

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

FOLYTONOS MODELLEK NUMERIKUS ÉS ANALITIKUS VIZSGÁLATA

Szakdolgozat

Készítette:

Polyák Dominika

Matematika BSc

Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Dr. Csomós Petra

egyetemi adjunktus

Alkalmazott Analízis és

Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2021

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	1
Bevezetés	2
1. Alapfogalmak	4
1.1. Differenciálegyenletek	4
1.2. Fixpontok	6
1.3. Fázisképek	8
2. Rössler-modell	11
2.1. A modell felírása	11
2.2. Fixpontok meghatározása	11
2.3. A modell vizsgálata	13
3. Tetraciklin a testben	18
3.1. Kompartmentek	18
3.2. A modell felírása	19
3.3. Tetraciklin felszívódása	22
4. Duffing-modell	24
4.1. A Duffing-modell leírása differenciálegyenletek segítségével	24
4.2. Fixpontok meghatározása	26
4.3. A modell numerikus vizsgálata	29
5. Malkus–Lorenz-vízikerék	30
5.1. A modell felírása	31
5.2. Fixpontok meghatározása	31
5.3. A modell vizsgálata	34
Összefoglalás	35
A. A dolgozat során használt Matlab programkódok	39
A.1. A különböző modelleket leíró segéd kód	39
A.2. A negyedrendű Runge–Kutta-módszerhez tartozó kód	40

A.3. Több fázisképet egyszerre kirajzoló kód	44
A.4. Az Explicit-Euler-módszerhez tartozó kód	45

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet konzulensemnek, Dr. Csomós Petrának aki visszaadta motivációm a matematikusi pálya iránt. Hálás vagyok, amiért olyan témát ajánlott a figyelmembe, ami így felkeltette az érdeklődésemet. A konzultációk során hasznos magyarázatokkal, tanácsokkal szolgált és gondosan átnézte a dolgozatomat. Külön köszönöm a rengeteg belém fektetett idejét, energiáját, és azt, hogy személyes találkozás nélkül is közvetlen módon segítette munkámat.

Továbbá szeretném megköszönni középiskolai matematika tanáromnak, hogy megszerettette velem a matematikát, lelkesített és támogatott mind az érettségire való készülés során, mind az egyetemi jelentkezésben.

Hálásan köszönöm a családomnak és barátaimnak, amiért tanulmányaim során mindig feltétel nélkül támogattak, folyamatosan ösztönözték munkámat.

Külön köszönöm vőlegényemnek, hogy egyetemi éveim során végtelen kitartással és szeretettel támogatott céljaim elérésében, és nélkülözhetetlen tanácsaival valamint segítségével hozzájárult a dolgozat megírásához.

Végül szeretném megköszönni az ELTE valamennyi oktatójának, akik tudásukkal és szakértelmükkel segítettek idáig eljutnom és hozzájárultak, hogy a diplomámhoz szükséges tudást elsajátítsam.

Bevezetés

A szakdolgozatom témaválasztását elsősorban a Folytonos modellezés kurzuson bemutatott modellek motiválták. Nagyon különlegesnek tartom, hogy pár differenciálegyenlet segítségével bizonyos feltételek mellett egy jövőbeli időpontra tudunk előrejelzést adni.

Szakdolgozatom egyik célja, hogy bemutassam, hogy a tudomány számos területén találhatunk olyan folyamatokat, amelyeket differenciálegyenletekkel tudunk modellezni, majd vizsgálni és végül előrejelezni. A célom megvalósításához differenciálegyenletek fixpontjait és időbeli megoldásait vizsgálom meg analitikusan és numerikusan.

Az első fejezetben a differenciálegyenlet-rendszerek megértéséhez, illetve azoknak vizsgálatához szükséges alapfogalmakat, definíciókat és tételeket gyűjtöm össze.

A második fejezetben a Rössler-moddellel foglalkozom, amit kémiai reakciók egyensúlyának modellezésére is használnak. Kiszámolom a fixpontjait és meghatározom azok stabilitását, majd bemutatom a káoszra jellemző periódus kettőződést is.

A harmadik fejezetben a kompartment rendszerek működésével foglalkozom, majd ehhez kapcsolódóan egy biológiához tartozó modellt vizsgálom meg, ahol a tetraciklin mozgását figyeljük meg a bélrendszerben, a véráramban és a vizeletrendszerben. Ennek a rendszernek analitikusan kiszámolom a pontos megoldását. A következő részben két feladatot oldok meg szintén analitikusan, majd numerikus módszerrel készített ábrával illusztrálom eredményeimet.

A negyedik fejezetben a Duffing-moddellel foglalkozom, ami egy kocsiban elhelyezett test pozícióját vizsgálja. A testet különböző, fizikában ismert erőhatások érik, mint például a kocsit mozgató excenter vagy a test mellé rögzített rugó. Ezeket a tényezőket külön összeírom, majd ezek összegének segítségével megkapom a keresett egyenletrendszert. Ahhoz, hogy a modell autonóm rendszer legyen, elhagytam belőle egy tagot, és az így kapott rendszernek kiszámoltam a fixpontjait. Majd összehasonlítottam az így kapott, illetve az eredeti rendszer megoldását és fázisképét.

Az ötödik fejezetben a Malkus–Lorenz-vízikerékkel foglalkozom. Ennek a vízikeréknek a mozgását a Lorenz-egyenletek szabályozzák. Míg a klasszikus vízikerék egy irányban, állandó sebességgel forog, a Malkus vízikerék kaotikus mozgást mutat, ahol forgása ki-

számíthatatlan módon felgyorsul, lelassul, leáll, irányt vált és előre-hátra ingadozik. Itt szintén kiszámolom a fixpontokat, majd megvizsgálom, milyen feltételek szükségesek a kerék mozgásához, illetve megnézem, hogyan viselkedik a modell, ha a fixpontot adom meg kezdeti értéknek.

A függelékben megatálalhatóak a MATLAB kódjaim, amik segítségével az ábrákat készítettem. A numerikus kísérlethez az általam írt negyedrendű Runge–Kutta módszert használtam.

1. fejezet

Alapfogalmak

Ebben a fejezetben azokat a fogalmakat, tételeket és definíciókat szedjük össze, amelyekre későbbiekben szükség lesz a modellek vizsgálatánál. A tételek és állítások bizonyításaira nem térek ki ebben a részben, de ezek mind megtalálhatók a megadott forrásokban.

1.1. Differenciálegyenletek

Ebben a részben a Differenciálegyenletek órán írt jegyzeteimet [8], és Simon Péter, Tóth János: Differenciálegyenletek [9] könyvét használtam fel.

1.1.1. Definíció. Az olyan egyenleteket, amelyekben az ismeretlen függvény és annak deriváltjai között áll fenn valamilyen kapcsolat, differenciálegyenletnek nevezzük.

1.1.2. Definíció. Közöséges differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük azokat a differenciálegyenlet-rendszereket, melyben az ismeretlen függvény egyváltozós.

Legyen $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ képező folytonos függvény, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ képező folytonosan differenciálható függvény. Ekkor az

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), t \geq 0 \quad (1.1)$$

egyenletet közöséges differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük.

1.1.3. Definíció. Az explicit n -ed rendű közöséges differenciálegyenletek általános alakja:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (1.2)$$

Ahol az $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartományon, az ismeretlen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pedig valamilyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett n -szer folytonosan differenciálható függvény.

1.1.4. Tétel. (Átviteli elv)

Minden explicit n -ed rendű differenciálegyenlet megfeleltethető egy n ismeretlenes differenciálegyenlet-rendszernek úgy, hogy az előző megoldása megegyezik az utóbbi megoldásával.

Legyen ugyanis $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ az (1.2) n -edrendű differenciálegyenlet-rendszer megoldása, és vezessük be az alábbi $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ új függvényeket:

$$\begin{cases} y_1(t) = y(t) \\ y_2(t) = \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

Vegyük észre az alábbi összefüggéseket:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = \dot{y}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n-1}(t)) \end{cases}$$

Ekkor az $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ új függvények bevezetésével (1.1) alakot kapjuk:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad F(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n-1}(t)) \end{pmatrix}.$$

1.1.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a második változójában Lipschitz-folytonos a D halmazon, ha létezik olyan $L > 0$, hogy $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$ teljesül minden $(x, y), (x, \tilde{y}) \in D$ esetén.

1.1.6. Tétel. (Picard–Lindelöf-féle egzisztenciátétel)

Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amely a második változójában Lipschitz-folytonos. Ekkor minden $(x_0, y_0) \in D$ ponthoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy az $\dot{y}(x) = f(x, y(x))$ egyenletnek pontosan egy y megoldása tesz eleget az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételnek az $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ intervallumon.

1.2. Fixpontok

Ebben a fejezetben a Folytonos modellezés órán [2] és az Alkalmazott analízis előadáson [4] írt jegyzeteimet használtam fel.

1.2.1. Definíció. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy összefüggő nyílt halmazon értelmezett, Lipschitz-folytonos függvény, ahol $D \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \quad (1.3)$$

egyenletrendszert autonóm differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük.

Tehát egy differenciálegyenlet-rendszer autonóm, ha a t változó csak az y ismeretlen függvény és a deriváltja változójaként jelenik meg az egyenletben.

1.2.2. Definíció. Az $y^* \in \mathbb{R}^n$ vektort az (1.3) autonóm differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi pontjának, egyensúlyi helyzetének vagy fixpontjának nevezzük, ha $y(t) = y^*$ konstans függvény az (1.3) egyenlet megoldása minden $t > 0$ esetén, azaz $f(y^*) = 0$.

1.2.3. Definíció. Az (1.3) alakú autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszer $y^* \in \mathbb{R}^n$ fixpontját

- stabilnak nevezzük, ha $\forall \epsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $\|y_0 - y^*\| < \delta$ esetén $\|y(t) - y^*\| < \epsilon$ teljesül minden $t \geq 0$ esetén;
- aszimptotikusan stabilnak nevezzük, ha stabil és $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*$;
- instabilnak nevezzük, ha nem stabil;

Az 1.2.3. Definíció alapján az fixpontok stabilitásának meghatározása nagyon sok számolással járna, ezért ezt egy másik módszerrel, sajátékékek segítségével tudjuk vizsgálni.

1.2.4. Jelölés. A Jacobi-mátrix egy vektorértékű függvény elsőrendű parciális deriváltjait tartalmazó mátrix. Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény egyes komponensei:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Ezen n darab n -változós függvény parciális deriváltjaiból egy $n \times n$ -es mátrixot képezhetünk:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ezt hívjuk Jacobi-mátrixnak.

1.2.5. Definíció. Legyen A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

valamely $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ számokra, ahol $i, j = 1, 2, \dots, n$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az A mátrix karakterisztikus polinomján a

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

polinomot értjük, ahol \det és $|\cdot|$ a mátrix determinánsát jelöli.

1.2.6. Definíció. Egy $\lambda \in \mathbb{C}$ skalárt az $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $v \in \mathbb{C}^n$ nemnulla vektor, melyre $Av = \lambda v$ teljesül. Az ilyen v vektorokat az A mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorának nevezzük. Ezen vektorok és a nullvektor által alkotott alteret pedig a λ sajátvektorhoz tartozó sajátaltérnek hívjuk.

1.2.7. Állítás. Az A mátrix sajátértékeit úgy határozhatjuk meg, hogy a mátrix karakterisztikus polinomját nullával tesszük egyenlővé.

1.2.8. Állítás. A λ_i -hez tartozó sajátvektorokat ezek alapján az

$$(A - \lambda_i I) \cdot v = 0$$

egyenletből számíthatjuk ki.

1.2.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adott függvény, valamint legyenek $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^n$ olyanok, melyekre $(t_0, y_0) \in D(f)$. Azt mondjuk, hogy a (1.1) differenciálegyenlet-rendszer y megoldása teljesíti az $y(t_0) = y_0$ kezdeti feltételt, ha a differenciálegyenlet-rendszer teljesül minden $t \in D(y)$ esetén és $y(t_0) = y_0$.

1.2.10. Tétel. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kétszer folytonosan differenciálható, és $y^* \in \mathbb{R}^*$ fixpontja a következő feladatnak:

$$\dot{y} = f(y).$$

Ekkor ha az $f'(y^*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix λ_i sajátértékeire

- $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ teljesül $\forall i$ esetén, akkor az y^* fixpont aszimptotikusan stabil,
- $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ teljesül $\forall i$ esetén és λ_i egyszeres gyök $\forall i$ esetén, akkor az y^* fixpont stabil.
- létezik legalább egy λ_i sajátérték, melyre $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, akkor instabil.

1.3. Fázisképek

Ebben a részben a Differenciálegyenletek kurzus során írt jegyzeteimet [8], illetve Freud Róbert: Lineáris algebra című könyvét [11] használtam fel.

1.3.1. Definíció. Az 1.2.1. Definíció alapján, az $n = 2$, akkor a rendszert kétdimenziós autonóm egyenletrendszernek nevezzük:

$$\dot{y}(t) = f(y(t)),$$

ahol $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ összefüggő nyílt halmazon értelmezett függvény. Ha f koordinátafüggvényeit P és Q jelöli, akkor:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = P(y_1(t), y_2(t)) \\ \dot{y}_2(t) = Q(y_1(t), y_2(t)) \end{cases} \quad (1.4)$$

ahol $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények.

1.3.2. Megjegyzés. Az $(y_1, y_2) \mapsto (P(y_1, y_2), Q(y_1, y_2)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvényt síkbeli vektormezőnek hívjuk. Ez a vektormező meghatározza a kétdimenziós rendszer megoldásait, és így annak pályáit is. Minden (y_1, y_2) pontban a $(P(y_1, y_2), Q(y_1, y_2))$ vektor az (y_1, y_2) pontra illeszkedő pálya érintővektora.

1.3.3. Definíció. Az $\dot{y}(t) = f(y(t))$ autonóm differenciálegyenlet fázisképének nevezzük a $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ halmazt, benne a pályákkal, és azokon való haladási iránnyal. A $D(f)$ halmaz neve fáziskép, amit a $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ esetén fázissíknak, $D(f) \subset \mathbb{R}$ esetén fázisegyenesnek mondunk.

1.3.4. Következmény. Kétdimenziós esetben az (1.4) rendszer $y^* \in \mathbb{R}^2$ fixpontjának típusát a 2×2 -es Jacobi-mátrix sajátértékei adják meg, ha a sajátértékekre teljesül, hogy $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial y_2} & \frac{\partial P}{\partial y_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial y_1} & \frac{\partial Q}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

Ekkor az $y^* \in \mathbb{R}^2$ fixpont

- stabil csomó, ha $\lambda_1, \lambda_2 < 0$,
- instabil csomó, ha $\lambda_1, \lambda_2 > 0$,
- nyeregpont, ha $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$,
- stabil fókusz, ha $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ és $\alpha < 0$,
- instabil fókusz, ha $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ és $\alpha > 0$,
- centrum, ha $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$

valamely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számok esetén, ahol az i a képzetes egységet jelöli.

1.3.5. Tétel. Az 1.3.4. Következmény n -dimenziós esetben:

- ha minden λ_i sajátérték esetén $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, akkor a fixpont aszimptotikusan stabil,
- ha létezik olyan λ_i sajátérték amelyre $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, akkor a fixpont instabil.

1.3.6. Állítás. A (1.4) rendszer esetén a fixpontok típusát meghatározhatjuk anélkül is, hogy a sajátértékeket kiszámolnánk. Ha ugyanis

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

akkor

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \operatorname{Tr} A \cdot \lambda + \det A,$$

ahol a $\operatorname{Tr} A$ az A mátrix nyoma, azaz a főátlóbeli elemek összege, $\det A$ pedig a determinánsa.

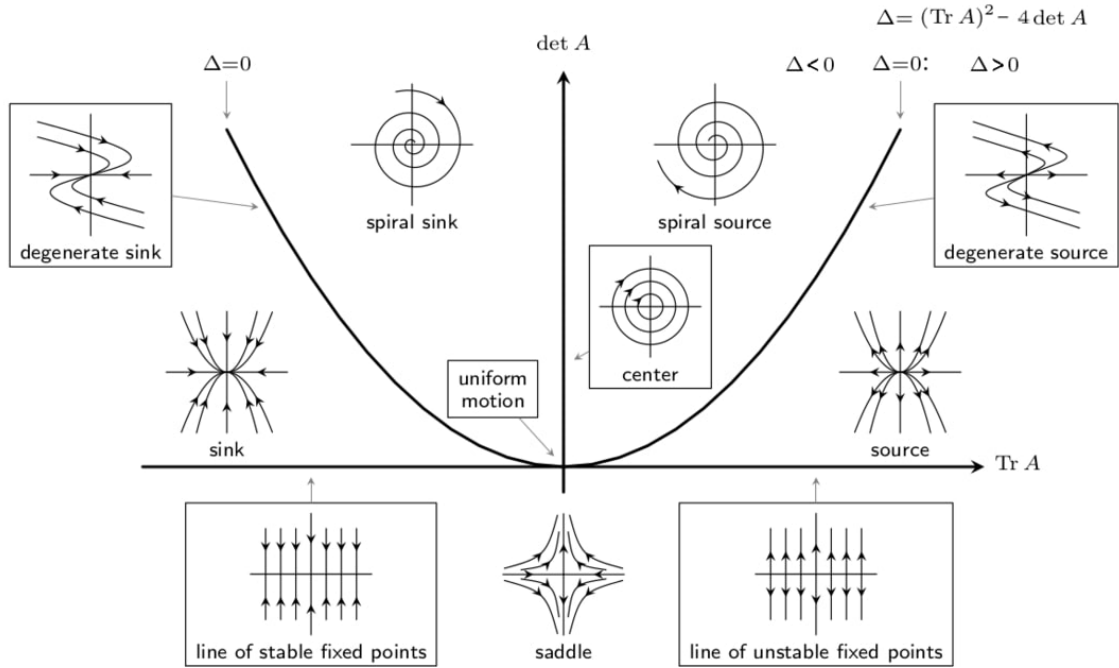
A sajátértékek ekkor:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{Tr} A \pm \sqrt{\operatorname{Tr}^2 A - 4 \det A}}{2}.$$

1.3.7. Állítás. A (1.4) rendszer fixpontjára az alábbiak érvényesek:

- nyeregpont, ha $\det A < 0$,
- centrum, ha $\det A > 0, \text{Tr } A = 0$,
- stabil csomó, ha $\det A > 0, \text{Tr } A < 0$ és $\text{Tr}^2 A > 4 \det A$,
- instabil csomó, ha $\det A > 0, \text{Tr } A > 0$ és $\text{Tr}^2 A > 4 \det A$,
- stabil fókusz, ha $\det A > 0, \text{Tr } A < 0$ és $\text{Tr}^2 A < 4 \det A$,
- instabil fókusz, ha $\det A > 0, \text{Tr } A > 0$ és $\text{Tr}^2 A < 4 \det A$.

Az 1.1. ábrán látszik, hogy hogyan néz ki a fixpont típusa a $(\det A, \text{Tr } A) \in \mathbb{R}^2$ síkon.



1.1. ábra. Poincaré diargam. Ezt az ábrát a [20] oldalon találtam.

2. fejezet

Rössler-modell

Ebben a fejezetben a [16], és a [15] oldal volt segítségemre.

2.1. A modell felírása

Rössler Ottó német biokémikus 1976-ban egy olyan, a Lorenz-attraktorhoz hasonló egyenletrendszert írt fel, amely szintén kaotikus viselkedést mutat, de annál sokkal egyszerűbben vizsgálható. Ezeket az egyenleteket később kémiai reakciók egyensúlyának modellezésére is használták.

Legyenek a differenciálegyenletek a következők, ha $x(t), y(t), z(t) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) - a \cdot y(t) \\ \dot{z}(t) = b + z(t)(x(t) - c) \end{cases}$$

ahol $a > 0$, $b > 0$ és $c > 0$ konstans paraméterek.

2.2. Fixpontok meghatározása

Az 1.2.2. Definíció segítségével kiszámolhatjuk a fixpontokat.

Ehhez oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 0 = -y^* - z^* & \rightarrow z^* = -y^* \\ 0 = x^* - a \cdot y^* & \rightarrow x^* = a \cdot y^* \\ 0 = b + z^*(x^* - c) & \rightarrow 0 = b + a \cdot (y^*)^2 + c \cdot y^* \end{cases}$$

A harmadik egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével könnyedén megoldhatjuk, majd a megoldást behelyettesítve az első és második egyenletbe a következő fixpontokat kapjuk:

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \\y^* &= -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \\z^* &= \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\end{aligned}$$

Behelyettesítjük Rössler eredeti paraméereit: $a = 0,2$, $b = 0,2$ és $c = 5,7$:

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{5,7 \pm \sqrt{5,7^2 - 4 \cdot 0,2 \cdot 0,2}}{2} \\y^* &= -\frac{5,7 \pm \sqrt{5,7^2 - 4 \cdot 0,2 \cdot 0,2}}{2 \cdot 0,2} \\z^* &= \frac{5,7 \pm \sqrt{5,7^2 - 4 \cdot 0,2 \cdot 0,2}}{2 \cdot 0,2}\end{aligned}$$

Így a fixpontok közelítőleg a következők lesznek:

$$Y_+^* = (5,6929737, -28,4648689, 28,4648689) \quad (2.1)$$

$$Y_-^* = (0,0070262, -0,0351310, 0,0351310) \quad (2.2)$$

Az f függvény Jacobi-mátrixa az 1.2.4. Definíció szerint a következő:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix}$$

A sajátértékeket az 1.2.7. Tétel alapján számoljuk ki:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & a - \lambda & 0 \\ z & 0 & x - c - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(x - c + a) + \lambda(ac - ax - z - 1) + az + x - c = 0.$$

Ennek megoldásaiba is behelyettesítjük Rössler paraméereit. Ha a gyök alatti tényező előtt pozitív előjel áll, akkor a következők lesznek az eredmények:

$$\lambda_1 = 0,0971028 + 0,995786i$$

$$\lambda_2 = 0,0971028 - 0,995786i$$

$$\lambda_3 = -5,68718$$

Az 1.3.5 Tétel alapján a (2.1) fixpont instabil, mert van olyan sajátértéke, amelynek a valós része pozitív. Jelen esetben a λ_1 , és a λ_2 is ilyen.

Negatív előjellel pedig ezek lesznek:

$$\bar{\lambda}_1 = 0,0000046 + 5,4280259i$$

$$\bar{\lambda}_2 = 0,0000046 - 5,4280259i$$

$$\bar{\lambda}_3 = 0,1929830$$

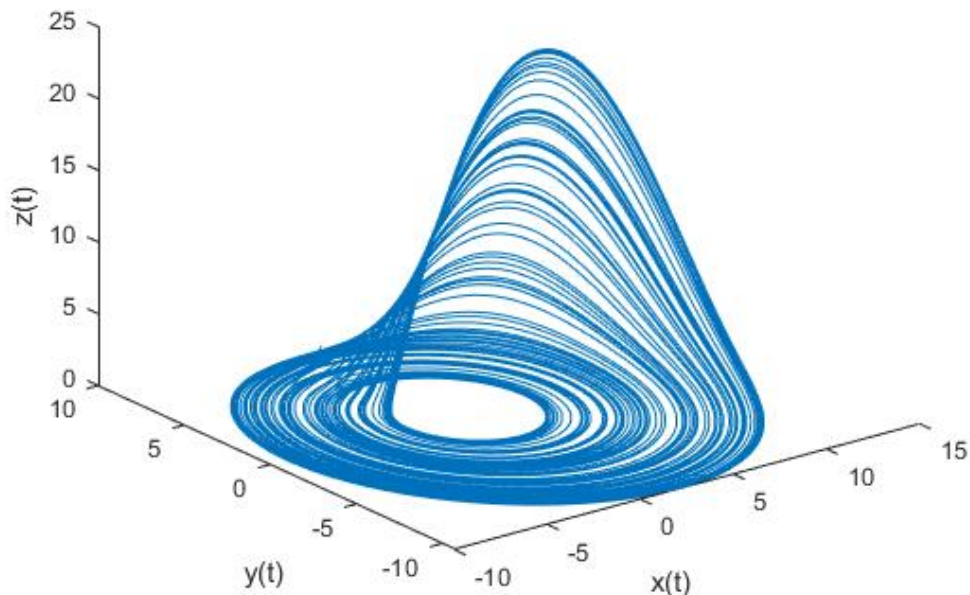
Az 1.3.5. Tétel alapján ez a (2.2) fixpont is instabil. Itt mindegyik sajátérték pozitív valós résszel rendelkezik.

2.3. A modell vizsgálata

A MATLAB programban megírtam a negyedrendű Runge–Kutta (RK4) módszert, illetve az explicit–Euler-módszert is. Mivel a Runge–Kutta módszer jobb eredményt ad, ezért minden ábrát ezzel a módszerrel készítettem el.

A numerikus módszerek és az ábrák kódjai a Függelékben megtalálhatóak.

Rössler modell a=0.2 b=0.2 c=5.7 paraméterekkel

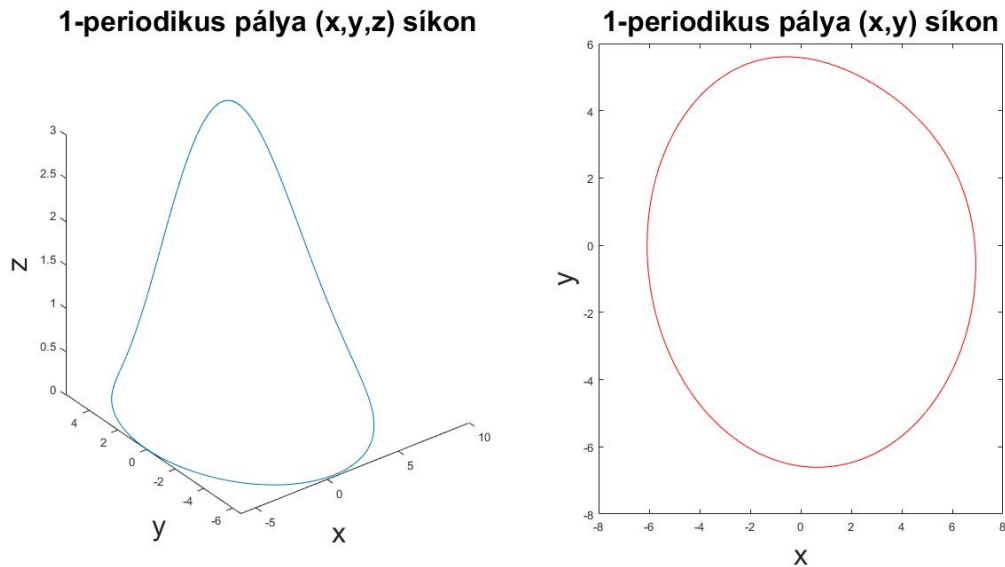


2.1. ábra. A Rössler-modell megoldása

A következő hat ábra azért érdekes, mert az ilyen kaotikus viselkedést mutató rendszerekben megfigyelhető a perióduskettőződés, hogy ha az egyik paramétert változtatjuk.

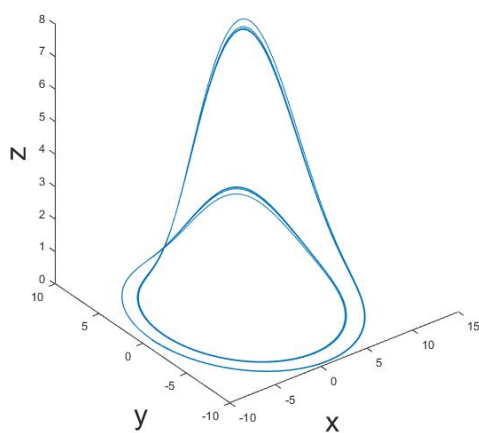
Az a és b paramétereket rögzítjük: $a = 0,1$ és $b = 0,1$, a c -t pedig változtatjuk.

- A 2.2. ábrán $c = 4$, a kezdeti értékek pedig $(x_0, y_0, z_0) = (-6,081, 0, 0)$.
- A 2.3. ábrán $c = 6$, a kezdeti értékek pedig $(x_0, y_0, z_0) = (-9, 0, 0)$.
- A 2.4. ábrán $c = 12$, a kezdeti értékek pedig $(x_0, y_0, z_0) = (-9, 8, 0, 0)$.
- A 2.5. ábrán $c = 8,5$, a kezdeti értékek pedig $(x_0, y_0, z_0) = (-9, 0, 0)$.
- A 2.6. ábrán $c = 12,6$, a kezdeti értékek pedig $(x_0, y_0, z_0) = (-10, 0, 0)$.
- A 2.7. ábrán $c = 9$, a kezdeti értékek pedig $(x_0, y_0, z_0) = (-10, 0, 0)$.

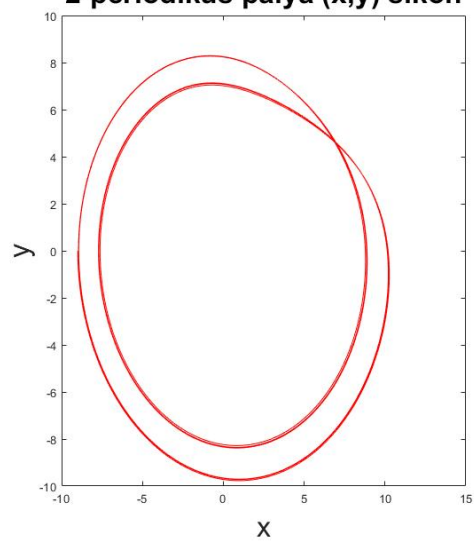


2.2. ábra. 1-periodikus pálya

2-periodikus pálya (x,y,z) síkon

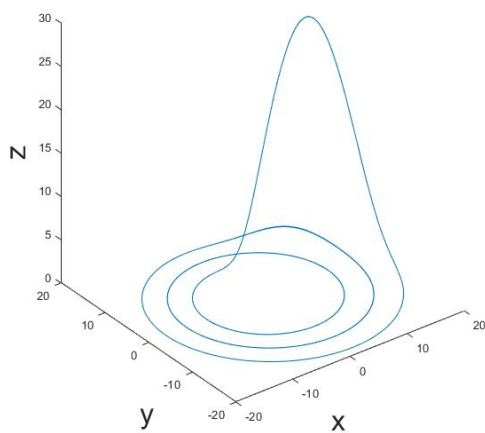


2-periodikus pálya (x,y) síkon

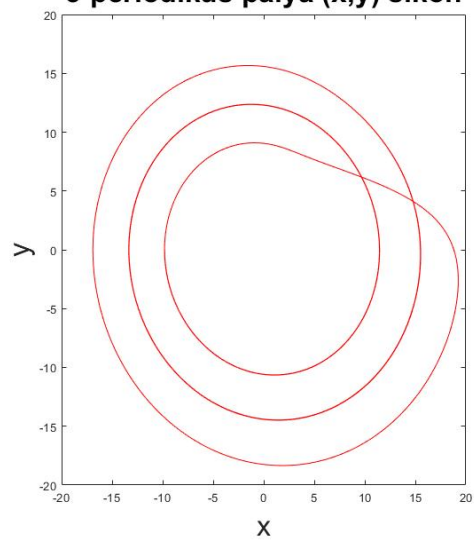


2.3. ábra. 2-periodikus pálya

3-periodikus pálya (x,y,z) síkon

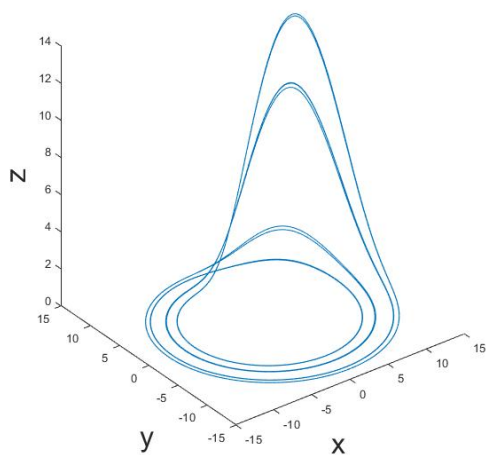


3-periodikus pálya (x,y) síkon

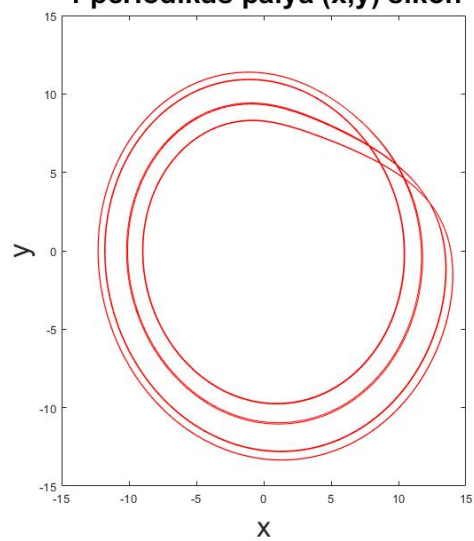


2.4. ábra. 3-periodikus pálya

4-periodikus pálya (x,y,z) síkon

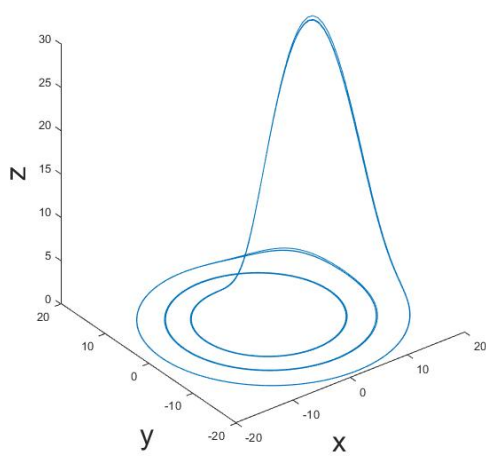


4-periodikus pálya (x,y) síkon

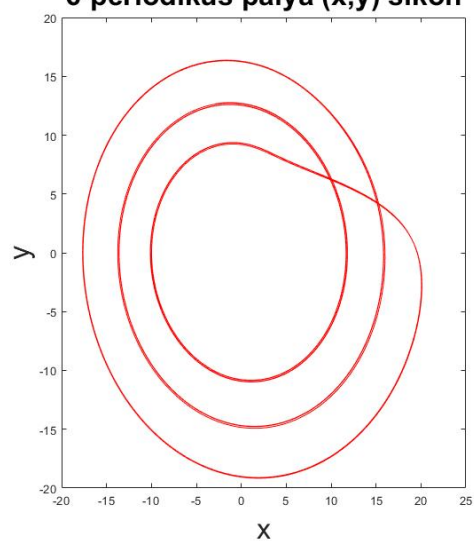


2.5. ábra. 4-periodikus pálya

6-periodikus pálya (x,y,z) síkon

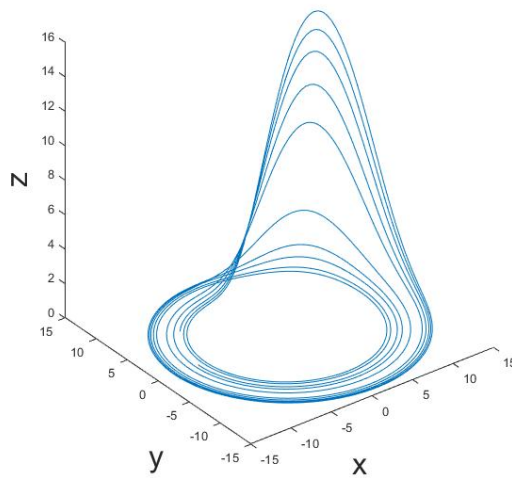


6-periodikus pálya (x,y) síkon

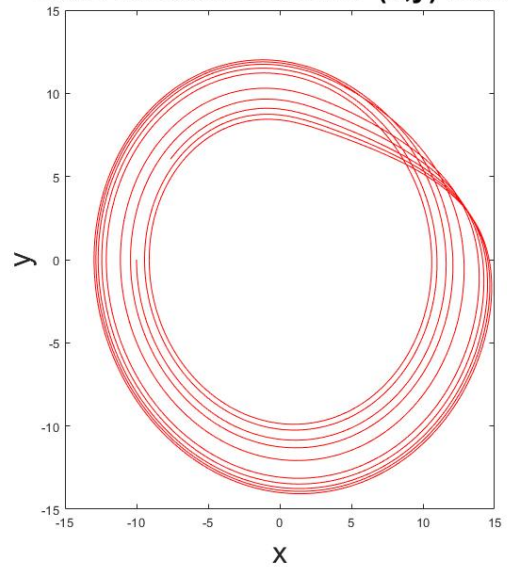


2.6. ábra. 6-periodikus pálya

Ritka kaotikus attraktor (x,y,z) síkon



Ritka kaotikus attraktor (x,y) síkon



2.7. ábra. Ritka kaotikus attraktor

A fázistér azon pontjainak a halmazát, melyhez a trajektóriák konvergálnak, attraktornak nevezzük. Több típusa is létezik az attraktoroknak. A 2.7 ábrán egy Kaotikus-attraktort láthatunk. A fázistérnek olyan részhalmazát nevezzük így, amelyen belül a mozgás nem ismétli önmagát, azaz a görbén nem jelölhető pontosan ismétlődő szakasz. Ez a kaotikus viselkedés determinisztikus, ami azt jelenti, hogy azonos kiindulási állapotból indulva mindig azonos megoldást kapunk.

3. fejezet

Tetraciklin a testben

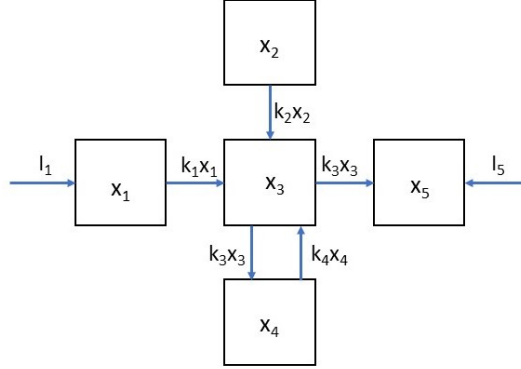
Hasonló témával már Gondos Eszter is foglalkozott a szakdolgozatában [6]. Ebben a fejezetben én a [1] könyvben talált feladatot fogom megoldani.

3.1. Kompartmentek

Először is a model felépítésének megértéséhez fontos a kompartment-modellek ismerete. Alapvetően pár véges számú dobozt kell elképzelnünk, amelyek nyilakkal jelölt folyamatokkal vannak összekötve. Az $i - 1$ -edik dobozból i -edik dobozba mutató nyíl azt jelenti, hogy az anyag kilép az $i - 1$ -edik rekeszből, és ugyanilyen sebességgel érkezik az i -edik rekeszbe. Azokat a nyilakat, amelyek nem egy másik rekeszből mutatnak, azok egy külső forrásból jönnek. Ezeket a nyilakat I -vel jelöljük, ahol az I a az anyag bemeneti aránya. Ahol pedig ezzel ellentétben egy nyíl az egyik dobozból kifelé mutat, az kilép a rendszerből.

A kompartment-modell lineáris, ha az anyag a bokszban lévő mennyiséggel arányos sebességgel lép ki egy dobozból. Tehát egy lineáris rekeszmodellben $x_i \cdot k_i(t)$ sebességgel lép ki az anyag az i -edik dobozból t időpontban minden i esetén, ahol a k_i pozitív konstans és $x_i(t)$ a dobozban lévő mennyiség a t időpillanatban.

A 3.1. ábrán egy példa szerepel erre. Ebben az esetben a következő lineáris differenciálegyenlettel fejezhető ki a mennyiségek áramlása az idő függvényében:



3.1. ábra. Példa 5-rekeszes kompartment modellre

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = I_1 - k_1 \cdot x_1 \\ \dot{x}_2 = -k_2 \cdot x_2 \\ \dot{x}_3 = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 - k_3 \cdot x_3 + k_4 \cdot x_4 - k_3 \cdot x_3 \\ \dot{x}_4 = k_3 \cdot x_3 - k_4 \cdot x_4 \\ \dot{x}_5 = k_3 \cdot x_3 + I_5 \end{cases}$$

3.2. A modell felírása

A következő modellben a tetraciklin testben való terjedését vizsgáljuk. Ezt az antibiotikumot pattanásokra, aknéra, légúti fertőzésekre, tüdőgyulladásra és egyéb panaszokra írják fel. A gyógyszert szájon át szedik, a bél falon keresztül felszívódik a véráramba, végül a vese eltávolítja a vérből és kiválasztódik.

Az $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ változók a tetraciklin mennyiségét milligramm/köbcentiméterben adják meg a $t \geq 0$ időpontban. Az $x(t)$ a bélrendszerben, az $y(t)$ a véráramban és a $z(t)$ a vizeletrendszerben.

Ezeket a folyamatokat elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerrel szokták modellezni.

Tekintsük a modellt leíró egyenleteket, ahol $x(t), y(t), z(t) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények:

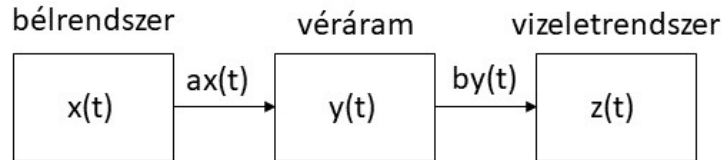
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) \\ \dot{y}(t) = ax(t) - by(t) \\ \dot{z}(t) = by(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

és $a > 0$, $b > 0$ és $c > 0$ meghatározott konstans paraméterek. Utóbbiak értékét a gyakorlatban a biológusok tudják meghatározni kísérletekből, a következő fejezetben mi is fogunk neki adni értékeket.

A kezdeti értékek pedig valamely $x_0 > 0$ érték mellett:

$$x(0) = x_0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad z(0) = 0.$$

A (3.1) rendszernek megfelelő kompartment modell a 3.2 ábrán látható.



3.2. ábra. 3-rekeszes kompartment modell ábrája

A (3.1) differenciálegyenlet-rendszert analitikusan is meg tudjuk oldani.

Az első egyenlet egy szétválasztható egyenlet, amelyet a következőképp oldunk meg:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax(t) \\ \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} &= -a \\ \ln x(t) &= -at + c \\ x(t) &= e^{-at} \cdot c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

Amely $x(0) = x_0$ kezdeti feltétellel:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-at}.$$

Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe, és az állandók variálásával oldjuk meg:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cdot e^{-at} \\ \dot{y}(t) &= a \cdot x(t) - b \cdot y(t) = a \cdot x_0 \cdot e^{-at} - b \cdot y(t). \end{aligned}$$

A homogén egyenlet megoldása a következő:

$$\begin{aligned}\dot{y}_h(t) &= -b \cdot y(t) \\ \frac{\dot{y}_h(t)}{y_h(t)} &= -b \\ \ln y(t) &= -bt + c \\ y_h(t) &= e^{-bt} \cdot c.\end{aligned}$$

A partikuláris megoldást a következő alakban keressük:

$$y_p(t) = e^{-bt} \cdot c(t).$$

Ekkor az inhomogén egyenlet megoldása behelyettesítés után:

$$\begin{aligned}\dot{y}_p(t) &= (e^{-bt} \cdot c(t))' = -b \cdot e^{-bt} \cdot c(t) + e^{-bt} \cdot \dot{c}(t) = a \cdot x_0 \cdot e^{-at} - b \cdot y(t) \\ e^{-bt} \cdot \dot{c}(t) &= a \cdot x_0 \cdot e^{-at} \\ \dot{c}(t) &= a \cdot x_0 \cdot e^{(b-a)t} \\ c(t) &= \frac{a \cdot x_0}{b-a} \cdot e^{(b-a)t} \\ y_p(t) &= e^{-bt} \cdot \frac{a \cdot x_0}{b-a} \cdot e^{(b-a)t} = \frac{a \cdot x_0}{b-a} \cdot e^{-at} \\ y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = e^{-bt} \cdot c + \frac{a \cdot x_0}{b-a} \cdot e^{-at}.\end{aligned}$$

Az előre megadott $y(0) = 0$ kezdeti feltétellel:

$$\begin{aligned}c &= -\frac{a \cdot x_0}{b-a} \\ y(t) &= \frac{a \cdot x_0}{b-a} \cdot (e^{-at} - e^{-bt})\end{aligned}$$

A harmadik egyenletet megoldását a következőképpen kapjuk.

Behelyettesítjük az imént megkapott $y(t)$ -t:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= b \cdot y(t) = b \cdot \frac{a \cdot x_0}{b-a} \cdot (e^{-at} - e^{-bt}) \\ z(t) &= \frac{b \cdot a \cdot x_0}{b-a} \cdot \left(\frac{e^{-at}}{-a} - \frac{e^{-bt}}{-b} \right) + c = -\frac{b \cdot a \cdot x_0}{b-a} \cdot \left(\frac{e^{-at}}{a} - \frac{e^{-bt}}{b} \right) + c.\end{aligned}$$

A $z(0) = 0$ kezdeti értékkel:

$$\begin{aligned}z(0) = 0 &= -\frac{b \cdot a \cdot x_0}{b-a} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + c = \\ c &= \frac{b \cdot a \cdot x_0}{b-a} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{b \cdot a \cdot x_0}{b-a} \cdot \left(\frac{b-a}{a \cdot b} \right) = x_0 \\ z(t) &= -\frac{b \cdot a \cdot x_0}{b-a} \cdot \left(\frac{e^{-at}}{a} - \frac{e^{-bt}}{b} \right) + x_0.\end{aligned}$$

Tehát a (3.1) egyenletrendszer megoldása a következő:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cdot e^{-at} \\ y(t) = \frac{a \cdot x_0}{b - a} \cdot (e^{-at} - e^{-bt}) \\ z(t) = -\frac{b \cdot a \cdot x_0}{b - a} \cdot \left(\frac{e^{-at}}{a} - \frac{e^{-bt}}{b} \right) + x_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

3.3. Tetraciklin felszívódása

3.3.1. Feladat. Kísérletek kimutatták, hogy $a = 0,72$ és $b = 0,15$. Mutassuk meg, hogy $x_0 = 0,0001$ kezdeti érték esetén a véráramban a tetraciklin mennyisége a bélből történő felszívódás után körülbelül 2,75 órával éri el a maximumot.

Mivel a pontos megoldásfüggvényeket már meghatároztuk, így ki tudjuk számolni, hogy hol van az $y(t)$ függvény maximuma.

A (3.2) képletbe behelyettesítjük az $a = 0,72$, $b = 0,15$ és $x_0 = 0,0001$ értékeket:

$$y(t) = \frac{0,72 \cdot 0,0001}{0,15 - 0,72} \cdot (e^{-0,72 \cdot t} - e^{-0,15 \cdot t}). \quad (3.3)$$

Ennek a függvénynek ott lesz a maximuma, ahol a deriváltja 0.

A (3.1) képlet szerint:

$$\dot{y}(t) = a \cdot x(t) - b \cdot y(t) = 0,$$

majd ezekbe szintén behelyettesítjük a (3.2)-ből az $x(t)$ függvényt, a (3.3)-ból az $y(t)$ függvényt, illetve az a, b és x_0 paraméterek értékeit is:

$$\dot{y}(t) = a \cdot x(t) - b \cdot y(t) = 0,7 \cdot \left(\frac{e^{-0,72}}{10000} \right) - 0,15 \left(\frac{0,72 \cdot 0,0001}{0,15 - 0,72} \cdot (e^{-0,72 \cdot t} - e^{-0,15 \cdot t}) \right) = 0.$$

A szorzásokat elvégezve a következőt kapjuk:

$$\frac{27}{296875} \cdot e^{-0,72 \cdot t} = \frac{9}{475000} \cdot e^{-0,15 \cdot t},$$

amire a természetes alapú logaritmust alkalmazzuk:

$$\ln \left(\frac{27}{296875} \cdot e^{-0,72 \cdot t} \right) = \ln \left(\frac{9}{475000} \cdot e^{-0,15 \cdot t} \right)$$

Ez a logaritmus szabályai szerint a következővel lesz egyenlő:

$$\ln 27 - \ln 296875 - \ln e^{0,72} = \ln 9 - \ln 475000 - \ln e^{0,15}$$

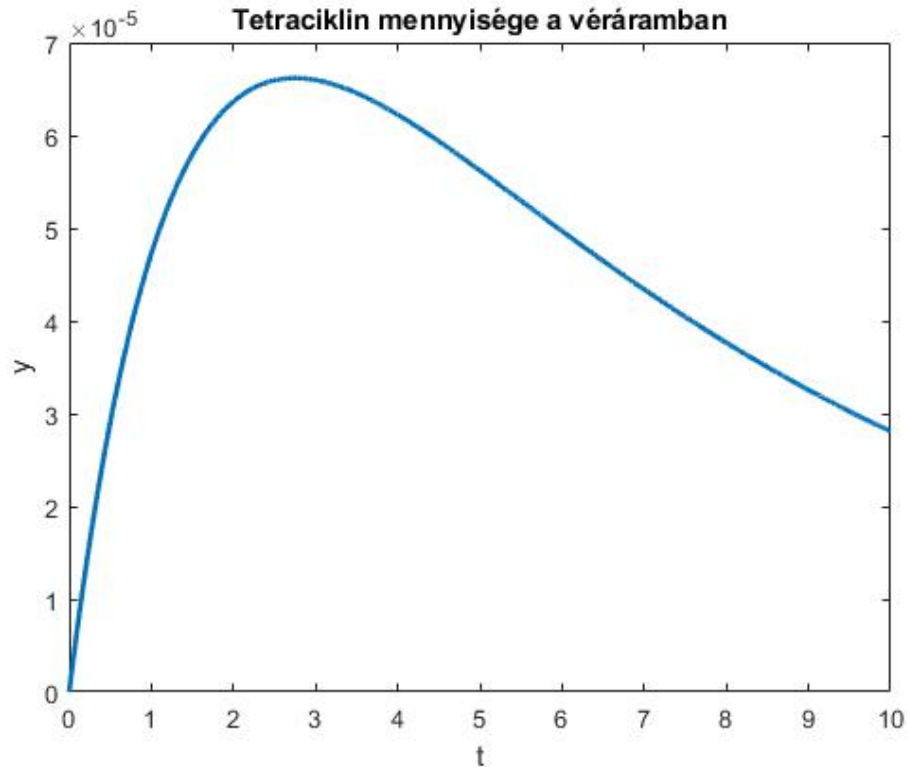
$$\ln 27 - \ln 296875 - 0,72 = \ln 9 - \ln 475000 - 0,15$$

$$1,568615918 = \frac{57}{100} \cdot t$$

$$2,751957751 = t$$

Tehát a számolás szerint valóban igaz, hogy a véráramban a tetraciklin mennyisége a bélből történő felszívódás után körülbelül 2,75 órával éri el a maximumot.

Az $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ függvényeket MATLAB programmal kirajzoltattam a (3.2) megoldásaim szerint, illetve numerikusan a negyedrendű Runge–Kutta-módszer segítségével is. Ugyanazokat az ábrákat kaptam, tehát a számolásaim helyesnek bizonyultak.



3.3. ábra. Tetraciklin mennyisége a vérben az idő függvényében

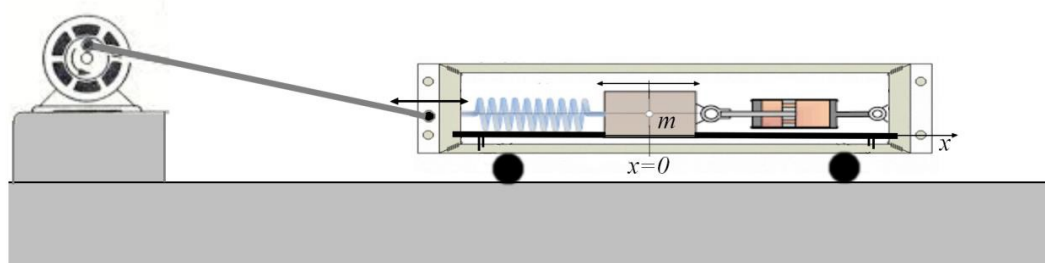
A 3.3. ábra az y függvény változását ábrázolja az idő függvényében. Látható, hogy körülbelül a $t = 2,75$ időpillanatban éri el a maximumát.

4. fejezet

Duffing–modell

A következő modell vizsgálatában a [12] és [14] jegyzetek voltak a segítségemre.

Ebben a modellben az $x(t)$ függvénnyel egy m tömegű test origótól való kitérését fogjuk vizsgálni, a $v(t)$ függvény pedig a test sebességét adja meg. A $t \geq 0$ időpontban a 4.1. ábrán látható, hogy a test egy kocsiban lévő vízszintes sínen helyezkedik el, amelyen a test könnyen mozog. A test bal oldalát egy rugón keresztül rögzítjük a kocs falához, míg a jobb oldalát egy hidraulikus hengerben mozgó dugattyún keresztül a másik falhoz. A vízszintes sínen gördülő kocsit excenterrel mozgatjuk.



4.1. ábra. A vizsgált mechanikai rendszer vázlata

Ezt a képet a [12] oldalon találtam.

4.1. A Duffing–modell leírása differenciálegyenletek segítségével

A test tömegközéppontja az $x = 0$ pont környezetében egyenes vonalú mozgást fog végezni. Az $x(t)$ kitérés időbeli változásának matematikai megadása a differenciálhányadossal definiált sebesség:

$$\dot{x}(t) = v(t). \quad (4.1)$$

A (4.1)-hez hasonló módon definiálhatjuk a $v(t)$ sebességfüggvény változási ütemét megadó gyorsulást:

$$\dot{v}(t) = a(t).$$

4.1.1. Tétel. (Newton II. törvénye) Egy pontszerű test gyorsulása egyenesen arányos a rá ható erővel, és fordítottan arányos a test időben állandó $m > 0$ tömegével:

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (4.2)$$

A (4.2) képletben szereplő F erő az alábbi négyféle erőhatásból tevődik össze:

1. lineáris rugóerő:

$$F_1(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t), \quad (4.3)$$

2. mozgást akadályozó erő:

$$F_2(t) = -\frac{k}{m} \cdot v(t), \quad (4.4)$$

ahol $k > 0$ a viszkózus csillapítási tényező,

3. nemlineáris rugóerő:

$$F_3(t) = -\frac{E}{m} \cdot x^3(t), \quad (4.5)$$

ahol E az ún. anharmonikus tényező és $E > 0$ keményedő, $E < 0$ lágyuló rugó esetén,

4. periódikus külső gerjesztő erő:

$$F_4(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right), \quad (4.6)$$

ahol T a gerjesztés periódusideje.

A (4.3) lineáris erőt, a (4.4) súrlódási erőt, a (4.5) rugalmas erőt, és a (4.6) gerjesztő erőt összeadva $F = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) + F_4(t)$, a (4.1) egyenlettel együtt a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t) - \frac{k}{m} \cdot v(t) - \frac{E}{m} \cdot x^3(t) + \frac{F_0}{m} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right). \end{cases} \quad (4.7)$$

A vizsgálat során matematikai szempontból a változók értéke nem fontos, így új értékeket vezetnek be az együtthatóknak:

$$\alpha = \frac{D}{m} \quad , \quad \beta = \frac{E}{m} \quad , \quad \delta = \frac{k}{m} \cdot T \quad , \quad \gamma = \frac{F_0}{m} \quad .$$

Ekkor az alábbi rendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\alpha \cdot x(t) - \beta \cdot x^3(t) - \delta \cdot v(t) + \gamma \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right). \end{cases} \quad (4.8)$$

Ez a két elsőrendű egyenlet átírható egy darab másodrendű egyenletre az 1.1.4. átviteli elv segítségével.

Így egy kis átrendezéssel a következő egyenletet kapjuk:

$$\ddot{x}(t) + \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot x^3(t) + \delta \cdot \dot{x}(t) = \gamma \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right).$$

4.2. Fixpontok meghatározása

A (4.9) rendszer az 1.2.1. Definíció szerint nem autonóm rendszer a $\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ tag miatt, mert ebben explicit szerepel a t .

Ha a 4.1. ábrán a bal oldalt nem lenne ott a kerék, aminek segítségével mozgatjuk a kocsit, akkor ez a koszinuszos tag nem szerepelne az egyenletrendszerben, így a rendszer autonóm lenne. Az alábbiakban tehát ezt a tagot elhagyjuk.

Ebben az esetben az egyenletrendszer a következő:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\alpha \cdot x(t) - \beta \cdot x^3(t) - \delta \cdot v(t). \end{cases} \quad (4.9)$$

Az 1.2.2. Definíció segítségével kiszámolhatjuk a fixpontokat:

$$\begin{cases} 0 = v^* \\ 0 = -\alpha \cdot x^* - \beta \cdot x^{*3} - \delta \cdot v^*. \end{cases} \quad (4.10)$$

A második egyenletbe behelyettesítjük az első, majd átrendezzük:

$$0 = x^* \cdot (\alpha + \beta \cdot x^{*2}),$$

ahol vagy $x^* = 0$, vagy $\alpha + \beta \cdot x^{*2} = 0$, azaz $x^* = \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$.

Tehát 3 fixpont:

$$\begin{aligned} (x_1^*, v_1^*) &= (0, 0) \\ (x_2^*, v_2^*) &= \left(\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0\right) \\ (x_3^*, v_3^*) &= \left(-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0\right) \end{aligned}$$

Az f függvény Jacobi-mátrixa az 1.2.4. Definíció szerint a következő:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3 \cdot \beta \cdot x^2(t) & -\delta \end{pmatrix}.$$

Behelyettesítjük a $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\delta = 0,1$ értékeket, illetve (x_1^*, v_1^*) fixpont esetében $x(t) = x_1^* = 0$ értéket, és kiszámoljuk a mátrix determinánsát:

$$\det J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0,1 \end{vmatrix} = -1.$$

Az 1.3.7. Állítás szerint ha $\det J > 0$, akkor a fixpont nyeregpont.

Az (x_2^*, v_2^*) fixpont esetében $x(t) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ értéket helyettesítjük be, majd kiszámoljuk a mátrix determinánsát:

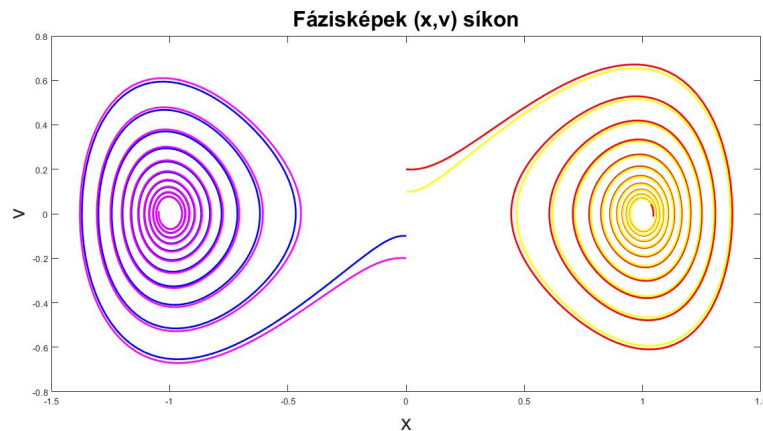
$$\det J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3 \cdot 1 \cdot -\frac{-1}{1} & -0,1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,1 \end{vmatrix} = 2.$$

Itt $\text{Tr } J = 0 - 0,1$. Mivel $\text{Tr } J < 0$, $\det J > 0$ és $\text{Tr}^2 J < 4 \cdot \det J$ az 1.3.7. Állítás szerint az (x_2^*, v_2^*) fixpont típusa stabil fókusz.

Az (x_3^*, v_3^*) fixpont esetében $x(t) = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ értéket helyettesítjük be, és kiszámoljuk a mátrix determinánsát:

$$\det J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3 \cdot 1 \cdot -\frac{-1}{1} & -0,1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,1 \end{vmatrix} = -2.$$

Itt pontosan ugyanaz a helyzet, mint az előző esetről, így az (x_3^*, v_3^*) fixpont is stabil fókusz.



4.2. ábra. A (4.9) rendszer fázisképe 4 különböző helyről indítva

A 4.2. ábra jól szemlélteti a 3 fixpont típusát.

A kék a $[0.001, -0.1]$, a lila a $[0, -0.2]$ kezdeti értékekből indulnak, amelyek az (x_1^*, v_1^*) fixponthoz vannak nagyon közel, és mivel az nyeregpontról, így onnan eltávolodnak, és az (x_3^*, v_3^*) fixpontra húzódnak rá, hiszen az stabil csomó.

A piros a $[0, 0.2]$, a sárga a $[0.001, 0.1]$ kezdeti értékekből indulnak, ezek is távolodni fognak az (x_1^*, v_1^*) fixponttól, és ezek az (x_2^*, v_2^*) fixpontot találják majd meg, hiszen az vonzó fixpont.

Az 1.1 ábrán jól látható, hogy valóban így kell kinéznie ezeknek a típusú fixpontoknak.

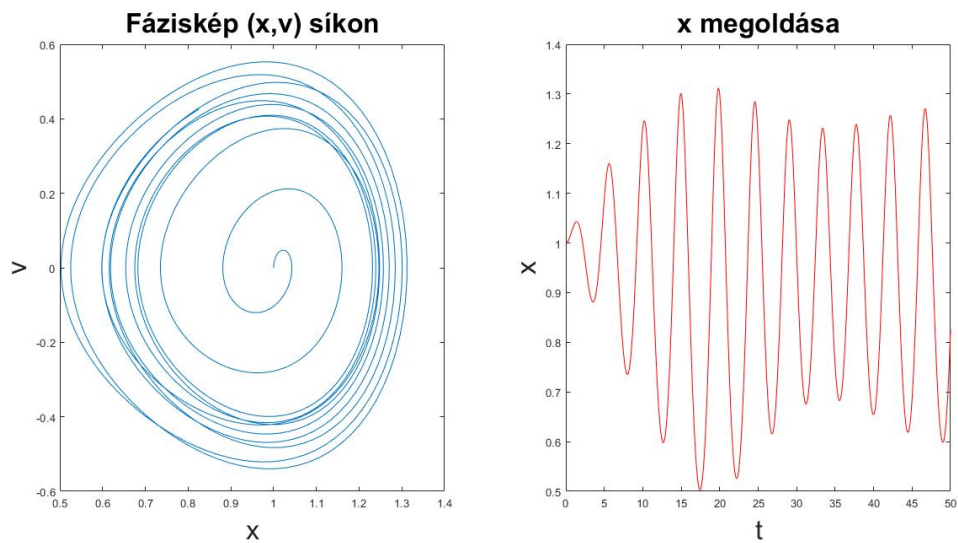
4.3. A modell numerikus vizsgálata

Hasonlítsuk össze a (4.8) és a (4.9) eseteket.

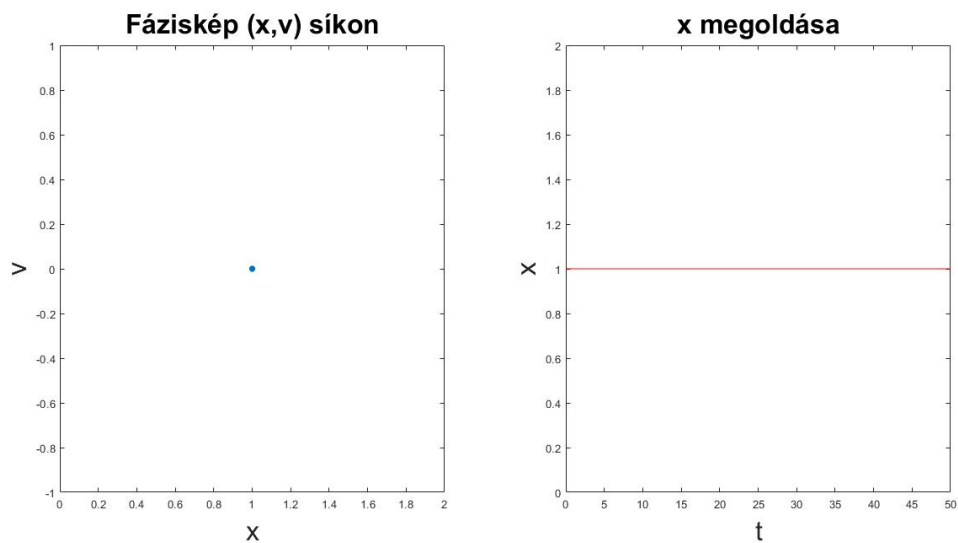
Mindkettő ábrát az $(x_0, v_0) = (0, 0)$ kezdeti értékből indítottam $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,1$, $T = \frac{2\pi}{1,4}$ paraméterekkel.

A (4.8) esetében a fáziskép és az x megoldásfüggvény a 4.3 ábrán látható.

A (4.9) esetében a fáziskép és az x megoldásfüggvény a 4.3 ábrán látható. Ennek az ábrának a fázisképe azért csak egy pont, mert itt külső gerjesztés (cos tag) nélkül a fixpontból indítottuk a trajektóriát.



4.3. ábra. A (4.8) rendszer fázisképe és megoldása



4.4. ábra. A (4.9) rendszer fázisképe és megoldása

5. fejezet

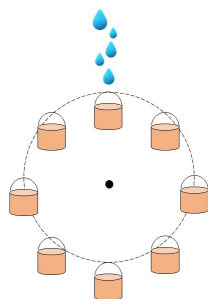
Malkus–Lorenz-vízikerék

Ebben a fejezetben a [3],[10], [17], [18],[19] dokumentumok voltak a segítségemre: .

Ez a modell Edward Lorenz nevéhez kötődik, aki meteorológus, matematikus, illetve a káoszelmélet egyik megalapítója volt. Képzeljünk el egy vízikeréket, amelyen a vödörök egyenletesen helyezkednek el a perem körül. Minden edény alján van egy a beömléshez képest kis lyuk, ahol a víz ki tud majd folyni. Az 5.1. képen láthatóan a víz a kerék tengelye felett ömlik egyenletesen a kerékre, így mindig az éppen felül lévő vödör töltődik. Ha a vizet lassan eresztjük a vízikerékre, akkor a vödör alján lévő lyuk miatt a vödör folyamatosan tud ürülni, így nem keletkezik elegendő hajtónyomaték a kerék megindulásához.

Gyorsítva a víz eresztését a felső vödör úgy megtelik, hogy megindul a forgás. Tovább növelve a víz sebességét a kerék forgási sebessége elérhet egy akkora értéket, amelynél már nincs elég idő ahhoz, hogy a vödörök kiürüljenek, és a forgás szabálytalanná válik, a forgásirány többször is megfordulhat.

A vízkerék ezen változatát Willem Malkus fejlesztette ki az 1960-as években.



5.1. ábra. A vízikerék illusztrációja

5.1. A modell felírása

A model többek közt függ a kerék sugarától, a kerék szögsebességétől, az elfordulási szögtől, a víz tömegeloszlásától, illetve a gravitációtól. Stephanie Moyerman a [10] cikkében részletesen leírja a következő egyenletrendszer levezetését.

Legyenek a differenciálegyenletek a következők, ha $x(t), y(t), z(t) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = z(t) \cdot y(t) - \kappa \cdot x(t) \\ \dot{y}(t) = -z(t) \cdot x(t) - \kappa \cdot y(t) + q_1 \\ \dot{z}(t) = -z(t) \cdot v + \pi \cdot g \cdot r \cdot x(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

és $\kappa > 0$, $q_1 > 0$ és $v > 0$ meghatározott paraméterek.

5.2. Fixpontok meghatározása

Az 1.2.2. Definíció segítségével kiszámolhatjuk a fixpontokat.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 0 = z^* \cdot y^* - \kappa \cdot x^* \\ 0 = -z^* \cdot x^* - \kappa \cdot y^* + q_1 \\ 0 = -z^* \cdot v + \pi \cdot g \cdot r \cdot x^* \end{cases}$$

Ha $z^* = 0$, akkor a fixpontok a következők:

$$\begin{cases} 0 = -\kappa \cdot x^* & \rightarrow x^* = 0 \\ 0 = -\kappa \cdot y^* + q_1 & \rightarrow y^* = \frac{q_1}{\kappa} \end{cases}$$

Így az egyik fixpont:

$$(x_1^*, y_1^*, z_1^*) = (0, \frac{q_1}{\kappa}, 0) = (0, 5, 0).$$

Ha pedig $z^* \neq 0$, akkor:

$$\begin{cases} 0 = z^* \cdot y^* - \kappa \cdot x^* & \rightarrow y^* = \frac{\kappa x^*}{z^*} \\ 0 = -z^* \cdot x^* - \kappa \cdot y^* + q_1 & \rightarrow z^* = -\frac{\kappa y^*}{x^*} + \frac{q_1}{x^*} \\ 0 = -z^* \cdot v + \pi \cdot g \cdot r \cdot x^* & \rightarrow x^* = \frac{z^* \cdot v}{\pi \cdot g \cdot r} \end{cases}$$

A harmadik egyenletet behelyettesítjük az elsőbe:

$$y^* = \frac{\kappa x^*}{z^*} = \frac{\kappa \cdot v \cdot z^*}{z^* \pi \cdot g \cdot r} = \frac{\kappa \cdot v}{\pi \cdot g \cdot r}$$

A második egyenletbe pedig behelyettesítjük az elsőt és a harmadikat is, majd átrendezük:

$$\begin{aligned} z^* &= -\frac{\kappa y^*}{x^*} + \frac{q_1}{x^*} = \frac{\kappa \cdot \kappa \cdot v \cdot \pi \cdot g \cdot r}{\pi \cdot g \cdot r \cdot v \cdot z^*} + \frac{q_1 \cdot \pi \cdot g \cdot r}{v \cdot z^*} \\ z^{*2} &= \kappa^2 + \frac{q_1 \cdot \pi \cdot g \cdot r}{v} \\ z^* &= \pm \sqrt{\frac{q_1 \cdot \pi \cdot g \cdot r}{v} - \kappa^2} \end{aligned}$$

Így megkaptuk a másik fixpontot is:

$$(x_2^*, y_2^*, z_2^*) = \left(\frac{v}{\pi \cdot g \cdot r} \cdot \left(\pm \sqrt{\frac{q_1 \cdot \pi \cdot g \cdot r}{v} - \kappa^2} \right), \frac{\kappa \cdot v}{\pi \cdot g \cdot r}, \pm \sqrt{\frac{q_1 \cdot \pi \cdot g \cdot r}{v} - \kappa^2} \right).$$

Ahhoz, hogy a kerék mozoghasson, $z_2(t)^* > 0$ valós szám kell, hogy legyen. Tehát a diszkrimináns nagyobb 0-nál:

$$\begin{aligned} \frac{q_1 \cdot \pi \cdot g \cdot r}{v} - \kappa^2 &> 0 \\ \frac{\pi \cdot g \cdot r \cdot q_1}{v \cdot \kappa^2} &> 1. \end{aligned}$$

A fizikában ezt a kifejezést Rayleigh-számnak hívják, és különbség van a mozgás tulajdonságaiban, ha ez a szám nagy vagy kicsi. Ez a szám most nagynak felel meg, mert a $\kappa = 10$, $q_1 = 50$, $v = 0,25$, $g = 6$, $r = 0,35$ parméterekkel fogunk dolgozni.

A fixpontok stabilitásának megvizsgálásához szükségünk lesz az f függvény Jacobi-mátrixára, ami az 1.2.4. Definíció segítségével számolunk ki. Majd behelyettesítjük az (x_1^*, y_1^*, z_1^*) fixpont koordinátáit:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa & z(t) & y(t) \\ -z(t) & -\kappa & -x(t) \\ \pi \cdot g \cdot r & 0 & -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ \pi \cdot 6 \cdot 0,35 & 0 & -0,25 \end{pmatrix}$$

A sajátértékeket az 1.2.7. Tétel alapján a számoljuk ki:

$$\begin{pmatrix} -10 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -10 - \lambda & 0 \\ \frac{21 \cdot \pi}{10} & 0 & -0,25 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \frac{81}{4} \cdot \lambda^2 + \frac{21 \cdot \pi - 210}{2} \cdot \lambda + (105 \cdot \pi - 25) = 0.$$

Ennek megoldásai a következők lesznek:

$$\lambda_1 = -10$$

$$\lambda_2 = \frac{-(224 \cdot \pi + 507)^{1/2} \cdot \sqrt{3} - 41}{8} \approx \frac{-1640242433 - \sqrt{5813158700493191329}}{320047304} = -12,6584$$

$$\lambda_3 \approx \frac{(224 \cdot \pi + 507)^{1/2} \cdot \sqrt{3} - 41}{8} = \frac{-1640242433 + \sqrt{5813158700493191329}}{320047304} \approx 2,4084$$

Az 1.3.5. Tétel alapján az (x_1^*, y_1^*, z_1^*) fixpont instabil, mert van olyan sajátértéke, amelynek a valós része pozitív. Jelen esetben a λ_3 .

Az (x_2^*, y_2^*, z_2^*) fixpont esetében is pont ugyanígy kell kiszámolni a sajátértékeket. Ezt a számolást MATLAB-bal végeztem el, és a sajátértékek a következők lettek abban az esetben, amikor az x és a z koordináta pozitív:

$$\lambda_1 \approx -9,8928 + 34,8556i$$

$$\lambda_2 \approx -9,8928 - 34,8556i$$

$$\lambda_3 \approx -0,4645 + 0,0000i$$

Ha pedig az (x_3^*, y_3^*, z_3^*) fixpontnak az x és a z koordinátája is negatív, akkor ugyanazok lesznek a sajátértékei, mint az előző esetben:

$$\overline{\lambda}_1 \approx -9,8928 + 34,8556i$$

$$\overline{\lambda}_2 \approx -9,8928 - 34,8556i$$

$$\overline{\lambda}_3 \approx -0,4645 + 0,0000i$$

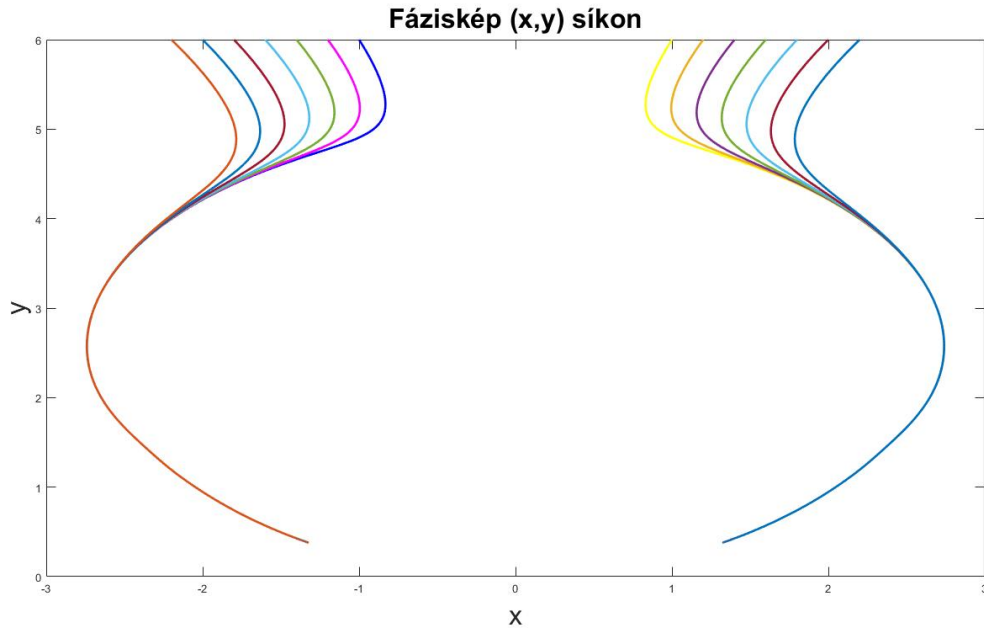
Ez azt jelenti, hogy az 1.3.5. Tétel alapján a

$$(x_2^*, y_2^*, z_2^*) \approx (1,3233, 0,3789, 34,9209) \quad (5.2)$$

$$(x_3^*, y_3^*, z_3^*) \approx (-1,3233, 0,3789, -34,9209) \quad (5.3)$$

fixpontok stabilak, mert mindegyik sajátérték valós része negatív.

5.3. A modell vizsgálata



5.2. ábra. Az (5.1) rendszer fázisképe 14 különböző kezdeti értékből indítva

Az 5.2. ábrához is a $\kappa = 10$, $q_1 = 50$, $v = 0,25$, $g = 6$, $r = 0,35$ paramétereket használtam. Mivel az (x_1^*, y_1^*, z_1^*) fixpont instabil, ezért e mellől indítottam el a trajektóriákat. A jobb oldali ábrák közül a citromsárgához tartozó kezdeti érték az $[1, 6, 1]$. Az ettől jobbra lévő ábráknak a kezdeti értékeit úgy kaptam meg, hogy az x_0 és a z_0 értékeket fokozatosan növeltem 0,2-vel.

A bal és jobb oldali ábrák szimmetrikusak, mert a kezdeti értékeket pontosan ugyanígy állítottam be, azaz a világoskékhez tartozó kezdeti érték a $[-1, 6, -1]$, majd szintén az x_0 és a z_0 koordinátákat változtattam 0,2-es lépésközzönként, viszont itt csökkentettem a koordináták értékeit.

Látható, hogy az (x_1^*, y_1^*, z_1^*) instabil fixponttól távolodnak, és minden trajektória ráta-lál valamelyik stabil fixpontra. Pontosabban a jobb oldali trajektóriák az (x_2^*, y_2^*, z_2^*) , a baloldaliak pedig az (x_3^*, y_3^*, z_3^*) stabil fixpontot találják meg.

Összefoglalás

Szakedolgozatom fő célja az volt, hogy megmutassam, hogy az élet számos területén jelen vannak a folytonos modellek. Betekintést nyerhettünk a fizikába, a biológiába, a kémiába, illetve egy akár hétköznapiabbnak mondható vízikerek vizsgálatába is.

Ígyekeztem olyan modelleket összeválogatni, amelyeket különböző szemszögekből tudok vizsgálni. Található ezek között kompartment-rendszer, kaotikus viselkedésű modell, nem autonóm modell, illetve olyan is, amelyet még analitikusan is meg tudtam oldani.

Analitikus számolásokkal megmutattam, hogy a Rössler-modellnek kettő fixpontja van, és mind a kettő instabil. MATLAB program segítségével kirajzoltattam a periódikus pályákat 3 és 2 dimenzióban is.

A Tetracilin-modell esetén sikerült analitikusan is kiszámolnom a pontos megoldásait, majd ennek segítségével meghatároztam, hogy a tetraciklin mennyisége a bélből történő felszívódás után körülbelül 2,75 órával éri el a maximumot.

A Duffing-modellt átalakítottam autonóm differenciálegyenlet-rendszerre, amelynek számításaim alapján 3 fixpontja van, amiből 2 stabil fókusz, 1 pedig nyeregpont. Az általam írt negyedrendű Runge–Kutta-módszer segítségével rajzoltam olyan fázisképet, amelyen gyönyörűen kirajzolódnak a különböző típusú fixpontok hatásai.

Megmutattam hogy a Malkus–Lorenz vízikerek modellnek 3 fixpontja van, ebből 1 instabil és 2 stabil. Itt megvizsgáltam a fázisképeket 14 különböző kezdeti értékből kiindulva.

Ezekén felül még sok területen találhatunk ilyen rendszereket, amelyeket hasonlóan tudunk vizsgálni.

- A pénzügyben ismert Black–Scholes-modell, amelyet európai stílusú opciók árusításakor használnak. Ezt a modellt parciális deriváltak segítségével lehet felírni.
- A Lotka–Volterra-modell, amely a ragadozó és a zsákmány populáció méretének változásával foglalkozik.
- Háborús modellek, amelyek az egymás ellen harcoló hadseregek létszámát írják le.

- Szerelmi modellek, amelyek két ember közötti érzelmi kapcsolatot vizsgálják.
- Követési modell, amellyel nap mint nap találkozunk a közlekedés során. Ez azt vizsgálja, hogy amikor 2 autó egymás mögött áll a piros lámpánál, akkor hogyan lehet leírni a második autó vezetőjének reakcióját az első autó sebességét figyelembe véve.

Látható, hogy ez a téma még rengeteg érdekes kérdést felvethet. Remélem, hogy a jövőben lesz még lehetőségem ezekkel foglalkozni.

Irodalomjegyzék

- [1] Borrelli Coleman: Differential Equations: A Modeling Perspective, Wiley, 2003
- [2] Csomós Petra: Folytonos modellezés jegyzet, ELTE, 2020
- [3] Edward N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow, Journal of the Atmospheric Sciences, 1963
- [4] Faragó István: Alkalmazott analízis előadásjegyzet, ELTE, 2020
- [5] Freud Róbert: Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó Kft., 2014
- [6] Gondos Eszter: Differenciálegyenletek a hétköznapiakban, szakdolgozat ELTE-TTK Matematika, 2012
- [7] Kurics Tamás: Differenciálegyenletek előadásjegyzet, 2011
- [8] Pfeil Tamás: Differenciálegyenletek előadásjegyzet, ELTE, 2020
- [9] Simon L. Péter, Tóth János: Differenciálegyenletek: Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba, Typotex Kiadó, 2005
- [10] Stephanie Moyerman: Exploring the Lorenz Equations through a Chaotic Waterwheel, Egyetemi projektmunka, 2006

<https://www.math.hmc.edu/~dyong/math164/2006/moyerman/finalreport.pdf>
- [11] <https://hu.m.wiktionary.org/wiki/Jacobi-m%C3%A1trix>
- [12] http://fiztan.phd.elte.hu/kutcsop/munkacsoportok/modern/Duffing_DS/Duffing-oscillator_DS.pdf
- [13] https://en.wikipedia.org/wiki/Equilibrium_point
- [14] https://www.colorado.edu/amath/sites/default/files/attached-files/bad_sample_project.pdf

- [15] http://www.fke.bme.hu/oktatas/kuka/din_rdsz.pdf
- [16] https://en.wikipedia.org/wiki/R%C3%B6ssler_attractor
- [17] <http://www.t-es-t.hu/minden/kaosz/vizikere.htm>
- [18] <http://pi.math.cornell.edu/~lipa/mec/lesson1.html>
- [19] <https://www.math.hmc.edu/~dyong/math164/2006/moyerman/finalreport.pdf>
- [20] <https://texample.net//tikz/examples/poincare/>

A. függelék

A dolgozat során használt Matlab programkódok

A.1. A különböző modelleket leíró segédkód

```
function dy = Derivs(t,y,p)

if p=="Duffing"
    alfa = -1;
    beta = 1;
    gamma = 0.1;
    delta = 0.1;
    omega = 1.4;
    T=(2*pi)/omega;
    dy(1)=y(2);
    %dy(2)=-alfa*y(1)-beta*(y(1))^3-delta*y(2)+gamma*cos((2*pi/T)*t);
    dy(2)=-alfa*y(1)-beta*(y(1))^3-delta*y(2); %nincs külső gerjesztő erő.
end
if p=="Rossler"
    a=0.2;
    b=0.2;
    c=4;
    dy(1)=-y(2)-y(3);
    dy(2)=y(1)+a*y(2);
    dy(3)=b+y(3)*(y(1)-c);
end
```

```

if p=="Lorenz"
    k=10;
    q=50;
    v=0.25;
    g=6;
    r=0.35;
    dy(1)=y(3)*y(2)-k*y(1);
    dy(2)=-y(3)*y(1)-k*y(2)+q;
    dy(3)=-y(3)*v+pi*g*r*y(1);
end

if p=="Tetraciklin"
    a=0.72;
    b=0.15;
    dy(1)=-a*y(1);
    dy(2)=a*y(1)-b*y(2);
    dy(3)=b*y(2);
end

```

A.2. A negyedrendű Runge–Kutta-módszerhez tartozó kód

```

function [t, y]=Runge(tmin,tmax,N,pelda, kezdeti)
%a                                %intervallum eleje
%b                                %intervallum vége
%N                                %Hány helyen vizsgálom meg
t=zeros(N,1);                    %nullvektor -idő
h = (tmax-tmin)/(N-1);           %lépésköz (=tau, =dt)

if pelda== "Duffing"
    y=zeros(N,2);                %nullvektor -függvény

    y(1,:)=kezdeti;
    %y(1,:)=[0 0];
end

```

```

if pelda== "Rossler"
    y=zeros(N,3);
    %y(1,:)=[-6.081 0.0 0.0]; %1 per c:4
    %y(1,:)=[-9 0.0 0.0];      %2 per c:6
    %y(1,:)=[-9.8 0.0 0.0];    %3 per c:12
    %y(1,:)=[-9 0.0 0.0];      %4 per c:8.5
    %y(1,:)=[-10 0.0 0.0];     %6 per c:12.6

end

if pelda== "Lorenz"
    y=zeros(N,3);
    y(1,:)=kezdeti;
end

if pelda== "Tetraciklin"
    y=zeros(N,3);
    y(1,:)=[0.0001 0 0];
end

t(1) = tmin;          %a vizsgálatot az intervallum elején kezdjük

for i=1:(N-1)    %RK4

    k1 = (Derivs(t(i),y(i,:),pelda));
    k2 = (Derivs(t(i)+0.5*h,y(i,:)+h*0.5*k1,pelda));
    k3 = (Derivs(t(i)+0.5*h,y(i,:)+h*0.5*k2,pelda));
    k4 = (Derivs(t(i)+h,y(i,:)+h*k3,pelda));

    y(i+1,:) = y(i,:)+(h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6);
    t(i+1) = tmin+i*h;
end

%DUFFING

subplot(1,2,1)

plot(y(:,1),y(:,2))%,'.', 'MarkerSize', 19)

```

```

fontSize = 24;
caption = sprintf('May 10, Run 6\nMN');
title(caption, 'FontSize', fontSize);
xlabel('x', 'FontSize', fontSize)
ylabel('v','FontSize', fontSize)

title('Fáziskép (x,v) síkon')

subplot(1,2,2)
plot(t,y(:,1),'r')
fontSize = 24;
caption = sprintf('May 10, Run 6\nMN');
title(caption, 'FontSize', fontSize);
xlabel('t','FontSize', fontSize)
ylabel('x','FontSize', fontSize)
title('x megoldása')
%plot(y(:,1),y(:,2), 'red')

%PERIÓDUSKETTŐZŐDÉS
%{
subplot(1,2,1)

plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3))
fontSize = 24;
caption = sprintf('May 10, Run 6\nMN');
title(caption, 'FontSize', fontSize);
xlabel('x', 'FontSize', fontSize)
ylabel('y','FontSize', fontSize)
zlabel('z','FontSize', fontSize)
title('6-periodikus pálya (x,y,z) síkon')

subplot(1,2,2)
plot(y(:,1),y(:,2),'r')
fontSize = 24;
caption = sprintf('May 10, Run 6\nMN');
title(caption, 'FontSize', fontSize);
xlabel('x','FontSize', fontSize)
ylabel('y','FontSize', fontSize)

```

```

title('6-periodikus pálya (x,y) síkon')
%}

%TETRACIKLIN
%x

%{
subplot(2,1,1)
plot(t,y(:,1))
xlabel('t')
ylabel('x(t)')
title('Tetraciklin mennyisége a bélrendszerben -RK')
subplot(2,1,2)
t=linspace(0,5,15);
z=0.001*exp(-0.72*t)
plot(t, z)
title('Tetraciklin mennyisége a bélrendszerben -Kiszámolt')
%}

%y -VÉRÁRAM
%{
subplot(2,1,1)
plot(t,y(:,2))
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('Tetraciklin mennyisége a véráramban -RK')
subplot(2,1,2)
t=linspace(0,5,15);
z=(0.72*0.001)/(0.15-0.72)*(exp(-0.15*t)-exp(-0.72*t))
plot(t,z)
title('Tetraciklin mennyisége a véráramban -Kiszámolt')
%}

end

```

A.3. Több fázisképet egyszerre kirajzoló kód

```
function y=SzakPlot2(pelda)
    %FIXPONT
    [t1,y1] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[0,5,0]);

    %JOBBOLDAL-SÁRGA
    [t2,y2] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[1,6,1]);
    [t10,y10] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[1.2,6,1.2]);
    [t11,y11] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[1.4,6,1.4]);
    [t12,y12] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[1.6,6,1.6]);
    [t13,y13] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[1.8,6,1.8]);
    [t14,y14] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[2,6,2]);
    [t15,y15] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[2.2,6,2.2]);
    %BALOLDAL-KÉK
    [t3,y3] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[-1,6,-1]);
    [t4,y4] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[-1.2,6,-1.2]);
    [t5,y5] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[-1.4,6,-1.4]);
    [t6,y6] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[-1.6,6,-1.6]);
    [t7,y7] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[-1.8,6,-1.8]);
    [t8,y8] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[-2,6,-2]);
    [t9,y9] = Runge(0,50,5000,"Lorenz",[-2.2,6,-2.2]);

    plot(y1(:,1),y1(:,2),y2(:,1),y2(:,2),'yellow',y3(:,1),y3(:,2),'blue',
    y4(:,1),y4(:,2),'magenta',y5(:,1),y5(:,2),y6(:,1),y6(:,2),
    y7(:,1),y7(:,2),y8(:,1),y8(:,2),y9(:,1),y9(:,2),y10(:,1),y10(:,2),
    y11(:,1),y11(:,2),y12(:,1),y12(:,2),y13(:,1),y13(:,2),y14(:,1),y14(:,2),
    y15(:,1),y15(:,2),'Linewidth',2)

    fontSize = 24;
    caption = sprintf('May 10, Run 6\nMN');
    title(caption, 'FontSize', fontSize);
    xlabel('x','FontSize', fontSize)
    ylabel('y','FontSize', fontSize)
    title('Fáziskép (x,y) síkon');
    end
```

A.4. Az Explicit-Euler-módszerhez tartozó kód

```
function y= ExplicitEuler(a,b,N,pelda)
t = linspace(a,b,N);
tau=t(2)-t(1);
y=zeros(N,2);

if pelda== "Duffing"
    y=zeros(N,2); %nullvektor -függvény
    y(1,:)=[1 0];
end

if pelda== "Rossler"
    y=zeros(N,3);
    y(1,:)=[-6.081 0.0 0.0];
end

for i=1:N-1
    y(i+1,:)=y(i,:) + tau*Derivs(t(i),y(i,:),pelda);
end

%plot(t,y(:,2),'r')
plot(y(:,1),y(:,2))
end
```