Szakdolgozat

ISKOLAI ALGEBRA FELADATSOROK
EGYENLETEK TANÍTÁSA

Témavezető: Fried Katalin
főiskolai docens

Készítette: Nagy Attila Bence
Matematika BSc szak

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar
Matematikatanítási és Módszertani Központ
Budapest, 2009

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az elmúlt években több általános iskolás magántanítványom volt, s az egyenletek megoldása minden tanulónál nehézségekbe ütközött. A szöveges feladatok megoldásához mindenképp egyenletet írtak fel, melyet a „bűvös” mérlegelvvel próbáltak megoldani, mint egyetlen lehetséges módszer. Szakdolgozatomban azt szeretném bemutatni, hogyan lehet előkészíteni az egyenletek tanítását már alsó tagozaton, s miként fejleszthetjük a megértésen alapuló gondolkodást, melynek eredményeként a tanulók többféle módon is el tudnak indulni a feladatmegoldás során. Ezen ismeretekre építve felső tagozaton összetettebb feladatok is megoldhatók következtetéssel, s ezzel párhuzamosan szerepeltethetjük az olyan absztrakt megoldási módszereket, mint a mérlegelv, melynek megértése így sokkal könnyebbé válik.

Szakdolgozatomban egymásra épülő feladatok segítségével szemléltetem a fent említett oktatási célokat. Munkámra tekinthetünk úgy, mint egy évfolyamokon átívelő „feladatsorra”, melynek egyes részei önálló feladatsorként is használhatók. Az első fejezetben nyitott mondatok segítségével (is) tárgyalható feladatok találhatók, melyek megoldhatók műveleti tulajdonságokra hivatkozva, próbálgatással, illetve lebontogatással. Utóbbinál nagy hangsúlyt fektettem a szemléltető ábrákra. A második fejezet elején rendszerezzük az eddig tanultak, majd az „álegyenleten” keresztül lassan megismerkedünk a mérlegelvvel. Példákon szemléltetem, hogy egy jó ötlet, észrevétel mennyire leegyszerűsítheti a megoldás menetét. A fejezet végén „fizikai” feladatokat oldunk meg matematikai módszerekkel.

A feladatok kitalálásakor ötletet merítettem általános iskolai tankönyvcsaládokból (ezek részletezését ld. „Felhasznált irodalom” című fejezetben), a módszertani kérdéseknél pedig nagy segítségemre volt „Pólya György: A feladatmegoldás iskolája” című műve.

Nyitott mondatok az általános iskola alsó tagozatán

Az általános iskola alsó tagozata a gyermekek kíváncsiságára épít, ezáltal fejleszti a tanulók megismerési és gondolkodási képességét, valamint mintákat ad a feladat- és problémamegoldáshoz. A gondolkodás fejlesztéséhez önálló munkavégzés, azaz önálló feladatmegoldás szükséges. Ennek hiányában a tanulók többsége utánozza a többiek tevékenységét, „követővé" válik. Ezt elkerülhetjük, ha egymásra épülő feladatokból álló feladatsorokat készítünk. A tanulók korábbi ismereteik felidézésével, újraszervezésével képesek lesznek a probléma önálló megoldására. Vigyáznunk kell azonban, hogy valóban apró lépésekben haladó feladatokat készítsünk, s az egymást követő feladatok tartalmazzanak valami újszerűt, hiszen ha csak formailag különböznek egymástól, elveszíthetik motiváló hatásukat. Szöveges feladatok összeállításakor célszerű valósághű problémákat gyűjteni, ezáltal egyrészt erősíthetjük a matematika és a valóság kapcsolatát, másrészt így jobban motiválhatjuk a tanulókat, mivel a gyerekek szívesebben oldanak meg a mindennapi élethez kapcsolható feladatokat. Másrészt viszont a meghökkentő, vicces, tréfás feladatoknak is van motiváló ereje.

Első találkozás az „ismeretlennel"

Nyitott mondatokkal és ezek segítségével (is) modellezhető feladatokkal már egy első osztályos tanuló is találkozik. Nézzük példaként a következő feladatokat:

1.Pisti kapott a nagymamájától 8 darab piros almát. Hány almája marad, ha hármat odaad legjobb barátjának, Bercinek?

Ennek a feladatnak a megoldásához elegendő, ha a tanuló ismeri a számokat 1-8-ig, és egyszerűen leszámolja lépésenként, hogy hány almája marad. Ez történhet papírból kivágott korongokkal vagy táblázatba foglalva minden egyes lépést. Nagyobb számoknál ez az eljárás időigényes, s miután a tanulók megtanulják az összeadást és a kivonást, rögtön a következőt írják fel:

$$8 - 3 = 5$$

2.Pisti megoldotta a szorgalmi feladatot, s jutalmul kapott a tanító nénitől 9 cukorkát. Hazafelé az iskolából azonban néhány cukorka kiesett a zsebéből. Hány cukorka esett ki a zsebéből, ha 3 cukorkája maradt?

Az ilyen szöveges feladatoknál célszerű, ha a tanulót megkérjük, hogy foglalja össze saját szavaival a feladatot. Így már az ilyen egyszerű feladatoknál megtanulja elkülöníteni a feladat szempontjából lényeges és lényegtelen információkat. Ennél a feladatnál is lehet próbálgatni: mennyi cukorka marad, ha 1,2… darab esett ki a zsebéből? A megadott táblázatba a tanulónak csak be kell írni a hiányzó adatokat:

kiesett (darab)	**1**	**2**	3	4	5	6	7	8
maradt (darab)	**9-1=8**	**9-2=7**	6	5	4	3	2	1

A táblázat az első két esetben még számolási mintát is ad. A táblázatból leolvasható, hogy Pistinek akkor maradt 3 cukorkája, ha 6 darab esett ki a zsebéből.

Ha a tanuló ismeri a kivonás műveleti tulajdonságait, hamar rájön, hogy a kivonandót úgy kaphatja meg, ha a kisebbítendőből kivonja a különbséget, vagyis:

$$9 - 3 = 6$$

Másik megoldás, ha a tanuló lefordítja a matematika nyelvére a feladatot: „Kilencből elveszek valamennyit és három marad”. Ha már szerepeltek nyitott mondatok az órán, akkor a tanuló felírhatja a következőt:

$$9 - \square = 3$$

Innen a fenti gondolatmenetet követve kapjuk a megoldást.

A nyitott mondatok igazsághalmazának megkeresése nem könnyű feladat. Első osztályban azokat a fogalmakat, hogy alaphalmaz és igazsághalmaz nem vezetjük be, ezeket a fogalmakat először az ötödik osztályban használjuk. A problémakör ezek nélkül is tárgyalható, ám itt is be kell tartanunk a fokozatosság elvét: egyszerű példákon keresztül ismertetjük meg a tanulókkal ezt az új feladattípust.

3.Karikázd be azokat a számokat, melyek 4-nél kisebbek, azaz amelyekre $\square < 4$!

1 3 7 5 2 4 0

Az ilyen típusú feladatok megoldásának előfeltétele a relációs jelek ismerete.

4.Írd a címkéknek megfelelő számokat a keretekbe!

2-nél nagyobb	1	4	5
	2	3	0

5-nél kisebb	3	2	0
	7	4	5

A feladat megoldását követően megkérdezhetjük, mely számok szerepelnek mindkét mezőben. Ezekre a számokra a következő igaz: $2 < \square < 5$, azaz 2-nél nagyobbak és 5-nél kisebbek.

5.Pótold a hiányzó számokat!

$1 + \square = 4$

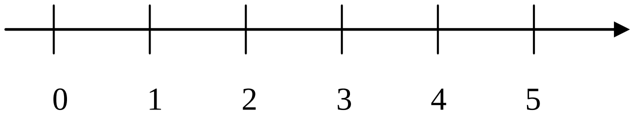
$\square + 5 = 7$

$3 - \square = 1$

$\square - 2 = 6$

Ezeknél a feladatoknál a gyerekek igazából egyenleteket oldanak meg, de az eszköz, amire támaszkodhatnak, az algebrai kifejezések felépítése, a felépítésben résztvevő műveletek tulajdonságai és ezek megfordíthatósága. Ezeket a feladatokat akkor tudja sikeresen megoldani a tanuló, ha a megoldást megelőzi az algebrai kifejezések helyes értelmezése. Olvastassuk ki a gyerekekkel, mi is a feladat! Például az első nyitott mondat esetében ez így hangzik: „Egyhez hozzáadok valamennyit és négyet kapok.”

Ebből a tanuló már rájön, hogy a kérdéses szám a három. Ha így sem jön rá a megoldásra, rajzoltassuk fel számegyenesre a műveletet:



Kérdés: „Hányat kell lépni, míg az egyből a négybe érünk?” Leolvasható, hogy három egységnyit kell jobbra, azaz pozitív irányba lépni, de ezt megtehetem egyetlen ugrással is, mely három egység hosszú. Ez az ugrás szimbolizálja, hogy egyhez hozzáadva hármat, négyet kapunk.
Hasonlóan szemléltethető a második példa is: „Jobbra lépünk öt egységet és a hétbe érkezünk. Honnan indultunk?” A gyerekek rögtön kitalálják, hogy visszalépkedve ötöt a keresett számhoz érünk, ami ebben a példában a kettő.

Új műveletekkel bővülő feladatok

Általános iskola alsó tagozatán a fentiekben bemutatott feladattípusok kerülnek elő, kiegészítve azokkal az új műveletekkel, melyeket a tanulók másodiktól a negyedik osztályig tanulnak. Folyamatosan bővül a számfogalmuk, a negyedik év végére biztosan számolnak a 100000-es számkörben. A második osztályban elsajátított szorzást és osztást (bennfoglalás) is kiterjesztjük többjegyű számokra. Megtanulják a zárójel használatát, valamint harmadik osztályban megismerkednek az „ellentétes mennyiségekkel”, így a negatív számokkal is.
A szöveges feladatok megoldása során a harmadik osztálytól kezdve elvárjuk az adatok lejegyzésén és a számoláson túl, hogy a tanulók megoldási tervet készítsenek, a megoldást pedig minden esetben ellenőriztetjük, s végül szöveges választ kérünk a feladathoz. A kreatív gondolkodást fejleszti, ha a gyerekeknek kell szöveges feladatot alkotni meglévő adatokhoz, megoldási tervhez illetve rajzhoz. Nézzünk példákat, miként válnak az első osztályos feladattípusok egyre összetettebbé!

1.Ciliék kertjében egy sorban 6 gyümölcsfa van. Hány gyümölcsfa van 5 ugyanilyen sorban? Számolj! Ellenőrizz!

Ha a tanuló nem érti vagy nem tanulta a szorzás műveletét, leszámolhatja, hogy két sorban $6 + 6$, három sorban $6 + 6 + 6$, s végül öt sorban $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$ gyümölcsfa van. Az adatokat táblázatban is rögzítheti. Miután megtanulta a szorzás műveletét, a következőt írhatja fel:

$$6 \cdot 5 = 30$$

A megoldást a fent bemutatott ismételt összeadással ellenőrizheti a tanuló.

2.Pótold a hiányzó számokat!

$8 = \square \cdot 2$

$16 = 2 \cdot \square$

$6 = 18 : \square$

$10 = \square : 3$

Ezeket a feladatokat is olvastassuk fel a tanulókkal: „Valamit megszorzok kettővel és nyolcat kapok.” Itt is lehet próbálgatni, behelyettesít 2-t, 3-at, hamar rájön, hogy mi a megoldás. Amikor a tanuló megértette a szorzás és az osztás kapcsolatát ezek a feladatok matematikai ujjgyakorlattá válnak: szorzásnál az egyik tényezőt úgy kaphatjuk meg, hogy a szorzatot osztjuk a másik tényezővel. Hasonlóan az osztásnál az alábbiak igazak: az osztót úgy számolhatjuk ki, hogy az osztandót osztjuk a hányadossal, az osztandót pedig megkaphatjuk, ha a hányadost szorozzuk az osztóval.

3. Mely számok teszik igazzá?

$55 - 39 < \square < 9 \cdot 3$

A feladat megoldásához elegendőek a tanulók eddigi ismeretei, mégis első ránézésre sokan elbizonytalanodnak, mondván, ilyen feladattal még nem találkoztak. Elvégezve mindkét oldalon a műveleteket, ez a feladat is olyan alakba írható, mint az előző fejezet 4. feladatának második része.

$$16 < \square < 27$$

Erről már minden gyerek le tudja olvasni, milyen számokat keresünk: „Azok a számok teszik igazzá a nyitott mondatot, melyek 16-nál nagyobbak, és kisebbek 27-nél.”.

Vagyis tíz szám tesz eleget a feltételnek, ezek a következők: 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

A lebontogatás módszere

1.Pótold a hiányzó számokat!

$\square \xrightarrow{\cdot 5} \square \xrightarrow{+28} 58$

Az ilyen ábráknál rá kell vezetni a tanulót, hogy visszafelé haladva keresse a kérdéses számokat. Segítő kérdés lehet: „Melyik számhoz adtunk 28-at, ha 58-at kaptunk eredményül?" A következőre biztosan rájönnek: $\square + 28 = 58$

Ilyet pedig már meg tudnak oldani, ilyennel már találkoztak. Ebből a tanulók rögtön felírják:

$$58 - 28 = 30$$

„Melyik számot szoroztuk meg 5-tel, ha 30-at kaptunk?" Az előbbihez hasonlóan adódik: $\square \cdot 5 = 30$

Innen pedig a megoldást így írhatjuk fel: $30:5 = 6$

Szemléltethetjük ábrán az egyes lépéseket:

$$\square \xrightarrow{\cdot 5} \square \xrightarrow{+28} 58$$

$$6 \xleftarrow{:5} 30 \xleftarrow{-28} 58$$

Leolvasható, hogy minden lépésben ellentétes műveletet hajtunk végre.

2.Pisti gondolt egy számra. Ha megháromszorozza és hozzáad 6-ot, akkor 30-at kap. Melyik számra gondolt Pisti?

A tanuló észreveszi, hogy itt is egy műveletsort hajtunk végre. Szemléltethetjük a feladatot egy ábrával: $\square \xrightarrow{\cdot 3} \square \xrightarrow{+6} 30$

Az előző feladatnál alkalmazott gondolatmenetet követve a gondolt szám kiszámítható:

$$30 - 6 = 24$$

$$24:3 = 8$$

Vagyis Pisti a 8-as számra gondolt.

Második osztály végére a tanulók már megismerik a zárójel használatát, így ennek segítségével a számolás egyetlen kifejezéssel is felírható:

$$(30-6):3=24:3=8$$

Nyitott mondatok „betűkkel”

1.Mely számok írhatók a betűk helyébe úgy, hogy az állítás igaz legyen?

$675+a=1043$

$675+b>1043$

$675+c\leq 1043$

Harmadik osztálytól kezdve a keresett számokat (ismeretleneket, változókat) a legtöbb tankönyvben sokszor betűvel jelölik, az eddig használt üres négyzet, háromszög helyett. Ez a lépés egyszerűnek tűnhet, pedig az absztrakciónak egy magasabb fokát várja el a tanulóktól. Felvetődhet a gyerekekben a kérdés: „Miért szerepel egy betű az összeadásban, eddig ezt a műveletet csak számokkal végeztük?” Több hasonló feladaton keresztül meg kell a tanulókkal értetni, hogy ezek a betűk számokat jelölnek, így már látják, hogy ezekben a feladatokban is számokkal végzünk műveleteket. Az első feladatokban célszerű ezeket a betűket négyzetbe foglalni, hiszen korábban így jelöltük a keresett számot:

$$675+\boxed{a}=1043$$

Az első feladathoz hasonlót, kisebb számokkal már első osztályos korukban megoldanak a tanulók, így a keresett számot úgy kaphatják meg, ha az összegből kivonják a másik tagot:

$$1043-675=368$$

$$a=368$$

Az utolsó sort a tanulók maguktól nem írnák fel, szöveges választ adnának a feladatra, ami teljesen megfelelő. Célszerű, ha a tanulók már itt megismerkednek ezzel a jelöléssel. Vigyázni kell azonban, mert hamar kialakulhat az egyenlőségjelnek egyfajta nem szimmetrikus szerepe, ami ártalmas lehet. Elegendő, ha órán felírjuk a táblára ezt az alakot. Önálló feladatmegoldásnál ezt ne várjuk el!

Mindig ellenőriztessük a tanulókkal a megoldást! Az eredeti kifejezésbe visszaírjuk a keresett számot, és megnézzük, igaz állítást kapunk-e:

$$675 + 368 = 1043$$

A második feladatot a gyerekek tervszerű próbálgatással oldanák meg. Azonban az első feladat eredményéből a megoldást gyorsan kitalálják: a „b” szám helyére 368-at írva 1043-at kapunk. Nagyobb számot úgy kaphatunk, ha a „b” szám értékét növeljük, azaz 369 vagy ennél nagyobb szám igazzá teszi az állítást. Vagyis a megoldás:

$$b > 368$$

Hasonló gondolatmenettel a „c” szám értéke lehet 368, mivel megengedtük az egyenlőséget is, és minden 368-nál kisebb számot beírva a „c” szám helyére igaz állítást kapunk, azaz:

$$c \leq 368$$

Tanulságként elmondható, hogy egyenlőtlenséget alsó tagozaton kétféleképpen oldhat meg a tanuló. Megoldhatja a feladatot úgy, mintha egyenletről lenne szó, azaz a $<, >, \leq, \geq$ jeleket $=$ jelre cseréli, majd vizsgálja, hogy az így kiszámolt számnál kisebbet, illetve nagyobbat írva az eredeti kifejezésbe, igaz állítást kap-e. A másik módszer a tervszerű próbálgatás, amire jó példa a következő feladat:

2.Marcinak 820 Ft-ja gyűlt össze. Legalább hány napig kell még gyűjtenie a pénzét, ha naponta 50 Ft zsebpénzt kap a szüleitől, és szeretne venni egy 1500 Ft-os focilabdát?

Egy lehetséges megoldás:

Adatok: van: 820 Ft focilabda: 1500 Ft kap: 50 Ft-ot naponta

napok száma: N N=?

Terv: $820 + N \cdot 50 > 1500$

Számolás:

Napok száma	1	10	15	13	14
Kap (Ft)	50	500	750	650	700
Összes (Ft)	870	1320	1570	1470	1520
	kevés	kevés	elég, túl sok	kevés	elég

Ellenőrzés: $820 + 14 \cdot 50 = 1520 > 1500$

Válasz: Marcinak legalább 14 napig kell gyűjtenie a pénzét.

A szöveges feladatok megoldásánál a fenti lépéseket várjuk el a tanulóktól. Az adatok lejegyzésével ellenőrizzük, hogy a tanuló megértette-e a feladatot, azaz ki tudja szűrni a feladat szempontjából lényeges információkat. A megoldási terv segít a tanulóknak, hogy minden lépésben tudják, mi az a mennyiség, amit kiszámolnak. A megoldási terv foglalja össze a számolás gondolatmenetét, így a gyerekek nem vesznek el a számolások között. Az ellenőrzés során megvizsgáljuk, hogy a számolás során ejtettünk-e valamilyen hibát, illetve megnézzük, hogy a megoldás megfelel-e a feladat szövegének. Mindezek után szöveges választ adunk.

Másik lehetséges gondolatmenet: Marcinak már van 820 Ft-ja, ezért $\square$ Ft szükséges ahhoz, hogy 1500 Ft-ja legyen: $820 + \square = 1500$

$$1500 - 820 = 680$$

Hány nap alatt gyűlik össze legalább 680 Ft-ja Marcinak, ha minden nap 50 Ft-ot kap? Innen csak a fenti próbálgatással tud továbbhaladni a harmadikos tanuló, viszont kisebb számokkal kell dolgoznia, és csak a táblázat első két sorát kell elkészítenie, így rövidebb a számolás.

3. Mely számok írhatók a betű helyébe úgy, hogy az állítás igaz legyen?

$\boxed{a} : 3 + 567 \leq 867$

A feladat megoldható az 1. feladathoz hasonló gondolatmenettel, sőt az előző feladatban részletezett próbálgatással is, de lássunk egy másik okoskodást, melyben ábrán szemléltetjük a megoldás menetét. Írjuk át az egyenlőtlenséget egyenlőséggé!

$\boxed{a} : 3 + 567 = 867$

Olvastassuk ki a tanulókkal a feladatot: „Valamilyen számot osztunk hárommal, majd hozzáadunk 567-et, s végül 867-et kapunk eredményül. Melyik ez a szám?”!

Ez a feladat nagyon hasonlít az előző fejezet végén bemutatott „Gondoltam egy számra” típusú feladatra.

Felírva a megfelelő ábrát (nyíldiagramot):

$$a \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{+567} 867$$

$$900 \xleftarrow{\cdot 3} 300 \xleftarrow{-567} 867$$

Leolvasható az ábráról, hogy 900-at írva „a" helyére 867-et kapunk. Az eredeti feladatban azonban a fenti műveletsor eredményeként 867-et, vagy ennél kisebb számot kell kapnunk, tehát nem 900 az egyetlen megoldás. Az összeg értékét úgy csökkenthetjük, ha valamelyik összeadandót csökkentjük. Osztás során a hányados értékét pedig úgy csökkenthetjük, ha az osztandót csökkentjük, vagy az osztót növeljük, de utóbbi most egy előre megadott szám.

Viszont csak olyan számot írhatunk „a" helyére, amivel elvégezhető a megadott művelet az ismert számkörben (pozitív egészek 2000-ig és a 0). Vagyis csak 3-mal osztható számok teszik igazzá a nyitott mondatot. Így a keresett számok: 900, 897,… 3, 0.

4.Melyik számból kell kivonni 112-t, hogy (-5)*-öt kapjunk eredményül?*

Egy negyedik osztályos tanuló több gondolatmenetet is követhet a feladat megoldása során:

a) Az első a kivonás értelmezésére támaszkodik. Ha tudjuk, hogy két szám különbsége (-5), és a kivonandó 112, akkor a kisebbítendő ennél 5-tel kisebb szám.
b) A második a kivonás ellenőrzésére épül. A kisebbítendőt megkapjuk, ha a különbséghez hozzáadjuk a kivonandót:
$$112 + (-5) = 107$$
c) Szimbólumokkal is felírható a megfelelő összefüggés:
$$\boxtimes - 112 = (-5)$$
A megoldáshoz az előző két gondolatmenet valamelyike vezet.

Arányos következtetések

1.*A negyedik osztály 35 tanulója hajókirándulásra megy. Hány forintot tegyenek félre a hajójegyekre, ha tudják, hogy a harmadik osztály 25 tanulójának összesen 12850 Ft-jába került ez az út?*

Ez a feladat az egyenes arányosság ismeretét kéri számon, mely fogalom az alsós tankönyvekben úgy szerepel, hogy „következtetés egyről többre" ill. „következtetés többről többre”. Negyedik osztályban a tanulóktól elvárjuk, hogy az adatok kigyűjtését és a számolási terv felírását követően készítsenek becslést, mely segítségükre lehet a megoldás ellenőrzésénél. Egy lehetséges gondolatmenet a következő:

Adatok: 25 jegy → 11850 Ft; 35 jegy → x Ft

Terv: 25 jegy → 11850 Ft

1 jegy → x Ft $\quad x = 11850 : 25\ Ft$

35 jegy → $35 \cdot x$ Ft $\quad 35 \cdot x = 35 \cdot (11850 : 25) Ft$

Becslés (az osztás első lépése után): $400\ Ft < x < 500\ Ft$

$14000\ Ft < 35 \cdot x < 17500\ Ft$

Számolás: $35 \cdot x = 35 \cdot (11850 : 25) = 35 \cdot 474 = 16590$

Ellenőrzés: Az osztást szorzással ellenőrizhetjük: $474 \cdot 25 = 11850$

A szorzást célszerű ismételten végigszámolni. A megoldás a becsült értékek közé esik.

Válasz: 16590 Ft-ot tegyen félre az osztály a hajóútra.

Szintén helyes gondolatmenet, ha a tanuló először kiszámolja 5 jegy árát, majd ebből következtet 35 jegy árára.

Az ilyen arányos következtetésekre épülő feladatok közé beszúrhatjuk a következő becsapós példát:

2.Egy tojás 8 perc alatt fő meg. Hány perc alatt fő meg 6 tojás?

A gyerekek többsége első ránézésre rávágja, hogy 48 perc alatt fő meg. Kicsit gondolkodva a példán, s értelmezve a kapott eredményt, rájönnek, hogy ugyanannyi idő alatt fő meg 6 tojás, mint egy tojás, hiszen egyszerre is belerakhatom a tojásokat a forró vízbe.

„Gondoltam egy „nagyobb” számra…”

1.A gondolt számból elvettem 15684-et, a különbséget megszoroztam 5-tel, és így 27995-öt kaptam. Melyik számra gondoltam?

Nézzük először a nyitott mondat nélküli okoskodást: ismét egy műveletsorról szól a feladat, járjunk el úgy, ahogy a lebontogatásnál tettük! A különbség értéke az 5-tel való szorzás előtt:

$$27995 : 5 = 5599$$

A kivonás előtt a gondolt szám a különbségnél 15684-gyel nagyobb. Így a gondolt szám:

$$5599 + 15684 = 21283$$

Másik megoldás: Legyen a gondolt szám ⊠! Ekkor a feladat szövege a matematika nyelvére lefordítva így hangzik: $(\boxtimes - 15684) \cdot 5 = 27995$

Innen a fenti gondolatmenetet követve adódik a megoldás.

Egy negyedik osztályos tanuló, aki már tanulta a zárójelfelbontást, így is számolhat:

$$(\boxtimes - 15684) \cdot 5 = 5 \cdot \boxtimes - 5 \cdot 15684 = 5 \cdot \boxtimes - 78420$$

A feladat szövege szerint ez a kifejezés egyenlő 27995-tel:

$$5 \cdot \boxtimes - 78420 = 27995$$

Erre már közvetlenül alkalmazhatjuk a lebontogatás módszerét, melyben minden lépésben ellentétes műveletet hajtunk végre: $(27995 + 78420) = 106415 : 5 = 21283$

$$\boxtimes = 21283$$

Ugyanazt az eredményt kaptuk, mint a másik gondolatmenettel. Az ellenőrzést úgy végezzük el, hogy a kapott számot behelyettesítjük a nyitott mondatba:

$$(21283 - 15684) \cdot 5 = 5599 \cdot 5 = 27995$$

Egyenletek az általános iskola felső tagozatán

Az általános iskola felső tagozatán továbbra is alapvető célunk a megértésen alapuló gondolkodás fejlesztése. Mivel az első négy osztályban a nyitott mondatok, egyenletek témakör gyakorlására nem igazán jut idő, így 5. osztályban nagyobb szerepet kap az ismétlésre épülő rendszerezés. Az eredményes munkához elengedhetetlen a megfelelően kialakított számfogalom és az egyre bűvölő számkörben végzett műveletek értése, begyakorlottsága. 5. osztályban vezetjük be az alaphalmaz és igazsághalmaz fogalmát, s megmutatjuk, milyen viszonyban állnak. Az egyenlet, egyenlőtlenség, azonosság, azonos egyenlőtlenség fogalmakat is most használjuk először, s ezek mentén megmutatjuk, hogy egy nyitott mondatnak, egyenletnek hány megoldása lehet. 5. évfolyamtól a matematikai ismeretek egy része fokozatosan absztraktabbá válik, ezért nagy hangsúlyt kell helyezni a tapasztalatok tudatosítására, értelmezésére, összefüggések keresésére, így a valóságos helyzet és az ezt leíró matematikai modell kapcsolata könnyebben megérthető. Következtetésre épülő problémamegoldásra ösztönözzük a tanulókat, mégis alkalmazunk algoritmusokat, ilyen például a mérlegelv. Vigyázni kell, nehogy ezek a matematikai eszközök kellő óvatosság hiányában formális tudáshoz vezessenek. A gyerekek ilyenkor egy „technikát” kapnak a kezükbe, így fennáll a veszély, hogy ennek alkalmazása közben elfelejtenek gondolkozni.

Éppen ezért a mérlegelvvel való megismerkedést és később ennek tudatos alkalmazását szeretnénk kissé késleltetni. Az egyenletek megoldása során hosszabb ideig építünk a módszeres, tervszerű próbálgatásra, a következtetéses gondolkodásra (ábra), melyet sok tankönyv a lebontogatás módszereként említ, valamint hivatkozhatunk az egyenletben szereplő műveletek tulajdonságaira is. Ezt a késleltetést segíti, ha hosszabb ideig a mérlegelven alapuló megoldás mellett a következtetésen alapuló megoldásokat is szerepeltetjük. Felső tagozaton nagy súlyt fektetünk a szövegértő képesség fejlesztésére is, szöveg alapján összefüggések, egyenletek felírására, melyet a tanulók a fent említett módszerek valamelyikével oldhatnak meg. Szöveges feladatoknál különösen igaz az apró lépések elve: a feladatok hosszát, a benne szereplő információk összetettségét kis lépésekben változtassuk, alkalmazkodva az osztály haladási üteméhez.

A következő feladatok mentén szeretném bemutatni, miként valósulnak meg a fentiekben részletezett tanítási célok az általános iskola felső tagozatán.

Alaphalmaz, igazsághalmaz

1.Mi az alábbi nyitott mondat igazsághalmaza a megadott alaphalmazokon?

.... a százholdas pagony egyik lakója.

$A = \{Balu, Kanga, Füles, Tom, Micimackó\}$

$B = \{Bagoly, Nyuszi, Tigris\}$

$C = \{Piroska, Garfield\}$

Az alaphalmaz és igazsághalmaz fogalmának elsajátítása, a köztük fennálló kapcsolat megértése kulcsfontosságú, így amíg a tanulók bizonytalanok az ilyen jellegű feladatok megoldásában, semmiképp ne térjünk át olyan nyitott mondatokra, melyek számok közötti összefüggéseket vizsgálnak. Mutassuk meg a tanulóknak, hogy az alaphalmaz mennyire befolyásolja a nyitott mondat igazsághalmazát! A fenti nyitott mondat igazsághalmaza az első esetben: $I = \{Kanga, Füles, Micimackó\}$, a második alaphalmazon: $I = \{Nyuszi, Tigris\}$, végül az utolsó esetben $I = \emptyset$, vagyis a nyitott mondat igazsághalmaza az üres halmaz. Tehát ugyanahhoz a nyitott mondathoz más-más igazsághalmaz tartozhat, attól függően, hogy mely halmaz elemeiből válogatunk. Tudatosítsuk a tanulókban, hogy a nyitott mondat igazsághalmaza mindig az alaphalmaz egy részhalmaza!

2. A megadott alaphalmaz elemei közül válaszd ki, mely számok teszik igazzá a nyitott mondatot! Adj meg egy olyan alaphalmazt, ahol a nyitott mondatnak nincs megoldása!

$2 \cdot (a - 3) < a - 10$ $\qquad A = \left\{-9, -5, -4, -\frac{1}{2}, 0, 1, 3\right\}$

Egy ötödikes tanuló ilyen nyitott mondatot algebrai úton nem tud megoldani, hiszen mindkét oldalon van ismeretlen mennyiség, így a lebontogatás módszere nem alkalmazható. Ilyen esetben tervszerű próbálgatással juthat el a tanuló megoldáshoz, ami viszont hosszadalmas folyamat. Ha meg tudná oldani a nyitott mondatot a tanult számok körében, akkor a megoldásból leolvasható lenne, mely számok teszik igazzá a nyitott mondatot. Most azonban behelyettesítéssel kell ellenőrizni, hogy az alaphalmaz mely elemei teszik igazzá az egyenlőtlenséget. Az igazsághalmaz a következő: $I = \{-9, -5\}$

A második kérdésre egy lehetséges válasz az eredeti alaphalmaz maradék elemeiből álló halmaz: $B = \left\{-4, -\frac{1}{2}, 0, 1, 3\right\}$

Kellő gyakorlás után feladhatunk a tanulóknak olyan példákat is, melyben adott az alaphalmaz és az igazsághalmaz, s nekik kell felírni egy ennek eleget tevő nyitott mondatot.

3. Keress olyan alaphalmazokat, amelyen a megadott egyenlet azonosság, az egyenlőtlenség pedig azonos egyenlőtlenség!

a) $|x| = -x$

b) $4 \cdot x > x$

Próbálgatással keressünk megfelelő alaphalmazokat!

kipróbálandó szám (x)	-3	-2	0	1	2
$\|x\|$	3	2	0	1	2
$-x$	3	2	0	-1	-2
	jó	jó	jó	rossz	rossz

Ha $A = \{negatív\ számok\}$, akkor az a)-beli egyenlet azonosság. Ugyanígy jó megoldás ennek bármilyen részhalmaza is, sőt a 0-t is belevehetjük az alaphalmazba. Például: $A' = \{-1,0\}$

Az egyenlőtlenség esetében is készíthetnénk táblázatot, de most okoskodjunk fejben. A pozitív számok megfelelnek az egyenlőtlenségnek, így ha az alaphalmaz elemei pozitív számok, akkor az egyenlőtlenség azonos egyenlőtlenség. Például: $B = \{2,4,5\}$

Próbálgatás, műveleti tulajdonságok

1. Oldd meg próbálgatással az alábbi egyenletet! Az alaphalmaz legyen a természetes számok halmaza!

$4(2 \cdot x - 5) = 3 \cdot x + 10$

A próbálgatás lépéseit foglaljuk táblázatba, így átláthatóbb a gondolatmenet!

kipróbálandó szám	0	1	10	5	**6**
egyenlet bal oldala	-20	-12	60	20	**28**
egyenlet jobb oldala	10	13	40	25	**28**
	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$=$

A táblázatból leolvasható, hogy növelve a kipróbálandó számot, a baloldali kifejezés értéke nő, míg a jobboldali kifejezés értéke csökken, vagyis az $x = 6$ az egyetlen megoldás.

2. Mely számok elégítik ki az alábbi egyenletet a tanult számok halmazán?

$|x + 4| = 7$

Ennél a feladatnál nagyon fontos a szöveges értelmezés, mint azt hasonló alsó tagozatban előforduló példáknál is láttuk. „ Egy ismeretlen számhoz 4-et adunk, majd a kapott számnak vesszük az abszolút értékét, s így 7-et kapunk eredményül.” A legegyszerűbb megoldás a próbálgatás: általában rövid kísérletezés után a tanulók már tervszerűen keresik a megoldást. A másik megoldási mód során az abszolút érték definícióját használjuk. Valaminek csak úgy lehet az abszolút értéke 7, ha a kérdéses mennyiség, melynek az abszolút értékét vesszük 7 vagy (-7). Vagyis a keresett számokra a következő egyenletek egyike teljesül:

$$x + 4 = 7 \text{ vagy } x + 4 = -7$$

Innen a már alsó tagozaton megismert módszerek valamelyikével a keresett számok megkaphatók. Egyrészt támaszkodhatunk az összeadás értelmezésére, másrészt használhatjuk az összeadás ellenőrzésére vonatkozó összefüggést. A keresett számok 3 és (-11).

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe ezeket a számokat teljesül az egyenlőség.

3. Három szomszédos szám összege 60. Melyek ezek a számok?

Oldjuk meg ezt a feladatot is először próbálgatással!

szomszédos számok	5+6+7	10+11+12	22+23+24	16+17+18	18+19+20	**19+20+21**
összegük	18	33	69	54	57	**60**

Ismét sikerült viszonylag kevés lépésben megtalálnunk a megoldást, miszerint a keresett számok a 19, 20, 21. Több megoldás nem lehet, mert csökkentve vagy növelve az összeadandókat az összeg is csökken vagy nő.

A másik lehetséges megoldás, hogy megpróbálunk felírni egy egyenletet. Vezessünk be egy ismeretlent! Ennek segítségével írjuk fel az adatok közti összefüggéseket!

A három szomszédos szám közül a legkisebbet jelölje x!

Ennek a szomszédja nála eggyel nagyobb: $x + 1$

Végül a harmadik szám: $x + 2$

A feladat szövege szerint a három szomszédos szám összege 60. Egyenlettel felírva:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 60$$

Összevonva a tagokat az egyenlet bal oldalán, egy olyan egyenletet kapunk, melyet a lebontogatás módszerével megoldhatunk:

$$3 \cdot x + 3 = 60$$

Készíthetünk a tanult módon ábrát, de ilyen egyszerű kifejezésnél fejben is kiszámolhatjuk az ismeretlen értékét: $x = (60 - 3): 3 = 19$

Ugyanazt a megoldást kaptuk, mint a próbálgatásos módszerrel, a számolás pedig kevesebb időnkbe telt.

Nézzük meg újra a táblázatot! Észrevehetjük, hogy a kipróbált szomszédos számok közül a középső háromszorosa mindig megegyezik a három szám összegével. Azaz úgy is megkaptuk volna a megoldást, ha a 60-at osztjuk 3-mal. Ha nem vagyunk ennyire szemfülesek, akkor is rájöhetünk erre az összefüggésre, csak az egyenlet felírásán kell változtatnunk. A középső számot jelöljük k-val, melynek két szomszédja $k - 1$, illetve $k + 1$. Ennek a három szomszédos számnak az összege 60. Elvégezve az összevonást a következőt kapjuk:

$$(k - 1) + k + (k + 1) = 60$$

$$3 \cdot k = 60$$

Ez ugyanaz az összefüggés, mint amit a táblázatból kiolvastunk. Jobb osztályokban megemlíthetjük a tanulóknak, hogy öt szomszédos szám esetén is van hasonló összefüggés, miszerint a középső szám ötszöröse megegyezik az öt szomszédos szám összegével. Minden páratlan sok szomszédos számra általánosíthatunk.

4.Oldjuk meg a $(-6)\cdot(4\cdot x+5)\geq 90$ egyenlőtlenséget!

Mivel ismeretlen mennyiség csak az egyik oldalon szerepel, így abban bízunk, hogy az egyenletekhez hasonlóan itt is alkalmazhatjuk a lebontogatás módszerét. A végrehajtandó műveletsor:

$$[90:(-6)-5]:4=-5$$

$$x\geq -5$$

Ellenőrizzük megoldásunkat! (-5)-t behelyettesítve a fenti egyenlőtlenség teljesül, azonban 0-t írva az egyenlőtlenségbe, ami fenti számolásaink eredményeként szintén eleme az igazsághalmaznak, ellentmondásra jutunk:

$$-30\geq 90$$

Hol hibáztunk? Mit nem vettünk figyelembe? Készítsünk táblázatot néhány helyettesítési értékről!

x	7	1	0	-2	-4	$\mathbf{-5}$	$\mathbf{-6}$	$\mathbf{-10}$	$\mathbf{-15}$
$(-6)\cdot(4\cdot x+5)$	-198	-54	-30	18	66	**90**	**114**	**210**	**330**

Megfigyelhető, hogy azok a számok felelnek meg az egyenlőtlenségnek, amelyekre $x\leq 5$, vagyis a megoldás során megváltozott a relációs jel állása. Felírva egyszerűbb egyenlőtlenségeket megállapíthatjuk, hogy olyankor fordul meg a relációs jel állása, ha a lebontogatás során negatív számmal osztunk vagy szorzunk, és annyiszor, ahány ilyen műveletet végzünk. Ezt figyelembe véve a vizsgált egyenlőtlenség megoldása valóban $x\leq 5$, mivel a lebontogatás során egyszer negatív számmal osztottunk.

„Álegyenlet”

1.Mennyi a tömege egy kőtömbnek és egy vázának, ha tudjuk, hogy 1 kőtömb tömege annyi, mint 5 váza tömege meg 3 kg, és 3 kőtömb tömege annyi, mint 6 váza tömege meg 27 kg?

Az ilyen típusú feladatot szokás „álegyenletnek” nevezni. Megoldásához nem szükséges ismeretleneket bevezetni, egyenletet felírni, célszerű úgy tekinteni a feladatra, mint egy valódi mérésre, melyet kétkarú mérleggel hajtunk végre. A feladatban szereplő két állításnak két egyensúlyban lévő mérleg tesz eleget. Ha a két mérleg egyik-egyik serpenyőjében ugyanaz a mennyiség található és a mérlegek egyensúlyban vannak, akkor a másik serpenyőikben lévő mennyiségek is egyenlő nagyságúak, s ebből újabb összefüggést nyerhetünk a mérendő tömegek között. Ugyanolyan mértékű változtatásokat végrehajtva a mérleg két serpenyőjében (tömeg elvétele illetve felhelyezése) az eredeti egyensúly megmarad. Ezen alapszik a „bűvös” mérlegelv is, mely szerint egy egyenlet mindkét oldalán azonos műveleteket elvégezve az egyenlet igazsághalmaza nem változik. A feladatot megoldhatjuk „képekkel” is, mérlegeken szemléltetve minden változást, így a diákok jobban megértik az egyes lépéseket. A megoldás menete következtetéssel:

1 kőtömb = 5 váza + 3 kg		3 kőtömb = 6 váza + 27 kg
↓ · 3 ↓· 3		↓
3 kőtömb = 15 váza + 9 kg	→	15 váza + 9 kg = 6 váza + 27 kg

Ha leveszünk a mérleg mindkét serpenyőjéből 6 vázát és 9 kg-ot, akkor az egyensúlyban lévő mérleg egyik oldalán 9 váza, míg a másik oldalán 18 kg marad. Másképpen fogalmazva: a baloldali serpenyőben 9-cel több váza van, mint a jobboldali serpenyőben. A jobboldali serpenyőben lévő 27 kg 18 kg-mal több, mint a baloldaliban lévő

9 kg. Így 9 váza tömege 18 kg. Azaz egy váza tömege 2 kg.

Az első összefüggés értelmében 1 kőtömb = 5 váza + 3 kg, vagyis egy kőtömb 13 kg tömegű.

Formális megoldás egyenlettel:

Adatok: kőtömb tömege: x váza tömege: y

Összefüggések:

$$x = 5 \cdot y + 3$$
$$3 \cdot x = 6 \cdot y + 27$$

Két ismeretlenes egyenletrendszer megoldási módszereit általános iskolában nem tanítjuk. Kitekintésként megmutathatjuk ugyan a tanulóknak, hogy mi lenne a megoldás menete, de ösztönözzük őket arra, hogy ilyen esetben keressenek egyszerűbb megoldási módot. Az első egyenletben az x változó van kifejezve y segítségével. Ezt a kifejezést behelyettesíthetjük a második egyenletbe x helyére, s így a következő egy ismeretlenes egyenletet kapjuk, melyet a mérlegelv segítségével oldhatunk meg:

$3 \cdot (5 \cdot y + 3) = 6 \cdot y + 27$ / zárójelfelbontás

$15 \cdot y + 9 = 6 \cdot y + 27$ / $-6 \cdot y$

$9 \cdot y + 9 = 27$ / -9

$9 \cdot y = 18$ / $:9$

$y = 2$

Ezt az értéket behelyettesítve a fenti egyenletrendszer első egyenletébe megkapjuk a kőtömb tömegét, ami 13 kg. Ez a megoldás megegyezik a következtetéssel kapott eredménnyel.

Válasz: A váza tömege 2 kg, a kőtömb tömege pedig 13 kg.

Ismerkedés a mérlegelvvel

1.Oldjuk meg az egyenleteket a mérlegelv segítségével!

a) $3 \cdot x + 4 = x + 12$

b) $2 \cdot x + 11 + x + 3 + 3 \cdot x = 2 \cdot x + 30$

c) $5 \cdot (x + 3) + 4 = x + 39$

Ezek a feladatok elképzelhetők valódi mérésként. Nézzük például a b) feladatot! A mérleg baloldali serpenyőjében összesen hat egyenlő súlyú ismeretlen van, és mellette 14 egységnyi súly, amit a jobb oldali serpenyőbe helyezett két egyenlő súlyú ismeretlen és 30 egységnyi súly tart egyensúlyban. Levéve mindkét serpenyőből két egyenlő súlyú ismeretlent és 14 egységnyi súlyt, a baloldali serpenyőben marad négy ismeretlen, amit 16 egységnyi súllyal tartunk egyensúlyban. Vagyis egy-egy ismeretlen 4-4 egység súlyú. Ha végiggondoljuk ezt a megoldást, rádöbbenünk, hogy az egyenletek formális megoldását semmilyen tapasztalat nem előzi meg. Az egyenletekben szereplő szimbólumokhoz próbálunk gyakorlati szituációkat rendelni. A mérlegelv tanításakor először valódi ismeretlenek tömegét kellene meghatározni, és a mérés menetét kellene szimbólumokkal felírni. Erre egy lehetséges módszer, ha a tanulóknak kell mérési eljárást kitalálni egy egyensúlyban lévő mérleghez. Erre láttunk példát az előző feladatban.

Megoldás mérlegelvvel:

a)

$$3 \cdot x + 4 = x + 12 \qquad / -x$$
$$2 \cdot x + 4 = 12 \qquad / -4$$
$$2 \cdot x = 8 \qquad / : 2$$
$$x = 4$$

Ellenőrzés: Bal oldal: $3 \cdot 4 + 4 = 16$

Jobb oldal: $4 + 12 = 16$

Behelyettesítve a kapott eredményt az egyenlet mindkét oldalába teljesül az egyenlőség, vagyis az $x = 4$ valóban megoldása az egyenletnek.

b)

$$2 \cdot x + 11 + x + 3 + 3 \cdot x = 2 \cdot x + 30 \qquad / \text{összevonás}$$
$$6 \cdot x + 14 = 2 \cdot x + 30 \qquad / -2 \cdot x$$
$$4 \cdot x + 14 = 30 \qquad / -14$$
$$4 \cdot x = 16 \qquad / : 4$$
$$x = 4$$

A fenti okoskodással ugyanezt az eredményt kaptuk, de behelyettesítéssel is ellenőrizhetjük a megoldást.

c)

$$5 \cdot (x+3) + 4 = x + 39 \qquad \text{/ zárójelfelbontás}$$
$$5 \cdot x + 5 \cdot 3 + 4 = x + 39 \qquad \text{/ összevonás}$$
$$5 \cdot x + 15 + 4 = x + 39 \qquad \text{/ összevonás}$$
$$5 \cdot x + 19 = x + 39 \qquad / -x$$
$$4 \cdot x + 19 = 39 \qquad / -19$$
$$4 \cdot x = 20 \qquad / : 4$$
$$x = 5$$

Ellenőrzés: $5 \cdot (5+3) + 4 = 5 \cdot 8 + 4 = 40 + 4 = 44$

$5 + 39 = 44$

A mérlegelv lényegének megértése és megfelelő alkalmazása között nagy lépés van. Nem baj, ha a tanulók az egyenlet megoldása során nem mindig a legcélszerűbb lépéseket végzik el. Ezzel is mélyül a megértés, hiszen a tanuló nem ront el semmit, ugyanazt a megoldást kapja, csak az út hosszabb. Az összevonások során gyakori tanulói hiba, hogy összevonnak nem egynemű kifejezéseket is: $2 \cdot x + 3 = 5 \cdot x$, valamint a zárójelfelbontásnál a zárójelben szereplő tagok közül nem mindegyikkel végzik el a kijelölt műveletet: $5 \cdot (x+3) = 5 \cdot x + 3$

Célszerű az egyenletek tanítása előtt gyakoroltatni a tanulókkal az összevonásokat, zárójelfelbontásokat, így a mérlegelv tanításakor az algebrai átalakítások már nem okoznak nehézséget, s a tanulók könnyebben megértik ezt az új egyenletmegoldó módszert.

2.Oldjuk meg az egyenleteket a tanult számok halmazán!

a) $2 \cdot x + 7 + 4 \cdot x = 3 \cdot x - 14$

b) $6 \cdot (2 \cdot x + 3) = 9 + 5 \cdot x + 6 + 3 + 7 \cdot x$

c) $4 + 10 \cdot x = 3 + 10 \cdot x$

Megoldás:

a) Ez a feladat már nem elvégezhető mérés, hiszen a valóságos méréseknél nem használhatunk negatív súlyokat, így a példa megoldásához a matematikai absztrakció egy magasabb foka szükséges. A tanulóknak értelmezni kell, hogy a jobb oldalon lévő negatív súly levétele súlynövekedést okoz, vagyis a baloldali serpenyőben lévő súlyt meg kell növelni 14-gyel, hogy az egyensúly fennmaradjon.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot x + 7 + 4 \cdot x &= 3 \cdot x - 14 && / \text{ összevonás} \\
6 \cdot x + 7 &= 3 \cdot x - 14 && / -3 \cdot x \\
3 \cdot x + 7 &= -14 && / -7 \\
3 \cdot x &= -21 && / : 3 \\
x &= -7
\end{aligned}
$$

Más lépéseket választva a megoldás során:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot x + 7 + 4 \cdot x &= 3 \cdot x - 14 && / \text{ összevonás} \\
6 \cdot x + 7 &= 3 \cdot x - 14 && / +14 \\
6 \cdot x + 21 &= 3 \cdot x && / -3 \cdot x \\
21 &= -3 \cdot x && / : (-3) \\
-7 &= x
\end{aligned}
$$

Ellenőrzés: $2 \cdot (-7) + 7 + 4 \cdot (-7) = -14 + 7 - 28 = -35$

$3 \cdot (-7) - 14 = -21 - 14 = -35$

b)

$$
\begin{aligned}
6 \cdot (2 \cdot x + 3) &= 9 + 5 \cdot x + 6 + 3 + 7 \cdot x && / \text{ zárójelfelbontás} \\
6 \cdot 2 \cdot x + 6 \cdot 3 &= 9 + 5 \cdot x + 6 + 3 + 7 \cdot x && / \text{ összevonás} \\
12 \cdot x + 18 &= 18 + 12 \cdot x && / -18 \\
12 \cdot x &= 12 \cdot x && / -12 \cdot x \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Már az összevonás elvégzését követően láthatjuk, hogy ugyanaz a kifejezés áll az egyenlet mindkét oldalán, vagyis bármilyen számot helyettesítünk x helyére, az egyenlőség teljesül. Amikor az egyenlet igazsághalmaza megegyezik az alaphalmazzal, akkor azonosságról beszélünk. Azaz ennek a feladatnak a tanult számok körében végtelen sok megoldása van.

c) Nem szabad elfelejtenünk, hogy a mérlegelv egy indirekt megoldási módszer. Az első lépéstől kezdve feltételezzük, hogy létezik megoldás. A tanulók megpróbálják ezt a feladatot is a mérlegelvvel megoldani, hiszen órán ezt gyakoroltuk:

$4 + 10 \cdot x = 3 + 10 \cdot x \qquad / -3$

$1 + 10 \cdot x = 10 \cdot x \qquad / -10 \cdot x$

$1 = 0$

Úgy gondolom, hogy a mérlegelv tanításának kezdetén egy ilyen feladat zavaró, mert nem tartozik a lényeghez. A legtöbb tanuló ilyenkor megijed, hiszen ilyen feladattal még nem találkoztak, így nem tudják értelmezni az eredményt. Az egyenlet ellentmondásra vezetett, tehát a kiinduló indirekt feltevés, az egyenlőség hamis volt. Ha a tanuló ránéz a feladatra, s kicsit elgondolkozik, el sem kezdi a „megoldást". Hamar rájön, hogy ugyanazt az ismeretlen mennyiséget $(10 \cdot x)$ az egyik oldalon 4-gyel, a másikon 3-mal növeltük. Így a 4-gyel való növelés 1-gyel nagyobb számot eredményez, vagyis az egyenlőség soha nem lesz igaz.

3.Oldjuk meg az egyenlőtlenséget! Melyik a legkisebb, illetve legnagyobb egész megoldás?

$2 \cdot (1 - 2 \cdot x) + 7 \geq 6 + 2 \cdot x + 4 \cdot (2 - x)$

Bontsuk fel a zárójeleket, végezzük el a lehetséges összevonásokat!

$2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 7 \geq 6 + 2 \cdot x + 4 \cdot 2 - 4 \cdot x$

$2 - 4 \cdot x + 7 \geq 6 + 2 \cdot x + 8 - 4 \cdot x$

$9 - 4 \cdot x \geq 14 - 2 \cdot x$

Egyenlőtlenség mérlegelvvel történő megoldásakor az egyenletnél megengedett lépések végrehajthatók, annyi különbséggel, hogy ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozzuk vagy osztjuk ugyanazzal a negatív számmal, akkor az egyenlőtlenség irányát megváltoztatjuk. Ugyanígy jártunk el az egyenlőtlenség lebontogatással történő megoldásakor is. Egyszerű számpéldákon megmutatható, hogy megváltozik az egyenlőtlenség iránya, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalának az ellentettjét vesszük:

$-2 > -4 \qquad 6 > 3$

$-(-2) < 4 \qquad -6 < -3$

Megoldás mérlegelvvel:

$$9 - 4 \cdot x \geq 14 - 2 \cdot x \qquad / -9$$

$$-4 \cdot x \geq 5 - 2 \cdot x \qquad / +2 \cdot x$$

$$-2 \cdot x \geq 5 \qquad / : (-2)$$

$$x \leq -2{,}5$$

Más lépéseket választva a megoldás során:

$$9 - 4 \cdot x \geq 14 - 2 \cdot x \qquad / +4 \cdot x$$

$$9 \geq 14 + 2 \cdot x \qquad / -14$$

$$-5 \geq 2 \cdot x \qquad / : 2$$

$$-2{,}5 \geq x$$

A második esetben célzottan olyan lépéseket választottam, hogy ne kelljen negatív számmal osztani. Megfigyelhető, hogy ugyanazt a megoldást kaptuk, mint az első számolás alkalmával. A tanulók így is meggyőződhetnek arról, hogy negatív számmal történő osztáskor illetve szorzáskor a relációs jel megfordítása szükséges lépés. Mindig rendezhetjük úgy az egyenlőtlenséget, bár ez a legtöbb esetben több lépést igényel, hogy az ismeretlen együtthatója pozitív szám legyen, így nem kell negatív számmal osztanunk. A tanulóknak eleinte ez a módszer könnyebben érthető.

Ellenőrzés: $x = -2{,}5$

$$2 \cdot [1 - 2 \cdot (-2{,}5)] + 7 = 2 \cdot [1 - (-5)] + 7 = 2 \cdot 6 + 7 = 12 + 7 = 19$$

$$6 + 2 \cdot (-2{,}5) + 4 \cdot [2 - (-2{,}5)] = 6 - 5 + 4 \cdot 4{,}5 = 1 + 18 = 19$$

Egyenlőtlenségnél azonban nem elegendő egyetlen számot behelyettesíteni az eredeti kifejezésbe. Ellenőriznünk kell az egyenlőtlenség irányát is:

$$x = -3$$

$$2 \cdot [1 - 2 \cdot (-3)] + 7 = 2 \cdot [1 - (-6)] + 7 = 2 \cdot 7 + 7 = 14 + 7 = 21$$

$$6 + 2 \cdot (-3) + 4 \cdot [2 - (-3)] = 6 - 6 + 4 \cdot 5 = 20$$

$21 > 20$ Teljesül az egyenlőtlenség, -3 eleme az igazsághalmaznak.

$$x = -2$$

$$2 \cdot [1 - 2 \cdot (-2)] + 7 = 2 \cdot [1 - (-4)] + 7 = 2 \cdot 5 + 7 = 10 + 7 = 17$$

$$6 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot [2 - (-2)] = 6 - 4 + 4 \cdot 4 = 2 + 16 = 18$$

$17 < 18$ -2 nem eleme az igazsághalmaznak.

Hangsúlyozzuk, hogy az egyenlőtlenségnek általában végtelen sok megoldása van, ezért az ellenőrzést az egyenlőség vizsgálatával és néhány gyök (megoldás) behelyettesítésével oldhatjuk meg! Ábrázoltassuk számegyenesen a megoldást!
Mivel $x \leq -2{,}5$ ezért a legnagyobb egész megoldás -2, legkisebb egész megoldás nincs.

Keressünk „szép” megoldást!

1.*Pisti 10 évvel fiatalabb, mint Gábor. Együtt 28 évesek. Hány évesek külön-külön?*

A szöveges feladatoknál tanítás szempontjából egy ellentmondásos helyzet alakul ki. Csak egyszerű összefüggéseket mutathatunk a tanulóknak, mivel az adatok szimbólumokkal történő lejegyzése nehéz feladat. Azonban ezek a feladatok általában megoldhatók egyenlet felírása nélkül is. Az ilyen megoldások általában elegánsabbak is, bár leírásuk nem minden esetben egyszerű. Vagyis a tanulók látszólag egy olyan módszert tanulnak meg, melynek a jelenben nem veszik hasznát, hiszen következtetéssel, logikus okoskodással is megkapható a megoldás.
Következtetéses gondolatmenet:
Ha egyidősek lennének, akkor Pisti és Gábor is 14 évesek volnának. Úgy lehet köztük a korkülönbség 10 év, ha a 14-hez hozzáadunk, illetve elveszünk 5-5 évet. Tehát Pisti 9 éves, Gábor pedig 19 éves. Valóban életkoruk összege így 28 év, s a korkülönbség 10 év.
Megoldás menete egyenlettel:
Adatok: Pisti életkora: x
Gábor életkora: $x + 10$
Összefüggés: $x + x + 10 = 28$
Számolás:

$$x + x + 10 = 28 \quad / \text{ összevonás}$$
$$2 \cdot x + 10 = 28 \quad / -10$$
$$2 \cdot x = 18 \quad / :2$$
$$x = 9$$

Ellenőrzés: Az eredmény megegyezik a következtetéssel kapott megoldással. Természetesen behelyettesítéssel is meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

Válasz: Pisti kilenc, Gábor pedig tizenkilenc éves.

Hívjuk fel a tanulók figyelmét, hogy a fenti egyenlet a mérlegelv nélkül, lebontogatással is megoldható, hiszen csak az egyik oldalon szerepel ismeretlen.

2.Andi, Bence és Csilla páronként ráállt egy mérlegre. Andi és Bence tömege együtt 94 kg, Andi és Csilla tömege együtt 82 kg, Bence és Csilla tömege együtt 90 kg. Mekkora a tömegük külön-külön?

Következtetéses megoldás: Mivel minden gyereket kétszer mértünk, így a három mérési adat összege megegyezik az együttes tömegük kétszeresével, vagyis együttes tömegük kiszámolható a következőképp:

$$(94 + 82 + 90): 2 = 266: 2 = 133$$

Ha ebből rendre kivonjuk két gyermek együttes tömegét, ami a feladatban adott, megkapjuk a harmadik gyermek tömegét:

$$133 - 94 = 39$$

$$133 - 82 = 51$$

$$133 - 90 = 43$$

Vagyis Andi, Bence és Csilla tömege ebben a sorrendben: 43 kg, 51 kg, 39 kg.

Ne felejtsük el az ellenőrzést, amit a szöveg alapján végezhetünk el!

Megoldás egyenlettel:

Andi tömege: A

Bence tömege: $94 - A$

Csilla tömegét kétféleképp is felírhatjuk: $82 - A$ illetve $90 - (94 - A)$

A megoldandó egyenlet: $82 - A = 90 - (94 - A)$

$82 - A = 90 - (94 - A)$ / zárójelfelbontás

$82 - A = 90 - 94 + A$ / összevonás

$82 - A = -4 + A$ / $+4$

$86 - A = A$ / $+A$

$86 = 2 \cdot A$ / $: 2$

$43 = A$

Ebből Bence tömege kiszámolható: $94 - 43 = 51$ kg

Hasonlóan megkapható Csilla tömege is: $82 - 43 = 39$ kg

Válasz: Andi, Bence és Csilla tömege rendre 43 kg, 51 kg, 39 kg.

Gyakran előfordul. hogy a tanulók a jobb oldalon lévő zárójelet így bontják fel:

$$90 - (94 - A) = 90 - 94 - A$$

A tanulók elfelejtik, hogy a zárójel előtti műveletet a zárójelen belüli összes taggal el kell végezni. Érdemes ilyenkor átismételni a műveleti tulajdonságokról valamint a negatív számokról tanultakat, és célszerű újra átnézni a zárójelfelbontás menetét.

Sok tanuló több ismeretlent vezet be, így a feladat túl bonyolulttá válik:

Adatok:	Andi tömege: A	$A + B = 94$
	Bence tömege: B	$A + C = 82$
	Csilla tömege: C	$B + C = 90$

Ez formálisan egy három ismeretlenes egyenletrendszer, a tanuló ezen a ponton elakad. Vezessük rá a tanulót, hogy kevesebb ismeretlen is elég a feladat megoldásához! Tegyünk fel segítő kérdéseket!

„Meg tudnád mondani B értékét, ha tudnád A értékét?”

„Ezek ismeretében ki tudnád számolni C értékét? Hányféleképpen?”

Ezek után a tanuló már fel tudja írni a fenti egyenletet, melyben csak egyetlen ismeretlen szerepel. Megemlíthetjük, hogy a következtetéses gondolatmenet lépéseit is lejegyezhetjük szimbólumokkal, s ehhez pontosan erre a három egyenletre van szükségünk. A feladatot úgy is interpretálhatjuk, hogy a három mérleg mindegyike egyensúlyban van. Rakjuk fel egyetlen mérlegre a „súlyokat”, mely szintén egyensúlyban lesz!

$$(A + B) + (A + C) + (B + C) = 94 + 82 + 90$$
$$A + B + A + C + B + C = 266$$
$$2 \cdot A + 2 \cdot B + 2 \cdot C = 266$$
$$2 \cdot (A + B + C) = 266$$
$$A + B + C = 133$$

Innen a következtetéses gondolatmenet lépéseit folytatva adódik a megoldás:

$A + B = 94 \rightarrow C = 133 - 94 = 39$

$A + C = 82 \rightarrow B = 133 - 82 = 51$

$B + C = 90 \rightarrow A = 133 - 90 = 43$

3.Egy gazda tyúkokat és nyulakat tart a kertjében. Ezeknek az állatoknak összesen 35 feje és 94 lába van. Hány tyúkja és hány nyula van a gazdának?

Többféleképpen is elindulhatunk:

a) Összesen 35 állatról van szó. Ezek nem lehetnek mind nyulak, mert akkor 140 lábuk volna, de tyúkok sem lehetnek mind, mert akkor csak 70 lábuk volna. Próbálkozzunk tovább! Mi a helyzet, ha mondjuk 20 tyúk és 15 nyúl van a kertben? Foglaljuk táblázatba az adatokat:

Nyúl (db)	35	0	15	10	13	**12**	11
Tyúk (db)	0	35	20	25	22	**23**	24
Láb (db)	140	70	100	90	96	**94**	92
	sok	kevés	sok	kevés	sok	**elég**	kevés

Ezzel a táblázatban nyomon követhető tervszerű próbálgatással valóban megtaláltuk a megoldást. Vagyis a gazda kertjében 12 nyúl és 23 tyúk található. Ha ugyanezt a feladatot nagyobb számokkal adjuk fel a tanulóknak, ez a gondolatmenet hosszadalmassá válik.

b) Okoskodás: mind a 35 állatnak legalább két lába van, így ha ezt a 70 lábat levonjuk az összesből, azaz a 94-ből, akkor a maradék 24 láb a nyulaké. Mivel minden nyúlnak a tyúkokhoz képest 2-vel több lába van, így a gazda kertjében 12 nyúl, és 23 tyúk van. Az elvégzett számolás a következő:

$$(94 - 2 \cdot 35) : 2 = 12$$

$$35 - 12 = 23$$

Ötletesebben ugyanez: A gazda olyankor nézi meg az állatait, mikor a nyulak hátsó lábukon, a tyúkok pedig fél lábukon állnak. Ilyenkor lábaik felét használják, vagyis 47-et. Ebben a különleges helyzetben a tyúkok fejének és lábainak a száma megegyezik. Levonva a 47-ből az összes fej számát, éppen a nyúlfejek száma marad meg, ami 12. Az elvégzett műveletsor:

$$94 : 2 - 35 = 12$$

Ugyanazt az eredményt kaptuk, mint a fenti okoskodással, sőt a végrehajtott műveletek is azonosak. Ha felbontjuk a zárójelet, akkor épp az itt felírt műveletsort kapjuk.

c) Gyűjtsük ki az adatokat a szövegből, keressünk köztük összefüggéseket, s fogalmazzuk meg a feladatot az algebra nyelvén, azaz írjunk fel egyenletet!

Adatok: fejek száma: 35 lábak száma: 94

nyulak száma: x

tyúkok száma: $35 - x$

Terv: $4 \cdot x + (35 - x) \cdot 2 = 94$

Számolás menete mérlegelvvel:

$$4 \cdot x + (35 - x) \cdot 2 = 94 \qquad / \text{zárójelfelbontás}$$
$$4 \cdot x + 70 - 2 \cdot x = 94 \qquad / \text{összevonás}$$
$$2 \cdot x + 70 = 94 \qquad / -70$$
$$2 \cdot x = 24 \qquad / :2$$
$$x = 12$$

Ellenőrzés: $4 \cdot 12 + (35 - 12) \cdot 2 = 48 + 23 \cdot 2 = 94$

Válasz: A gazda a kertjében 12 nyulat és 23 tyúkot tart.

Ezt az egyenletet is megoldhattuk volna a mérlegelv alkalmazása nélkül. A zárójel felbontását és az összevonást elvégezve a következő adódik:

$$2 \cdot x + 70 = 94$$

Innen pedig a lebontogatás módszerével, vagyis ellentétes műveletek elvégzésével adódik a megoldás.

d) Sok gyermek az adatok kigyűjtése során két ismeretlent vezet be:

nyulak száma: x

tyúkok száma: y

Felírják a megfelelő összefüggéseket is: $x + y = 35$

$$2 \cdot x + 4 \cdot y = 94$$

Ilyen jelölésekkel a feladatot lefordítottuk a matematika nyelvére: egy két ismeretlenes egyenletrendszer megoldására vezettük vissza kiindulási feladatunkat. Általános iskolában azonban csak lineáris egyenletek megoldását tanítjuk, egyenletrendszerekkel a tanulók először a 9. osztályban találkoznak. Egy általános iskolás gyerek ezt így nem tudja megoldani, elakad.

Mit tehet ilyenkor a tanár? Rá kell vezetni a tanulót, hogy a probléma megoldásához egyetlen ismeretlen mennyiség bevezetése is elegendő, hiszen ha összesen 35 állat van, és ebből x db nyúl, akkor $(35 - x)$ tyúk van a kertben. Ha a tanuló így sem érti, akkor konkrét számpéldán mutassuk be az összefüggést: ha 10 nyúl van, akkor $35 - 10 = 25$ tyúk van a kertben. Innen már tovább tud lépni, felírja a c) részben tárgyalt egyenletet, amit meg tud oldani. A tanulónak viszont el kell magyaráznunk azt is, hogy amit eredetileg felírt, az is helyes megoldásra vezet. Ha a fenti gondolatmenetet megértette a tanuló, akkor rámutathatunk, hogy az első egyenlet pont ezt fejezi ki:

$$x + y = 35$$

Ebből átrendezéssel (mindkét oldalból elveszünk x-t) a következő adódik:

$$y = 35 - x$$

Ha ezt behelyettesíti a második egyenletbe y helyére, akkor a c) részben tárgyalt egyenletet kapja. Ez a magyarázkodás fölöslegesnek tűnhet, pedig két hasznos dolgot értünk el vele: egyrészt megnyugtattuk a tanulót, hogy helyesen gondolkodott, csak túlbonyolította a feladatot, így nem éri oly mértékű kudarc a gyereket, s továbbra is motivált marad a feladatmegoldásban. Másrészt rejtve bemutattuk az egyenletrendszer egy lehetséges megoldási módját.

Miután többféle módon megoldottuk a feladatot, hívjuk fel a tanulók figyelmét, hogy az algebrai okoskodás mindig célra vezet, s általában gyorsabban megkapjuk a megoldást, mint a próbálgatás módszerével. A b) részben bemutatott megoldáshoz kellett egy jó ötlet, ennek hiányában a tanulónak nincs más választása, mint felírni az egyenletet, vagy hosszasan próbálgatni.

Törtegyütthatós egyenlet

1.Oldjuk meg az egyenletet a racionális számok halmazán!

$$3x - \frac{x+2}{4} - \frac{3x-2}{2} = 1 - \frac{x-1}{3}$$

7. osztályban találkoznak a tanulók először törtegyütthatós egyenletekkel. Minőségileg nagy ugrás, ha feladatainkban racionális számok sokasága is megjelenik. Fontos, hogy a tanulók biztonsággal végezzenek műveleteket törtekkel, így ismételjük át órán az erről tanultakat. 7. és 8. osztályban a jelölések is tömörebbé válnak, például az ismeretlen kétszeresét a korábban megszokott $2 \cdot x$ helyett $2x$ jelöli.

A megoldás során átalakítjuk az egyenletet olyan egyenletté, hogy ne tartalmazzon törtet. Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, hogy közös nevezőre hozzuk a törteket, majd szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát a közös nevezővel.

$$3x-\frac{x+2}{4}-\frac{3x-2}{2}=1-\frac{x-1}{3}$$

$$3x-\frac{3\cdot(x+2)}{12}-\frac{6\cdot(3x-2)}{12}=1-\frac{4\cdot(x-1)}{12}$$

$$12\cdot 3x-3\cdot(x+2)-6\cdot(3x-2)=12-4\cdot(x-1)$$

$$36x-3x-6-18x+12=12-4x+4$$

$$15x+6=16-4x$$

$$19x+6=16$$

$$19x=10$$

$$x=\frac{10}{19}$$

Gyakori hiba, hogy a tanuló a beszorzásnál elfelejti megszorozni azokat a tagokat, melyek nem törtalakban állnak. Ez elkerülhető, ha az első feladatokban ezeket a tagokat is törtalakra hozzuk, s így végezzük el a beszorzást. Említsük meg a tanulóknak, hogy a beszorzásnál azt használjuk ki, hogy törtet egész számmal úgy is szorozhatunk, hogy a tört nevezőjét osztjuk a szorzóval. Így a nevezővel történő szorzáskor a számlálót kapjuk eredményül. Innentől kezdve már egy olyan alakú egyenletet kell megoldanunk, mellyel korábban is találkoztunk. A zárójelfelbontásokat és az összevonásokat elvégezve a két oldal egyenlő változtatásával kapjuk a megoldást.

Ellenőrzés: A $\frac{10}{19}$ racionális szám, tehát eleme az alaphalmaznak. Megjegyezhetjük, hogy az egész számok halmazán nincs megoldás.

$$3\cdot\frac{10}{19}-\frac{\frac{10}{19}+2}{4}-\frac{3\frac{10}{19}-2}{2}=\frac{30}{19}-\frac{48}{4\cdot 19}-\frac{(-8)}{2\cdot 19}=\frac{120}{76}-\frac{48}{76}+\frac{16}{76}=\frac{88}{76}=\frac{22}{19}$$

$$1-\frac{\frac{10}{19}-1}{3}=1-\frac{(-9)}{3\cdot 19}=\frac{57+9}{3\cdot 19}=\frac{66}{3\cdot 19}=\frac{22}{19}$$

A két oldal megegyezik, tehát az $x=\frac{10}{19}$ kielégíti az egyenletet és eleme az alaphalmaznak, azaz gyöke az egyenletnek.

„Fizikai számítások”

1.Pistiék elhatározták, hogy meglátogatják külföldi rokonaikat. Az út során 645 km-t autópályán, a maradék 90 km-t pedig országúton kell megtenniük. Pisti kiszámolta, hogy ha az autópályán kétszer akkora sebességgel mennek, mint az országúton, akkor hét és fél óra alatt érnek oda. Mekkora sebességgel számolt Pisti?

Nézzük először a megoldást egyenlettel:

a) Adatok és köztük lévő összefüggések a szöveg alapján:

v : sebesség az országúton (km/h)

$2v$: sebesség az autópályán (km/h)

7.5 : összes utazási idő (h)

$\frac{645}{2v}$: utazási idő az autópályán

$\frac{90}{v}$: utazási idő az országúton

Az utazási idők kiszámolásához felhasználtuk a fizikából ismert képletet, amiben t jelöli az eltelt időt, s a megtett utat, v pedig a sebességet:

$$t = \frac{s}{v}$$

Terv: Az összes utazási idő megegyezik az autópályán és az országúton töltött idő összegével:

$$7.5 = \frac{645}{2v} + \frac{90}{v}$$

Számolás:

$$7.5 = \frac{645}{2v} + \frac{2 \cdot 90}{2v}$$

$$7.5 \cdot 2v = 645 + 180$$

$$15v = 825$$

$$v = 55$$

Ellenőrzés:

$$\frac{645}{2 \cdot 55} + \frac{90}{55} = \frac{645}{110} + \frac{180}{110} = \frac{825}{110} = \frac{15}{2} = 7.5$$

Válasz: Pistiék az országúton 55 km/h-val, az autópályán 110 km/h-val utaztak.

b) Másik okoskodás: feltéve, hogy az autó az utazás során végig akkora sebességgel halad, mint az autópályán, az országúton nem 90 km-t tesz meg, hanem $2 \cdot 90 = 180$ km-t. Vagyis hét és fél óra alatt összesen $645 + 180 = 825$ km-t tesz meg. Most már csak azt kell meggondolni, hogy hány kilométert tesz meg az autó egy óra alatt. Ez egy arányos következtetés, melyből megkaphatjuk azt a sebességet, amivel az autópályán haladtak Pistiék: $825 : 7.5 = 110$

Az egész műveletsor, mely tartalmazza az okoskodás lépéseit, a következő:

$$(645 + 2 \cdot 90) : 7.5 = 110$$

Ugyanazt a megoldást kaptuk, mint az egyenlettel történő megoldás során.

Fontos megjegyeznünk, hogy sokan a szöveges példa láttán rögtön nekiállnak egyenletet felírni, mert ez egy biztos módszer, s eszükbe sem jut egy kicsit elidőzni a feladat felett, s meggondolni, van-e „szép” megoldása a feladatnak. Nem beszélve arról, hogy egy ilyen megoldást találva a tanuló önbizalma is nő, hiszen volt egy jó ötlete, ami célhoz vezetett.

Ezzel szemben az egyenletmegoldás egy algoritmizálható feladat, mely technikai jellegű lépések egymásutánja, amit egy számítógép, sőt manapság már egy fejlettebb számológép is el tud végezni. Ez a második megoldás azért is nagyszerű, mert egyrészt nem kell hozzá törtes egyenletet felírnunk, másrészt pedig nem kell a fizikai képletekhez nyúlnunk a megoldás során. Elég, ha a tanuló intuitív módon rájön, hogy mi a sebesség definíciója: „Hány kilométert tesz meg az autó egy óra alatt?”

2. 4 kg 50%-os kénsavhoz 6 kg 70%-os kénsavat öntünk. Hány százalékos kénsavat kapunk így?

Gyűjtsük ki az adatokat a szövegből és írjuk fel a köztük lévő összefüggéseket!

1 kg 50%-os kénsavoldat: $\frac{50}{100}$ kg tiszta (100%-os) kénsavat tartalmaz,

4 kg 50%-os kénsavoldat: $4 \cdot \frac{50}{100}$ kg tiszta kénsavat tartalmaz,

6 kg 70%-os kénsavoldat: $6 \cdot \frac{70}{100}$ kg tiszta kénsavat tartalmaz,

10 kg x%-os kénsavoldat: $10 \cdot \frac{x}{100}$ kg tiszta kénsavat tartalmaz.

Ha összeöntjük a kétféle töménységű kénsavoldatot, akkor az elegyben lévő tiszta kénsav mennyisége megegyezik az összeöntés előtti tiszta kénsav mennyiségével. Mivel 50%-os és 70%-os oldatokat öntöttünk össze, a keletkezett kénsavoldat töménysége 50% és 70% között lesz. Ha egyenlő mennyiségeket vegyítettünk volna, akkor 60%-os oldatot kaptunk volna, viszont a 70%-os kénsavoldatból több van, így az elegy töménysége nagyobb lesz 60%-nál.

A fenti adatokat és összefüggéseket felhasználva felírhatjuk a következő egyenletet:

$$4 \cdot \frac{50}{100} + 6 \cdot \frac{70}{100} = 10 \cdot \frac{x}{100}$$

$$4 \cdot 50 + 6 \cdot 70 = 10x$$

$$620 = 10x$$

$$62 = x$$

Ellenőrizzük a megoldást a szöveg alapján!

Az eredmény összhangban van a becsült értékkel.

4 kg 50%-os kénsavoldatban $4 \cdot 0.5 = 2$ kg tiszta kénsav van.

6 kg 70%-os kénsavoldatban $6 \cdot 0.7 = 4.2$ kg tiszta kénsav van.

Vagyis összesen 6.2 kg tiszta savat öntöttünk össze.

10 kg 62%-os kénsavoldatban $10 \cdot 0.62 = 6.2$ kg tiszta kénsav van.

Megállapíthatjuk, hogy az elegy éppen annyi tiszta kénsavat tartalmaz, mint amennyit összeöntöttünk, vagyis az eredményük helyes.

Válasz: Az oldatok összeöntése után 62%-os kénsavoldatot kapunk.

Említsük meg a tanulóknak, hogy a feladat megoldása során felhasználtuk kémiai ismereteinket is. Ha valaki nem tanult oldatokról és azok töménységéről, akkor nem tudja értelmezni a feladatot.

3.Egy hordó az egyik csapon át 50 perc alatt, a másikon 40 perc alatt, a harmadikon 3 óra 20 perc alatt telik meg. Mennyi idő alatt telik meg, ha mindhárom csapot megnyitják?

Tegyük fel, hogy a hordó t perc alatt telik meg! Nézzük meg, hogy az egyes csapok t idő alatt mekkora részig töltik meg a hordót, és ezen részek összege adja az egészet, vagyis a hordó megtelik! Az egyik csap egyedül 40 perc alatt töltené meg a hordót, most viszont a másik kettő is „besegít”, így biztos, hogy 40 percnél kevesebb idő alatt lesz tele a hordó.

Első csap: 50 perc alatt megtelik a hordó.

1 perc alatt $\frac{1}{50}$ részéig telik meg a hordó.

t perc alatt $t \cdot \frac{1}{50} = \frac{t}{50}$ részéig telik meg a hordó.

Hasonló gondolatmenettel, arányos következtetéssel kapjuk, hogy a másik két csapon át t idő alatt hányad részéig telik meg a hordó:

Második csap: t perc $\rightarrow \frac{t}{40}$

Harmadik csap: t perc $\rightarrow \frac{t}{200}$

A harmadik csap estében az időt átváltottuk percre: 3 óra 20 perc = 200 perc.

Most már felírhatjuk az adatok közti összefüggéseket egyenlettel:

$$\frac{t}{50} + \frac{t}{40} + \frac{t}{200} = 1$$

$$\frac{4t}{200} + \frac{5t}{200} + \frac{t}{200} = 1$$

$$4t + 5t + t = 200$$

$$10t = 200$$

$$t = 20$$

Vagyis a hordó 20 perc alatt telik meg, ha mindhárom csapot kinyitják.

Ellenőrizzük a kapott megoldást!

$$\frac{20}{50} + \frac{20}{40} + \frac{20}{200} = \frac{2}{5} + \frac{2}{4} + \frac{2}{20} = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

Behelyettesítve az egyenletbe a kapott eredményt teljesül az egyenlőség, vagyis a $t = 20$ kielégíti az egyenletet. A megoldás megfelel a feladat szövegének is.

Az egyenletet megoldhatjuk a mérlegelv nélkül is, a lebontogatás módszerét használva, ugyanis csak az egyik oldalon szerepel ismeretlen mennyiség:

$$\frac{10t}{200} = 1$$

A végrehajtandó műveletsor: $(1 \cdot 200): 10 = 20$

Helyiértékes írásmód alkalmazása

1.Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 12. A számjegyek felcserélésével kapott szám az eredeti szám kétszeresénél 39-cel kisebb. Melyik lehet ez a kétjegyű szám?

Az ilyen helyiértékes írásmóddal kapcsolatos feladatokat a tanulók többsége próbálgatással, illetve következtetéssel próbálja megoldani, mivel nem tudják felírni az adatok közti összefüggést egyenlettel.

Mit is jelent a helyiértékes írásmód? Példákon keresztül mutassuk meg a tanulóknak!

$$63 = 6 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

$$45 = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

$$142 = 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$

Ha a kétjegyű szám ($\overline{ab}$) tízeseinek a helyén a, az egyeseinek a helyén b áll, akkor a számot a következő alakban írhatjuk fel:

$$a \cdot 10 + b$$

Oldjuk meg a feladatot először egyenlettel!

Az egyesek helyén álló számjegy: x

A tízesek helyén álló számjegy: $12 - x$

Az eredeti szám helyiértékes alakja: $(12 - x) \cdot 10 + x$

A számjegyek felcserélésével kapott szám helyiértékes alakja: $x \cdot 10 + (12 - x)$

A köztük lévő összefüggés:

$$2 \cdot [(12 - x) \cdot 10 + x] - 39 = x \cdot 10 + (12 - x)$$

$$2 \cdot (120 - 10x + x) - 39 = 10x + 12 - x$$

$$2 \cdot (120 - 9x) - 39 = 9x + 12$$

$$240 - 18x - 39 = 9x + 12$$

$$201 - 18x = 9x + 12$$

$$201 = 27x + 12$$

$$189 = 27x$$

$$7 = x$$

A második számjegy 7, az első pedig $12 - 7 = 5$. A keresett szám: 57.

Az ellenőrzést a feladat szövege alapján végezzük el:

Az eredeti szám: 57.

A számjegyek felcserélése után kapott szám: 75.

A köztük lévő összefüggés: $57 \cdot 2 - 39 = 75$.

Az eredményünk helyes.

Érdemes megemlíteni a tanulóknak, hogy a feladatban x egy számjegyet jelölt, így lehetséges értékei: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Amennyiben az egyenlet megoldásaként más számot kapunk, nincs megoldása a feladatnak.

Próbáljuk megoldani a feladatot próbálgatással is!

Ha a számjegyek összege 12, akkor a lehetséges kétjegyű számok: 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93.

Foglaljuk táblázatba az adatokat!

eredeti szám	39	48	**57**	66	75	84	93
felcserélve	93	84	**75**	66	57	48	39
$2\cdot$(eredeti)-39	39	57	**75**	93	111	129	147
	$\neq$	$\neq$	$=$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\neq$

A táblázatból leolvasható, hogy egyetlen szám tesz eleget a feladat feltételeinek, az 57.

Ilyen típusú feladatoknál egyszerűbb az egyenlet nélküli megoldás.

Összefoglalás

Szakdolgozatomban nyitott mondatok, egyenletek és ezek segítségével megoldható szöveges feladatok megoldási módszereit jártam körül. Tanulságként elmondható, hogy mielőtt nekiállunk egyenleteket felírni és megoldani, érdemes kicsit elgondolkozni a feladaton, hiszen sokszor logikai okoskodással gyorsabban célhoz érünk. Leendő tanárként ezt a szemléletmódot szeretném a tanulókkal megismertetni. Egy tanárnak mindig tisztában kell lenni azokkal az előismeretekkel, melyeket a tanulóktól elvár, mikor felad nekik egy feladatot. Ezért számos feladatnál feltüntettem, hogy mik ezek az elvárt ismeretek, sőt rámutattam, hogy mik a leggyakrabban előforduló tanulói hibák, mire hívjuk fel különösen a tanulók figyelmét.

Úgy vélem, ezt a témakört a középiskolában is hasonló formában kellene oktatni. Bár a tanárnak szabadsága van a tanítási módszerek megválasztásában, de a központilag meghatározott tantervhez alkalmazkodnia kell. Az utóbbi időben nagy hangsúlyt fektettek a valószínűség-számítás és statisztika témakörök oktatására, így az algebra témakörre jutó órák száma csökkent, emiatt az ismétlésre, rendszerezésre kevesebb idő marad. Mégis úgy gondolom, hogy a tanárnak meg kell próbálni rávilágítani a tananyagbeli összefüggésekre, s a „kevesebbet, de alaposan” elvet követni.

Felhasznált irodalom

1. Árvainé Libor Ildikó – Lángné Juhász Szilvia – Szabados Anikó: *Sokszínű matematika 1. első félév*, Mozaik Kiadó, Szeged (2005)

2. Árvainé Libor Ildikó – Lángné Juhász Szilvia – Szabados Anikó: *Sokszínű matematika 1. második félév*, Mozaik Kiadó, Szeged (2005)

3. Árvainé Libor Ildikó – Lángné Juhász Szilvia – Szabados Anikó: *Sokszínű matematika 2. első félév*, Mozaik Kiadó, Szeged (2005)

4. Árvainé Libor Ildikó – Lángné Juhász Szilvia – Szabados Anikó: *Sokszínű matematika 1. második félév*, Mozaik Kiadó, Szeged (2005)

5. Scherlein Márta – Czakó Anita – Dr. Hajdu Sándor – Novák Lászlóné: *Matematika 3. Első kötet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (2004)

6. Scherlein Márta – Czakó Anita – Dr. Hajdu Sándor – Novák Lászlóné: *Matematika 3. Második kötet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (2004)

7. Dr. Hajdu Sándor – Novák Lászlóné – Scherlein Márta: *Matematika 4. Első kötet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (2000)

8. Dr. Hajdu Sándor – Novák Lászlóné – Scherlein Márta: *Matematika 4. Második kötet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (2000)

9. Békéssy Szilvia – Fried Katalin – Korándi József – Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta: *Matematika 5. Kalandozások a matematikában,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2006)

10. Dr. Czeglédy István – Dr. Czeglédy Istvánné – Dr. Hajdu Sándor: *Matematika 5.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1998)

11. Békéssy Szilvia – Fried Katalin – Korándi József – Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta: *Matematika 6. Kalandozások a matematikában,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2005)

12. Dr. Andrási Tiborné – Dr. Czeglédy István – Dr. Czeglédy Istvánné – Dr. Hajdu Sándor: *Matematika 6.,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1999)

13. Békéssy Szilvia – Fried Katalin – Korándi József – Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta: *Matematika 7. Kalandozások a matematikában,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2006)

14. Dr. Czeglédy István – Dr. Czeglédy Istvánné – Dr. Hajdu Sándor – Novák Lászlóné – Dr. Sümegi Lászlóné: *Matematika 7. Emelt szint,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest (2000)
15. Békéssy Szilvia – Fried Katalin – Korándi József – Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta: *Matematika 8. Kalandozások a matematikában,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2006)
16. Dr. Czeglédy István – Dr. Czeglédy Istvánné – Dr. Hajdu Sándor – Novák Lászlóné – Dr. Sümegi Lászlóné – Szalontai Tibor: *Matematika 8. Emelt szint,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest (2001)
17. Pólya György: *A problémamegoldás iskolája I. kötet*, Tankönyvkiadó, Budapest (1967)
18. Veszprémi László: *Didaktika,* APC-Stúdió, Gyula (2000)