \{i \in N : |\pi_2(i)| > |\pi_1(i)|\}$.

Szintén [10]-ből tudjuk, hogy $G(\pi_1, \pi_2)$-ben szereplő éleket felbonthatjuk körök $\mathcal{C}$ halmazára és olyan utak $\mathcal{P}$ halmazára, amelyeknél az élek $\mathcal{E}_+$-ből indulnak, és $\mathcal{E}_-$ érkeznek. Habár ezt nem említik; ennél erősebbet láttak be: minden $i \in \mathcal{E}_+$ ügynökre létezik $P \in \mathcal{P}$ út, amely i-ből indul.

Ezután vegyük észre, hogy a transzformációs $G(\pi_1, \pi_2)$ gráfunk szorosan kapcsolódik $G(\pi_1)$-hez és $G(\pi_2)$-höz. Pontosabban ha π_1 és π_2 is PO, és van egy (i, j) él $G(\pi_1, \pi_2)$-ben, akkor lenni kell egy (j, i) élnek $G(\pi_1)$-ben, és egy (i, j) élnek $G(\pi_2)$-ben. Ahhoz, hogy ezt lássuk, tekintsük (i, j) élt $G(\pi_1, \pi_2)$-ben; vagyis van egy $g \in \pi_2(j) \cap \pi_1(i)$. Mivel mindkét szétosztás Pareto optimális, i-nek és j-nek is 1-et ér a tárgy (vagyis $g \in V_j \cap V_i$). Ekkor $g \in \pi_1(i) \cap V_j$-ből következik, hogy (j, i) él létezik $G(\pi_1)$-ben, és $g \in \pi_2(j) \cap V_i$-ből az, hogy (i, j) létezik $G(\pi_2)$-ben. Vagyis mondhatjuk, hogy egy i, j útból $G(\pi_1, \pi_2)$-ben következik, hogy j, i út van $G(\pi_1)$-ben; és egy i, j út $G(\pi_2)$-ben.

Legyen π^{tie} egy MNW szétosztás h^{tie} haszonvektorral; és tekintsük $G(\pi_1, \pi^{tie})$-t. Mivel π_1 és π^{tie} is Pareto optimálisak, és nincsenek értéktelen tárgyak; ezért $u_j(\pi_1(j)) = |\pi_1(j)|$, és $u_j(\pi^{tie}(j)) = |\pi^{tie}(j)|$ minden j ügynökre.

Tekintsük i ügynököt az előző lemmából. Először vegyük észre, hogy $h_i > h_i^{tie}$ ellentmond annak, hogy h^{tie} lexikografikusan a legnagyobb; vagyis $h_i < h_i^{tie}$ teljesül; vagyis $i \in \mathcal{E}_-$. Tehát léteznie kell egy P útnak valamely $j \in \mathcal{E}_+$-ból egy i ügynökbe $G(\pi_1, \pi^{tie})$-ben. Vegyük észre, hogy ez azt jelenti, hogy létezik egy út j-ből i-be $G(\pi^{tie})$-ben; és egy út i-ből j-be $G(\pi_1)$-ben. Azonban minden $j < i$-re $h_j = h_j^{tie}$; vagyis $|\pi_1(j)| = |\pi^{tie}(j)|$; vagyis j nem tartozik $\mathcal{E}_+$ és $\mathcal{E}_-$ közül egyikbe se. Tehát $j > i$.

Mivel π_1 és π^{tie} is MNW szétosztások, ezért létezik egy út i-ből j-be $G(\pi_1)$-ben, és j-ből i-be $G(\pi^{tie})$-ben; egy korábbi lemma alapján tudjuk, hogy

(3) $|\pi_1(j)| \leq |\pi_1(i)| + 1$ és $|\pi^{tie}(i)| \leq |\pi^{tie}(j)| + 1$.

Valamint tudjuk, hogy $i \in \mathcal{E}_-$ és $j \in \mathcal{E}_+$; tehát:

(4) $|\pi_1(i)| < |\pi^{tie}(i)|$ és $|\pi^{tie}(j)| < |\pi_1(j)|$.

A (3) és (4)-et kombinálva adódik, hogy:

(5) $|\pi_1(i)| < \pi^{tie}(i) \leq \pi^{tie}(j) + 1 < |\pi_1(j)| + 1$.

Mivel minden érték egész, ezért $|\pi_1(i)|+2 \leq |\pi_1(j)|+1$, vagyis $|\pi_1(i)|+1 \leq |\pi_1(j)|$. A (3)-ból következik, hogy $|\pi_1(j)| = |\pi_1(i)|+1$. Ekkor ha (5)-ben $|\pi_1(j)|$ helyére beírjuk ezt, adódik, hogy $|\pi^{tie}(i)| = |\pi_1(i)|+1$; vagyis amit szerettünk volna; $h_i^{tie} = h_i + 1$. □

Tegyük fel, hogy π egy MNW szétosztás, ahol $h \neq h^{tie}$; vagyis az előző lemma teljesül; vagyis vegyük i és j ügynököt, illetve a lemmában szereplő P utat. Legyen $\pi' = P(\pi)$, melynek haszonvektora h'. Egy korábbi lemmából tudjuk, hogy $h'_j = h_j - 1 = h_i$ és $h'_i = h_i + 1 = h_j = h_i^{tie}$; tehát megfigyelhető, hogy π' egy MNW szétosztás; és a h' haszonvektorának eleje hosszabban megegyezik h^{tie} haszonvektoréval, mint h-nak az eleje. Következésképp ha π tényleg egy MNW szétosztás $h = h^{ie}$-vel, akkor nincs ilyen P út.

Az algoritmusunk azzal kezdődik, hogy meghatároz egy tetszőleges π szétosztást. Ehhez felhasználhatjuk [6] és [11] által megadott hatékony algoritmusokat, amelyek bináris additív haszonssági függvények esetén megadnak egy MNW szétosztást. Ezután a mi algoritmusunk megtalálja a legkisebb i indexet, amelyre van egy út $j > i$-be, ahol $|\pi(j)| = |\pi(i)|+1$ és csúsztassunk ezen út mentén. Az előbbiek alapján ennek n iteráció után egy MNW szétosztást kell visszaadnia, amelynek lexikografikusan a legnagyobb a haszonvektora. Ehhez hasonló, ekvivalens leírása az algoritmusnak az "MNW^{tie} bináris additív hasznossági függvények esetén" néven látható algoritmus.

Hogy ezt formálisan is lássuk, i-re teljes indukcióval megmutatjuk, hogy π^i egy MNW szétosztás $u_k(\pi^i(k)) = h_k^{tie}$ minden $k \in [i]$-re. Ez természetesen $i = 0$-ra triviális, π^0 egy MNW szétosztás. Tegyük fel, hogy az indukciós feltevésünk teljesül $i-1$-re.

Ha a P út i-ből valamely $j > i$-be $G(\pi^{i-1})$-ben (az előző lemmából); akkor tudjuk, hogy $u_i(\pi^{i-1}(i))+1 = h_i^{tie}$. Azonban azt állítjuk, hogy ezen P út mentén csúsztatás egy olyan MNW szétosztást (π^i) eredményezne, amelyre $u_i(\pi^i(i)) = u_i(\pi^{i-1}(i)) + 1 = h_i^{tie}$. Ezen felül nem változtatja egyik $k < i$ ügynök hasznát sem. Tehát π^i szétosztás MNW szétosztás, amelynek haszonvektora megegyezik h^{tie}-vel az első i komponensében, ahogy szerettük volna. Emellett ha nem létezne ilyen út, akkor az előző lemma és az indukciós feltevésünk alapján $u_i(\pi^{i-1}(i)) = h_i^{tie}$-nek fenn kell állnia, vagyis $\pi^i \leftarrow \pi^{i-1}$ elegendő.

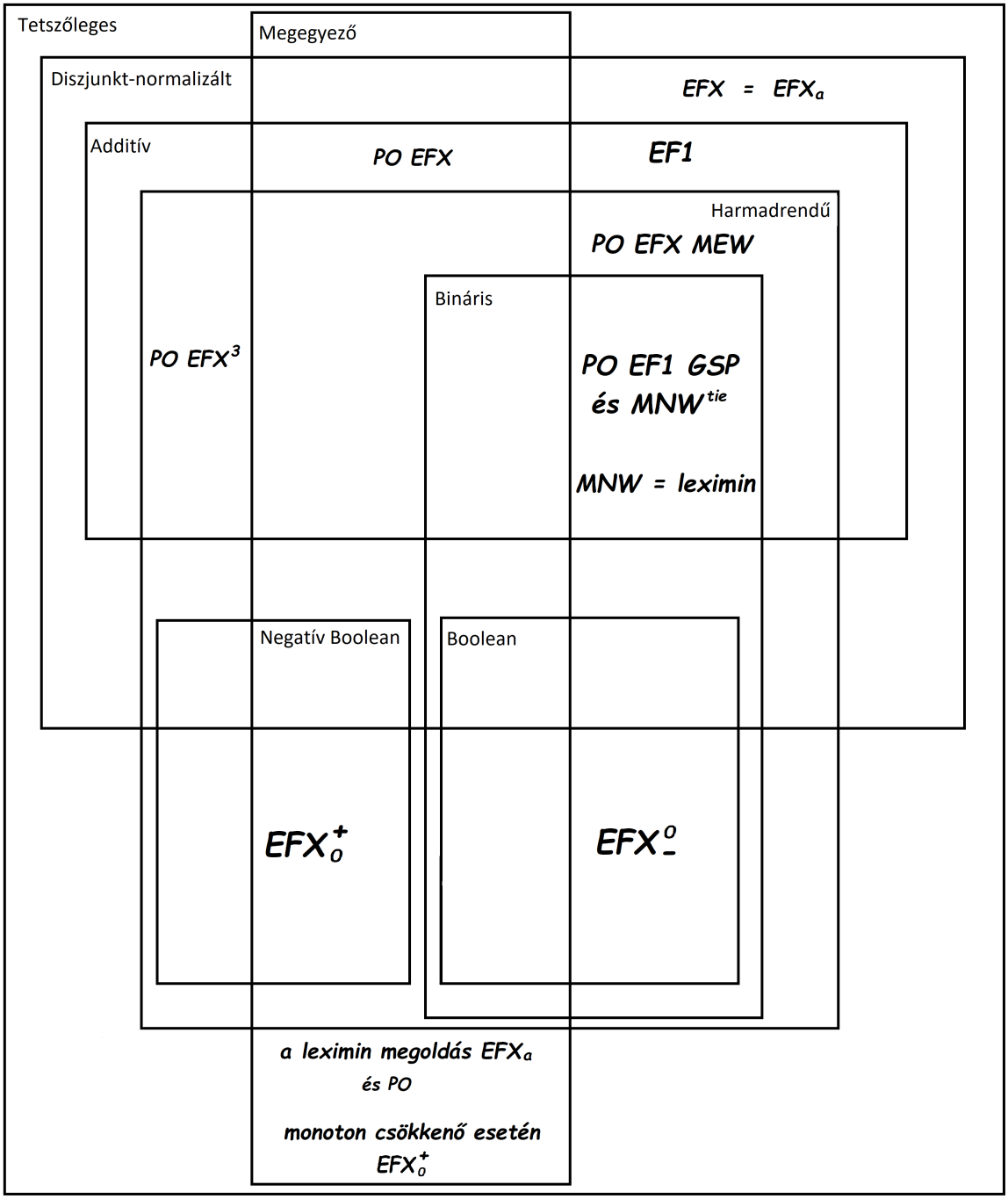
Ahhoz, hogy lássuk, hogy a futási idő polinomiális, tudjuk, hogy additív bináris hasznossági függvények esetén meg tudunk határozni polinomiális időben egy MNW szétosztást. Minden iterációnál egy $G(\pi^{i-1})$ gráfot kell létrehoznunk, és egy megfelelő utat keresnünk ebben; ezeket meg tudjuk tenni polinomiális időben. Végül egy út mentén csúsztatást is el tudunk végezni polinomiális időben. Mivel a for ciklusunk n-szer fut le, ezért a teljes futási idő polinomiális.

□

8. Összefoglalás

Az alábbi ábrákon látható két halmazábra a vizsgált eredményekkel a különböző hasznossági függvények esetén. Ha csak a szétosztás típusa szerepel (pl. $EF1$), akkor az azt jelöli, hogy az adott függvények esetén ez a fajta szétosztás polinomiális időben megtalálható. Emellett tekintve, hogy az összes ellenpéldánk két ügynökös esetben volt, ezért azokat csak a két ügynökös ábrán tüntettem fel; nyilvánvalóan ha két ügynökre nem fetétlenül létezik, tetszőleges számú ügynök számára se fog.

Láthatjuk, hogy teljesen tetszőleges, sőt, szimplán csak megegyező hasznossági függvények esetén nem létezik feltétlenül EFX szétosztás; azonban speciálisabb esetekre már igen; például megegyező additív, vagy harmadrendű hasznossági függvények esetén. Felmerülhet a kérdés, hogy vajon sima additív, esetleg

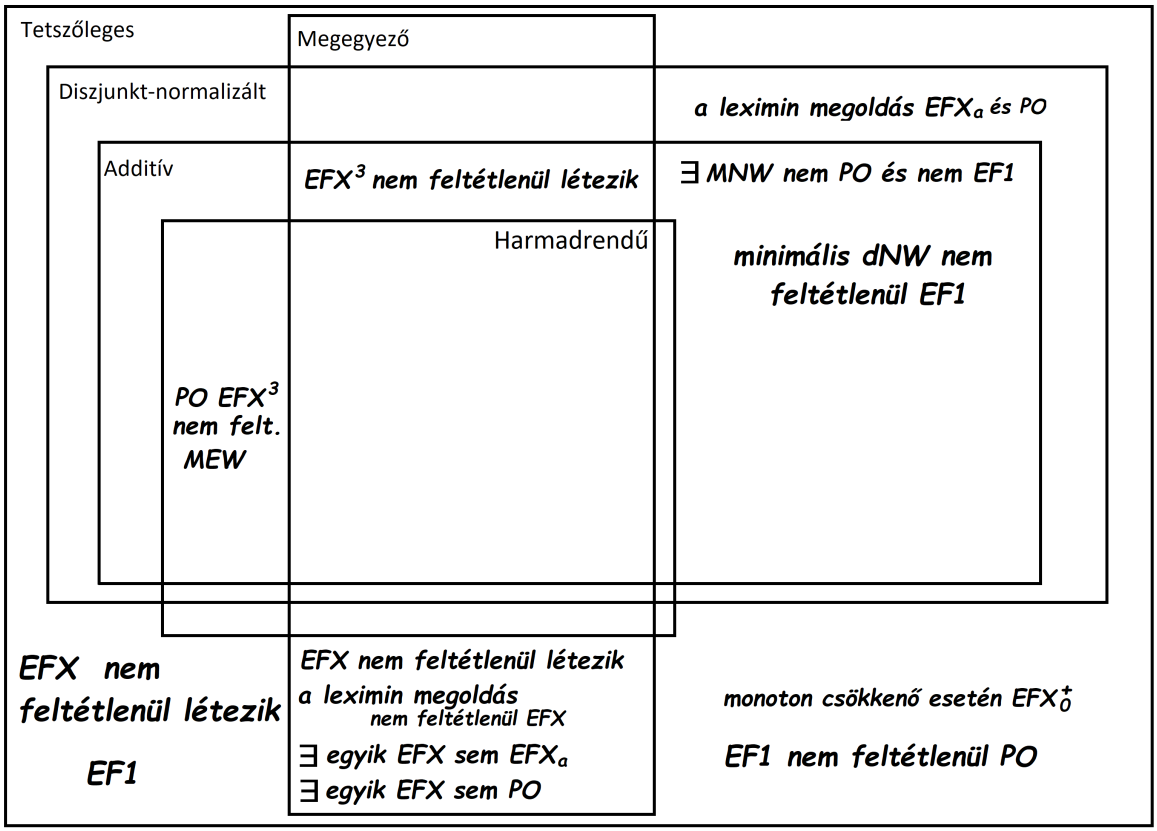


1. ábra. Eredmények tetszőleges számú ügynökre

diszjunk-normalizált esetben mit mondhatunk erről tetszőleges számú ügynökre; természetesen diszjunkt-normalizált esetben két ügynökre ezt beláttuk, hiszen $EFX_a = EFX$ ekkor és a leximin megoldás mindig létezik.

A leximin megoldás kapcsán még annyi merült fel, hogy additív bináris hasznossági függvények esetén a leximin megoldások halmaza egybeesik az MNW-vel (bár ezt az eredményt dolgozatomban nem láttam be, csak hivatkoztam rá). Látható, hogy szimpla additív esetben van olyan MNW szétosztás, amely nem $EF1$; és ugyebár tudjuk, hogy EFX_a magába foglalja $EF1$-et; vagyis jelen esetben az MNW és leximin megoldás egész biztosan nem esik egybe; azonban a harmadrendű additív hasznossági függvények esetén ez kérdéses. Továbbá $EF1$-et tudunk találni két ügynök esetén tetszőleges esetében, n ügynök esetén pedig először additívban. Szintén kérdéses diszjunkt-normalizáltnál lesz-e már ilyen EFX-hez hasonlóan; nyilvánvalóan ha EFX-et találnánk, akkor $EF1$-et is.

Emellett látható, hogy egészen sok szétosztásunk egyben Pareto optimális is. Természetesen mivel a leximin megoldás diszjunkt-normalizált esetben PO, ezért adódik, hogy additív bináris esetén az MNW szétosztások is azok. Azonban sima additív esetén látható már, hogy nem minden MNW szétosztás Pareto optimális. Ismét felmerülhet a kérdés, hogy vajon harmadrendűek esetén ez már teljesülni fog; vagy ez először a bináris additív függvények esetében merül fel.



2. ábra. Eredmények két ügynökre

Hivatkozások

[1] [Bérczi et al., 2020] Kristóf Bérczi, Erika R. Bérczi-Kovács, Endre Boros, Fekadu Tolessa Gedefa, Naoyuki Kamiyama, Telikepalli Kavitha, Yusuke Kobayashi, és Kazuhisa Makino. Envy-free relaxations for goods, chores, and mixed items, 2020.

[2] Martin Aleksandrov: Envy-freeness up to one item: Shall we add or remove resources?, 2020.

[3] Martin Aleksandrov és Toby Walsh: Greedy Algorithms for Fair Division of Mixed Manna, 2019.

[4] Haris Aziz, Ioannis Caragiannis, Ayumi Igarashi és Toby Walsh: Fair Allocation of Indivisible Goods and Chores, Proceedings of the Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence, 2019.

[5] Daniel Halpern, Ariel D. Procaccia, Alexandros Psomas, Nisarg Shah: Fair Division with Binary Valuations:One Rule to Rule Them All, 2020.

[6] S. Barman, S. K. Krishnamurthy és R. Vaish. Greedy algorithms for maximizing Nash social welfare. In Proceedings of the 17th International Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS), pages 7–13, 2018.

[7] B. Plaut és T. Roughgarden. Almost envy-freeness with general valuations. In Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 2584–2603. SIAM, 2018.

[8] I. Caragiannis, D. Kurokawa, H. Moulin, A. D. Procaccia, N. Shah, és J. Wang. The unreasonable fairness of maximum Nash welfare. ACM Transactions on Economics and Computation, 7(3): article 12,2019.

[9] H. Aziz és S. Rey. Almost group envy-free allocation of indivisible goods and chores. In Proceedings of the 29th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), 2020.

[10] R. Freeman, S. Sikdar, R. Vaish, és L. Xia. Equitable allocations of indivisible goods. In Proceedings of the 28th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), pages 280–286, 2019.

[11] A. Darmann és J. Schauer. Maximizing Nash product social welfare in allocating indivisible goods. European Journal of Operational Research, 247(2):548–559, 2015.