Lineáris algebra a kombinatorikában

Szakdolgozat

Készítette: Lakó Viktória

Szak: Matematika BSc Tanári szakirány

Témavezető: Freud Róbert egyetemi docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

A lineáris algebra eszközei a matematika számos területén nyújtanak segítséget egy-egy probléma megoldásában. Ezek közül az egyik a kombinatorika témaköre. Szakdolgozatom célja, hogy néhány e két matematikai terület közötti összefüggést vázoljak fel, melyeket akár egy középiskolai emelt szintű szakkörön is meg lehet tanítani.

Dolgozatom három fő téma köré épül, a lineáris rekurziók, halmazok vektoros reprezentációja, gráf-algoritmusok és gráf-ábrázolások. A témákhoz különböző órákon szerzett tapasztalatok keltették fel érdeklődésemet. A lineáris rekurziókkal a véges matematika órákon, a Páratlan város problémájával Algebra és számelmélet blokkon, a gráf-algoritmusokkal pedig egy, az adatszerkezetekkel foglalkozó programozási gyakorlaton találkoztam. Mindhárom terület csak érintőlegesen szerepel az egyetemi tananyagban, ugyanakkor érdekes problémákkal foglalkoznak, melyek akár kevés háttérismerettel is megérthetők.

Fontos szempontnak tekintettem, hogy olyan feladatokat keressek, illetve találjak ki az összefüggések szemléltetésére, amelyek közel állnak valamely valós életből vett problémához, ugyanakkor jól modellezhetők a matematika nyelvén.

Szakdolgozatomat igyekeztem következetesen felépíteni. A fejezetek elején összegyűjtöttem azokat az ismereteket, lineáris algebrai eszközöket, amelyeket a témakör tárgyalása során felhasználok. Az új ismeretek könnyebb elsajátításához gyakorló példákat is készítettem.

Mindegyik fejezetet kicsit más nézőpontból állítottam össze. A lineáris rekurziók feladatai főleg a kombinatorikai gondolkodást igyekeznek elősegíteni, hogyan kell egy rekurziót észrevenni, leírni. Majd a fejezet második felében inkább a számelméleti vonatkozások dominálnak.

A Páratlan város témaköréhez a másik kettőhöz képest több lineáris algebrai háttérismeret szükséges, ezért a fejezet elején egy intenzív vektortér gyakorlat található. És a továbbiakban is középiskolások számára szokatlan módszereket mutatok be.

A gráfelmélet ma már részét képezi a középiskolás tananyagnak, szakdolgozatomban azonban főleg a gráf-algoritmusokkal foglalkoztam, amik a középiskolában kevesebb hangsúlyt kapnak.

A szemléltető feladatok többségét egy könyvből vagy az internetről vett ötlet alapján, saját magam találtam ki, illetve alakítottam át úgy, hogy jól illeszkedjen a gondolatmenethez.

2. Fibonacci-sorozat

2.1. Sorozatok

(Ismétlés)

A fejezet részletes tárgyalása előtt egy rövid ismétlést teszünk a sorozatokról, különös tekintettel a számtani, mértani és a rekurzív sorozatokra.

Mi is az a sorozat?

Definíció. Számsorozatnak (röviden sorozatnak) nevezzük a pozitív egész számok halmazán értelmezett valós értékű függvényeket.

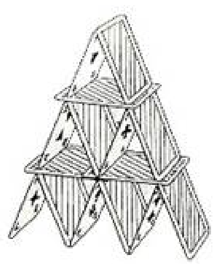
Példák.

- $a_n = 2n + 1$
- $b_n = 3 \cdot 2^n$
- $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2$

Számtani sorozatok. A számtani sorozatokat egy példával ismételjük át.

Feladat. *Kártyavárat építünk a szokásos módon (lásd a mellékelt ábrát).*

1. Hány kártyával kezdjünk, ha 7 emelet magas kártyavárat szeretnénk?
2. Hány darab kártyára lesz szükségünk?



Megoldás. Egyszintű vár esetén két kártyára van szükségünk, ha kétszintes várat szeretnénk, akkor az alsó szinten már 5 db kártya kell, ha háromszinteset, akkor pedig már 8. Minden újabb szint 3-mal növeli a kezdő szintre szükséges lapok számát, egy vízszintes lappal és két állóval. Ebből az összefüggésből már könnyedén válaszolhatunk az 1. kérdésre: 7 szint esetén $a_7 = 2+6\cdot 3 = 20$ kártyalappal kell kezdeni.

Definíció. Számtani sorozatnak nevezzük azokat a sorozatokat, amelyekben (a második elemtől kezdve) bármelyik tag és az azt megelőző tag különbsége állandó. Ezt az állandót d-vel jelöljük ($d =$ *differencia*). Azaz a második elemtől kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagjához egy (a sorozatra jellemző) állandót adunk hozzá: $a_n = a_{n-1} + d$, a sorozat megadásához elegendő a kezdőtag és a differencia megadása, ebből már tetszőleges n-re kiszámítható az n-edik tag: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

A 2. kérdés megválaszolásához szükségünk van a számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó összefüggésre. Ehhez felelevenítjük Gauss módszerét: Ha a sorozat tagjait összepárosítjuk, mégpedig úgy, hogy a két végéről a közepe felé haladunk, és ezeket a párokat összeadjuk, akkor azonos összegeket kapunk:

$$a_1 + (a_1 + (n-1)d) = (a_1 + d) + (a_1 + (n-2)d) = ...$$

$$... = (a_1 + kd) + (a_1 + (n-k-1)d) = 2a_1 + (n-1)d$$

Mivel $\frac{n}{2}$ db ilyen pár van, az első n db tag összege: $S_n = (a_1 + a_n)\cdot\frac{n}{2}$. Ez a módszer azonban látszólag csak páros n-ekre működik (páratlan esetben mivel párosítjuk a középső tagot?). De ha kicsit átfogalmazzuk, akkor könnyű látni, hogy páratlan n-ekre is igaz a formula. Most a párosítást úgy végezzük el, hogy a sorozat tagjait először növekvő, majd csökkenő sorrendben egymás alá írjuk. Az oszlopok szerint vett összegek egyenlők, valamint az összes szám összege nyilvánvalóan a keresett szám kétszerese, amiből ismét az előbb felírt formulát kapjuk. Tehát hány kártyára lesz szükségünk a 7 emeletes kártyavár megépítéséhez:

$$S_7 = \frac{(a_1 + a_7)n}{2} = \frac{(2 + (2 + 6 \cdot 3))7}{2} = 77.$$

Mértani sorozatok. A mértani sorozatokra a legkézenfekvőbb példa a baktériumok szaporodása.

Feladat. *Egy baktériumtenyészetben kezdetben volt 3 baktérium. A tenyészetben a baktériumok száma minden negyedórában megduplázódik. Hány baktérium lesz a tenyészetben 2 óra múlva?*

Megoldás. Legyen a_n a baktériumok száma az n-edik negyedórában. Ekkor a_1 nyilvánvalóan 3. Hogyan kapjuk a többi tagot? A második negyedórában megduplázódik a baktériumok száma: $a_2 = 3 \cdot 2$, majd a harmadikban ismét duplázódik $a_3 = a_2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2, \ldots, a_n = a_{n-1} \cdot 2$. Mint látjuk ebben a sorozatban két szomszédos tag hányadosa állandó:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2.$$

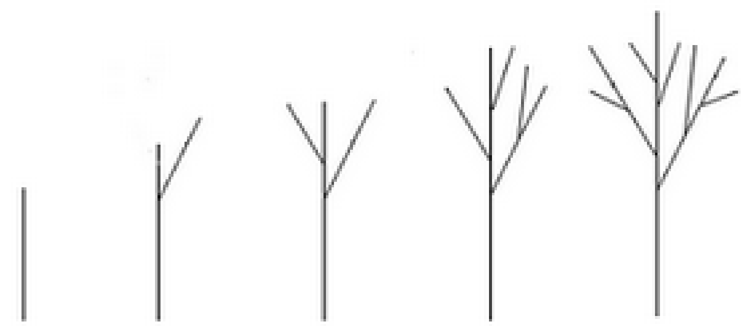
Az ilyen sorozatokat nevezzük mértani sorozatoknak.

Definíció. Mértani sorozatnak nevezzük azokat a sorozatokat, amelyekben (a második elemtől kezdve) bármelyik tag és az azt megelőző tag hányadosa állandó. Ezt az állandót q-val jelöljük ($q =$ *quotiens*$=$ *kvóciens*). Azaz a második elemtől kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagját egy (a sorozatra jellemző) állandóval szorozzuk: $a_n = a_{n-1}q$. Mértani sorozatoknál is elegendő a kezdőtag és a kvóciens megadása, ezekből már minden tag kiszámítható: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

2.2. Fa növekedése

Feladat. *Egy fát ültetünk, melynek az első évben egyetlen ága van, amely még egy évig növekszik, majd a harmadik évben egy új ágat hajt. Minden új* *ág egy évig növekszik és a második évben egy-egy új ágat hajt. Hány ága lesz a fának 20 év múlva?*

Megoldás. Lássuk, hogyan is néz ki ez a fa. A nulladik évben elültetjük a fát. Az első évben a fának egy ága van, ami egy évig növekszik, tehát a második évben még mindig egy ága van. A harmadik évben már két ága van, egy kétéves és egy új. A negyedik évben a kétéves ág új ágat hajt, az egyéves növekszik, ekkor összesen 3 ága van a fának. Ez így megy minden évben, az egyévesnél öregebb ágak új ágat hajtanak, az új ágak csak növekednek, tehát egy fának az n-edik évben annyi ága lesz, mint amennyi ága az $(n-1)$-edik és az $(n-2)$-edik évben összesen volt.



A feladatot lefordítva a matematika nyelvére az alábbi rekurzív sorozatot kapjuk:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Ez épp a Fibonacci-sorozat. Ahhoz, hogy meghatározzuk, hány ága lesz a fának 20 év múlva, 20-szor végre kellene hajtanunk a rekurziót. Most erre keresünk egy gyorsabb megoldást.

Állítás. *Ha van két a_n, b_n sorozat, melyekre teljesül a rekurzió képzési szabálya, akkor minden $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ sorozatra is teljesül a rekurzió.*

Bizonyítás. Írjuk be az a_n, b_n sorozatokra vonatkozó rekurziót a

$$c_n = \alpha a_n + \beta b_n$$

egyenletbe:

$$c_n = \alpha(a_{n-1} + a_{n-2}) + \beta(b_{n-1} + b_{n-2})$$

$$c_n = \alpha a_{n-1} + \alpha a_{n-2} + \beta b_{n-1} + \beta b_{n-2}$$

$$c_n = (\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1}) + (\alpha a_{n-2} + \beta b_{n-2}) = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

Feladat. *Keressünk explicit képletet az n-edik Fibonacci-számra!*

Jó lenne olyan sorozatokra visszavezetni a problémát, amelyekre ismerünk explicit képletet. Ilyen sorozatok a számtani és a mértani sorozatok.

Kérdés. *Mely számtani sorozatok elégítik ki a fenti rekurziót?*

Legyen $a_n = a+d(n-1)$ olyan számtani sorozat, ami kielégíti a rekurziót! Azaz kell $a + d(n-1) = a + d(n-2) + a + d(n-3)$, ebből kapjuk, hogy $(4-n)d = a$ minden n-re, ez csak az azonosan 0 számtani sorozatra teljesül.

Kérdés. *Mely mértani sorozatok elégítik ki a fenti rekurziót?*

Olyan $a_n = aq^{n-1}$ mértani sorozatot keresünk, amelyre teljesül:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-3}$$

Leosztás után az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk q-ra:

$$q^2 - q - 1 = 0$$

Ezt hívjuk a sorozat karakterisztikus egyenletének, melynek gyökei:

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy minden olyan mértani sorozat kielégíti a rekurziót, melynek kvóciense $q_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $q_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Keressük tehát a feladatban szereplő sorozatot

$$u_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

alakban. Elég a sorozat első két tagját vizsgálnunk, mert a többi tagra a rekurzió miatt minden öröklődik.

$u_0 = 0 = \alpha + \beta \quad \rightarrow \quad \beta = -\alpha$

$u_1 = 1 = \alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$

$1 = \alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \alpha \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$

$2 = \alpha + \alpha\sqrt{5} - \alpha + \alpha\sqrt{5}$

$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Tehát az n-edik Fibonacci-szám kiszámítható az

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

képlettel. Így könnyen válaszolhatunk a feladatban feltett kérdésre:

$$u_{20} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{20} + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{20} = 6765.$$

2.3. Lépcsőre feljutás problémája

Feladat. *Hányféleképpen juthatunk fel a 10 emeletes kollégium 5. emeletéről a 7. emeletre (nincs lift), ha két emelet között 24 lépcsőfok van és egyszerre 1 vagy 2 lépcsőfoknyit tudunk lépni?*

A feladatot házi feladatnak adnám, hogy a gyerekek ismerjék fel a rekurziót a feladatban és alkalmazzák az órán tanultakat. A megoldás menete szórólszóra megegyezik a faágas feladatéval.

A fenti algoritmussal tehát explicit képletet kaphatunk lineáris rekurziókra. A megoldás menete, hogy olyan mértani sorozatot keresünk, ami kielégíti a megfelelő rekurziót. A mértani sorozat kvóciensét egy másodfokú egyenletből kapjuk, melynek, ha két különböző gyöke van (q_1 és q_2), akkor ezekből

$$a_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n,$$

ahol α, β-t a kezdeti feltételekből kapjuk.

Feladat. *Vegyük az $a_1 = 2, a_2 = 6, a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ rekurzív sorozatot. Keressünk a rekurziót kielégítő mértani sorozatot!*

$$a_1 q^n = 4a_1 q^{n-1} - 4a_1 q^{n-2}$$

$$q^2 - 4q + 4 = 0$$

$$(q-2)^2 = 0$$

$$q_1 = q_2 = 2$$

Tehát csak a 2 hányadosú mértani sorozatok elégítik ki a rekurziót. Ha a két gyök megegyezik, érdemes a rekurzív sorozat képletét $a_n = \alpha q^n + \beta n q^{n-1}$ alakban keresni. Ehhez még azt kell belátni, hogy ekkor az nq^{n-1} sorozat is kielégíti a rekurziót:

$$a_1(n+2)q^{n+1} = \alpha a_1(n+1)q^n + \beta a_1 n q^{n-1}$$

ebből $a_1 q^{n-1}$-nel leosztva (a_1 és q egyike sem 0) a következő egyenletet kapjuk:

$$(n+2)q^2 = \alpha(n+1)q + \beta n$$

ebből kivonva az eredeti karakterisztikus egyenlet n-szeresét, a

$$2q^2 = \alpha q$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Tehát azt kaptuk, hogy ekkor

$$q = \frac{\alpha}{2}.$$

Végig ekvivalens átalakításokat végeztünk.

A megoldóképletből ugyanerre a megoldásra jutunk, ha q kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek:

$$q_{1,2} = \frac{\alpha \pm \overbrace{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}^{=0}}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Észrevétel. *A $2q = \alpha$ egyenlet épp a karakterisztikus egyenlet deriváltja, az állítás igazsága tehát azon az algebrából ismert összefüggésen múlik, hogy egy polinom többszörös gyöke a polinom deriváltjának is gyöke.*

α, β-t ilyenkor is a kezdeti értékekből kapjuk.

$$a_1 = 2 = \alpha 2^1 + 1\beta 2^0 = 2\alpha + \beta$$

$$a_2 = 6 = \alpha 2^2 + 2\beta 2^1 = 4\alpha + 4\beta$$

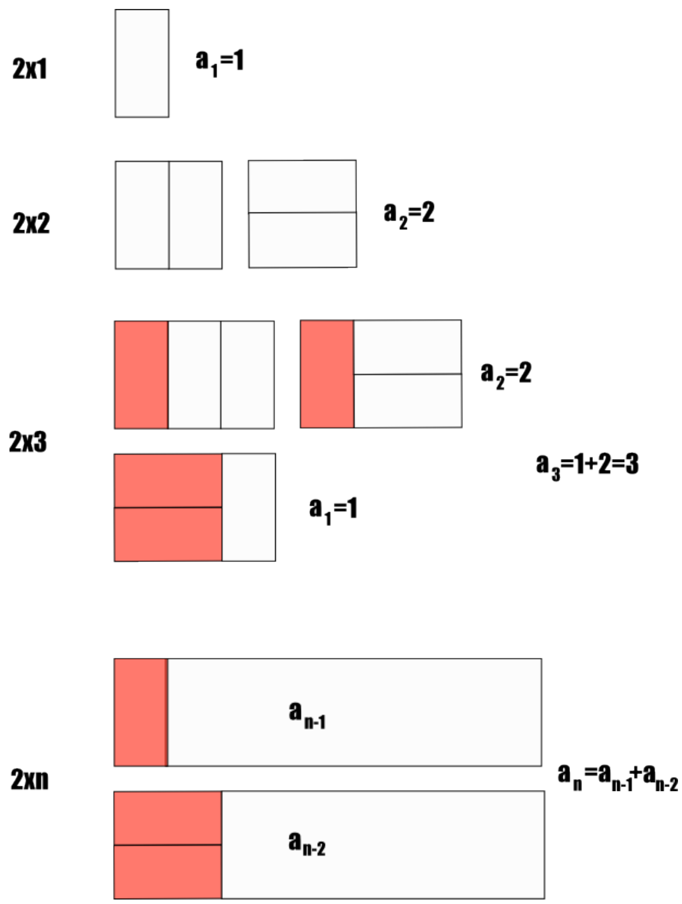
$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2}2^n + n2^{n-1}$$

2.4. Dominó

Feladat. *Hányféleképpen lehet egy $2 \times n$-es téglalapot 2×1-es dominókkal kirakni?*

Megoldás. Ebben a feladatban szintén nem magának a rekurziónak a megoldása a nehéz, hanem a helyes rekurzív sorozat kitalálása. Ehhez érdemes egy kicsit rajzolni, hogy könnyebben elképzelhessük a feladatot!



Jelöljük a_n-nel azt a számot, ahányféleképpen a $2{\times}n$-es táblát kirakhatjuk $2{\times}1$-es dominókkal. A $2{\times}1$-es táblát egyféleképpen tudjuk kirakni dominóval, tehát $a_1 = 1$, a 2×2-eset már kétféleképpen, $a_2 = 2$. A továbbiakban, attól függően, hogy az első dominót függőlegesen, vagy vízszintesen rakjuk le, a következőt állapíthatjuk meg: ha az első dominót függőlegesen tesszük a táblára, akkor a maradék $2 \times (n-1)$ helyre a_{n-1}-féleképpen tehetjük a dominókat. Ha az elsőt vízszintesen tesszük, akkor még egy dominót vízszintesen mellé kell tennünk, a maradék $2 \times (n-2)$ helyre a többi dominót pedig a_{n-2}-féleképpen tehetjük le, tehát $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Itt ismét a Fibonacci-sorozatot kaptuk, melynek már ismerjük az explicit alakját.

2.5. Árucikkek

Feladat. *Hányféleképpen költhetünk el n eurót, ha 3-féle képeslapot vehetünk darabját 1 euróért, és 4-féle 2-eurós kitűzőt vásárolhatunk? (Megjegyzés: Számít, hogy a tárgyakat milyen sorrendben vásároljuk!)*

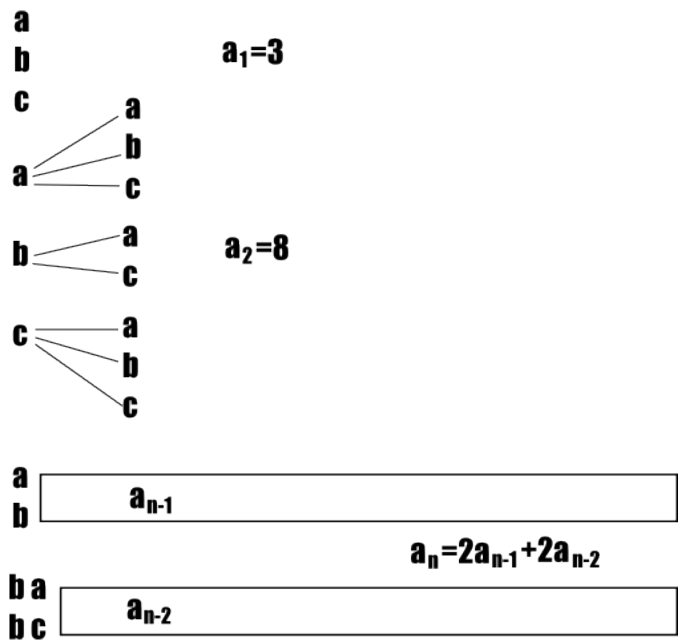
Megoldás. Jelöljük a_n-nel azt a számot, ahányféleképpen elkölthetünk n eurót. 1 eurót háromféleképpen tudunk elkölteni ($a_1 = 3$), 2 eurót elkölthetünk két 1 eurós formájában kilencféleképpen, illetve egy 2 eurós formájában négyféleképpen, azaz összesen 13-féleképpen ($a_2 = 13$). A rekurziót az előző feladatbeli megoldáshoz hasonlóan, úgy tudjuk felírni, ha először azt döntjük el, hogy először 1 vagy 2 eurós tárgyat vásárolunk. Ha 1 eurósat veszünk először, ezért az 1 euróért 3-féle tárgyat vásárolhatunk, a maradék pénzünket pedig a_{n-1}-féleképpen költhetjük el, ha 2 eurós tárggyal kezdünk, akkor a 2 eurót 4-féleképpen, a maradék összeget a_{n-2}-féleképpen költhetjük el. Tehát a következő sorozatot kaptuk:

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}.$$

2.6. Ábécé 1

Feladat. *Az a, b, c betűkből n-hosszú sorozatokat készítünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha azt akarjuk, hogy ne legyen két b egymás mellett?*

Megoldás. Talán ebben a feladatban a legnehezebb felismerni, hogy rekurzióra van szükség. Elég sok próbálkozás után azonban rájövünk, hogy korábbi leszámlálási módszereink nem vezetnek el a helyes megoldáshoz. A módszer hasonló a korábbiakhoz, olyan rekurzív sorozatot keresünk, melynek n-edik eleme éppen azt a számot adja, ahányféleképpen elkészíthetjük a megfelelő tulajdonságú betűsorozatokat. Egy hosszú sorozatot háromféleképpen készíthetünk ($a_1 = 3$), kettő hosszút nyolcféleképpen ($a_2 = 8$). Mi a helyzet az n hosszú sorozatok esetében?



Ha tudjuk, hogy az első helyen a vagy c áll, akkor a maradék $n-1$ helyen a_{n-1}-féleképpen lehetnek a betűk, ha az első helyen b áll, akkor azt csak a vagy c követheti, a maradék $n-2$ helyen pedig tetszőlegesen állhatnak az elemek, úgy hogy két b nincs egymás mellett, tehát a_{n-2}-féleképpen (lásd a fenti ábrát). Ebből megkapjuk a_n-et: $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

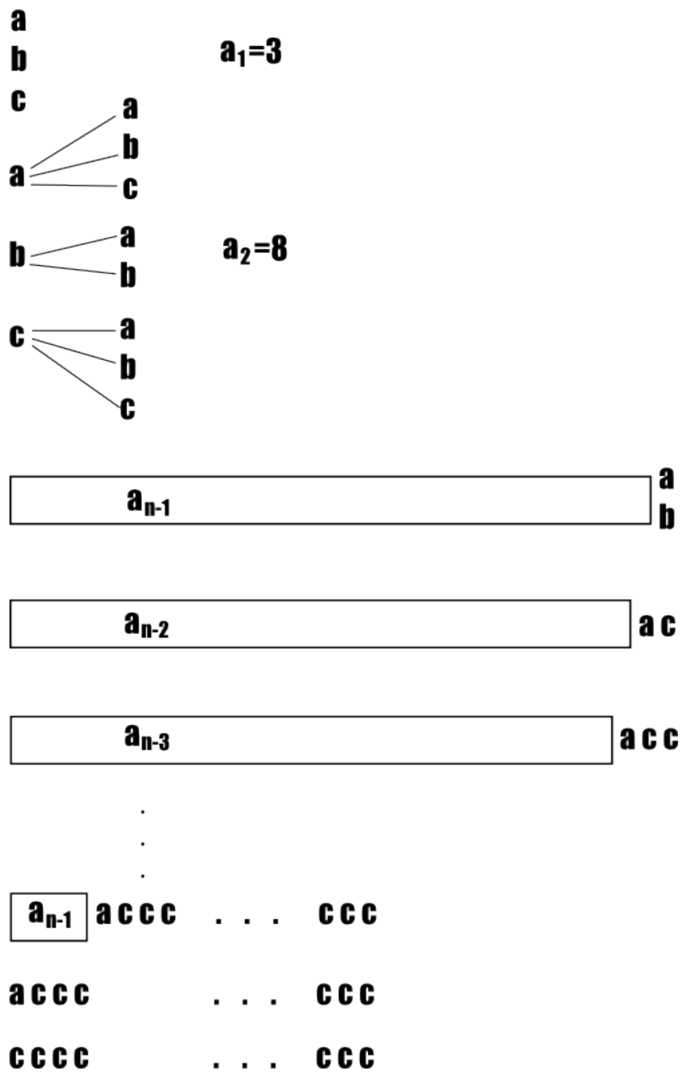
2.7. Ábécé 2

Feladat. *Az a, b, c betűkből n-hosszú sorozatokat készítünk, hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha azt akarjuk, hogy ne legyen bc egymás mellett?*

Megoldás. Ez a feladat nagyon hasonlónak tűnik az előzőhöz, mégis egy kicsit új nézőpont jelenik meg benne. Írjuk fel az előző feladatban használt módon a sorozat elemeit.

$a_1 = 3$, $a_2 = 8$, hogyan kapjuk a_n-et?

Most érdemesebb a betűsorozatokat a másik végükről vizsgálni, mint az előbb. A sorozat utolsó eleme minden további nélkül lehet a vagy b. Mikor állhat az utolsó helyen c? Ha őt a vagy c előzte meg. De ha az utolsó előtti helyen c áll, akkor az előtte lévő elem megint csak a vagy c lehet stb. (Lásd a következő ábrát.)



Ebből a következő egyenletet kapjuk:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + ... + a_1 + 2$$

Ezt a rekurziós formulát kicsit nehézkesebb kezelni, mint azt az előző példákban megszokhattuk. Hogyan hozhatnánk egyszerűbb alakra? Vonjunk ki egymásból két szomszédos tagot! Így egy csomó közös tag kiesik és egy egyszerűbb formulát kapunk:

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + ... + a_1 + 2$$

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + ... + a_1 + 2$$

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n - a_{n-1}$$

$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$$

.

Így ismét egy olyan rekurzív sorozatot kaptunk, melyet könnyedén megoldhatunk a mértani sorozatos módszerrel!

2.8. Rekurzió keresés

Most az előbb megismert módszer egy érdekes következményét fogjuk körüljárni.

Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy* $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^{2008} + (\sqrt{5}-\sqrt{2})^{2008}$ *pozitív egész szám!*

1. Megoldás. A feladat állításánál egy erősebb állítást fogunk bebizonyítani, mégpedig azt, hogy az

$$a_n = (\sqrt{5}+\sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{5}-\sqrt{2})^{2n}$$

sorozat tagjai egész számok minden n-re. Az állítást bizonyíthatjuk a binomiális tétel segítségével.

Először kicsit átalakítjuk a sorozatot:

$$a_n = (7 + 2\sqrt{10})^n + (7 - 2\sqrt{10})^n.$$

Alkalmazzuk a binomiális tételt:

$$a_n = (7 + 2\sqrt{10})^n + (7 - 2\sqrt{10})^n =$$

$$= \tbinom{n}{0}7^n + \tbinom{n}{1}7^{n-1}(2\sqrt{10})^1 + \tbinom{n}{2}7^{n-2}(2\sqrt{10})^2 + ... + \tbinom{n}{k}7^{n-k}(2\sqrt{10})^k + ...$$

$$+\tbinom{n}{0}7^n - \tbinom{n}{1}7^{n-1}(2\sqrt{10})^1 + \tbinom{n}{2}7^{n-2}(2\sqrt{10})^2 - ... + (-1)^k\tbinom{n}{k}7^{n-k}(2\sqrt{10})^k + ...$$

$$= 2(\tbinom{n}{0}7^n + \tbinom{n}{2}7^{n-2}(2\sqrt{10})^2 + \ldots + \tbinom{n}{2k}7^{n-2k}(2\sqrt{10})^{2k} + \ldots) =$$

$$= 2(7^n + \tbinom{n}{2}7^{n-2}40^2 + \ldots + \tbinom{n}{2k}7^{n-2k}40^{2k} + \ldots).$$

Mint látjuk, a $2\sqrt{10}$ páratlan hatványai éppen kiesnek. A páros hatványok pedig már egész számok. Tehát azt kaptuk, hogy a_n egész szám lesz minden n-re.

Most lássunk egy másfajta bizonyítást, ahol felhasználjuk a lineáris rekurziók explicit képletére vonatkozó összefüggéseket.

2. Megoldás. Legyen a_n most is az $a_n = (7+2\sqrt{10})^n + (7-2\sqrt{10})^n$ sorozat. Keressük meg az a_n sorozat rekurzív alakját. Ehhez az előbb elsajátított algoritmus alapján, most visszafelé gondolkodunk.

Keressünk α, β-t, melyre $a_n = \alpha \cdot a_{n-1} + \beta \cdot a_{n-2}$.

Kérdés. *Hogyan kaptuk az explicit képlethez szükséges mértani sorozat kvóciensét?*

A következő másodfokú egyenlet gyökeiből:

$$q^2 - \alpha \cdot q - \beta = 0.$$

És ennek a másodfokú egyenletnek tudjuk a két gyökét:

$$q_1 = 7 + 2\sqrt{10}, \quad q_2 = 7 - 2\sqrt{10}$$

Innen

$$x^2 - \alpha \cdot x - \beta = (x - (7 + 2\sqrt{10}))(x - (7 - 2\sqrt{10})) =$$

$$= x^2 - (7 + 2\sqrt{10})x - (7 - 2\sqrt{10})x + (7^2 - 4 \cdot 10) =$$

$$= x^2 - 7x - 2\sqrt{10}x - 7x + 2\sqrt{10}x + 9 = x^2 - 14x + 9.$$

Azaz

$$\alpha = 14,$$

$$\beta = -9,$$

és így azt kaptuk a_n-re, hogy

$$a_n = 14 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2}.$$

Már csak a kezdőértékekre kell ellenőriznünk az állítást:

$$a_0 = 2,$$

$$a_1 = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 7 + 2\sqrt{10} + 7 - 2\sqrt{10} = 14.$$

Mivel a_0 és a_1 is egész számok, és a lineáris rekurzió együtthatói is egész számok, a sorozat minden tagja egész szám lesz. Ezzel az állítást bebizonyítottuk, a_n minden n-re egész, ezért $n = 1004$-re is az, a_{1004} pedig éppen a feladatban megadott szám.

Kérdés. *Milyen plusz információkat deríthetünk ki erről a számról? Pl. milyen maradékot ad 14-gyel osztva?*

A rekurziós formulát alkalmazva, hamar megválaszolhatjuk a kérdést:

$a_0 \equiv 2 \pmod{14}$
$a_1 = 14 \equiv 0 \pmod{14}$
$a_2 \equiv 14 \cdot 0 - 9 \cdot 2 \equiv 10 \pmod{14}$
$a_3 \equiv 14 \cdot 10 - 9 \cdot 14 \equiv 0 \pmod{14}$

Indukcióval belátható, hogy a sorozat minden páratlanadik eleme osztható 14-gyel. Hiszen a_1 osztható 14-gyel. Tegyük fel, hogy minden 1-nél nagyobb k-ra a_{2k-1} osztható 14-gyel, ekkor $a_{2(k+1)-1} = a_{2k+1}$-et úgy kapjuk, hogy $14 \cdot a_{2k} - 9 \cdot a_{2k-1}$, ahol az első tag nyilvánvalóan osztható 14-gyel, a második tag pedig az indukciós feltétel miatt osztható 14-gyel, tehát a_{2k+1} is osztható 14-gyel. A párosadik elemek 14-gyel vett maradéka pedig attól függ, hogy a kettővel előttük lévő szám (-9)-szerese milyen maradékot ad modulo 14. Elegendő tehát a párosadik elemeket vizsgálni:

$$\begin{aligned}
a_4 &\equiv -9 \cdot 10 \equiv 8 \pmod{14}\\
a_6 &\equiv -9 \cdot 8 \equiv 12 \pmod{14}\\
a_8 &\equiv -9 \cdot 12 \equiv 4 \pmod{14}\\
a_{10} &\equiv -9 \cdot 4 \equiv 6 \pmod{14}\\
a_{12} &\equiv -9 \cdot 6 \equiv 2 \pmod{14})\\
a_{14} &\equiv -9 \cdot 2 \equiv 10 \pmod{14}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

És így tovább. Mint látjuk a maradékok 12-es periódus szerint ismétlődnek. $1004 \equiv 8 \pmod{12})$, tehát $a_{1004} \equiv a_8 \equiv 4 \pmod{14}$, azaz

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{2008} + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^{2008}$$

4 maradékot ad 14-gyel osztva.

Most nézzük meg újra a binomiális tételből származó megoldást:

$a_n = 2(7^n + \binom{n}{2}7^{n-2}40^2 + \dots + \binom{n}{2k}7^{n-2k}40^{2k} + \dots)$.

A képletből látszik, hogy a_n minden n-re páros. Páratlan n-re az utolsó tag $n \cdot 7 \cdot 40^{n-1}$, azaz minden tag osztható 7-tel, tehát 14-gyel is.

Páros n-re $2 \cdot (2^{2k} \cdot 10^k) = 2 \cdot 40^k$ 14-es maradékát kell vizsgálni. A modulo 14 maradékok $\varphi(14) = \varphi(2 \cdot 7) = (2-1)(7-1) = 6$ periódus szerint ismétlődnek, $502 \equiv 4 \pmod 6$ és $2 \cdot 40^8 \equiv 2 \cdot 12^8 \equiv 4 \pmod{14}$.

Gyakorló feladatok.

1. Igazoljuk, hogy

$$(5+2\sqrt{23})^{2009} + (5+2\sqrt{23})^{2009}$$

pozitív egész szám! Mi lesz ennek a számnak az utolsó számjegye?

2. Igazoljuk, hogy

$$\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{10}{5+\sqrt{5}}}\right)^{1986} + \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{10}{5+\sqrt{5}}}\right)^{1986}$$

pozitív egész szám! Mi lesz ennek a számnak az utolsó számjegye?

3. Páratlan város

3.1. Vektorterek bevezető

A most következő témakörben szükség lesz néhány új fogalom bevezetésére. Ezért ezzel kezdeném a témakör tárgyalását.

Vektortér. A vektorfogalom már a 10. osztályban megjelenik. A vektor irányított szakaszok egy osztálya, melyet általában a helyvektorával, illetve a helyvektorának koordinátáival reprezentálhatunk.

Milyen műveleteket végezhetünk a vektorokkal? $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$

1. Összeadás: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
2. Skalárral való szorzás: $\lambda\boldsymbol{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2)$

Műveleti azonosságok. (Vektortér-axiómák)

1. Az összeadás kommutatív: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
2. Asszociatív: $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
3. Létezik nullelem az összeadásra nézve: $\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$
4. Minden elemnek van ellentettje az összeadásra nézve: $\forall\, \boldsymbol{v}\ \exists\ (-\boldsymbol{v})$, hogy $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$
5. Ha λ, μ skalárok, akkor $(\lambda\mu)\boldsymbol{v} = \lambda(\mu\boldsymbol{v})$
6. Minden $\boldsymbol{v}$-re $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$
7. Az összeadást és a skalárral való szorzást összekapcsoló azonosságok:

   $\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v}$
8. $(\lambda + \mu)\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{v}$

A fenti nyolc tulajdonságot nevezzük vektortér-axiómáknak. A továbbiakban a vektorfogalmunkat bővítjük, bevezetünk egy általános vektortér-fogalmat.

A vektorfogalom általánosítása előtt egy újabb definícióra van szükség:

Definíció. Legyen T egy legalább kételemű halmaz, melyen értelmezve van két művelet $(+, \cdot)$ az alábbi tulajdonságokkal:

1. Az *összeadás* $(+)$ asszociatív és kommutatív, létezik nullelem, és minden elemnek létezik ellentettje;

2. A *szorzás* $(\cdot)$ asszociatív, kommutatív, létezik egységelem, és minden nem 0 elemnek létezik (multiplikatív) inverze;

3. Bármely $a, b, c \in T$-re $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ teljesül (disztributivitás).

Ekkor T-t (kommutatív) testnek nevezzük.

Példák testre. Valós számok, racionális számok, modulo p maradékosztályok, ahol p prím (pl. $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$ stb.).

Feladat. *Az előbb felsorolt testekre ellenőrizni, hogy valóban igazak a testaxiómák!*

Definíció. A V halmazt vektortérnek nevezzük a T test felett, ha a V halmazon értelmezve van egy *összeadás* nevű művelet, amely bármely $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ elempárhoz egyértelműen hozzárendel egy V-beli elemet (ezt jelöljük $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$-vel). A T test (elemei a skalárok) és V elemei között pedig értelmezve van egy *skalárral való szorzás* nevű művelet, mely bármely T-beli λ skalárhoz és bármely V-beli $\boldsymbol{v}$ vektorhoz egyértelműen hozzárendel egy V-beli vektort, amit $\lambda\boldsymbol{v}$-vel jelölünk. Valamint ezekre a műveletekre a fenti nyolc tulajdonság mindegyike teljesül.

Eddig ismert vektortereink: síkvektorok ($\mathbb{R}^2$), térvektorok ($\mathbb{R}^3$).

Ezekben a példákban volt szemléletünk arról, hogy a vektorok *,,hogy néznek ki"*, de sokszor könnyebb volt kezelni a koordinátákkal megadott alakjukat. Ezt az alakot könnyen általánosíthatjuk n dimenzióra.

Legyen V olyan halmaz, melynek elemei $1 \times k$-as oszlopokból állnak, az oszlopok elemei a T testből kerülnek ki. Két ilyen oszlop összege az elemenként vett összegekből álló oszlop. A skalárral való szorzat pedig az elemenként vett szorzatokból álló oszlop. Ez a struktúra kielégíti a fenti vektortér-axiómákat, tehát V ezekre a műveletekre vektorteret alkot a T test felett.

Most térjünk vissza egy kicsit megint a síkvektorokra!

Honnan kaptuk a koordinátákat?

Adott Descartes-féle koordinátarendszerben adottak az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ bázisvektorok, ekkor tetszőleges $\boldsymbol{v}$ síkvektor egyértelműen felírható $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j}$ alakban. Ekkor $\boldsymbol{v}$ koordinátái: (v_1, v_2).

Miért pont $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$-t választottuk bázisvektornak? Lehetett volna mást? Mik azok a tulajdonságok, amiknek teljesülnie kell, hogy vektorok bázist alkossanak?

1. A sík összes vektora felírható $\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$ alakban, azaz $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ kifeszítik (generálják) a síkot

2. Az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ vektorok nem fejezhetők ki egymás lineáris kombinációjaként (lineárisan függetlenek). (Két vektor $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ lineárisan független, ha $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ és $\beta = 0$).

Egy vektortér bázisának ezzel a két tulajdonsággal kell rendelkeznie.

Definíció. A $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n$ vektorok bázist alkotnak V-ben, ha

1. a $\lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2 + ... + \lambda_n\boldsymbol{b}_n$ lineáris kombináció csak akkor $\boldsymbol{0}$, ha minden i-re $\lambda_i = 0$;

2. minden $\boldsymbol{v} \epsilon V$ előáll $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + ... + \alpha_n\boldsymbol{b}_n$ alakban.

Tétel. *Bizonyítás nélkül.* Egy vektortérben minden bázis azonos elemszámú, ezt az elemszámot nevezzük a vektortér dimenziójának. (A dimenzió megegyezik még a vektortérből maximálisan kiválasztható független vektorok számával, illetve minimális generátorrendszer elemszámával).

Tehát $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ helyett bármely két független vektort választhatjuk bázisnak.

Gyakorló feladatok.

1. Független-e a következő két síkvektor $\boldsymbol{u} = (2, 3), \boldsymbol{v} = (4, 1)$?
2. Tudunk-e a (2,3), (4,2) síkvektorokhoz egy olyan harmadik vektort választani, hogy függetlenek legyenek? Miért?
3. Maximum hány független vektor adható meg a térben? Adj meg ennyi független vektort!

Skaláris szorzat. Ez a művelet két vektorhoz rendel egy skalár értéket úgy, hogy a két vektor megfelelő koordinátáit össze-szorozzuk, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk.

Példa. Az (1,2), (3,4) vektorok skaláris szorzata: $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$

3.2. Páratlan város

Feladat. *Egy 10 000 lakosú város egyesületeket akar alapítani, úgy hogy minden egyesület taglétszáma páratlan legyen, de bármely két egyesület közös taglétszáma viszont páros. Maximálisan hány egyesületet tudnak létesíteni?*

10 000 egyesületet létre tudnak hozni a szabálynak megfelelően, pl. ha minden egyesület 1 főből áll.

Kérdés. *Lehet ennél többet csinálni?*

Állítás. *Nem.*

Fogalmazzuk át a feladatot a matematika nyelvére.

Feladat. *Egy k elemű halmaznak maximálisan hány olyan részhalmaza van, amelyekre igaz, hogy minden részhalmaz elemszáma páratlan, de bármely két részhalmaz metszete páros elemszámú?*

Állítás. *Maximum k ilyen részhalmaz adható meg.*

Bizonyítás. Legyen H az alaphalmaz ($|H| = k$), $H_1, H_2, ..., H_n \subseteq H$ olyan részhalmazok, melyekre $\forall i \quad |H_i| =$ páratlan, és $\forall i \neq j \quad |H_i \cap H_j| =$ páros.

Most pedig a halmazoknak megfeleltetünk k-dimenziós oszlopvektorokat, és kihasználva azok tulajdonságait könnyedén bizonyítani tudjuk a tételt. Tehát a H_i halmazhoz rendeljük azt a $\boldsymbol{h}_i$ vektort, melynek j-edik komponense aszerint 1 vagy 0, hogy a j-edik elem eleme-e H_i-nek vagy sem.

Miért jó nekünk ez a megfeleltetés? Vegyük két ilyen vektor skaláris szorzatát, és nézzük meg, mit kapunk: $\boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{h}_j = |H_i \cap H_j|$. Nekünk elég a metszet elemszámának paritása is, ezért elegendő a modulo 2 test feletti vektorteret néznünk.

Már az előbb tisztáztuk, hogy k darab ilyen H_i megadható (pl. egyelemű részhalmazok). Kell még, hogy több viszont nem adható meg.

Ehhez elegendő lenne, ha bizonyítani tudnánk, hogy a H_i-knek megfeleltetett $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, hiszen T^k-ban maximálisan k darab független vektor választható ki.

Tehát vegyük a $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_n$ vektorok egy lineáris kombinációját:

$$\lambda_1 \boldsymbol{h}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{h}_2 + ... + \lambda_n \boldsymbol{h}_n = \boldsymbol{0} \qquad / \cdot \boldsymbol{h}_i$$

$$\lambda_1 \boldsymbol{h}_1 \cdot \boldsymbol{h}_i + \lambda_2 \boldsymbol{h}_2 \cdot \boldsymbol{h}_i + ... + \lambda_n \boldsymbol{h}_n \cdot \boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{h}_i = 0$$

$$\boldsymbol{h}_j \cdot \boldsymbol{h}_i = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ 1 & \text{ha } i = j \end{cases}$$

Azaz $\lambda_i = 0$ minden i-re. Tehát $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, tehát $n \leq k$. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

Második megoldás. Ebben a megoldásban a mátrixok tulajdonságait fogjuk kihasználni. Itt is k-dimenziós vektorokat feleltetünk meg a H_j részhalmazoknak az előző példában definiált módon. Ekkor azt a $(k \times n)$-es mátrixot, melynek oszlopai ezek a $\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_n$ vektorok, a $H_1, ..., H_n$ halmazrendszer illeszkedési mátrixának nevezzük.

Legyen tehát A ez a mátrix: $A = (\boldsymbol{h}_1, ...\boldsymbol{h}_n)$, és $B = A^T A$ mátrix (A^T az A transzponáltja, azaz A főátlóra vett tükörképe). Ekkor a B mátrix $\beta_{i,j}$ elemei éppen a megfelelő H_i, H_j halmazok metszetének elemszámával lesznek egyenlők. Ha a mátrixokat a modulo 2 test felett nézzük, akkor pedig a megfelelő metszetek paritása lesz a B mátrix i, j-edik eleme. A feltételek szerint B az $n \times n$-es mátrix egységmátrix, tehát a rangja $r(B) = n$. (*Mátrix rangja*: oszlopait (illetve sorait) vektoroknak tekintve a maximálisan kiválasztható független vektorok száma.) *Bizonyítható*:

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B)).$$

Innen következik, hogy

$$n = r(B) = r(A^T A) \leq r(A) = r(A^T) = k.$$

3.3. Hármas város

Feladat. *Hármas városnak k lakója van. Itt is egyesületeket alapítanak, mégpedig úgy, hogy az egyesületek taglétszáma nem osztható 3-mal, de bármely két egyesület közös taglétszáma viszont igen. Maximum hány egyesület lehet Hármas városban?*

Megoldás. k db egyesületet meg tudunk adni, az 1 főből álló egyesületek jók lesznek. A kérdés az, hogy meg lehet-e adni ennél többet. A válasz most is az, hogy nem. Sőt a Páratlan város feladat előbbi bizonyítása szó szerint átvihető erre a feladatra.

Legyen H egy k elemű halmaz, $H_1, ..., H_n \subseteq H$, és legyenek a $\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_n$ a H_i részhalmazokhoz tartozó vektorok a $\mathbb{Z}_3$ test felett. Hármas város egyesületeire a következő összefüggés igaz:

$$|H_i \cap H_j| \equiv \begin{cases} 0 \pmod 3 & \text{ha } i \neq j \\ 1 \text{ v. } 2 \pmod 3 & \text{ha } i = j \end{cases}$$

Innen a következő összefüggést kapjuk a $\boldsymbol{h}_i$ vektorokra:

$$\boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{h}_j = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ 1 \text{ v. } 2 & \text{ha } i = j \end{cases}$$

Most is azt kell belátnunk, hogy ekkor a $\boldsymbol{h}_i$ vektorok szükségképpen függetlenek, amiből már következik, hogy maximum k db ilyen vektor lehet, azaz a megfelelő elemszámú részhalmazok száma is legfeljebb k. Vegyük a $\boldsymbol{h}_i$ vektorok egy lineáris kombinációját:

$$\lambda_1\boldsymbol{h}_1 + \lambda_2\boldsymbol{h}_2 + ... + \lambda_n\boldsymbol{h}_n = \mathbf{0} \qquad / \cdot \boldsymbol{h}_i$$

$$\lambda_1 \underbrace{\boldsymbol{h}_1 \cdot \boldsymbol{h}_i}_{=0} + ... + \lambda_i \underbrace{\boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{h}_i}_{\neq 0} + ... + \lambda_n \underbrace{\boldsymbol{h}_n \cdot \boldsymbol{h}_i}_{=0} = 0 \cdot \boldsymbol{h}_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0.$$

3.4. Négyes város

Feladat. *A feladat hasonló az előbbiekhez, Négyes város lakossága egyesületeket alapít, bármely egyesület létszáma nem osztható néggyel, de a közös tagok száma igen. Hány egyesület lehet Négyes városban?*

Megoldás. A válasz ismét k, de a Páratlan város problémánál ismertetett korábbi bizonyítás itt már nem vihető át szó szerint, mint az előző esetben, mivel $\mathbb{Z}_4$ nem test. Ezért kicsit módosítanunk kell a gondolatmeneten.

Most a megfelelő $H_1, ..., H_n \subseteq H$ részhalmazokhoz rendelt $\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_n$ vektorokat a racionális számok teste felett vizsgáljuk. Most is azt kell belátnunk, hogy lineárisan függetlenek.

Erre indirekt bizonyítást adunk:

Tegyük fel, hogy $\exists \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{Q}$ nem mind nulla számok, melyekre:

$$\gamma_1 \boldsymbol{h}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{h}_2 + ... + \gamma_n \boldsymbol{h}_n = \mathbf{0}$$

A kapott egyenletet a γ_i számok nevezőinek legkisebb közös többszörösével végigszorozva, majd a kapott számokat a legnagyobb közös osztójukkal leosztva, relatív prím egész együtthatókat kapunk $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$:

$$\delta_1 \boldsymbol{h}_1 + \delta_2 \boldsymbol{h}_2 + ... + \delta_n \boldsymbol{h}_n = \mathbf{0} \qquad / \cdot \boldsymbol{h}_i$$

$$\delta_1 \underbrace{\boldsymbol{h}_1 \cdot \boldsymbol{h}_i}_{4|} + ... + \delta_i \underbrace{\boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{h}_i}_{4\nmid} + ... + \delta_n \underbrace{\boldsymbol{h}_n \cdot \boldsymbol{h}_i}_{4|} = \underbrace{0 \cdot \boldsymbol{h}_i = 0}_{4|}$$

Amiből az következik, hogy minden i-re $2|\delta_i$, ami ellentmond annak, hogy a δ_i-k relatív prímek.

Ebből azt kaptuk, hogy a $\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_n$ vektorok lineárisan függetlenek a $\mathbb{Q}$ test felett, tehát maximum k olyan részhalmaz adható meg, amelyekre a feltétel teljesül, k darab ilyen pedig megadható, ezek lehetnek mondjuk például a triviális egyelemű halmazok.

3.5. Még egy variáns

Feladat. *Legyen H egy k elemű halmaz, $H_1, \ldots, H_n$ részhalmazok, melyekre $|H_i| \equiv 2$ (mod 3) és $|H_i \cap H_j| \equiv 1$ (mod 3), ha $i \neq j$.*

(a) Maximum mennyi lehet n, ha k osztható 3-mal?

(b) És ha k nem osztható 3-mal?

Megoldás. A megoldás során ismét vektorokkal reprezentáljuk a megfelelő részhalmazokat. Ezekre most a következők teljesülnek:

$$\boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{h}_j \equiv \begin{cases} 2 \pmod 3 & \text{ha } i = j \\ 1 \pmod 3 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Tegyük fel indirekt, hogy megadható $n = k + 1$ ilyen vektor és írjuk fel egy lineáris kombinációjukat:

$$\lambda_1 \boldsymbol{h}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{h}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{h}_n = \boldsymbol{0}.$$

Ezt sorban végigszorozva $\boldsymbol{h}_i$-kel a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{gathered} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + 2\lambda_n = 0 \end{gathered}$$

A szomszédos sorokat egymásból kivonva, ezt kapjuk:

$$\begin{gathered} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} - \lambda_n = 0 \\ \lambda_n - \lambda_1 = 0. \end{gathered}$$

Innen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n.$$

Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$(n+1)\lambda_1 = 0.$$

Ekkor

$$(k+1+1)\lambda_1 = 0.$$

Mivel $3|k$, ezt kapjuk:

$$2\lambda_1 = 0.$$

Azaz

$$\forall i \quad \lambda_i = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\boldsymbol{h}_i$-k függetlenek, amiből az következne, hogy $n \leq k$, ami ellentmond annak, hogy $n = k+1$.

Tehát legfeljebb k részhalmaz adható meg, ha k osztható hárommal.

Valóban meg is adható k db ilyen részhalmaz. Például legyenek H_i-k olyanok, hogy mindig pontosan egy elem hiányzik belőlük, pl. $H_i = H \setminus \{x_i\}$.

A (b) esetben megadható $(k-1)$ db ilyen részhalmaz, pl. $H_i = \{x_k\} \cup \{x_i\}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Több viszont nem. Ugyanis, ha feltesszük, hogy megadható k ilyen halmaz, illetve k darab megfelelő tulajdonságú vektor, akkor a $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektort hozzávéve független vektorokat kapunk. Legyen

$$\lambda \boldsymbol{j} + \lambda_1 \boldsymbol{h}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{h}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{h}_n = \mathbf{0}.$$

Az egyenletet $\boldsymbol{j}$-vel végigszorozva kapjuk:

$$k\lambda + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + 2\lambda_k = 0.$$

$\boldsymbol{h}_i$-kel sorban végigszorozva kapjuk

$$2\lambda + 2\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 0$$

$$2\lambda + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 0$$
$$\vdots$$
$$2\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + 2\lambda_k = 0.$$

A szomszédos egyenleteket egymásból kivonva ismét azt kapjuk, hogy

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k.$$

Azaz

$$k\lambda + 2k\lambda_1 = 0$$
$$2\lambda + (k+1)\lambda_1 = 0.$$

A két egyenletet egymásból kivonva a

$$(k-2)\lambda + (k-1)\lambda_1 = 0$$

egyenlethez jutunk. Mivel $k-2$ és $k-1$ közül az egyikük nem osztható 3-mal, $\lambda = 0$ vagy $\lambda_1 = 0$. Az első esetben $2k\lambda_1 = 0$-ból (mivel $3 \nmid k$) $\lambda_1 = 0$, a második esetben $k\lambda = 0$, melyből $\lambda = 0$. Tehát azt kaptuk, hogy $\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_k, \boldsymbol{j}$ függetlenek, azaz $k+1 \leq k$, ami ellentmondás. Ezzel a feladatot bizonyítottuk.

3.6. Egyforma metszetek

Feladat. *Legyen H egy k elemű halmaz, hány olyan részhalmaz adható meg, amelyek közül bármely kettőnek pontosan egy közös eleme van?*

Megoldás. k db részhalmaz megadható:

$$H_1 = \{x_1\}, \qquad H_i = \{x_1, x_i\}, \quad \text{ha} \quad i > 1.$$

Több viszont nem. Ehhez elég belátnunk, hogy a H_i-ket reprezentáló $\boldsymbol{h}_i$ vektorok lineárisan függetlenek a valós test felett. Szokás szerint vegyük $\boldsymbol{h}_i$-k egy lineáris kombinációját:

$$\lambda_1 \boldsymbol{h}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{h}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{h}_n = \boldsymbol{0}.$$

Vegyük ennek az önmagával vett skalárszorzatát:

$$(\lambda_1 \boldsymbol{h}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{h}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{h}_n) \cdot (\lambda_1 \boldsymbol{h}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{h}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{h}_n) = 0$$

A $\lambda_1 \boldsymbol{h}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{h}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{h}_n = \mathbf{0}$ vektor koordinátái valahány λ_i összegéből állnak, ilyen tagoknak vesszük az önmagukkal vett szorzatát. A skaláris szorzatban lesz $|H_i|$ db λ_i^2 és lesznek $\lambda_i \lambda_j$ szorzatok, a kérdés, hogy ezekből hány van. Mindegyik ilyen tag egy-egy szorzatból jön, tehát a skaláris szorzat így néz ki:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 |H_i| + \sum_{1 \leq j \leq i} 2\lambda_i \lambda_j = 0.$$

Ezt átírhatjuk a következő alakba:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 |H_i| + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 (|H_i| - 1) = 0.$$

Legfeljebb egy olyan H_i van, melyre $|H_i| = 1$, a többi részhalmaz elemszáma szigorúan nagyobb, mint 1. Tehát a fenti egyenlet csak úgy teljesülhet, ha minden $\lambda_i = 0$, vagyis ha a $\boldsymbol{h}_i$ vektorok függetlenek. Ebből az következik, hogy k-nál több ilyen részhalmazt nem lehet megadni.

4. Gráfok és mátrixok

4.1. Mátrixok bevezető

Mielőtt a gráfok ábrázolási lehetőségeinek tárgyalását megkezdenénk, elengedhetetlen, hogy tisztázzuk a mátrix fogalmát.

A mátrixokat általában a lineáris egyenletrendszerek elméleténél szokták bevezetni, most a rövidség kedvéért a formális definícióval kezdjük.

Definíció. Legyen T test, k, n adott pozitív egészek. Ekkor a T test feletti $(k \times n)$-es mátrixon olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek k sora és n oszlopa van, és amelynek elemei a T testből valók.

Példa. $T = \mathbb{Q}, \quad A \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 4 \\ 5 & 6 & \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

A továbbiakban elsősorban a valós számok feletti mátrixokkal fogunk foglalkozni.

Mátrixműveletek. A továbbiakban $A, B \in T^{k\times n}$ mátrixok, $\lambda \in T$ skalár.

1. *Összeadás:* Az A és B mátrixok összegén azt a $T^{k\times n}$-es mátrixot értjük, amit úgy kapunk, hogy A és B megfelelő komponenseit összeadjuk:

$$A + B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k,1} & \alpha_{k,2} & \cdots & \alpha_{k,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k,1} & \beta_{k,2} & \cdots & \beta_{k,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{1,1} + \alpha_{1,1} & \beta_{1,2} + \alpha_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} + \alpha_{1,n} \\ \beta_{2,1} + \alpha_{2,1} & \beta_{2,2} + \alpha_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n} + \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k,1} + \alpha_{k,1} & \beta_{k,2} + \alpha_{k,2} & \cdots & \beta_{k,n} + \alpha_{k,n} \end{pmatrix}$$

2. *Skalárral való szorzás:* A $\lambda A \in T^{k \times n}$-es mátrix elemei az A mátrix megfelelő elemeinek λ szorosai:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{1,1} & \lambda\alpha_{1,2} & \cdots & \lambda\alpha_{1,n} \\ \lambda\alpha_{2,1} & \lambda\alpha_{2,2} & \cdots & \lambda\alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{k,1} & \lambda\alpha_{k,2} & \cdots & \lambda\alpha_{k,n} \end{pmatrix}$$

A mátrixok harmadik művelete a mátrixszorzás, ami lényegesen különbözik az eddig megszokott műveletektől.

Mielőtt definiálnánk a mátrixszorzást, vegyük a következő feladatot:

Az alábbi táblázat vevőnként tartalmazza, hogy melyik vevő mennyit akar vásárolni az adott termékből:

Vevők	A vevő	B vevő
Tej	2 l	2 l
Kenyér	1 kg	3 kg

A következő táblázat pedig üzletenként tartalmazza a termékek egységárait:

Üzletek	Tej	Kenyér
ABC	190 Ft	236 Ft
CBA	185 Ft	250 Ft
Reál	179 Ft	259 Ft

Arra vagyunk kiváncsiak, hogy melyik vásárlónak hol éri meg vásárolni, hogy a legkevesebbet fizessen. A választ szintén egy táblázatban szeretnénk megadni, amelynek annyi sora van, ahány üzlet és annyi oszlopa, ahány vásárló van, és a táblázat i, j-edik eleme tartalmazza, hogy a j-edik vevő mennyit fizetne az i-edik boltban. Pl. A vevő a CBA-ban ennyit fizetne:

$$2 \cdot 185 + 1 \cdot 250 = 620.$$

Azaz a táblázat celláinak értékeit így számoljuk ki: az *Üzletek* táblázat sorainak megfelelő elemeit összeszorozzuk a *Vevők* táblázat megfelelő oszlopainak elemeivel, majd ezeket összeadjuk:

	A vevő	B vevő
ABC	$2 \cdot 190 + 1 \cdot 236 = 616$	$2 \cdot 190 + 3 \cdot 236 = 1088$
CBA	$2 \cdot 185 + 1 \cdot 250 = 620$	$2 \cdot 185 + 3 \cdot 250 = 1120$
Reál	$2 \cdot 179 + 1 \cdot 259 = 617$	$2 \cdot 179 + 3 \cdot 259 = 1135$

A mátrixszorzást is így fogjuk definiálni:

Legyen $A \in T^{n \times k}, B \in T^{k \times m}$ mátrix, ekkor az A, B mátrixok szorzatán azt az $n \times m$-es mátrixot értjük, amelynek (i, j)-edik elemét úgy kapjuk, hogy az A i-edik sorának megfelelő elemeit összeszorozzuk a B j-edik oszlopának megfelelő elemeivel, és a szorzatokat összeadjuk. Formálisan:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,k} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,m} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k,1} & \beta_{k,2} & \cdots & \beta_{k,m} \end{pmatrix} = C = (c_{i,j})$$

$$c_{i,j} = \alpha_{i,1}\beta_{1,j} + \alpha_{i,2}\beta_{2,j} + \cdots + \alpha_{i,k}\beta_{k,j}.$$

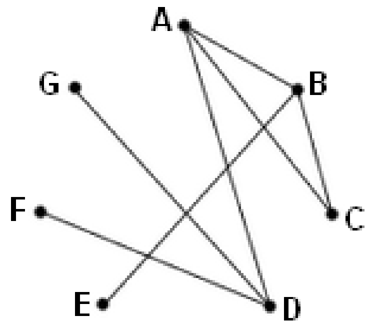
Ha az A mátrix sorait illetve a B mátrix oszlopait k dimenziós vektoroknak tekintjük, akkor a C szorzatmátrix (i, j)-edik eleme az A i-edik sorvektorának a B j-edik oszlopvektorával vett skaláris szorzata.

4.2. Vasúti hálózat

A gráfok témakör bevezetését egy példával kezdjük:

Feladat. *Van hét település: A, B, C, D, E, F és G. A városok a következő vasúti összeköttetéssel rendelkeznek: Az A várost a B, C és D várossal vasútvonal köti össze, B városból C és E városokba, D városból F és G településekhez vezet közvetlen vasútvonal. Hogyan szemléltetnéd a feladatot? Milyen útvonalon juthatunk el vonattal a leggyorsabban C városból F városba? Eljuthatunk-e vasúton bármely településről bármely településre?*

Megoldás. A feladatot szemléltethetjük például az alábbi módon:



Azaz a városokat a pontokkal, a köztük lévő vasúti összeköttetést pedig vonalakkal. Az ilyen struktúrákat nevezzük gráfoknak, azaz az olyan *,,valamiket"*, amik pontokból és az őket összekötő vonalakból állnak. Ez nem egy korrekt definíció, de ha úgy tekintünk a vonalakra (élekre), mint a pontokból képzett párokra, hamar eljutunk a korrekt definícióhoz.

Definíció. A gráf egy rendezett pár ($G = (V, E)$), ahol V nem üres halmaz (csúcsok halmaza), E pedig a V-ből képzett rendezett párok egy részhalmaza (élek halmaza).

A fenti definícióban nem mondtunk olyat, hogy a gráf csúcsai pontok, élei vonalak lennének. A gráf pontokkal és vonalakkal való ábrázolása valójában azért jó, mert átláthatóvá teszi számunkra a gráfot.

Miért is van szükség gráfokra? Sok valós életbeli probléma gyakran visszavezethető valamilyen gráfelméleti problémára, ilyenek a példánkban is látott vasúti útvonalak, egyéb úthálózatok, telefon- és úthálozatok, kereskedelmi útvonal tervezés stb. Ezek a gráfok általában már olyan nagyok, hogy csak számítógéppel tudjuk kezelni őket, ezért mindenképpen szükség van a gráfok olyan ábrázolására, amelyeket a számítógép is kezelni tud, de a szemléletünk kialakításakor azért gyakran fogunk a pontos-vonalas ábrázolásra utalni.

Az egyik lehetséges ábrázolásmód, ha a gráfot a szomszédsági mátrixával ábrázoljuk.

Az n csúcsú G gráf szomszédsági mátrixán azt az $A(G) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mátrixot értjük, melynek elemei:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{ha az } i\text{-edik pontból nem megy él a } j\text{-edik pontba} \\ k & \text{ha az } i\text{-edik pontból } k \text{ db él megy a } j\text{-edik pontba} \\ l & \text{ha } i = j \text{ és az } i\text{-ik ponthoz } l \text{ db hurokél illeszkedik} \\ & \text{(olyan él, melynek kezdő és végpontja megegyezik).} \end{cases}$$

A feladatban szereplő gráf szomszédsági mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kérdés. *Miért jó ez az ábrázolás?* Azonnal megállapítható, hogy két csúcs között megy-e él, csak a mátrix megfelelő elemét kell megnézni. Csúcsok fokszáma is gyorsan kiszámítható, az adott csúcs sorában lévő elemeket kell összeadni (irányított gráf esetén a csúcs oszlopában lévőket is). Új élekkel könnyen bővíthető.

Kérdés. *Milyen összefüggések vannak még a gráf és annak szomszédsági mátrixa között?*

- Ha a gráf irányítatlan, akkor a szomszédsági mátrixa szimmetrikus.
- Ha nincsenek bene hurokélek, akkor a mátrix főátlójában minden elem 0.
- Ha nincsenek a gráfban párhuzamos élek, akkor a mátrix elemei 0-k vagy 1-esek.
- A szomszédsági mátrix t-edik hatványának (i, j)-edik eleme megadja, hogy hány t hosszúságú út vezet az i-edik csúcsból a j-edik csúcsba. (*Ezt hamarosan bizonyítjuk.*)

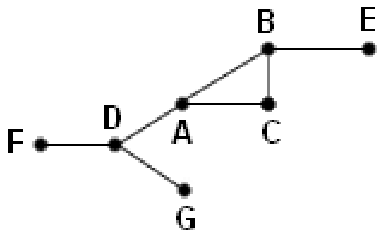
Tétel. *Legyen a G gráf szomszédsági mátrixa $A(G)$, ekkor az A^t mátrix (i, j)-edik eleme éppen az i-edik csúcsból a j-edik csúcsba vehető t hosszúságú utak száma.*

Bizonyítás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Először belátjuk $t = 2$-re. Az A^2 mátrix (i, j)-edik elemét az A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának skaláris szorzatából kapjuk. A skalárszorzatban a k-adik tag éppen a gráf i-edik csúcsából a k-adik csúcsba illetve a k-adik csúcsból a j-edik csúcsba vezető élek számának a szorzata, ami éppen az (i, j) csúcsok közötti 2 hosszú utak számával egyenlő.

Most pedig tegyük fel, hogy $(t > 2)$ $t-1$-re már bizonyítottuk az állítást. A definíció szerint $A^t = A^{t-1}A$, tehát az A^t mátrix (i, j)-edik elemét az a A^{t-1} i-edik sorának és az A mátrix j-edik oszlopának skaláris szorzatából kapjuk, melyben a k-adik összeadandó az i-edik csúcsból a k-adik csúcsba vezető $t-1$ hosszú utak számának és a k-adik csúcsból j-edik csúcsba vezető élek számának a szorzata. A skalárszorzat ezek összegzése minden k-ra, tehát az i-ből j-be vezető t hosszú utak száma.

Feladat. *Keressünk legrövidebb utat C és F között!*

Ehhez járjuk be a gráfot az alábbi módon:



Az ábrából kitűnik, hogy F csak 1 élre illeszkedik (F városba csak egy vasútvonalon lehet eljutni), tehát az út első éle $e_1 = (F, D)$. D-ből nem megy közvetlen él C-be, két másik csúcsba, A-ba és G-be viszont igen. A-ból már megy közvetlen él C-be, így meg is kaptuk az F és C közötti utat: $F - D - A - C$.

Kérdés. *Hogyan keresünk legrövidebb utat csúcsmátrixszal megadott gráfban?*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Most is induljunk ki F-ből. F szomszédait vizsgáljuk, ehhez azt kell megnéznünk, hogy hol van 1-es F oszlopában: a D sorában. Ezért most a D oszlopában lévő elemeket vizsgáljuk. Van-e a C sorában 1-es? Nincs. Akkor végignézzük, hogy hol van. Az A sorában van, megnézzük, megy-e A-ból C-be él, ha igen, akkor készen vagyunk.

Ha nem menne él A-ból C-be, akkor folytatnánk tovább az algoritmust. Végignéznénk D további szomszédait, illetve azok szomszédait, amíg C-vel szomszédosat nem találunk. Így valóban a legrövidebb utat kapjuk. (*Bizonyítás hamarosan.*)

Ha jól meggondoljuk, mindkét ábrázolásban ugyanazt az elvet követjük. Az eljárást szélességi keresésnek vagy szélességi bejárásnak nevezzük. A gráfbejárási-algoritmusok nagyon hasznosak, mert segítségükkel sok gráfokkal kapcsolatos problémára tudunk algoritmust találni, mint például az összefüggőség eldöntése, minimális feszítőfa keresése stb.

Szélességi bejárás. A bejárást egy csúcsból indítjuk, hogy melyik ez a csúcs, az dönti el, hogy éppen melyik gráfelméleti problémára keressük a választ. Ha például azt akarjuk eldönteni, hogy összefüggő-e a gráf, akkor tetszőleges csúcsból indulhatunk, mivel az összefüggőség ekvivalens azzal, hogy a gráf tetszőleges csúcsából eljuthatunk bármely másik csúcsba. Legrövidebb út keresésénél természetesen az út kezdőpontjából érdemes indítani a bejárást.

Az algoritmus rekurzív. Minden szinten az aktuális kiindulási pont szomszédait keressük, mégpedig azokat, amelyeket még nem érintettünk a bejárás során.

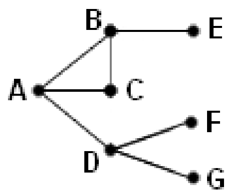
Legrövidebb út keresés. Adott egy összefüggő (irányítatlan és súlyozatlan) G gráf, és adott két pontja: k (kezdőpont), n (végpont). Keressünk legrövidebb utat k és n között! Alkalmazzuk a szélességi bejárás előbb megismert módszerét a k kezdőpontból indítva. Az algoritmus lépései során először azokba a pontokba jutunk el, ahova vezet él k-ból, a következő lépésben pedig azokba a pontokba, ahova 2-hosszú út vezet k-ból és így tovább. Ha tehát valamelyik lépésben eljutunk v-hez, akkor a bejárás során épp a legrövidebb úton jutottunk el k-ból v-be. Ahhoz, hogy ezt az utat meg is tudjuk adni, az algoritmus során nyilván kell tartanunk, hogy honnan (melyik pontból) érkeztünk meg az aktuális pontba.

Kérdés. *Eljuthatunk-e minden városból minden városba?*

A kérdés ekvivalens azzal a feladattal, hogy összefüggő-e a kapott gráf. Tehát azt kell megvizsgálnunk, hogy megy-e a gráf bármely két pontja között út. (Bármely két város között van-e vasúti összeköttetés.)

Irányítatlan gráf esetében az összefüggőség ekvivalens azzal, hogy van olyan pont a gráfban, ahonnan bármely másik csúcsba el lehet jutni (hiszen ekkor ezen a csúcson át bármely 2 másik csúcs között is lesz út). Ez azt jelenti, hogy az összefüggőség igazolásához elegendő egy csúcsot találni, ahonnan minden pontba eljuthatok.

Jelen feladatban induljunk ki A-ból:



A szomszédai: B, C, D
B új szomszédai: E, C
C nincs új szomszédja
D új szomszédai: F, G

Minden csúcsba el tudtunk jutni, tehát a gráf összefüggő.

A szélességi keresés során a gráf egy feszítőfáját kaptuk meg, azaz a gráf olyan részgráfját, amely körmentes és a gráf összes csúcsát tartalmazza.

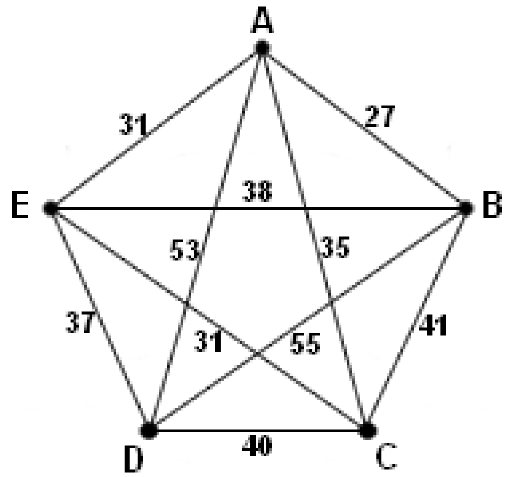
Valós életből vett problémák megoldásakor gyakran van szükségünk arra, hogy feszítőfát (illetve minimális feszítőfát) keressünk a gráfban. Az ilyen problémák megoldására is ismerünk alkalmas algoritmusokat.

4.3. Minimális költségű feszítőfa keresés

Feladat. *Egy cég öt irodája között a számítógépes összeköttetés kiépítési költségeit az alábbi táblázat tartalmazza 1000 Ft-ban. Tervezze meg a legolcsóbb hálózatot, úgy hogy mindenki mindenkivel kapcsolatba tudjon lépni!*

A	B	C	D	E	
–	27	35	53	31	A
	–	41	55	38	B
		–	40	31	C
			–	37	D
				–	E

Hogy könnyebben el tudjuk képzelni, érdemes felrajzolni a gráfot:



A következőkben a Kruskal-algoritmus lépéseit vesszük sorra, mellyel a minimális feszítőfát kapjuk eredményül:

Először is rendezzük a gráf éleit nagyság szerint:

(A, B) 27

(A, E) 31

(E, C) 31

(A, C) 35

(E, D) 37

(C, D) 40

(B, C) 41

(A, D) 53

(B, D) 55

Az algoritmus lényege, hogy minden lépésben azt az élet vesszük be a feszítőfába, amelynek a költsége a legkisebb és még nem zárunk vele kört:

Tehát bevesszük (A, B)-t, (A, E) nem zár kört az előzőekkel, ezért bevehetjük, (E, C)-t szintén. (A, C) kört zárna, ezért azt már nem vesszük be, végül pedig bevesszük (E, D)-t. A gráf összköltsége: $27 + 31 + 31 + 37 = 126$.

Állítás. *Összefüggő gráf esetén a Kruskal-algoritmus valóban minimális költségű feszítőfát állít elő.*

Bizonyítás. Legyen F a Kruskal-algoritmussal kapott gráf.

(1) *F feszítőfa:* körmentes, hiszen olyan élet nem vettünk be, amellyel kört zártunk volna, és a gráf minden csúcsát tartalmazza, hiszen minden olyan élet bevettünk, amellyel nem zártunk kört.

(2) *F valóban minimális:* Ezt indirekt bizonyítjuk. Tekintsük G éleit a súlyuk szerint növekvő sorrendben. Tegyük fel, hogy van olyan F_0 feszítőfa, melynek összköltsége kisebb, mint F összköltsége (jelölés: $s(F_0) < s(F)$), és az élek előbbi sorrendjében a lehető legtovább megegyezik F-fel. Legyen az i-edik él (e_i) az első olyan él, amiben F és F_0 különböznek. Ekkor ez az él F éle kell, hogy legyen, a mohó választás miatt, hiszen ha e_i-t nem választottuk volna F-be, az azt jelentené,

hogy e_i kört zár F korábbi éleivel, amikben viszont F és F_0 megegyeznek. Vegyük hozzá ezt az élet F_0-hoz, ekkor egy kör keletkezik, melynek van olyan éle (e) melyre $s(e) \geq s(e_i)$. Ugyanis, ha minden él költsége kisebb lenne a körön e_i költségénél, akkor mindegyiket előbb választottuk volna e_i-nél és így e_i-t nem választhattuk volna a mohó algoritmus során. Cseréljük ki e-t e_i-re F_0-ban, a kapott F_0' fa költsége legfeljebb akkora, mint F_0-é, tehát ő is kisebb költségű, mint F és eggyel több élben egyezik meg F-fel, ami ellentmond F_0 választásának.

4.4. Hírközlési rendszer

Feladat. *Tekintsünk olyan hírközlési rendszert, amelyben bármely két pont között legalább az egyik hírt tud közölni a másikkal. Jelöljük C-vel a rendszer szomszédsági mátrixát! Írjunk algoritmust, amely C ismeretében eldönti, hogy két pont között van-e egyirányú, illetve kétirányú hírközlési kapcsolat!*

Megoldás. Itt ismét a szélességi bejárás algoritmusát fogjuk alkalmazni. Az egyirányú összeköttetés megállapításához a kezdőpontból, a kétirányú összeköttetés eldöntéséhez pedig mindkét végpontból kell indítanunk a bejárást. Ha a bejárás során eljuthatunk a végpontba, akkor van a két pont között összeköttetés. Az algoritmus során nyilvántartjuk egy halmazban, hogy mely pontokat érintettük már, legyen ez a halmaz H. Illetve egy sorozatban tároljuk azokat a csúcsokat, amelyeket már elértük, de még nem vizsgáltuk meg a szomszédaikat, jelöljük ezt a sorozatot S-sel.

Kezdetben H és S üresek. Az algoritmus rekurzív: Az aktuális kezdőpontról megvizsgáljuk, hogy szerepel-e H-ban, ha nem, akkor beletesszük S-be, majd az eljárást alkalmazzuk az aktuális pont szomszédaira. Ehhez azt kell megvizsgálni, hogy az aktuális pont sorában a csúcsmátrixban hol szerepelnek 1-esek, és amelyik oszlopban 1-es van, azokban a sorokat az előbbi algoritmus szerint vizsgáljuk.

4.5. Gyakorló feladatok

1. Az A mátrix öt megfigyelési pont közötti hírközlés lehetőségeit rögzíti.

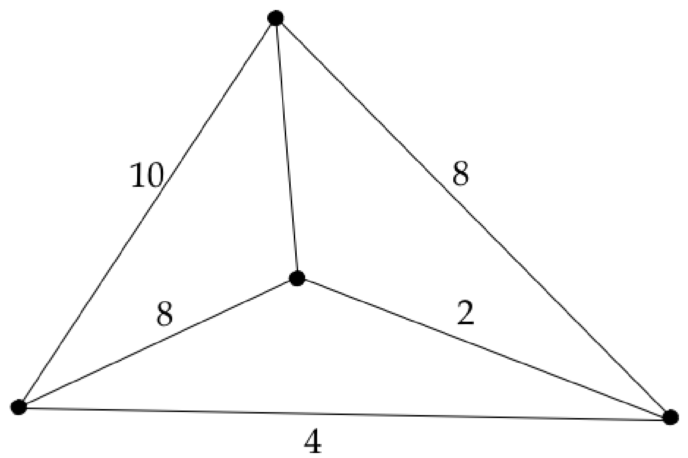
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Van -e olyan megfigyelési pont, amely nem kaphat hírt semelyik másiktól sem?

   (b) Van-e olyan megfigyelési pont, amely nem tud hírt közölni semelyik másikkal?

   (c) Igaz-e, hogy bármely két pont között kölcsönös hírközlési kapcsolat létesíthető?

2. Négy város között telefon-összeköttetést kell létesíteni. Biztonsági okokból szükséges, hogy bármely két város között legalább két úton is lehessen kapcsolatot teremteni. Az adatokat az ábra mutatja. Tervezzük meg a legolcsóbb hálózatot!



5. Összegzés

Szakdolgozatomban lineáris algebrai és kombinatorikai módszerek összekapcsolódását vizsgáltam. A munka során számomra új összefüggésekre bukkantam.

Matematika-informatika szakos tanárjelöltként a problémákat matematikai és informatikai oldalról is igyekeztem megközelíteni. A rekurzív formulák, a gráfok szomszédsági mátrixos alkalmazásai a programozás egyik alappillérét képezik. Ezért különösen hasznos matematikai háttérismeretet biztosítanak, nemcsak a matematikai, hanem az informatikai érdeklődésű diákok számára is. Bemutatható, hogy mennyi izgalmas alkalmazása lehet egy-egy matematikai összefüggésnek, és hogy mennyire fontos, hogy absztrakt struktúrákat vezessünk be, melyekkel nehéz problémákat egyszerűbben tudunk megoldani.

Igyekeztem a témaköröket minél alaposabban körüljárni, de néha a feladatok megoldása során annyi új kérdés merült fel, hogy még így is sok probléma nyitott maradt, ezért az anyag tovább bővíthető.

Hivatkozások

[1] Freud Róbert: *Lineáris algebra*, Eötvös Kiadó (2006)

[2] Elekes György, Brunczel András: *Véges matematika*, Eötvös Kiadó (2002)

[3] Elekes György: *Kombinatorikai feladatok*, Eötvös kiadó (2008)

[4] Katona Gyula Y. - Recski András - Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*, Typotex Kiadó (2006)

[5] Bartha Gábor - Bogdán Zoltán - Csúri József - Duró Lajosné dr. - dr. Gyapjas Ferencné - dr. Kántor Sándorné - dr. Pintér Lajosné: *Matematika feladatgűjtemény*, Nemzeti Tankönyvkiadó (1995)

[6] Nemzetközi Magyar Matematika Verseny honlapja *http://www.erkel.hu/nmmv/cd/html/temakorok/tema2955.html* (2009. április)

[7] *mars.elte.hu/toa/html/feladatok.htm*(2009. április)

[8] Sulinet Digitális Tudásbázis *http://sdt.sulinet.hu* (2009. március)