Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Pintér Réka

Szállítási feladatok és általánosításai

Szakdolgozat

Matematika BSc, elemző matematikus szakirány

Témavezető:
Dr. Király Tamás
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2020

NYILATKOZAT

Név: Pintér Réka

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc - matematikai elemző szakirány

NEPTUN azonosító: H2UJMM

Szakdolgozat címe:
Szállítási feladatok és általánosításai

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020.12.28

Pintér Réka

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni konzulensemnek, Dr. Király Tamásnak, hogy mindig segítséggel, támogatással és türelemmel fordult felém amikor megkerestem kérdéseimmel.

Továbbá szeretném megköszönni a családomnak, akik végig türelmesek voltak velem és támogattak. Valamint a barátaimnak, akik ösztönöztek és igyekeztek továbblendíteni amikor lankadtam.

Tartalomjegyzék

Bevezetés 6

1. Alapprobléma **7**

1.1. A probléma leírása és az adatok 7

1.2. A probléma felhasználása 8

2. A modell **9**

2.1. Jelölések 9

2.2. Matematikai megközelítés 10

3. Megoldási módszerek **13**

3.1. North-west sarok módszere 14

3.2. Minimum költség módszere 16

3.3. Vogel-módszer 18

3.4. A bemutatott módszerek összehasonlítása 20

4. A probléma megoldása **22**

5. A probléma tovább gondolása **26**

5.1. Az egyensúly hiánya 26

5.1.1. Áru többlet és áru hiány 26

5.1.2. Teljesítési kötelezettség fennállása 27

5.2. Maximalizálási problémák 28

5.2.1. Maximalizálási problémák megoldása a standard megoldási módszerek módosításával 28

5.2.2. Maximalizálási problémák alternatív megoldása 29

6. Dinamikus szállítási feladatok **31**
6.1. Átrakodási probléma 31
6.2. A szállítási idő minimalizálása 35
6.2.1. Szwarc-Hammer algoritmus 35
6.3. Több periodusú szállítási feladat 39

Bevezetés

Mindig is szerettem szervezni, összehangolni eseményeket és a mindennapjaim során is sokszor előfordul, hogy egyszerre több felé kellene mennem. Míg sokan az ilyen esetekben általában csak csinálnak egy körülbelüli becslést a két helyszín közötti utazási időre, addig én próbálom előre megtervezni, megnézni pontosan mennyi a menetidő, hogy változik, ha máshol szállok át. Szeretem minél hatékonyabban megoldani, hogy honnan hova mikor induljak, hogy mindenütt a legtöbb időt tölthessek. És sokszor indulás után is ellenőrigetem még, hogy az esetleges késések vagy gyorsabb haladás miatt nem érek-e el egy jobb csatlakozást. De amikor a barátaimmal kirándulni megyünk, akkor is sokszor megkapom a feladatot, hogy eljuttassam a társaságot a kirándulás helyszínére, illetve megtervezzem a hazavezető utat. Valahogy senki nem szereti ezt a feladatot elvállalni, de én kifejezetten élvezem.

Ezek után talán nem meglepő, hogy amikor témát kellett választanom a szakdolgozatomhoz, nagyon hamar felmerült a szállítási feladatok témaköre.

Dolgozatom során először az alap megoldási módszereket szeretném bemutatni, illetve azok felhasználhatóságát, sokszínűségét. Később pedig olyan árnyaltabb feladatok megoldását, amik visszavezethetők a szállítási feladatokra.

1. fejezet

Alapprobléma

1.1. A probléma leírása és az adatok

A szállítási feladatok a Lineáris Programozási feladatok közé tartoznak és megoldásuk során mindig valamilyen értéket szeretnénk optimalizálni. Jellemzően a szállítási költséget próbáljuk minimalizálni, csökkenteni, de emellett más mutató figyelembevételére is törekedhetünk. Például a szállítás időtartamára, amire a későbbiekben ki is fogok térni. Ilyen esetben a legrövidebb idő alatt szeretnénk elvégezni a szállítást.

Az alaphelyzet az, hogy m db helyről, „raktárból" szeretnénk eljuttatni termékeket n db helyre, azaz „üzletbe". A szállítás maga költségekkel jár, így minden „raktár - üzlet" párnak van egy előre meghatározott szállítási díjja egy áruegységre nézve. Amit még számításba kell venni, hogy jellemzően nem végtelenek a raktárkészletek, a megtermelt mennyiség, illetve a befogadó helyek kapacitása. Mind e mellett, fölösleges azért létrehozni bármit is, hogy utána parlagon álljon. Amit megtermelnek, mind tovább is akarják adni, hiszen az el nem szállított árucikkek tárolása is költségekkel jár. A boltoknak, felhasználó helyeknek pedig szükségleteik vannak, amiket ki kell elégíteni. Ezt úgy értem, hogy például ha egy boltban nincs elég egy adott árucikkből, kifogynak a készletek, akkor azok az emberek aki ott az üres polcokkal találkoztak, legközelebb valószínűleg nem térnek be oda vásárolni. Így az értékesítő helyek előre felbecsülik a várható vásárlói igényt és az alapján határozzák meg a szükségleteiket.

Ezeket az adatokat figyelembe véve keressük az optimális megoldást, a leggazdaságosabb szállítási útvonalakat, hogy melyik „raktárból” mennyi árut érdemes szállítani az egyes „üzletekbe”.

1.2. A probléma felhasználása

Szállítási feladatokkal, vagy olyan esetekkel ahol annak valamilyen formáját, módosítását felhasználják, rengeteg területen találkozhatunk. Nyilván már a neve miatt is a szállítási, logisztikai területen a legegyértelműbb a felhasználhatósága. Ezen belül a lehetőségek száma szinte végtelen.

Például gyárakból az előállított termékek eljuttatása a boltokba, figyelembe véve az igények változatosságát. Egy apró településen kisebb mennyiségre van szükség a mindennapos háztartási felszerelésekből, mint egy nagyváros központjában, ahol nagyobb a népsűrűség. Vagy ha globális szállításban gondolkodunk, akkor egy esős időjárású országban, területen várhatóan nagyobb igény van az esernyők iránt, mint a sivatagos, száraz helyeken. Az igények mellett a profit növelése érdekében gondos figyelmet kell fordítani a szállítás költségére az egyes helyek között, figyelembe véve, hogy nem mindig a közvetlen egyenes út a legolcsóbb. Esetleg nem is kivitelezhető, mert mondjuk egy másik kontinensre kell szállítani, amiből automatikusan következik, hogy többféle járműre is szükség van a szállításához, amik variálása más-más költséget illetve szállítási időt eredményeznek. Utóbbi szintén sokszor befolyásoló tényező az útvonalak kiválasztásakor.

2. fejezet

A modell

Magát a problémát csak az után tudjuk megoldani, optimalizálni, ha előállítjuk a matematikai modelljét, amivel tudunk dolgozni. Ebben a fejezetben az [1] forrás alapján fogunk dolgozni.

A modell felírásakor fontos figyelembe venni azokat a megszorításokat, mi szerint:

- a feladat megoldása során nem lehetséges a negatív szállítás, azaz az olyan eset, amikor negatív árumennyiséget viszünk egyik helyről a másikba, vagy negatív költségű maga a szállításnak a költsége két helyszín között
- kínálati helyen limitált készlet áll csak rendelkezésre
- az egyes keresleti helyek szükségleteit teljesíteni kell

2.1. Jelölések

A szállítási feladatok során rengeteg különböző adatot kell kezelni, és ezek között az adatok között sok az összekapcsolódó. Annak érdekében, hogy a továbbiakban könnyebb legyen hivatkozni az egyes adatokra a modell és a megoldási módszerek bemutatása során, a következő jelölés rendszert vezetjük most be:

- m: a kínálati helyek száma

- n: a keresleti helyek száma
- a_i: az i-edik kínálati hely készlete. Az i érték az 1 és m közötti pozitív egész számokat veszi fel
- b_j: a j-edik keresleti hely szükséglete. A j érték az 1 és n közötti pozitív egész számokat veszi fel.
- c_{ij}: az i-edik kínálati helyről a j-edik keresleti helyre történő szállítás költsége egységnyi „áru”-ra számítva
- x_{ij}: az i-edik kínálati helyről a j-edik keresleti helyre szállított áru mennyisége
- C: az összes szállított áru költségének végösszege. Ezt akarjuk minimalizálni.

2.2. Matematikai megközelítés

A megszorítások a bevezetett jelölésrendszerrel:

- az egyes kínálati helyeken limitált készlet áll csak rendelkezésre:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{1n} &= a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots + x_{2n} &= a_2 \\ &\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \ldots + x_{mn} &= a_m \end{aligned}$$

- keresleti helyek szükségleteit teljesíteni kell:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + \ldots + x_{m1} &= b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + \ldots + x_{m2} &= b_2 \\ &\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \ldots + x_{mn} &= b_n \end{aligned}$$

- nem lehet negatív mennyiségű árut szállítani:

$$x_{ij} \geq 0, \forall\ i, j \text{ értékre és egész szám}$$

- nem lehet negatív a szállítási költség:

$$c_{ij} \geq 0, \forall\ i, j \text{ értékre és egész szám}$$

A minimalizálni kívánt érték:

$$\min C = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$$

A modell standard alakja:

$$\min C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ x_{ij} \geq 0 \tag{2.3}$$

A feladat akkor megoldható, ha teljesül, hogy a kínálati helyek limteinek összege egyenlő a szükségletek összegével, illetve az összes szállított áru mennyiségével, azaz:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \tag{2.4}$$

A való életben az egyes termékek, áruk szállítását több gazdasági megfontolás is befolyásolja a szükségletek és kínálatok valamint a költségek értéke mellett. Mivel az alap feladatban csak a legegyszerűbb esettel dolgozunk, ezért ezekkel nem foglalkozunk. Ennek biztosítása érdekében további követelményekre, kikötésekre van szükségünk.

- A szállítási költség független a szállított mennyiségtől. – Általában a szállítási költség nagyban függ a szállító járműtől, és annak üzemelte-

tési értékétől, bérlési árától, ami viszont nem függ a szállítani kívánt mennyiségtől. Ha egy adott nagyságú raktérrel rendelkező járművel szállítunk, az a leggazdaságosabb, ha az egész csomagteret megtöltjük, teljesen kihasználjuk a rendelkezésre álló teret.

- A kereslet-kínálat értéke ismert és független a termék árától.
- $1db$ áru is szállításra kerül. – Pont azért mert, a szállítási költség független a szállított mennyiségtől, jelen esetben akár egyetlen termék is szállítható, míg a való életben, ez általában nem kifizetődő.

Az adatokat táblázat segítségével a legkönnyebb szemléltetni és átláthatóvá tenni:

$i \quad j$	1	2	...	n	a_i
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	... ...	x_{1n} c_{1n}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	... ...	x_{2n} c_{2n}	a_2
...	... ...	... ...	... ...	... ...	...
m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	... ...	x_{mn} c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Ezen táblázat alapján könnyű ellenőrizni az adatok helyességét is, csupán meg kell vizsgálni, hogy teljesül-e a 2.2 és 2.3 feltétel.

3. fejezet

Megoldási módszerek

Mint általában a matematikai problémák megoldására, a szállítási feladatokra is több megoldási módszer létezik. Mindegyiknek megvan a maga előnye és hátránya is, de éppen ezért a különböző helyzetekben a nekünk leginkább megfelelő módszert ki tudjuk választani, majd alkalmazni. Mert például előfordulhat olyan eset, hogy csak egy nagyjábóli becslést szeretnénk kapni a szállítási költségekre, de azt minél gyorsabban. Ebben az esetben célszerű a North-west, azaz északnyugati sarok módszert alkalmazni. Ez egyszerű és gyors megoldást ad, de a végösszeg magas lehet, ami viszont nem jelent problémát, ha csak egy körülbelüli összeget, illetve felsőbecslést akartunk számolni.

A következő fejezetekben a megnézzük néhány megoldási módszer részletes működését [1], amiket a következő példán szemléltetni is fogok:

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1	$c_{11} = 10$	$c_{12} = 6$	$c_{13} = 7$	$c_{14} = 2$	$a_1 = 40$
R_2	$c_{21} = 1$	$c_{22} = 8$	$c_{23} = 9$	$c_{24} = 0$	$a_2 = 25$
R_3	$c_{31} = 9$	$c_{32} = 7$	$c_{32} = 9$	$c_{34} = 8$	$a_3 = 50$
b_j	$b_1 = 50$	$b_2 = 35$	$b_3 = 10$	$b_4 = 20$	

3.1. táblázat.

A 3.1 táblázatban a K_j a j-edik keresleti helyet jelöli, annak oszlopában az ahhoz tartozó szállítási költségek illetve a hely szükségelete szerepel, az R_i az i-edik raktárat jelöli és a sorában találjuk a megfelelő szállítási

költségeket, készlet mennyiséget. A későbbiekben ez a táblázat a szállított mennyiségekkel, azaz az x_{ij} értékekkel fogjuk kitölteni, illetve bővíteni.

Ezek a módszerek működés szempontjából csak annyiban térnek el egymástól, hogy más és más szempont alapján töltjük ki a táblázatot a szállítani kívánt mennyiségekkel, azaz az x_{ij} értékekkel, de fontos megjegyezni, hogy a kapott szállítási össz költség nem feltétlenül a legoptimálisabb lesz. Ezen módszerek csak egy jó kezdőértéket, kiindulási pontot tudnak szolgáltatni. Ha a tényleges optimumot szeretnénk kiszámolni, akkor az egyes módszerek után további teendőink lesznek, de a kiindulási módszer gondos megválasztásával, akár csökkenthetjük is a továbbiakhoz szükséges ráfordított idő mennyiségét.

3.1. North-west sarok módszere

Először is nézzük a már említett északnyugat-sarok módszert.

Mivel kezdetben semmi fajta kiindulási pontunk nincs, vagy irányadó mennyiségünk, a bal felső saroktól kezdünk el dolgozni – ezért is lett a módszer neve északnyugati sarok-módszer. Ha egy térképet magunk elé képzelünk, az iránytű északnyugatot jelez a bal felső sarokra. Szóval a bal felső sarokban lévő cellába beírjuk a lehető legnagyobb értéket amit csak tudunk. Ezt az értéket nevezzük x_{11}-nek és azt fogja jelezni, hogy az a_1 kínálati helyről mennyi árut akarunk szállítani a b_1 keresleti helyre, ami ebben az esetben az a_1 és a b_1 értékek közül a kisebbikkel lesz egyenlő a 2.2 és 2.3 feltételek miatt. Tehát:

$$x_{ij} = \min\{a_i,\ b_j\}$$

Ezek után az a_1 és b_1 értékeket csökkentem x_{11} értékével, ami azt fogja előidézni, hogy az egyik érték nullázódik, ahogy az az alábbi táblázaton is látszik.

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1	40				$40 - 40 = 0$
R_2					25
R_3					30
b_j	$50 - 40 = 10$	35	10	20	

3.2. táblázat.

Ha az a_1 érték nullázódik, azaz a kínálati sor telik meg, akkor az esik ki, ha a b_1 érték, azaz a keresleti oszlop, akkor az oszlop. Kiesés alatt azt értem, hogy az adott oszlop vagy sor minden x eleme nem vesz fel értéket a kiválasztott, jelen esetben x_{11} elemen kívül. Így az összegzéskor sem fognak hozzátenni az össz szállítási költséghez. A megmaradt téglalapban amibe még írhatunk értékeket, tovább lépünk a következő mezőre, ami megint csak a bal felső sarokban van és újra végig csináljuk az előző összehasonlításokat a megfelelő sor illetve oszlop értékeivel, majd csökkentjük is a kínálati és keresleti értékeket.

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1	40	-	-	-	0
R_2	10				$25 - 10 = 15$
R_3					30
b_j	$10 - 10 = 0$	35	10	20	

3.3. táblázat.

Ezt a műveletsort addig ismételjük amíg az összes keresleti és kínálati érték kinullázódik, ami egyszerre fog megtörténni a 2.4 feltétel miatt.

Ha készen vagyunk a táblázat kitöltésével, akkor minden x_{ij} értéket összeszorzunk a hozzá tartozó c_{ij} értékkel majd ezeket a szorzatokat összeadjuk:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 920$$

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1	40	-	-	-	0
R_2	10	15	-	-	0
R_3	-	20	10	20	0
b_j	0	0	0	0	$C = 920$

3.4. táblázat.

Ez ugyan még nem a legoptimálisabb megoldás, de felső becslésnek biztosan jó, ennél nagyobb értéket fölösleges minimumnak választani.

3.2. Minimum költség módszere

Ez a módszer nagyon hasonlít az előbb nézetthez, de itt a szállítási költségek alapján haladunk, osztjuk be a szállított mennyiségeket. A módszer további változatai, amikor sor-minimumok vagy oszlop-minimumok szerint haldunk. Ezekben az esetekben eldönthetjük melyik alapján keresünk, a módszer ugyanaz, csupán arra kell figyelni, hogy a számítása alatt végig hűek maradjunk kezdeti döntésünkhöz.

Maga a módszer úgy működik, hogy megkeressük azt a kínálat-kereslet párt, amik között a legkevesebb a szállítási költség, azaz a legkisebb c_{ij} értéket, majd az előző módszerhez hasonlóan ide beírjuk a lehető legnagyobb mennyiséget amit még szállítani tudunk, ami az a_i és a b_j értékek közül a kisebbikkel lesz egyenlő. Tehát:

$$x_{ij} = \min\{a_i,\ b_j\}$$

Ezek után az a_i és b_j értékekből kivonjuk a választott x_{ij} értéket, minek következtében a kisebbik érték nullázódik, így a hozzá tartozó sor vagy oszlop kiesik. A továbbiakban majd azt figyelmen kívül hagyva keresünk és adunk meg értékeket.

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1	10	6	7	2	40
R_2	1	8	9	20 0	$25 - 20 = 5$
R_3	9	7	9	8	30
b_j	50	35	10	$20 - 20 = 0$	

3.5. táblázat.

Ha ezzel megvagyunk, akkor megkeressük a következő legkisebb c_{kl} értéket és megismételjük az előző lépéseket.

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1	10	6	7	- 2	40
R_2	5 1	8	9	20 0	$5 - 5 = 0$
R_3	9	7	9	- 8	50
b_j	$25 - 25 = 0$	0	10	0	

3.6. táblázat.

Mindezt addig ismételjük, míg az összes keresleti és kínálati hely ki nem esik. Ha kész vagyunk, akkor a kapott x_{ij} értékeket megszorozzuk a hozzájuk tartozó c_{ij} értékkel és összeadva kapunk egy össz szállítási költséget:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 700$$

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1	- 10	35 6	5 7	- 2	0
R_2	5 1	- 8	- 9	20 0	0
R_3	45 1	- 2	5 3	- 5	0
b_j	0	0	0	0	$C = 700$

3.7. táblázat.

Ebben az esetben várhatóan alacsonyabb költséget fogunk kapni, mint az előbbi módszernél, hiszen itt igyekeztünk alacsonyabb költségű utakat felhasználni, míg az előbb csak az volt a célunk, hogy minél előbb teljesítsük mindegyik szállítási és elszállítási igényt és nem foglalkoztunk a költségekkel. Ám ez az érték sem biztos, hogy megegyezik az optimummal.

3.3. Vogel-módszer

Ez a módszer elsőre bonyolultnak tűnhet, de igazából csak kissé időigényes.

Azzal kezdjük, hogy a szállítási költségeket tartalmazó táblázathoz hozzáillesztünk még egy sort és oszlopot, ahova az egyes sorokban és oszlopokban lévő két legkisebb szállítási érték különbségét írjuk, úgy hogy a nagyobból kivonjuk a kisebbet. Az újonnan keletkezett értékek közül kiválasztjuk a legnagyobbat, majd az ehhez tartozó sor vagy oszlopban lévő legkisebb szállítási értéket, és ide a már jól megszokott módon beírjuk az ide tartozó kínálati és keresleti érték minimumát, majd csökkentjük is vele azokat. Illetve a szükséges sort vagy oszlopot kiejtjük.

Végezzük el a lépéseket a példán is:

	K_1	K_2	K_3	K_4	
R_1	10	6	7	2	4
R_2	1	8	9	0	1
R_3	9	7	9	8	1
	0	1	2	2	

3.8. táblázat.

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1					40
R_2	25				0
R_3					50
b_j	25	35	10	20	

3.9. táblázat.

Ezek után a folyamatot megismételjük. Ismét kiszámoljuk a hozzáadott oszlopba illetve sorba az eltéréseket, de ezúttal nem vesszük számításba azokat a cellákat, ahova már nem írhatunk szállítható mennyiséget. A folyamat többi része nem változik.

	K_1	K_2	K_3	K_4	
R_1	10	6	7	2	4
R_2					
R_3	9	7	9	8	1
	1	1	2	6	

3.10. táblázat.

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1				20	20
R_2	25	-	-	-	0
R_3					50
b_j	25	35	10	0	

3.11. táblázat.

Ezeket a lépéseket addig ismételjük amíg az összes kínálati hely kapacitása, illetve kereslet értéke le nem nullázódik. Ekkor az x_{ij} és c_{ij} értékeket összeszorozzuk majd összeadjuk.

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 615$$

A módszer megoldása:

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1	10	-	10	20	0
R_2	25	-	-	-	0
R_3	15	35	-	-	0
b_j	0	0	0	0	$C = 615$

3.12. táblázat.

3.4. A bemutatott módszerek összehasonlítása

A bemutatott módszerek közül bármelyiket választhatjuk ahhoz, hogy kapjunk egy kiindulási értéket. Ha a pontos megoldást ki akarjuk számolni, akkor lényegében véve az is egy opció, hogy teljesen random irogatunk be szállítási mennyiségeket, bár nyilván a 2.2, 2.3 és a 2.4 egyenlőségeknek ekkor is teljesülniük kell.

Az egyes módszerek bemutatásakor is látszik a példán, hogy egy kicsit több idő és figyelem ráfordításával pontosabb értéket kaphatunk, így majd a továbbiakban könnyebb lesz a dolgunk. De vajon mikor melyiket érdemes választani?

Alapvetően az északnyugat-sarok módszer és a minimum költség-módszere esetén is legfeljebb $n + m - 1$ lépés alatt be tudjuk osztani, hogy honnan hova mennyi árut szállítsanak. Ekkor egy lépés alatt azt a folyamatot értem, ahogy kiválasztjuk az adott x_{ij} értékét, majd azt le is vonjuk a hozzátartozó a_i illetve b_j értékekből, illetve a szükséges sort vagy oszlopot kiejtjük. Pont azért mert minden lépés után kiejtünk egy oszlopot vagy sort, adja magát, hogy $n + m$ lépést kell végrehajtanunk, de az utolsó érték beírásakor egy sor és egy oszlop is nullázódik, ezért a -1. Ezek alapján pedig elmondható, hogy minden olyan alkalommal, amikor olyan értéket adunk meg ami egyszerre egy sort és egy oszlopot is kiejt, eggyel csökken a lépésszám. A minimum költség módszerénél még az az idő is szerepet játszhat amíg újra és újra megkeressük a legkisebb szállítási értéket, de ez csak nagyobb adathalmaz esetén lehet számottevő, kisebbek esetében, mint akár a példánknál, nem jelent problémát.

A Vogel-módszernél mivel minden lépés előtt rengeteg plusz számolást kell elvégezni, ezért nagyon időigényes, de néhány esetben tényleg hasznos lehet. Például ha kevés alacsony szállítási költség van, vagy akkor, ha kifejezetten néhány oszlopra vagy sorra igaz, hogy tartozik hozzá kiugróan alacsony érték. Ilyen esetekben, mivel a két legkisebb szállítási költség különbségét vizsgáljuk, ezeken a helyeken nagyobb értéket fogunk kapni, így biztosítható, hogy az alacsonyabb költségű helyeket részesítsük előnyben a nagyobbakkal szemben. Így az össz költségünk is kedvezőbb lesz.

4. fejezet

A probléma megoldása

Az eddigiekben különböző módszerekkel már kerestünk minimumokat a szállítási összköltségre, de ha az optimumot keressük, akkor ezek csupán kiindulási összegek, amiket tovább kell vizsgálnunk, hogy lehet-e csökkenteni és vajon mennyivel [2].

Mivel jelen esetben mind a három módszerrel kiszámoltunk egy eredményt, azt fogjuk választani amelyik a legkisebb értéket adta, azaz a Vogel-módszer eredményét. Általában véve több módszer végig számolása esetén, a legkisebb összeget adót célszerű kiválasztani, hiszen várhatóan ezzel lesz a továbbiakban a legkevesebb teendőnk.

A módszer végén nem csak egy jó kiindulási összköltséget kaptunk, hanem egy bázismegoldást is arra vonatkozóan, hogy az egyes helyek között mennyi árut akarunk szállítani. Azokat a helyeket ahol az x_{ij}-nek külön értéket adtunk, kiválasztottunk a módszer során, kötött változóknak fogjuk hívni, a többit pedig szabad változónak. Továbbá bevezetünk új indexeket a kínálati illetve a keresleti helyekhez. Az i-edik kínálati helyhez fog tartozni az u_i index, a j-edik keresleti helyhez pedig a v_j index. Ezen indexek értékét úgy kapjuk, hogy minden kötött változó esetén felírjuk, a következő egyenletet:

$$u_i + v_j = c_{ij} \tag{4.1}$$

Az egyik ismeretlen szabadon megválasztható, mondjuk legyen $u_1 = 0$. Ezek után már a többi változó is kiszámolható, ha legalább $n+m-1$ kötött változónk van, hiszen egy olyan egyenletrendszerről beszélünk, ahol $n+m$

ismeretlenünk van, de mivel megadjuk, hogy $u_1 = 0$, már csak $n + m - 1$ egyenletre van szükségünk a megoldáshoz. Ha nem áll ennyi egyenlet a rendelkezésünkre, akkor beveszünk annyi szabad változót amennyit szükséges úgy, hogy a szállított mennyiség értékének 0-át adunk meg. Az így keletkezett kötött változóra is felírjuk a 4.1 egyenletet, így már minden indexet ki tudunk számolni.

Ha ezzel megvolnánk, akkor minden c_{ij} értékre ellenőriznünk kell, hogy igaz-e a következő egyenlőtlenség:

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \tag{4.2}$$

Ha ez az egyenlőtlenség minden esetben teljesül, akkor a megoldás optimális, további teendőnk nincs. Ha akár csak egy esetben nem teljesül, akkor módosításra van szükségünk.

Az eddigi számolásokat, összehasonlításokat végezzük el a példánkon is:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 10 \\ u_1 + v_3 &= 7 \\ u_1 + v_4 &= 2 \\ u_2 + v_1 &= 1 \\ u_3 + v_1 &= 9 \\ u_3 + v_2 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= -9 \\ u_3 &= -1 \\ v_1 &= 10 \\ v_2 &= 8 \\ v_3 &= 7 \\ v_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 + 10 &\leq 10 \\ 0 + 8 &\not\leq 6 \\ 0 + 7 &\leq 7 \\ 0 + 2 &\leq 2 \\ -9 + 10 &\leq 1 \\ -9 + 8 &\leq 8 \\ -9 + 7 &\leq 9 \\ -9 + 2 &\leq 0 \\ -1 + 10 &\leq 9 \\ -1 + 8 &\leq 7 \\ -1 + 7 &\leq 9 \\ -1 + 2 &\leq 8 \end{aligned}$$

Ha a 4.2 egyenlőtlenség nem teljesül minden esetben, akkor először is kiválasztjuk az egyik olyan szabadváltozót, amikor nem teljesül. Esetünkben ez az $u_1 + v_2 \leq c_{12}$ egyenlőtlenségnél fordul elő.

Innen hurkot képezünk úgy, hogy abba a szabadváltozóba érjünk vissza amiből elindultunk és a többi sarkán kötött változók legyenek. Amire oda kell figyelni, hogy a hurok egymással szembeni kötött változói ne az utólag bevett, 0 értékű kötött változók legyenek. Erre azért van szükség, mert a következő lépés az lesz, hogy a lehető legnagyobb mennyiséget áramoltatjuk a hurok mentén a szabad változóba. Áramoltatás alatt azt értem, hogy a szabadváltozónak úgy tudok 0-nál nagyobb értéket adni, ha abban az oszlopban illetve sorban ahol elhelyezkedik, egy-egy kötött változónak ugyanannyival csökkentem az értékét. Viszont amit elvettem azt pótolnom kell a csökkentett elemek sorában illetve oszlopában, amiknek a kereszteződése pont a hurok 4. sarka lesz, a szabadváltozónkkal szemben.

Maximálisan akkora értéket tudok áramoltatni amekkora a szabadváltozónk szomszédos csúcsinak minimuma, hiszen ezekből akarunk minél nagyobbat szakítani, és ezért szükséges, hogy ezeknek a csúcsoknak ne 0 legyen az értékük.

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1	10−10	+10	10	20	0
R_2	25	-	-	-	0
R_3	15+10	35−10	-	-	0
b_j	0	0	0	0	

4.1. táblázat.

	K_1	K_2	K_3	K_4
R_1	0	10	10	20
R_2	25	-	-	-
R_3	25	25	-	-

4.2. táblázat.

Az áramoltatás után egy új kötött változónk keletkezik, és legalább egy megszűnik annak lenni. Az összes jelenlegi kötött változóra kiszámoljuk az össz szállítási értéket:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 595 \tag{4.3}$$

Ekkor ismét felírjuk minden kötött változóra a 4.1 egyenlőséget és az előbbivel megegyező módon kiszámoljuk az indexeket, majd megnézzük, hogy a 4.2 egyenlőtlenség mindenütt igaz-e.

A példánk esetében az újabb összehasonítás eredményei:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 6 \\ u_1 + v_3 &= 7 \\ u_1 + v_4 &= 2 \\ u_2 + v_1 &= 1 \\ u_3 + v_1 &= 9 \\ u_3 + v_2 &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= -7 \\ u_3 &= 1 \\ v_1 &= 8 \\ v_2 &= 6 \\ v_3 &= 7 \\ v_4 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 + 8 &\leq 10 \\ 0 + 6 &\leq 6 \\ 0 + 7 &\leq 7 \\ 0 + 2 &\leq 2 \\ -7 + 8 &\leq 1 \\ -7 + 6 &\leq 8 \\ -7 + 7 &\leq 9 \\ -7 + 2 &\leq 0 \\ 1 + 8 &\leq 9 \\ 1 + 6 &\leq 7 \\ 1 + 7 &\leq 9 \\ 1 + 2 &\leq 8 \end{aligned}$$

Ha van olyan, ahol nem teljesül, akkor újra áramoltatunk egy összeget és a többi lépést is újra ismételjük egészen addig amíg egyszer nem lesz igaz minden egyenlőtlenség. Esetünkben mindegyik egyenlőtlenség teljesül, tehát megtaláltuk az optimumot, tovább javítani nem lehetséges.

A példánk optimuma: $\min C = 595$

5. fejezet

A probléma tovább gondolása

Eddig csak azzal az esettel foglalkoztunk, amikor minden klappolt, és különböző trükkökre sem volt szükség a megoldás megtalálásához. De az életben adódó szállítási problémák ennél sokkal árnyaltabbak. Rengetegszer előfordul például, hogy a keresleti és kínálati mennyiségek nem egyeznek meg. Hányszor lehet hallani, hogy valamilyen árucikkből hiány van, vagy esetleg többlet. Vagy akár olyan eset is fennállhat, amikor a maximumot keressük egy standard feladatra felípített rendszerben. A következő fejezetben ezeket a lehetőségeket vizsgáljuk [1][3]

5.1. Az egyensúly hiánya

5.1.1. Áru többlet és áru hiány

Azokban az esetekben, amikor

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{5.1}$$

egyenlőtlenség áll fönt, áru többlettről beszélünk. Az ilyen esetekben az összesen szállított vagy szállítható mennyiségekről, csak azt tudjuk, hogy

nem haladhatják meg az össz keresletet, azaz

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Sajnos ezzel az információval még mindig nem vagyunk közelebb a megoldáshoz. Ahhoz, hogy az eddigi ismereteinket, megoldási módszereinket fel tudjuk használni, a feladatot vissza kell vezetnünk standard alakra, amit úgy tehetünk meg, ha bevezetünk egy fiktív keresleti helyet. Ez lesz K_{n+1}, és a szükséglete a „hiányzó" mennyiség lesz:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

A K_{n+1} keresleti helyhez tartozó szállítási költségek értéke

$$c_{i,n+1} = 0, \text{ ahol } i = 1, 2, \ldots m$$

Az így létrehozott standard feladatnak az optimális megoldása az eredeti feladatnak is optimálsi megoldása lesz.

Áru hiány esetében ugyanaz az eljárás, mint amikor áru többlettel nézünk szembe. Ám mivel ekkor a 5.1.1 egyenlőtlenség megfordul, minden mást is e szerint kell végeznünk.

A létrehozott fiktív helyszínünk egy kínálati hely lesz, R_{m+1}, a hozzá tartozó adatok pedig a következőképpen alakulnak:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$c_{m+1,j} = 0, \text{ ahol } j = 1, 2, \ldots n$$

5.1.2. Teljesítési kötelezettség fennállása

Előfordulhat olyan eset, hogy egy adott kínálati vagy keresleti hely igényeit mindenképpen ki kell elégíteni. Ez alapesetben nem jelent problémát, hiszen a 2.4 egyenlőség biztosítja az összes hely igényeinek teljesítését. Ám ha

olyan feladatról van szó, mint amiket az imént taglaltunk és az össz kereslet nincs egyensúlyban az össz kínálattal, akkor egyéb intézkedések bevezetése szükséges.

Ha áru többletünk van, de van olyan kínálati hely ahol teljesítési kötelezettségünk van, akkor a szóbanforgó R_i és a fiktív keresleti hely közötti szállítási költséget nem 0-nak választom, hanem egy nagy $M > 0$ számnak, hogy így ne érje meg arra szállítani. Azaz:

$$c_{i,n+1} = M$$

Abban az esetben ha áru hiányunk van, és egy kínálati hely felé van teljesítési kötelezettségünk, akkor az előbbihez hasonlóan a K_j és R_{m+1} közötti útra választok egy nagy $M > 0$ költséget.

$$c_{m+1,j} = M$$

5.2. Maximalizálási problémák

Előfordul olyan eset amikor minimalizálás helyett maximalizálni szeretnénk. Például ha minden leszállított egységnyi áru után valamilyen jutalékot kapunk, de ez az érték utanként változik. Vagy ha azt számoljuk, hogy az egyes utakon mekkora egységre jutó profitra tehetünk szert és azt akarjuk maximalizálni. Érdemesebb is ebben az esetben a c_{ij} értékre inkább profitra gondolni, mint költségre, hiszen rendkívül ritkán fordul elő, hogy a költségeinket akarnánk maximalizálni.

5.2.1. Maximalizálási problémák megoldása a standard megoldási módszerek módosításával

A probléma megoldására a megvizsgált három módszer alkalmas vagy alkalmassá tehető, és a bázismegoldás utáni optimum keresésekor is csak egy apró változtatás szükséges.

Az északnyugati-módszer megoldásában semmilyen változás nem szükséges, a minimum költség keresése pedig csak annyiban változik, hogy a leg-

kisebb helyett értelem szerűen mindig a legnagyobb profitot választjuk ki. A Vogel-módszer esetében a hozzáadott oszlopba és sorba a két legnagyobb elem különbsége kerül. Azok közül a legnagyobbat választjuk ki, majd a hozzátartozó legnagyobb profitot, és innen már ugyanazok a lépések, mint eredetileg voltak.

Ha megfigyeljük, ahol csak lehet megcseréltük a legnagyobb és legkisebb kifejezéseket az eredeti módszerhez képest, kivéve amikor a Vogel-módszer esetében a különbségek közül kell választani. Ekkor a standard feladathoz hasonlóan a legnagyobb értéket választjuk, hisz most is a kiugró értékeket keressük, a gondolatmenetet nem befolyásolja, hogy minimalizálni vagy maximalizálni szeretnénk.

A feladat megoldása, az optimum megkeresése nagyon hasonlít a standard feladatra ahol minimalizálunk, a lépések nem is változnak. A különbség abban rejlik, hogy miután egy bázismegoldásra kiszámoltuk az u_i és a v_j értékeket nem a 2.4 egyenlőtlenséget ellenőrizzük. Mivel minél nagyobb érték elérése a célunk, ezért megfordítjuk a relációt.

$$u_i + v_j \geq c_{ij} \tag{5.2}$$

Természetesen az egyenlőség továbbra is megengedett, hiszen a kötött változókra máshogy soha nem is teljesülne az egyenlőtlenség.

Ha a 5.2 egy szabadváltozóra nem érvényes, akkor ugyanúgy kell kezelni, mint ahogy a standard feladat esetében kezeltük.

5.2.2. Maximalizálási problémák alternatív megoldása

Ha valami miatt nem akarjuk a módosított módszereket használni a megoldáshoz, akkor van egy olyan lehetőség is, hogy az adatokon változtatunk oly módon, hogy minden c_{ij} értéket beszorzunk (-1)-gyel. Ezek után ugyanúgy kezeljük a feladatot, mint a standard esetben és minimumot keresünk, mindössze annyi a teendőnk, hogy amikor megtaláljuk az optimumot, akkor vissza kell szorozni (-1)-gyel.

Ez azért lehetséges, mert a (-1)-gyel való szorzással elérjük, hogy ami addig a legmagasabb költség volt, az a legkisebb legyen, a legkisebb a legnagyobbá váljon és így tovább. Bár a standard feladatok esetében azt mondtuk,

hogy ne legyen negatív szállítási költség, matematikai szempontból ennek semmi akadálya. Az egyes lépéseket egymás után teljesítve mindenképpen megkapjuk az optimumot függetlenül attól, hogy az egyes költségek milyen előjellel rendelkeznek, hiszen azokat nem változtatjuk az optimum keresése közben.

6. fejezet

Dinamikus szállítási feladatok

A szállítási feladatok sok probléma megoldásának az alapjául szolgálnak, kis átalakítással felhasználhatóak Vagy a problémát lehet visszavezetni a standard feladatra, ahogy azt az előző fejezetben is láttuk, ám ott még csak kisebb változások voltak az alapfeladathoz képest. Ebben a fejezetben olyan problémákat fogunk vizsgálni amik már sokkal összetetebb megoldást kívánnak.

6.1. Átrakodási probléma

Először is vegyük az átrakodási problémákat, amik abban különböznek az alap szállítási feladatoktól, hogy a kínálati helyektől, raktáraktól nem feltétlenül egyenesen a keresleti helyekre szállítjuk az árut, hanem közbeiktatunk egy átrakodási helyet. Ezek az átrakodó helyek lehetnek különbözőek a raktáraktól és a keresleti helyektől, de akár meg is egyezhetnek azokkal. Az átrakodó helyek közbeiktatása ugyan le tudja csökkenteni a szállítási költséget, ugyanakkor komplikált és időigényes lesz a szállítás, viszont néhány esetben muszáj alkalmaznunk. Például ha egy cég szerteágazó területre akarja eljuttatni a termékeit és nincs olyan szállítócég ami lefedné az egészet, akkor kénytelenek beiktatni rakodó helyeket.

Az átrakodási problémát általános szállítási feladatknak is szokták nevezni, azért is, mert könnyen ráilleszthető egy standard szállítási feladat modelljére, és a már megnézett módszerekkel meg is lehet oldani azt. A módszer

ismertetéséhez az [1] és [3] forrásokra fogok támaszkodni.

Mielőtt neki kezdenénk a probléma szállítási feladattá való visszavezetésének, fontos tisztázni néhány dolgot:

- Alapvetően ebben az esetben is van m db kínálati helyünk(R) amikhez tartozik egy-egy a_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ készleti mennyiség, illetve n db keresleti helyünk (K), amikhez a b_j $(j = 1, 2, \ldots n)$ szükségleti értékek tartoznak. Ezeket muszáj kielégíteni.
- Itt is igaz, hogy $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$
- Van r db átrakodási pontunk (A) amikre igaz, hogy mindig ugyanannyi árut szállítanak el onnan, mint amennyit oda szállítanak, ezt az áthaladási értéket jelöljük d-vel.
- A szállítási költségekről két dolgot fontos megjegyezni:
  - Azokon a helyeken ahol semmiképpen nem lehetséges a szállítás két pont között (például egy útlezárás vagy bármi más miatt), ott a c_{ij} értéknek egy nagy $M > 0$ számot választunk, azaz egy olyan nagy pozitív számot, hogy megoldás közben ne érje meg azt az utat választani.
  - Lehetőség van arra, hogy egy helyről saját magába szállítsunk árut. Az ezekhez a hurokélekhez tartozó szállítási költség értéke mindig 0 lesz, a jelentősségére később még visszatérünk.

Az átrakodó pontokon lévő árumozgást előre nem tudjuk megjósolni, de mivel valamit többször ugyanoda szállítani nem gazdaságos, ezért felső korlátnak ideális az össz készletmennyiséget választani, ami egyenlő az össz szükséglet értékével. Tehát jelöljük d-vel azt az értéket amit maximálisan átszállíthatunk az egyes átrakodási pontokon.

$$d = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Már korábban említettük, hogy egy keresleti és egy kínálati hely is lehet átrakodási pont. Éppen ezért igaz, hogy ezt az imént meghatározott d

mennyiséget hozzá kell minden kínálati és keresleti helyhez is rendelni, minek következtében a kínálati helyek készlete $a_i + d$ lesz, a keresleti helyek szükséglete $b_j + d$.

Egy szállítási feladatra akarjuk visszavezetni a feladatot, ahol viszont kizárólag kínálati és keresleti helyek vannak, és így tudjuk majd a táblázatot is kitölteni. Ebben az esetben ez úgy oldható meg, hogy minden hely keresleti *és* kínálati hely *is* azon kívül, hogy átrakodási pont. A keresleti helyek készletkapacitása és a kínálati helyek szükséglete d értékével lesz egyenlő. Valamint az átrakodási pontok szükséglete és kapacitása is d értékű lesz. Ezek után láthatjuk, hogy végül $n + m + r$ kínálati és ugyanennyi keresleti helyet jegyezhetünk.

Az egyes helyszínek közötti szállítási költségek a feladat leírásában adottak. Ahogy említettem már, lehetséges olyan, hogy két helyszín között –akár csak az egyik irányba – nem lehetséges a szállítás, és ilyenkor egy nagyon nagy M számot adunk meg költségnek. Illetve arról is volt szó, hogy a hurokélek, azaz egy helyről a saját magába való szállítás költsége 0. Erre azért van szükség, mert előfordulhat olyan, hogy egy állomáson nem akarjuk átszállítani a teljes d mennyiségű árut, és ekkor ha azt választjuk, hogy sajátmagába szállítjuk az árut, akkor kielégítjük a keresletet és a szükségletet az adott pontban anélkül, hogy növélnénk az össz szállítási költséget, hiszen ez a mennyiség 0-val lesz megszorozva a költségek kiszámításakor.

Ez így egy kicsit bonyolultnak tűnhet szóval vegyünk egy egyszerű példát. Legyen $d = 300$ és legyen a kiválasztott hely az R_i pont, ami alapvetően kínálati hely és $a_i = 10$. Ha 100 mennyiségű árut át akarunk szállítani rajta, és még azt a 10-et is amit „kötelező”, akkor arra jutunk, hogy 200 áru van amit még sehova nem vittünk. Ekkor ha ezt a 200 megmaradt árut úgy jegyezzük fel mint amit önmagába vittünk, akkor a helyhez kötött feltételeknek is eleget teszünk, miközben a $c_{ii} = 0$ költség miatt nem növeltük az össz szállítási költséget.

Most pedig vegyünk egy példát a teljes átrakodási probléma visszavezetésére.

6.1.1. Példa. Legyenek az adatok a szokásos jelölések szerint a következők:

$$m = 2$$
$$a_1 = 30,\ a_2 = 30$$
$$n = 3$$
$$b_1 = 10,\ b_2 = 40,\ b_3 = ,$$
$$r = 4$$

A szállítási költségeket majd közvetlenül a táblázatban jegyezzük fel az adatok sokasága végett.

Ezen adatok alapján egy 9×9-es költségtáblázatunk lesz, hiszen $m + n + r = 9$, illetve:

$$d = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 60$$

A táblázatban a 10. oszlopban és sorban a kapacitást és a keresletet is jelölni fogom.

	R_1	R_2	A_1	A_2	A_3	A_4	K_1	K_2	K_3	kínálat
R_1	0	8	10	4	M	5	2	1	1	90
R_2	3	0	4	6	2	5	0	M	8	90
A_1	3	1	0	4	10	9	7	6	2	60
A_2	M	5	0	0	6	7	8	8	1	60
A_3	2	3	11	9	0	2	4	5	6	60
A_4	8	3	3	2	9	0	10	6	7	60
K_1	7	2	4	2	8	9	0	11	2	60
K_2	3	1	4	M	2	5	6	0	10	60
K_3	9	8	7	6	2	5	10	11	0	60
kereslet	60	60	60	60	60	60	70	100	70	

6.1. táblázat.

Egy így kapott táblázaton már tudjuk alkalmazni az eddig megismert módszereket, de mivel manuálisan végig számolva nagyon időigényes, ezért érdemes valamilyen programba beírva keresni a megoldást. Hiszen csak az előbbi 6.1.1példa minimum-költség módszerrel való megoldása után, az optimum keresésekor minden u és v érték kiszámításához $(m+n+r)\cdot 2$ egyenletet kell megoldanunk, majd $9 \cdot 9 = 81$ egyenlőtlenséget kell leelenőrizni és lehetséges, hogy az optimum megtalálásához tovább kell keresnünk.

6.2. A szállítási idő minimalizálása

Sokszor előfordul, hogy a szállítási költségnél sokkan fontosabb, hogy minél hamarabb leszállítsuk az árukat, méghozzá az összeset. Gondoljunk például egy nagy rendezvényre. Megadott időpontra, az esemény kezdetére ott kell lennie minden felszerelésnek, amiket általában előtte máshol is használnak és sok esetében fontos szempont, hogy minél kevesebb ideig legyenek használaton kívül. Vegyünk például valamilyen árusító bódét. Hiába csökkentik a szállítási költséget, ha ez azzal jár, hogy több ideig nem tudnak árulni, jelentős bevételkiesés fog jelentkezni. Vagy élő állat hosszú utaztatása, szállítása sem kifizetődő, hiszen az állatokat megviseli a hosszú úttal járó bezártság.

Természetesen van mód arra, hogy a költségeket is figyelembe véve találjunk rövidebb időt igénybe vevő szállítási utakat, de mi most kifejezetten az idő minimalizálására szolgáló Szwarc-Hammer algoritmust és annak működését fogjuk vizsgálni [4].

6.2.1. Szwarc-Hammer algoritmus

Az alapok itt is ugyanazok, mint a standard szállítási feladatnál voltak. Ugyanúgy vannak kínálati és keresleti helyek, valamint a hozzájuk tartozó jól megszokott mennyiségek, összefüggések. A különbség annyiból áll, hogy az egyes helyek közti költségeket nem vesszük figyelembe, helyette bevezetünk egy új paramétert. Ez lesz a τ_{ij} ami az i-edik kínálati helyről a j-edik keresleti helyre történő szállítási időt jelzi. Illetve a célfüggvényünk is változik. Mint kifejtettük, nem a költségeket szeretnénk minimalizálni, hanem az összes szállítás idejét, ami egyenlő a legtöbb időt igénybevevő szállítással,

azaz:

$$\min t^* = \{\max(\tau_{ij}) \mid x_{ij} > 0\} \tag{6.1}$$

Maga az algoritmus működése is nagyon hasonlít a standard szállítási feladat optimumának megtalálásához. Először is kell keresnünk egy lehetséges megoldást, vagyis bázismegoldást, amihez tartozni fog egy t aktuális idő. Ez a bázismegoldás elemeihez tartozó legnagyobb szállítási idővel lesz egyenlő. Magát a bázismegoldást a standard feladatok során megismert módszerekkel könnyen megkaphatjuk, csupán a szállítási időre kell ebben az esetben úgy tekinteni, mint akkor a szállítási költségekre.

Ha ezzel megvolnánk, akkor egyetlen elem megváltoztatásával jobb bázismegoldást keresünk. Egy bázismegoldás jobb, ha t értéke csökken, vagy ha a $t = max(\tau_{ij})$-hez tartozó x_{ij} szállítási mennyiség csökken. Utóbbi szempont matematikailag talán egy kissé fölöslegesnek tűnhet, elvégre a végeredményen, az időn nem változtat a szállított mennyiség. De a valóságban hasznos, hiszen így több árut tudunk előbb leszállítani, azokkal már elkezdhetnek esetlegesen dolgozni ha munkaeszközről van szó, vagy biztosabb hogy nem romlik meg, ha romlandó étel a szállított áru. De vissza az algoritmushoz. Jobb bázismegoldás kereséséhez használjuk Hammer 4 lépéses eljárását:

1. Keressük meg azokat az (ij) helyeket, amikre igaz, hogy a hozzájuk tartozó τ_{ij} értéke megegyezik a t értékével, majd ezek közül keressük meg azt amihez a legangyobb x_{ij} érték tartozik és ezt nevezzük x_{kl}-nek. Azaz:

$$x_{kl} = \max(x_{ij} \mid \tau_{ij} = t)$$

2. Legyen az S_{kl} az a halmaz, aminek elemei azok a nem bázis elemek, amiket ha bevennénk a bázisba akkor x_{kl} értéke csökkenne. Egy bázis-elem értékét hasonló logika alapján tudjuk csökkenteni, mint ahogyan a standard feladatok megoldásakor új báziselemet vezettünk be. Most azokat a szabadváltozókat kell bevennünk a halmazba, amelyekre igaz, hogy tudunk belőle olyan magába visszatérő hurkot képezni, aminek a többi csúcsán bázismegolás van és az x_{kl} érték az egyik szomszédos csúcsa. Csak azok a nem bázis elemek jöhetnek szóba amelyek esetében a hozzájuk tartozó τ_{ij} érték kisebb, mint t.

3. Az S_{hk} elemei közül válasszuk ki azt, amelyikhez a legkisebb τ_{ij} érték tartozik, ez legyen a (p, q) hely.

4. Hozzunk létre új báziselemet a (p, q) helyen az előbb említett hurok segítségével. Áramoltassunk minél nagyobb szállítási mennyiséget a (p, q) helyre. Ilyenkor a legnagyobb mennyiség amit áramoltatni tudunk, az a két szomszédos csúcs értékének minimuma. Tehát x_{kl} értéke mindenképpen csökkenni fog. Ha vele megegyező értéket áramoltatunk, akkor teljesen kinullázódik, megszűnik bázismegoldás lenni. Ebben az esetben t értéke is módosulhat.

Ha ezeket a lépéseket végig csináltuk, le kell ellenőriznünk, hogy a kapott t érték optimális-e. Szwarc 2.tétele szerint [5], ha azokhoz az üres cellákhoz amikbe léphetnénk nagyobb vagy egyenlő τ érték tartozik, mint az aktuális megoldásunk, akkor a megoldás optimális. Azaz, ha a az S_{kl} halmazunk üres, akkor készen vagyunk, $t = \min t^*$. Ha nem üres halmaz, akkor folytatnunk kell a lépéseket, tovább kell keresnünk.

Nézzük meg a folyamatot egy példán is.

6.2.1. Példa. A költségek feljegyzésétől eltekintve a következő adatok állnak rendelkezésünkre:

i, j	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
R_1	$\tau_{11} = 10$	$\tau_{12} = 6$	$\tau_{13} = 7$	$\tau_{14} = 3$	$a_1 = 50$
R_2	$\tau_{21} = 2$	$\tau_{22} = 8$	$\tau_{23} = 9$	$\tau_{24} = 1$	$a_2 = 35$
R_3	$\tau_{31} = 8$	$\tau_{32} = 7$	$\tau_{33} = 9$	$\tau_{34} = 6$	$a_3 = 60$
b_j	$b_1 = 50$	$b_2 = 45$	$b_3 = 20$	$b_4 = 30$	

6.2. táblázat.

Az algoritmus lépésenként:

A standard feladatnál használt minimum költség módszert alkalmazva a következő bázismegoldást kapjuk:

	K_1	K_2	K_3	K_4
R_1	-	45	5	-
R_2	5	-	-	30
R_3	45	-	15	-

6.3. táblázat. $t = 9$

$x_{kl} = x_{33}$

$S_{kl} = \{x_{32}\}$

$\min\{\tau_{32}\} = \tau_{32} = 7$

$\min\{x_{33}, x_{12}\} = x_{33} = 15$

$x_{32} = 15,\ x_{33} = 15 - 15 = 0$

$x_{13} = 5 + 15 = 20,$

$x_{12} = 45 - 15 = 30$

$t = 8$

Az áramoltatás után a következő bázismegoldást kapjuk:

	K_1	K_2	K_3	K_4
R_1	-	30	20	-
R_2	5	-	-	30
R_3	45	15	-	-

6.4. táblázat. $t = 8$

$x_{kl} = x_{34}$

$S_{kl} = \{x_{34}\}$

$\min\{\tau_{34}\} = \tau_{34} = 6$

$\min\{x_{31}, x_{24}\} = x_{24} = 20$

$x_{34} = 20,\ x_{31} = 45 - 20 = 25$

$x_{21} = 5 + 20 = 25,$

$x_{24} = 20 - 20 = 0$

$t = 8$

Az újabb áramoltatás után a következő bázismegoldást kapjuk:

	K_1	K_2	K_3	K_4
R_1	-	30	20	-
R_2	35	-	-	-
R_3	15	15	-	15

6.5. táblázat. $t = 8$

$x_{kl} = x_{31}$

$S_{kl} = \{\ \}$

Nem tudunk tovább lépni, megtaláltuk az optimumot.

$\min t^* = 8$

Mivel nem tudjuk tovább csökkenteni sem az időt, sem a szállított mennyiséget a legtöbb időt igényelő útvonalon, az aktuális bázis megoldás az optimális megoldást adja, így:

$$\min t^* = t = 8$$

6.3. Több periodusú szállítási feladat

A problémát Szwarc tanulmányozta illetve Bellmore, Eklof és Nemhauser. A továbbiakban hármojuk megoldását fogjuk vizsgálni és B.E.N. elnevezéssel hivatkozom rá. A [4] forrást használjuk fel.

A probléma abban tér el a standard szállítási feladattól, hogy több szállítási problémát kapcsolunk össze az idő segítségével. Ugyanazon helyek keresletével és kínálatával foglalkozunk, de nem csupán egyszer, hanem egymást követő T alkalommal. Ezért periodikus a feladat.

További változás az eddigeiekhez képest, hogy nem csak a szükségletek kielégítésére van lehetőség egy adott periódusban, hanem a készletek megtartására is. Ezt úgy a legegyszererűbb elképzelni, hogy ha például egy boltba viszünk árut, nem csak akkora mennyiséget szállíthatunk oda amennyit azonnal a polcokra is raknak, hanem a raktárba is helyezhetünk el árut, amit majd a későbbiek folyamán felhasználhatnak. Ez főleg akkor előnyös amikor egy adott időszakban a szállítási költség különösen alacsony, vagy előre látható, hogy a következőkben drágulni fog. Viszont a tárolásnak is vannak költségei, amiket figyelembe kell venni.

Az eddigi jelölések továbbra is érvényesek lesznek, csupán mindegyik kap egy t felső indexet, ami azt fogja jelölni, hogy az adat melyik periódusra érvényes. Ezek mellett új változók bevezetésére is szükség van:

- T: a periódusok száma
- t: az éppen aktuális periódus sorszáma általánosan jelölve, 1 és T közötti egész számokat vehet fel
- d_j^t: a j keresleti helyen a $(t-1)$ és a t periódusok között tárolt egységnyi áru tárolási költsége
- y_j^t: a j keresleti helyen a $(t-1)$ és a t periódusok között tárolt mennyiség

- N_j^t: a j keresleti helyen a $(t-1)$ és a t periódusok között tárololható maximális mennyiség

A feladat megfogalmazható a következő képpen:

$$\min C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{ij}^t x_{ij}^t + \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=2}^{T} d_j^t y_j^t \tag{6.2}$$

Ennek az egyenlőségnek a következő feltételek mellett kell teljesülnie $\forall\ i,\ j,\ t$ esetében:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^t &\leq a_i^t \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^t + y_j^t - y_j^{t+1} &\geq b_j^t \\ x_{ij} &\geq 0 \\ 0 \leq\ y_j^t &\leq N_j^t \end{aligned} \tag{6.3}$$

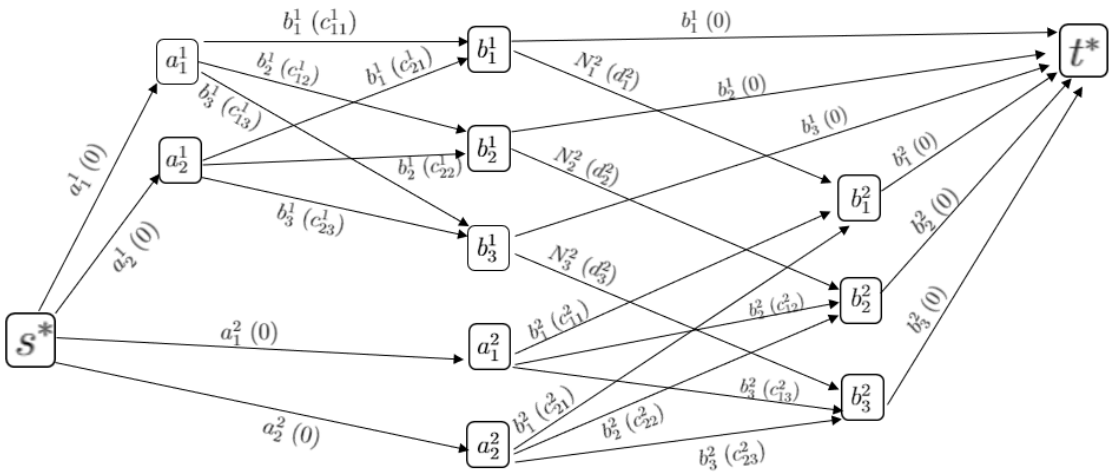
A B.E.N. algoritmus a problémát folyamfeladatként közelíti meg, azaz a minimális költségű folyamot keresi.

Az algoritmus végrehajtásához először is hozzuk létre a hálózatot, amit úgy kell elképzelni, hogy a pontoknak a periódusonkénti helyszínek felelnek meg. Valamint van egy mesterséges s^* forrás és t^* nyelő. Az s^* forrásból mindegyik a_i^t pontba vezet egy irányított él a_i^t értékű kapacitással, az élköltség pedig 0. Illetve minden b_j^t pontból vezet egy irányított él a t^* nyelőbe b_j^t kapacitással és 0 élköltséggel.

Az azonos periódusidejű keresleti és kínálati helyek között irányított él fut a keresleti helyeknek megfelelő pontokba, a kereslet értékével egyenlő kapcitással. Az élköltség a két helyszín közötti szállítási költséggel egyenlő. Ezeken kívül a b_j^t pontokból mutat él a b_j^{t+1} pontokba. Ezeknek az éleknek a kapacitása N_j^{t+1}, a maximálisan raktározható mennyiség értéke. Élköltsége, a raktározás ára, azaz d_j^{t+1}. Ha megfigyeljük az így felépített hálózat a 6.3 feltételeknek elget tesz.

Nézzünk egy példát, ahol $m = 2$, $n = 3$, $T = 2$. Ebben az esetben a

hálózatunk így fog kinézni:



Ha a hálózat megalkotásával, felírásával készen vagyunk, akkor elkezdhetjük megkeresni az optimumot a B.E.N. algoritmus szerint:

1. A hálózatot kiegészítjük 0 kapacitású, végtelen élköltségű élekkel, biztosítva, hogy ezeken az éleken keresztül ne válaszzunk ki utat. Kezdeti folyamértéknek, illetve C összköltségnek pedig 0-át adunk meg.

2. Keressük meg az s^* és a t^* közötti legolcsóbb utat, majd a lehető legnagyobb mennyiséget áramoltassuk rajta, ami az út mentén lévő legkisebb kapacitással egyenlő. Jelöljük ezt a legkisebb értéket k-val.

3. k értékét hozzáadjuk a folyamértékhez. Kiszámoljuk az út költségét, úgy hogy az élköltségeket összeszorozzuk a k értékkel, majd összeadjuk őket. Ezt az összeget hozzáadjuk a C értékhez.

4. Az úthoz tartozó élek kapacitását csökkentem k-val. Ahol a kapacitás 0 lesz, ott az élköltséget végtelenre változtatom. Az út mindegyik éléhez behúzok egy élt fordított irányítással, (-1)-szeres élköltséggel és k kapacitással.

5. A 2. lépéstől addig ismétlem az algoritmust, amíg minden igény nem teljesül. Ha teljesül, megtaláltuk az optimumot

$$\min C = C$$

Irodalomjegyzék

[1] Vassilis Kostoglou, *Transportation and Transshipment Problems*, ELérhető: *https://people.iee.ihu.gr/~vkostogl/en/files/Educational%20material/SGGW_2016/Transportation%20and%20transshipment%20problems_theory.pdf*

[2] Dr. Kulcsár Gyula, *A szállítási feladat megoldása*, Miskolci Egyetem Alkalmazott Informatikai Tanszék, 2013, 7-8.fólia

[3] Dr. Nagy Tamás, *Hálózati folyamok*, Miskolci Egyetem, 14.4-15. fejezet

[4] James H. Bookbinder - Suresh P. Sethi, *The dynamic transportation problem: A survey*, Naval Research Logistics, Volume 27 Issues 1, 1980, 67-70 oldal

[5] Szwarc, *The time transportation problem*, Zastosowania Matematyki Applicationes Mathematicae, 1966, 1-4 oldal