# SZAKDOLGOZAT

## KOMPETENCIA ÉS ÚJ TÍPUSÚ MATEMATIKA ÉRETTSÉGI

– EGY KOMPETENCIA ALAPÚ FELADATSOR TANULSÁGAI –

KÉSZÍTETTE: **RENGE KRISZTINA** (MATEMATIKA BSC)

TÉMAVEZETŐ: **DR. VANCSÓ ÖDÖN** (EGYETEMI ADJUNKTUS)

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM, TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKATANÍTÁSI ÉS MÓDSZERTANI KÖZPONT

BUDAPEST, 2009.

# TARTALOMJEGYZÉK

# 1. BEVEZETÉS

Manapság a kompetencia szóval egyre gyakrabban találkozhatunk az élet, de főként a gazdaság szinte minden területén. A különböző hazai és külföldi cégek és nagyvállalatok egyre többféle és egyre bonyolultabb teszteket töltetnek ki a hozzájuk jelentkező munkavállalókkal, hogy megtalálják a munkakör betöltésére legkompetensebb személyeket.

De a kompetenciafogalom térhódítása ugyanígy megfigyelhető az utóbbi évtizedben a magyar oktatáspolitikán belül is. Háromévente mindig egy-egy világméretű kompetencia alapú PISA-felmérés (Nemzetközi Tanulói Teljesítménymérés) eredményein „szörnyülködik" a közvélemény. Évente végeznek a hazai középiskolák különböző évfolyamaiban kompetencia-méréseket. És szinte már nincs olyan hónap, hogy a (szak)sajtóban (pl.: Új Pedagógiai Szemle) ne lehetne olvasni a kompetencia alapú oktatás fontosságáról.

De mit is jelent ez a szó pontosan, hogy kompetencia? Már most is hatalmas irodalma van ennek a szónak – az interneten egy kis időt eltöltve rengeteg dokumentumot és cikket találhat bárki, amikben beszélnek a kompetenciáról vagy épp a kompetencia alapú oktatásról. A szó pontos definíciójára azonban már nem ilyen egyszerű rábukkanni. Különösen, ha a kompetencia pedagógia jelentéstartalmát szeretnénk megismerni.

Szakdolgozatom első részének célja meghatározott logikai rendet követve, sokoldalúan bemutatni a kompetenciafogalom tartalmának változásait; és a kompetencia pedagógiai sajátosságait is megvizsgálva megadni a szó lehető legpontosabb pedagógiai jelentéstartalmát. Az ezt követő fejezetben pedig megismerkedhetünk a kompetenciák egy szűkebb, ám számunkra annál jelentősebb csoportjával, a matematikai kompetenciákkal.

A 2005-ben bevezetett új típusú, kétszintű érettségi rendszer egyik legfőbb újítása volt, hogy ezeket a matematikai kompetenciákat beemelte a részletes vizsgakövetelmények közé. Ettől kezdve a középiskolai tanulmányok záróakkordjaként szereplő érettségi vizsga, már nem csupán a színtiszta matematikai ismeretek létét vagy nemlétét hivatott ellenőrizni, hanem azt is, hogy a tanulók a bennük lévő matematikai tudást képesek-e a gyakorlatban sikeres problémamegoldó cselekedetté alakítani.

Szakdolgozatom fő célja (az első két fejezetben lefektetett elméleti alapokból építkezve) egy olyan lényegében saját feladataimból összeállított középszintű matematika érettségi feladatsor elemzése, mely tartalmilag és szerkezetileg teljes mértékben megfelel a részletes érettségi vizsgakövetelményekben lefektetett alapelveknek; de ugyanakkor a lehető legtöbb olyan feladatot tartalmazza, mellyel lemérhető, hogy valóban megszerezték-e a középiskolai tanulók a tanulmányaik során elsajátítható matematikai kompetenciákat és képesek őket felhasználni életszerű problémák megoldása közben (a vizsgaszabályzat szerint maximum a feladatok 50% lehet ilyen). A dolgozat negyedik fejezetében részletesen bemutatom a feladataimat (különös hangsúlyt fektetve arra, hogy mely matematikai kompetenciák mérésére alkalmasak).

2009. áprilisában lehetőségem volt a feladatsoromat két iskolában is megíratni a végzős diákokkal: a szigetszentmiklósi Batthyány Kázmér Gimnáziumban (BKG) és a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnáziumban (BDG). A dolgozat zárásaként így megismerkedhetünk azzal is, hogy mennyire állta meg a helyét a munkám a gyakorlatban, és hogy mennyire voltak olyan diákok felkészülve egy ilyen mértékben kompetencia alapú feladatsor megírására, akik már gimnáziumi tanulmányaik kezdetétől (2005) a kétszintű érettségire való készülés szellemében tanulhatták a matematikát.

Itt szeretném megragadni a lehetőséget, hogy köszönetet mondjak az említett két gimnázium matematika szaktanárainak (név szerint: Baranyi Gabriellának, Herbayné Dudás Évának, Kissné Hegedűs Évának, Szerticsné Pinczés Máriának és Székely Lászlónak a BKG-ból; valamint Utassy Katalinnak és Nemecskó Istvánnak a BDG-ból), hogy megíratták osztályaikkal a feladatsoromat és vállalták a dolgozatok viszonylag rövid időn belüli kijavítását. Hálás vagyok nekik az elismerő szavakért, melyekkel a feladatsoromat minősítették; és az építő jellegű kritikák megfogalmazásáért is, melyekkel főként a javítási-értékelési útmutatómat illeték.

Ezen túl természetesen szeretnék köszönetet mondani a gimnáziumok végzőseinek is. Örülök, hogy a lehető legjobb tudásuk szerint írták meg a feladatsoromat, és hogy kultúrált formában töltötték ki az ehhez elkészített kérdőíveket is, hisz ezekkel igazából ők teremtették meg a munkám gyakorlati elemzéséhez szükséges alapokat.

# 2. A KOMPETENCIA FOGALMÁNAK TISZTÁZÁSA[1]

*„A legtöbb félreértés a világon az értelmezetlen (indefiniált) szavakból ered.” (Kossuth Lajos)*

Kompetencia – „kevés olyan fogalom van, amellyel az elmúlt évtized során a modern oktatáspolitikai és oktatásfejlesztési gondolkodásban és gyakorlatban [vagy pl. a gazdaságtudományok területén] ennél gyakrabban találkozhattunk volna. Nincs olyan fejlett ország, ahol ne zajlana erről szakmai vita, ne keletkeztek volna e területre irányuló fejlesztési programok.”[2] De vajon tisztában vagyunk-e ennek a kifejezésnek a pontos jelentésével? Tisztában vannak-e a mondanivalójával azok az emberek, akik nap, mint nap dobálóznak vele az élet már-már szinte minden területén? Vagy a jelentős részüknek ez csupán egy homályos jelentéssel bíró, „értelmezetlen” frázis?

A fejezet legfőbb célkitűzése, hogy a Kossuth Lajos-i bölcsességet megszívlelve, a félreértéseket elkerülendő, kiemelje a kompetencia szót az „értelmezetlen szavak” végtelen halmazából. Manapság ez a szó bőséggel szolgáltat példát a homályos jelentéstartalmak és a fogalmi sokszorozódás miatt bekövetkező terminológiai zavarra. A fejezetben éppen ezért meghatározott logikai rendet követve, sokoldalúan igyekszünk áttekinteni a kompetenciafogalom gazdagodását, tartalmi változásait és legfőképpen – természetesen – pedagógiai sajátosságait.

---

[1] http://www.nyf.hu/virtual/keptar/kotta/pedagogia/2/2_egyseg alapján készült fejezet

[2] Halász Gábor: Előszó. In: A kompetencia. Kihívások és értelmezések. Szerk.: Demeter Kinga. Budapest, Országos Közoktatási Intézet (OKI), 2006. 3.o.

## 2.1. TÖRTÉNETI BEVEZETŐ A KOMPETENCIAFOGALOM KIALAKULÁSÁRÓL

A kompetencia fogalmának bölcsőjeként a gazdaságtudományok legkülönbözőbb részterületeit nevezhetnénk meg, vagy talán helyesebb volna multidiszciplináris tudományokat említeni. Tudománytörténeti előzményeit a teljesség igénye nélkül tekintjük át, a fogalom tartalmának fejlődéséből csak azokat az állomásokat fogjuk érinteni, amelyek a pedagógiai jelentéstartalom szempontjából fontosak.

**A kompetencia, mint képesség, alkalmasság**

[1. kép]

A XIX-XX. század fordulóján **Hugo Münsterberg** (1863-1916), német származású amerikai pszichológus munkássága jelentette annak a kezdetét, hogy kísérletileg kutatni kezdték, hogy miért alkalmasabb valaki egy munkakör betöltésére, mint egy másik személy. Münsterberg az ipari és szervezeti pszichológia területén főleg a tapasztalati pszichológia és az ipari hatékonyság kapcsolatait tanulmányozta, bostoni villamosvezetők alkalmasságát vizsgálva. Az emberi magatartás tudományos vizsgálatának eredményeként a vezetők számára megkönnyítette az emberek kiválasztását, betanítását és a megfelelő műszaki megoldások alkalmazását.

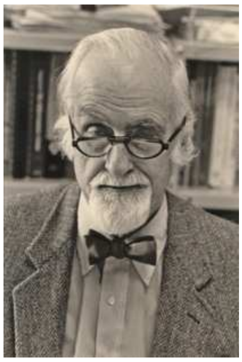
A munkalélektan első nagy fellendülése más szempontból is a XX. század elejéhez köthető: az első világháború idején az Amerikai Egyesült Államokban (a katonai sorozások alkalmával) több millió emberről kellett nagyon hamar megállapítani, milyen poszton használhatják fel őket a leghatékonyabban. Az 1905-ben megjelent Binet-Simon-féle iskolaérettségi vizsgálatra készített egyéni intelligenciavizsgáló módszert felhasználva, megalkották a csoportos vizsgálatra alkalmas Army Alpha tesztet. A sikeres alkalmazást követően ezt ipari méretekben is használni kezdték, és durván az 1930-as évekig egyre fokozódó elvárások tapadtak hozzá. Azt remélték, hogy a képességeket mérve nagy biztonsággal meg lehet jósolni, hogyan válik be a munkaerő, mennyire alkalmas valaki egy adott munkakör betöltésére.

Fejlődésnek indultak a pszichotechnikai kutatások is, melyek továbbra is elsősorban arra a kérdésre keresték a választ, hogy milyen módon állapítható meg leghatékonyabb mértékben az alkalmasság. Ezen kutatások eredményeként sok kitűnő alkalmassági vizsgálati módszert fejlesztettek ki, de a megközelítés gyengéi is hamar megmutatkoztak.

Az 1960-as évektől számítható a szó szoros értelemben vett kompetenciakutatások megindulása. Ekkortól egyre több amerikai kutató vonta kétségbe a korábbi tesztek előrejelző képességét, vagyis azt, hogy a képességek és készségek (általános intelligencia) vizsgálata elegendő annak eldöntéséhez, hogy kiből lesz sikeresebb, hatékonyabb munkaerő. A kutatás immár arra irányult, hogy új tényezőket találjanak, melyek alapján biztosabban lehet megjósolni a beválást.

**A motiváció fogalmának felmerülése**

Az új irányvonalat **David C. McClelland** (1917-1998), harvardi pszichológus alternatív motiváció megközelítése határozta meg a legnagyobb mértékben. „A szerző munkáiban a tudatalatti szerepét hangsúlyozta a tudati működésben, és azzal érvelt, hogy az emberi cselekvést részben tudat alatti motívumok irányítják (a személy mindazon tudása, értékei, motívumai, hitei, emlékei stb., amelyek adott időpontban nincsenek a tudati éberség hatáskörében)."[3]



[2. kép]

A kompetenciakutatások új útját tehát annak a felismerése hívta életre, hogy a motivációkat, a személyiség vizsgálatát és a csoporthatásokat nem lehet figyelmen kívül hagyni az alkalmasság vizsgálata során.

1973-ra McClelland kidolgozta a „Viselkedés alapú interjú" (Behavioral Event Interview, BEI) módszerét, és ezt a speciális interjútechnikát alkalmazva beazonosította azon kompetenciákat, amelyek elkülönítették a kiemelkedően teljesítőket a közepes vagy gyenge eredményeket produkálóktól (a munkakörrel kapcsolatos tapasztalatok, intelligencia és szakmai tudás megközelítően azonos mértékűek voltak). Kiderült, hogy az igazán kiemelkedő teljesítmény kulcsa a kompetenciákban rejlik.

[3] http://www.consultationmagazin.hu/index.php?menu=cikk&id=89

Ez a tény azóta nagyon sok cáfolhatatlan megerősítést nyert, és ma már tudjuk, hogy siker egyszerűen nem létezhet egy adott munkakörre vonatkozó kompetencia-készlet megléte nélkül.

**A század végének eredményei**

1982-ben fogalmazta meg Richard E. Boyatzis a „küszöbkompetencia (tudás, ismeret, alapvető készségek, képességek, bizonyos személyiségvonások) és a megkülönböztető erővel bíró kompetencia" (kulcskompetencia) fogalmát. Előbbit egy adott munkakör minimálisan hatékony betöltésének alapvető feltételeként; utóbbit pedig a siker és a kiváló teljesítmény zálogaként értelmezte.

Az 1990-es évek elején Lyle Spencer és Signe Spencer munkássága tovább árnyalta a kompetencia fogalmát. Ők alkották meg a kompetenciák szintek szerinti csoportosítását, az ún. jéghegy modellt. Ennek részletes bemutatására a következő alfejezetben kerül sor.


[3. kép]

A fogalom értelmezésének további bővüléséhez **Daniel Goleman** (1946- ) kutatásai járultak hozzá az érzelmi intelligencia fogalmával. A kaliforniai pszichológus vizsgálatai alapján úgy találta, hogy az érzelmi intelligencia (EQ) kétszer meghatározóbb a munkahelyi hatékonyság szempontjából, mint az értelmi intelligencia (IQ). Az EQ körébe sorolta a szociális készségeket (önismeret, önszabályozás, motiváció, empátia), melyek az együttműködési képességet, mint kitüntetett kompetenciát meghatározzák.

Mint azt az eddigiek is jelzik a kompetencia fogalmának megszületésében a munkapszichológia, a vezetéstudomány és a gazdaságtudomány területén kutató szakemberek rendkívül nagy szerepet játszottak. A következő alfejezetben többek között ezeknek a kutatóknak a kompetencia definícióit ismerhetjük meg.

## 2.2. A KOMPETENCIA KÜLÖNBÖZŐ DEFINÍCIÓI ÉS A „JÉGHEGY MODELL”

A továbbiakban a különböző kompetencia értelmezéseket fogjuk áttekinteni. Mint azt az előzőekben láthattuk, a kompetencia mibenlétét, összetevőit, szerkezetét sokan kutatták és formálták, így nem csoda, hogy definíciók sokasága született meg a XX. század folyamán. A kifejezés értelmezésekor azonban legegyszerűbb a szótári jelentéséből kiindulni.

Az 1974-es Bakos Ferenc által szerkesztett Idegen szavak és kifejezések szótára szerint a kompetencia szó jelentése: illetékesség, jogosultság, szakértelem. Tótfalusi István: Idegen szavak magyarul című 2002-es könyve ezt az értelmezést a következőkkel egészíti ki: hatáskör, felkészültség, hozzáértés. Maga a kompetencia egy latin eredetű szó, ami alkalmasságot, ügyességet fejez ki. A „competo” jelentése, hogy a cselekvő elegendő képességgel rendelkezik céljai megvalósításához.

Ezek a kiindulásként választott köznapi jelentéstartalmak a fogalom leglényegesebb ismérveit tükrözik ugyan, de arra nem alkalmas, hogy a kompetencia mibenlétét és összetevőit is feltárja. Ehhez közelebb visznek a következő pszichológiai eredetű meghatározások:[4]

1. „Az egyén általánosítható tudása (ismeretei), motivációi, legbensőbb személyiségjegyei, társasági szerepei vagy képességei/készségei, amelyek egy munkakörben nyújtott kiemelkedő teljesítményhez köthetők” (Amerikai Menedzsment Szövetség, AMA)

2. „Hatékony teljesítményre való képesség” (Menedzsment Charta kezdeményezés, MCI)

3. „Egy sor munkával kapcsolatos tevékenység teljesítésének képessége és az ilyen teljesítmény mögött meghúzódó, azt megerősítő képességek/készségek, tudás (ismeretek) és megértés” (Szakképesítések Nemzeti Tanácsa, NCVQ)

4. „A hatékony menedzserek/vezetők tudása (ismeretei), képességei/készségei vagy tulajdonságai” (Dr. Hornbey és R. Thomas)

---

[4] Saját gyűjtés Szelestey Judit: Kompetencia modell kidolgozásának elméleti háttere és Szilágyi Barnabás: Kompetencia-kutatás című tanulmányai alapján.

5. „Viselkedésminták egy készlete, melyet a munkakör betöltőjének be kell vetnie ahhoz, hogy a munkaköri feladatokat és funkciókat kompetensen lássa el” (Woodruffe)

6. „A kiválóan teljesítők személyiség jellemzője, pontosabban az egyén olyan tulajdonsága, amely nélkülözhetetlen egy munkakörben vagy szerepben a nyújtott hatékony teljesítményhez” (Klemp és David C. McClelland)

7. „Az egyén hatékony és/vagy kiváló munkaköri teljesítményt eredményező személyiségjellemzője” (Richard E. Boyatzis)

8. „Az egyén olyan személyiségjellemzője, amely ok-okozati viszonyban áll egy munkakörben vagy szituációban mutatott, előzetes kritériumok által meghatározott hatékony és/vagy kiváló teljesítménnyel” (L. Spencer és S. Spencer)

9. „Egy bizonyos feladat vagy szerep teljesítéséhez szükséges tudás (ismeretek) és képesség/készség” (R. E. Quinn)

10. „A teljesítménystandardok teljesítése előtt magasodó, ismert akadályok leküzdését segítő viselkedések” (Esque és T. F. Gilbert)

A kompetencia szó jelentéseiből, illetve a fenti definíciókból is az derül ki, hogy alapvetően két csoportra oszthatók. A definíciók egy része (1, 6, 7, 8, 10) az egyén személyiségére helyezi a hangsúlyt, másik része (2, 3, 4, 5, 9) azonban úgynevezett kompetenciaterületekre utal, azaz olyan munkaköri aspektusokra, amelyet a munkakör betöltőjének kompetens módon kell teljesítenie.

Tisztázandó tehát, hogy a kompetencia valójában akkor egy személyiségtulajdonság vagy egy képesség; illetve hogy milyen kapcsolatban áll a tudással, az ismeretekkel.

A kompetencia képességként való értelmezése **Noam Chomsky** (1928- ), amerikai nyelvész elméletére vezethető vissza. Eszerint különbség van a kompetencia és a hozzá kapcsolható teljesítmény között. Az ember azon képessége, hogy beszél, képes megérteni egy nyelvnek a

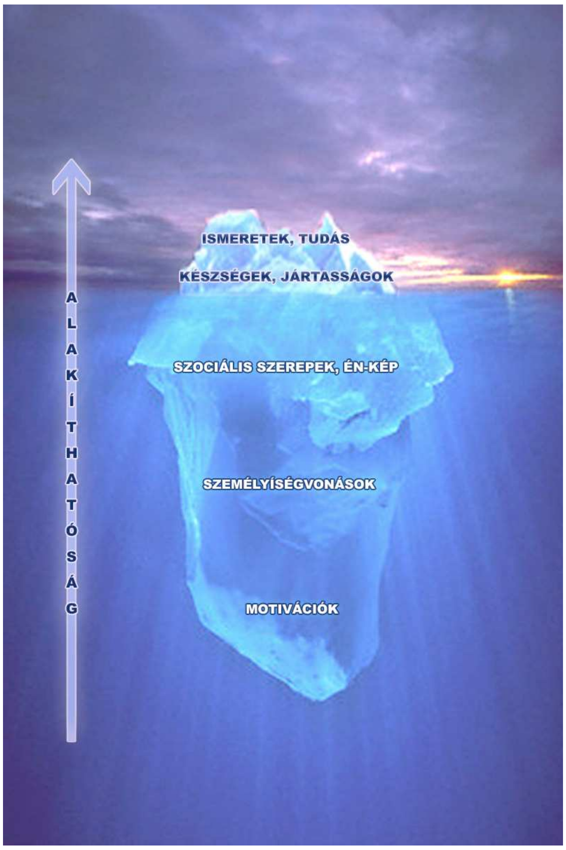
[4. kép]

szabályait, kiszűri az alapelveket, általános struktúrákat, s ezt a tudást roppant hatékonyan használja, már csekély tapasztalati tanulással is kialakul. Ez az egyszerű tapasztalati tanulás pedig különleges többletet tartalmazó tudást eredményez. Ezt a különleges teljesítményt lehetővé tevő tudást nevezte kompetenciának, mely veleszületett belső meghatározottságú. Chomsky elmélete szerint olyan nyelvi kompetenciára teszünk szert, amelynek révén képesek vagyunk a nyelvi teljesítmények végtelen és előre nem látható sokaságát produkálni.

Ez az elmélet több szempontból is fontos. Eszerint ugyanis a kompetencia valami különleges teljesítménynek az előfeltétele, megléte azonban csak részben tulajdonítható a tanulásnak. Ebben a megközelítésben a kompetencia nagyon egylényegű a képességgel. Ugyanakkor Chomsky túl is lépett az azonosításon. A kompetencia részben velünk született, minőségét döntően az öröklött képességek természetes szerveződése határozza meg. Valamiknek az együttes jelenlétére utal.

A kompetenciafogalom fentebbi, különböző meghatározásait mintegy egybe simítja az 1990-ben napvilágot látott Lyle Spencer – David McClelland – Signe Spencer – féle jéghegy modell. Az eredeti modell megtalálható: Lyle Spencer – David McClelland – Signe Spencer: Competency Assessment Methods, History and State of Arts. (Boston, Hay/McBer Research Paper, 1990.) című munkában.

Az 5. képen a modell egy általam készített verzióját láthatjuk. Ennek vizsgálatával választ kaphatunk arra kérdésre, hogy mi is az a kompetencia, képesség és/vagy személyiségtulajdonság, illetve hogy azonos-e a szakértelemmel, tudással.




[5. kép]

A kompetencia rejtőzködő jellemzője a személyiségnek. Az, ami megismerhető belőle, ami jól megnyilvánul, csak töredéknyi. Ez a felszínen "látható" kéreg a tudás, hiszen ismeretek, készségek, jártasságok a részelemei. A kompetenciának ez a rétege viszonylag jól mérhető, hiszen ezzel a tudással kapcsolatban könnyű előírni követelményeket, szintezni azokat, standardokat megállapítani. Általában ezzel a réteggel azonosítják a kompetenciát úgy, mint szakértelem, szaktudás (szakismeret). A tudás az a kompetenciarész, amely tanítható.

A kompetenciát felépítő rétegek zöme azonban a mélyben található. Ezek azok a kompetencia-komponensek, melyek fejleszthetők, alakíthatók, de általában hosszabb idő szükséges a módosulásukhoz. Míg a tudást irányított, szervezett tanulással (formális tanulás) sajátíthatjuk el, addig a kompetencia nagyobb hányadát az informális tanulás befolyásolja. A kompetencia "tömbjét" tehát az a réteg uralja, melyet a személyiség szempontjából kitüntetettnek tekintünk. Nem véletlen ennek az 5. képen látható elhelyezése.

A kompetencia "magját" a szociális szerepek, az énkép és a személyiségvonások alkotják, vagyis a személyiség alapvető meghatározói. Bizonyos személyiségvonásokkal rendelkeznünk kell ahhoz, hogy valamely adott feladatot végre tudjunk hajtani, s egyben ezek arról is árulkodnak, hogyan viselkedünk egy-egy helyzetben. Énképünk, önmagunkra vonatkozó attitűdjeink (identitás, önszabályozottság, önértékelés, önbizalom stb.), értékrendszerünk determinálja viselkedésünket. És természetesen bizonyos szociális szerepek betöltése fontos számunkra. Mindezek együttesen határozzák meg, hogy a személyiség meg akar-e tenni valamit vagy sem, azon túlmenően, hogy rendelkezik a szükséges szakmai ismeretekkel, képességekkel.

Végül pedig a modell legalsó rétegét a motívumok alkotják, mintegy ezzel is jelezve, hogy a tevékenységeink mögött ott húzódnak azok az ösztönzők, melyek cselekvéseinket célirányossá teszik.

A modell segítségével összefoglalhatjuk egészen röviden a kompetencia lényegi ismérveit: a kompetencia 5 fő összetevőből álló, a képességhez hasonló, de annál jóval komplexebb rendszer. Tanítható komponensei: (1) ismeret, információ (2) készség, jártasság. Fejleszthető komponensei: (3) szociális szerepek, én-kép (4) személyiségvonások (5) motivációk.

## 2.3. A KOMPETENCIA PEDAGÓGIAI JELENTÉSTARTALMA

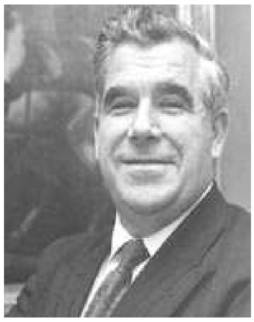
A kompetencia fogalmának megszületése és általános ismérveinek megismerése után végre elérkeztünk oda, hogy megfogalmazzuk ennek a szónak a – mi szempontunkból legjelentősebb – pedagógiai jelentéstartalmát.

Mint azt láthattuk, a gazdaságtudományok területén már a XX. század elején megszületett a kompetencia fogalma, és a század derekára már komoly fejlődési folyamatok után egyre gyakrabban alkalmazták is különböző gyakorlati kérdések eldöntésében. Ehhez képest a pedagógiában viszonylag későn, csak az 1990-es évektől kezdett gyökeret verni a kompetenciafogalom. Ekkor még az értelmezése döntően pszichológiai lényegű volt – ezt jól mutatja a Báthory Zoltán és Falus Iván által szerkesztett 1997-ben megjelent Pedagógiai Lexikon szócikke is, melyet Vajda Zsuzsa írt:

„Kompetencia <lat. 'alkalmasság, ügyesség'>: alapvetően értelmi (kognitív) alapú tulajdonság, de fontos szerepet játszanak benne motivációs elemek, képességek, egyéb emocionális tényezők. Az énfejlődés fontos összetevője a gyermek számára annak tudatosítása, hogy folyamatosan bővül azon környezeti tényezők köre, amelyeket befolyásolni tud. A fejlődés kezdetén, az első életévek »én vagyok« élménye azonos az »én csinálom« élményével, a ~ erősödő érzésével. A ~ igényével kapcsolatos a környezet megismerésének motívuma (explorációs késztetés). Kutatási eredmények szerint a ~ra törekvés csökken, ha a környezet már teljes mértékben ismerős, vagy a viselkedés egyértelműen megjósolható. A ~ növekedése döntő szerepet játszik az önkontrollfunkciók, az autonóm viselkedés kialakulásában. A ~ összefügg az egyén külső, ill. belső kontrollos voltával; a magas szinten kompetens egyének belső kontrollja erősebb. A ~ kialakulását hátráltatja, ha a gyermek nevelői környezete túlságosan korlátozó, vagy ha óvják minden nehézségtől, próbatételtől. Minden sikeres cselekvés a ~ növekedéséhez vezet, és fordítva: a halmozott sikertelenség csökkenti a ~ érzését. A ~érzés hiánya esetén beszélünk tanult reménytelenségről, amely lehet kedvezőtlen társ.-i-szociális helyzet, egyéb környezeti ártalmak, ill. a megküzdés képessége hiányának következménye. Létezik a ~ olyan értelmezése is, amely a személyiség funkciórendszerének csak egy-egy oldalát veszi figyelembe, és ennek megfelelően elkülönít kognitív, szociális, személyes ~t. Értelmezhető az egyén egy-egy szakterületen megnyilvánuló ~ja is.”

A valódi térhódítást a kompetenciafogalom lényegében oktatáspolitikai "hátszéllel" kezdte meg. Ebből fakadóan kezdetben pusztán egy újabb, az addig is gazdagon burjánzó oktatáselméleti fogalmak körét gyarapítónak tűnt. Mára már azonban az európai oktatásügy egyik leggyakrabban előforduló fogalma lett.

A ’90-es évek közepétől a kompetenciafogalom pedagógiai eredetű, sajátos jelentéstartalma a taníthatóságával, fejleszthetőségével, a tartalmi és a tantervi problémákkal összefüggésben kezdett formálódni. Ennek a pedagógiai jelentésnek az értelmezésekor gyakran az Európai Tanács szakértőjének, **John Coolahan** 1996-ból származó definícióját tekintik alapnak:



[6. kép]

"A kompetenciát úgy kell tekinteni, mint olyan általános képességet, amely a tudáson, a tapasztalaton, az értékeken és a diszpozíciókon alapszik, és amelyet egy adott személy tanulás során fejleszt ki magában."

Természetesen ezen kívül is létezik még sok olyan kompetenciamodell, amely tartalmaz pedagógiai szempontokat is. Ilyen például az a megközelítés, amely szerint a kompetenciák egyik csoportját az ún. generikus, azaz az olyan általános, független, rugalmas és transzverzálisnak tekinthető kompetenciák alkotják, melyek elsajátítása nem kötődik semmiféle speciális tantárgyhoz. Ezek között tartják számon a szakértők a kommunikációs, a problémamegoldó, a tanulási és a gondolkodási képességeket; a kreativitást; a motiváltságot; és az együttműködést kiváltó készségeket. A másik csoportba azok a kompetenciák tartoznak, amelyeket csak bizonyos tantárgyak tanulása során lehet elsajátítani: a matematikai gondolkodás elemei, a zenei képességek stb., melyeknek ugyancsak fontos szerepük van az egyes ember életében és a társadalom megfelelő működtetésében is.

De ilyen kompetenciamodell például az a megközelítés is, amely szerint a kompetenciákat olyan fogalomcsoportként is lehet értelmezni, melynek összetevői: a tudás, a készségek és az attitűdök. Ez utóbbiak – vagyis az attitűdök – viszont kizárólag a személyes kompetenciákhoz kapcsolódhatnak: például a kíváncsiság, motiváltság, kreativitás, szkepticizmus, becsületesség, lelkesültség, önértékelés, felelősség, megbízhatóság, állhatatosság egyedi tulajdonságaihoz.

Már az eddig megismert oktatáselméleti álláspontok is jól tükrözik, hogy a kompetenciafogalom értelmezése a pedagógia keretein belül sem kevésbé szerteágazó, mint a gazdaságtudományok területén.

Tovább bonyolítja a terminológia tisztázását, hogy a pedagógiai szakirodalom nem csupán kompetenciákról, hanem kulcskompetenciákról, sőt kizárólag pedagógiai kontextusban értelmezett kereszttantervi kompetenciákról (ezek elsősorban az egyén szociális kompetenciáihoz, az állampolgári és társadalmi műveltséghez köthetők – pl.: önismeret, énkép, kommunikáció, problémamegoldás) is beszél. A fogalmi sokféleségnek több okát is említhetjük. Egyrészt jelzi, hogy viszonylag új ez a fogalom a neveléstudományban – ezért még a kezdetén vagyunk annak, hogy mibenlétét, lényegét pontosan tisztázta volna a szakma. De az értelmezés nehézsége abból is származhat, hogy a kifejezés magyarra való átültetése során a már meglévő fogalmi készlet jelentésárnyalatai milyen "áthallásokat" eredményeztek.

**A kulcskompetenciák fogalmának értelmezése a nemzetközi oktatásügyben**

A kompetenciafogalom térhódításának legfőbb generátora az oktatási eredményekhez kötődő szemléletváltás: az egész életen át tartó tanulás koncepciójának a meghonosodása volt. A probléma úgy fogalmazódott meg egyrészt, hogy milyen kompetenciákat kell fejlesztenie az oktatásnak, hogy eleget tegyen a “life long learning” kívánalmainak; másodsorban pedig, hogy hogyan kell átalakulnia az oktatásnak ehhez. A jelenség fontosságát jelzi, hogy olyan nagy nemzetközi oktatási kutatások indultak, amelyeket az OECD (az Európai Unió Gazdasági Együttműködési és Fejlesztési Szervezete) is támogatott. Könnyű felismerni, hogy az Európai Unió versenyképessége szempontjából tettek kísérletet arra a szakértők, hogy kiválasszák azokat a kompetenciákat, melyek fejlesztésére egyetemlegesen kellene törekedni az egyes országok oktatási rendszerének.

A kompetenciafogalom mellett hamarosan megjelent a kulcskompetencia fogalma is. Az egyik – legnagyobb hatású – projekt az OECD által indított, a Svájci Szövetségi Statisztikai Hivatal és az Egyesült Államok Oktatási Minisztériuma, illetve az USA Oktatásstatisztikai Központja közreműködésével lebonyolított DeSeCo program volt (1997-2002). Az elnevezés – Definition and Selection of Competencies. Theoretic and Conceptual Foundation – utal a program céljára és feladatára, hiszen egyrészt értelmezték a kulcskompetencia fogalmát, másrészt a definiálás mellett felsorolták a legfontosabb területeket is.

A DeSeCo-program értelmezése szerint „a kompetencia képesség a komplex feladatok adott kontextusban történő sikeres megoldására”. A fogalom magában foglalja az ismeretek mobilizálását, a kognitív és gyakorlati képességeket, a szociális és magatartási komponenseket és attitűdöket, az érzelmeket és az értékeket egyaránt (OECD/DeSeCo 2003).

A definiálási munkálatok kezdetekor a szakemberek tehát a sikeres társadalmi léthez, a jelen és a jövő kihívásainak a legyőzéséhez szükséges képességeket tartották a legfontosabbnak. Olyan kompetenciákat kerestek, melyek többfunkciósak, különböző feladatok ellátását teszik lehetővé, s főképp a leggyakoribb élethelyzetekhez kötődnek. Olyanokat, amelyek fontos, összetett helyzetekben használhatóak, de különböző szakterületeken is hatékonnyá teszik az embert. Végül a kulcskompetenciák három fő kategóriáját különítették el:

- az autonóm cselekvés kompetenciái (pl.: nagy összefüggések átlátásának képessége, saját célok, és tervek megalkotásának képessége, saját érdekek és szükségletek kifejezésének képessége)
- az eszközök interaktív használatához kötődő kompetenciák (pl.: a nyelvi, matematikai készségek, a természettudományos műveltség, a problémamegoldó képesség, vagy általánosabban a kognitív képességek)
- a szociálisan heterogén környezetben való működéssel kapcsolatos kompetenciák (pl.: a másokkal való kapcsolatépítés, a csoportmunkában való együttműködés, valamint a konfliktuskezelés és konfliktusmegoldás)

Hamarosan az Európai Tanács oktatási és képzési kérdésekkel foglalkozó testületein belül létrejött egy külön a kulcskompetenciákkal foglalkozó munkacsoport, mely 2004-re nyolc kulcskompetenciát határozott meg:

1) Anyanyelvi kommunikáció
2) Idegen nyelvi kommunikáció
3) Matematikai természettudományi, alapvető technológiai alapkompetencia
4) Digitális kommunikáció
5) Tanulás megtanulásához kötődő kompetenciák
6) Személyközi, interkulturális, szociális és állampolgári kompetenciák
7) Vállalkozói kompetencia
8) Kulturális kompetencia

## A kompetencia pedagógia értelmezése hazánkban


[7. kép]

Magyarországon **Nagy József** professzor (1930– ) elmélete meghatározó a kompetencia pedagógiai szempontú értelmezésében. Ő az Új Pedagógiai Szemle 2000, 7-8. számában közölt „A kritikus kognitív készségek és képességek kritériumorientált fejlesztése” című cikkében a személyiség működését kompetenciarendszerek működésére vezeti vissza, s négy alapvető kompetenciát különböztet meg:

"Minden emberben négy meghatározó jelentőségű kompetencia fejlődött ki: a perszonális (hogy önmagam érdekeit tudjam érvényesíteni), a szociális (aminek óriási a szakirodalma), e kettő metszetében a kognitív (ami nélkül semmit nem tudunk csinálni) - és természetesen valamennyi metszetében speciális kompetenciák. Meggyőződésem szerint az általánosan képző iskola alapvető célja az első három említett kompetencia fejlesztése."

Nagy József munkásságának köszönhetően tehát a kompetencia fogalma a személyiség funkcionalitása mentén tovább gazdagodott, alapvető változáson ment keresztül. Elkülönült és operacionalizálódott az egyén kognitív, szociális és személyes képességrendszere. Ez lehetővé tette az összetett rendszerek mögött meghúzódó képességek feltérképezését, tipizálását, ezáltal tudatosabb fejlesztését. A jelenleg is zajló folyamatok során érdemes kiemelni Vidákovich Tibornak a matematikai kompetencia területén folytatott kutatásait, valamint a Csapó Benő vezette MTA Képességkutató Központban zajló munkálatokat.

## A kompetencia, mint pedagógiai alapfogalom

A kompetencia fogalmának sokoldalú elemzését elvégezve, most már sor kerülhet a fejezet elején kitűzött cél megvalósítására, a kompetencia pedagógiai alapfogalomként történő értelmezésére. Mint ilyen a kompetencia az ismeretek, a készségek, képességek, attitűdök többfunkciós egysége; “az a képességünk és hajlandóságunk, hogy a bennünk lévő tudást (…) sikeres problémamegoldó cselekvéssé alakítsuk át”.[5]

---

[5] A kompetencia. Kihívások és értelmezések. Szerk.: Demeter Kinga. Budapest, OKI, 2006.

# 3. A MATEMATIKAI KOMPETENCIÁK BEMUTATÁSA

A második fejezetben a kompetenciafogalom kialakulásának történeti áttekintése és lényegi ismérveinek bemutatása által sikeresen kiemeltük a kompetencia szót az “értelmezetlen szavak” tengeréből és definiáltuk pedagógiai jelentéstartalmát is. A következőkben sort kerítünk egy szűkebb, ám a szakdolgozatom szempontjából a leglényegesebb terület, a matematikai kompetenciák bemutatására. Kezdésként megismerkedünk egy világméretű kompetencia vizsgálat, a PISA-felmérés (Programme for International Student Assessment) matematikai kompetencia értelmezésével; majd további nemzetközi dokumentumok áttekintésével összehasonlítjuk ezt az Európai Unió matematikai kompetencia definícióival. Végül pedig megnézzük, hogy mindezek a nemzetközi vonások hogyan, milyen mértékben jelennek meg a hazai oktatáspolitikában.

## 3.1. MATEMATIKAI KOMPETENCIÁK A PISA-FELMÉRÉSEKBEN[6]

A 2006-os PISA-vizsgálat matematikatesztje a tanulók matematikai tudását, elemző-, érvelő- és kommunikációs képességét vizsgálja különböző algebrai, geometriai, valószínűségi és más matematikai területhez tartozó problémák megoldásakor.

Az Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006 című kiadvány (a PISA 2006 tartalmi kerete) a következőkben definiálja az alkalmazott matematikai műveltséget: „Az alkalmazott matematikai műveltség azt jelenti, hogy az egyén felismeri és érti a matematika szerepét a valós világban, jól megalapozott döntéseket hoz, és matematikatudása hozzásegíti ahhoz, hogy saját életének valós problémáit helyesen oldja meg, és a társadalom konstruktív, érdeklődő, megfontolt tagjává váljék.” (OECD, 2006)

[6] Balázsi Ildikó – Ostorics László – Szalay Balázs: PISA 2006. Összefoglaló jelentés. A ma oktatása és a jövő társadalma. Budapest, Oktatási Hivatal, 2007.

Ezen túl ebben a tartalmi keretben hat képességszintet állapítottak meg. Minden egyes szintről rövid jellemzést adtak, felsorolva azokat a kompetenciákat, amelyeket az adott szint követelményeit teljesítő diák a matematikai problémák megoldásakor alkalmaz:

1. képességszint: A diákok képesek olyan ismerős helyzetekre vonatkozó, könnyen érthető kérdésekre válaszolni, amelyekhez minden szükséges információ a rendelkezésükre áll. Közvetlen utasítások alapján végre tudják hajtani a feladat kontextusából következő rutinszerű eljárásokat.

2. képességszint: A diákok képesek átlátni és értelmezni a feladatban szereplő szituációkat, egyetlen információforrásból megszerezni a szükséges információt, egyszerű algoritmusokat, képleteket, eljárásokat és szokványos megoldási technikákat alkalmazni; érvelni, és az eredményeket értelmezni.

3. képességszint: A diákok képesek elvégezni olyan egyértelműen megfogalmazott feladatokat, amelyekben sorozatos döntéseket kell hozni; egyszerű megoldási stratégiákat kell kiválasztani és alkalmazni; ábrázolásokat kell értelmezni és felhasználni, majd ezek alapján érvelni, és röviden leírni a megoldás gondolatmenetét.

4. képességszint: A diákok hatékonyan alkalmazzák a konkrét problémákat egyértelműen leíró modelleket, amelyek megalkotása szükségessé teheti a modellek alkalmazhatóságának meghatározását. Képesek kiválasztani és egyesíteni különböző ábrázolásokat, és közvetlenül összekapcsolni azokat a valóságos helyzetekkel. Rugalmasan érvelnek, értelmezik a szituációkat, pontosan megfogalmazzák a probléma értelmezésére és megoldására teendő lépéseket.

5. képességszint: A diákok képesek modellt alkotni egy összetett probléma megoldására. Meg tudják határozni a modell alkalmazhatóságának feltételeit, képesek kiválasztani, összehasonlítani és értékelni a probléma lehetséges megoldási módjait, követni a kiválasztott megoldási stratégiát, és reflektálnak az elvégzett műveletekre.

6. képességszint: A diákok képesek összetett problémákat értelmezni, általánosítani és felhasználni; különböző információforrásokat és ábrázolásokat összekapcsolni és megfeleltetni egymással. Matematikai gondolkodásuk és érvelőképességük fejlett; ötleteiket és meglátásaikat képesek arra felhasználni, hogy szimbolikus és formális matematikai műveletek végrehajtásával az új problémák megoldására stratégiát alkossanak; eredményeiket és az azok értelmezésével kapcsolatos gondolataikat pontosan megfogalmazzák, és az eredeti probléma szempontjából vizsgálják, értelmezzék.

## 3.2. MATEMATIKAI KOMPETENCIÁK AZ EURÓPAI UNIÓ DOKUMENTUMAIBAN

Mint ahogy azt már a második fejezetben is olvashattuk, az Európai Tanács (ET) oktatási és képzési kérdésekkel foglalkozó testületein belül létezik egy külön a kulcskompetenciákkal foglalkozó munkacsoport, mely 2004-re nyolc kulcskompetenciát határozott meg, köztük a matematikai kompetenciát is.

Az ET által készített "Oktatás és képzés 2010 munkaprogram végrehajtása. B munkacsoport: Kulcskompetenciák." című dokumentum alapján a következőképpen mutatható be a matematikai kompetencia terület:

A KOMPETENCIA MEGHATÁROZÁSA:
A legalapvetőbb szinten a matematikai kompetencia* az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, a százalékok és a törtek használatának képességét foglalja magában fejben és írásban végzett számítások során, különféle mindennapi problémák megoldása céljából. Egy magasabb fejlettségi szinten a matematikai kompetencia** a matematikai gondolkodásmód (logikus és térbeli gondolkodás) és a valóság magyarázatára és leírására egyetemesen használt matematikai kifejezésmód (képletek, modellek, geometriai ábrák, görbék, grafikonok) használatára való képesség és készség az adott kontextusnak megfelelően.

ISMERETEK:
A számok és mértékegységek biztos ismerete és a mindennapi kontextusokban való használata, amely a számtani alapműveletek és a matematikai kifejezésmód alapvető formáinak – a grafikonoknak, képleteknek és statisztikáknak – az ismeretét foglalja magában. Ezeken túl fontos a matematikai kifejezések és fogalmak biztos ismerete, a legfontosabb geometriai és algebrai tételeket is beleértve; illetve a matematika segítségével megválaszolható kérdésfajták ismerete és megértése.

KÉSZSÉGEK:
Alapkészségként értelmezték a matematikai kompetencia alapelemeinek alkalmazását – az összeadást és kivonást, a szorzást és osztást, a százalékok és törtek kezelését, valamint a mértékegységek használatát. A mindennapi életben felmerülő problémák megközelítése és megoldása során alkalmazott készségeket pedig a következő pontokban határozták meg:

1. a háztartási költségvetés kezelése – a bevételek és a kiadások kiegyensúlyozása, tervezés
2. a vásárlás – árak összehasonlítása, mértékegységek, ár-érték arány ismerete
3. az utazás és a szabadidő – távolság és utazási idő közötti összefüggés felismerése, pénznemek és árak összehasonlítása
4. a mások által előadott indoklás követése és értékelése és az indoklás alapgondolatának felismerése – különösen bizonyítás esetén
5. a matematikai jelek és képletek használata, a matematika nyelvének dekódolása és értelmezése, valamint a matematika nyelve és a természetes nyelv közötti összefüggések felismerésre; a matematika segítségével történő és a matematikáról szóló kommunikáció
6. matematikai gondolkodás és érvelés, a matematikai gondolkodásmód elsajátítása: absztrakció és általánosítás, ha a kérdés megköveteli, matematikai modellezés, azaz (modellek elemzése és készítése) meglévő modellek használata és alkalmazása a feltett kérdés megválaszolásához
7. matematikai feladatok, jelenségek és szituációk különféle leírásainak, ábrázolásainak megértése és alkalmazása (jelentés megfejtése, értelmezése és az ábrázolásmódok közötti különbségtétel), valamint a leírás- és ábrázolásmódok közötti választás és váltás az adott helyzet követelményeinek megfelelően
8. a kritikai gondolkodásra való hajlam; különböző matematikai állítások (pl. állítás és feltevés) megkülönböztetése; matematikai bizonyítások megértése, fogalmak alkalmazási körének és korlátainak a felismerése

ATTITŰDÖK:

A matematika terén a pozitív attitűd e munkacsoport szerint a következő dolgokban nyilvánul meg: törekszik a diák a „számoktól való félelem” leküzdésére és az állítások alátámasztására szolgáló indokok keresésére; hajlandó a számtani műveletek használatára a mindennapi munkában és a háztartásban adódó problémák megoldása során; tiszteli az igazságot, mint a matematikai gondolkodás alapját; hajlandó mások véleményének érvényes (vagy nem érvényes) indokok vagy bizonyítékok alapján történő elfogadására, illetve elutasítására.

*: Az alapszintű matematikai készségek a más kulcskompetencia-területeken folyó későbbi tanulás alapjai.

**: A matematika, bár lényegében a számolási készséghez kapcsolódik, összetettebb annál. A „matematikai viselkedés” a valóság egyetemesen alkalmazható fogalmakkal/gondolati konstrukciókkal és folyamatokkal való leírásáról szól, és készségek,s attitűdök együtteseként írható le a legjobban. A meghatározás a „matematikai tevékenység” fontosságára helyezi a hangsúlyt, ugyanakkor elismeri, hogy a modern matematikatanításnak hangsúlyoznia kell „a matematika és a valóság közötti összefüggéseket”.

Látható, hogy a PISA-vizsgálatok és az EU megközelítése szinte teljes mértékben ugyanaz. Tulajdonképpen mindkét esetben a matematikai kompetencia elsősorban, mint problémamegoldó képesség jelenik meg – ha valaki rendelkezik a matematikai kompetenciát alkotó ismeretekkel, készségekkel és attitűdökkel, akkor képes felismerni és a matematikai eszközeivel megoldani valóságban előforduló problémákat. Ezen túl fontos és kiemelt részterület mindkét álláspont szerint az érvelés képessége.

Egyetlen különbségként azt említhetnénk, hogy a PISA-vizsgálatok megközelítése sokkal inkább általánosságokban fogalmazza meg a matematikai kompetencia mibenlétét, amíg az Európai Unió dokumentuma már a három részterület (ismeretek, készségek, attitűdök) valamivel részletesebb, konkrétabb elemzését adja.

Az Európai Tanács ezt a 2004-es koncepcióját a következő években tovább finomította, és 2006 végére megszületett a "Kulcskompetenciák az egész életen át tartó tanuláshoz – Európai referenciakeret" című dokumentum. Ebben már egy letisztultabb, leegyszerűsített matematika kompetencia definíciót közöltek:

"A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás fejlesztésének és alkalmazásának képessége a mindennapok problémáinak megoldása érdekében. A magabiztos számolni tudásra alapozva a hangsúly a folyamaton és a tevékenységen, valamint a tudáson van. A matematikai kompetencia, különböző szinteken magában foglalja a matematikai gondolkodásmód alkalmazásának képességét és az erre irányuló hajlamot (logikus és térbeli gondolkodás), valamint az ilyen jellegű megjelenítést (képletek, modellek, szerkezetek, grafikonok, táblázatok).

Az ehhez a kompetenciához kapcsolódó elengedhetetlen ismeret, készségek és attitűd:

- A matematika terén szükséges ismeret magában foglalja a számok, a mértékek és szerkezetek, az alapműveletek és az alapvető matematikai megjelenítési formák alapos ismeretét, a matematikai fogalmak és koncepciók és azon kérdések létének ismeretét, amelyekre a matematika válasszal szolgálhat.

- Az egyénnek rendelkeznie kell azzal a készséggel, hogy alkalmazni tudja az alapvető matematikai elveket és folyamatokat a mindennapok során, otthon és a munkahelyen, valamint hogy követni és értékelni tudja az érvek láncolatát. Képesnek kell lennie arra, hogy matematikai úton indokoljon, megértse a matematikai bizonyítást és a matematika nyelvén kommunikáljon, valamint hogy megfelelő segédeszközöket alkalmazzon.
- A matematika terén a pozitív attitűd az igazság tiszteletén és azon a törekvésen alapszik, hogy a dolgok okát és azok érvényességét keressük."

## 3.3. MATEMATIKAI KOMPETENCIÁK A MAGYAR OKTATÁSPOLITIKÁBAN

Miután nemzetközi szinten áttekintettük a matematikai kompetencia definícióit, most vizsgáljuk meg, hogy a hazai oktatáspolitikában hol és milyen formában jelenik meg ennek a fogalomnak az értelmezése!

Természetesen, mint a legtöbb oktatáspolitikai kérdésben a "kályhának" ez esetben is a Nemzeti Alaptanterv (NAT) megközelítése tekinthető. A 202/2007 (VII.31.) kormányrendelet szövege alapján ez a következőképpen hangzik:

"A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás fejlesztésének és alkalmazásának képessége, felkészítve ezzel az egyént a mindennapok problémáinak megoldására is. A kompetenciában és annak alakulásában a folyamatok és a tevékenységek éppúgy fontosak, mint az ismeretek. A matematikai kompetencia – eltérő mértékben – felöleli a matematikai gondolkodásmódhoz kapcsolódó képességek alakulását, használatát, a matematikai modellek alkalmazását (képletek, modellek, struktúrák, grafikonok/táblázatok), valamint a törekvést ezek alkalmazására.

Szükséges ismeretek, képességek, attitűdök

1. A matematika terén szükséges ismeretek magukban foglalják a számok, mértékek és struktúrák, az alapműveletek és alapvető matematikai reprezentációk fejődő ismeretét, a matematikai fogalmak, összefüggések és koncepciók és azon kérdések megértését, amelyekre a matematika választ adhat.

2. A matematikai kompetencia birtokában az egyén rendelkezik azzal a képességgel, hogy alkalmazni tudja az alapvető matematikai elveket és folyamatokat az ismeretszerzésben és a problémák megoldásában, a mindennapokban, otthon és a munkahelyen. Követni és értékelni tudja az érvek láncolatát, matematikai úton képes indokolni az eredményeket, megérti a matematikai bizonyítást, a matematika nyelvén kommunikál, valamint alkalmazza a megfelelő segédeszközöket.
3. A matematika terén a pozitív attitűd az igazság tiszteletén és azon a törekvésen alapszik, hogy a dolgok logikus okát és érvényességét keressük.”

Észrevehető tehát, hogy ez (szinte) egy az egyben az Európai Tanács által 2006-ban megfogalmazott matematikai kompetencia definíció.

A NAT megfogalmazásához képest egy részletesebb, tételszerűbb és tananyag orientáltabb bemutatását ismerhetjük meg a matematikai kompetenciáknak az Oktatási Minisztérium honlapjáról letölthető “Részletes érettségi vizsgakövetelmények” című dokumentumban.

Az eddigi gondolatmenetünk linearitását megőrzendő, minden egyes pont után zárójelben fel fogom tüntetni, hogy az adott kompetencia a NAT definíciója szerint melyik kompetencia kategóriá(k)ba (ismeret – 1, készség – 2, attitűd – 3) esik.

RÉSZLETES ÉRETTSÉGI VIZSGAKÖVETELMÉNYEK

„Az érettségi követelményeit középszinten az alábbiakban határozzuk meg: a mai társadalomban tájékozódni és alkotni tudó ember azon matematikai ismereteit kell megkövetelni, ami elsősorban a matematikai fogalmak, tételek gyakorlati helyzetekben való ismeretét és alkalmazását jelenti;

A) KOMPETENCIÁK

*Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok*

- Legyen képes a tanuló adott szövegben rejlő matematikai problémákat észrevenni, matematikai modellt alkotni, a modell alapján számításokat végezni, és a kapott eredményeket értelmezni. (2)

- Legyen képes kijelentéseket szabatosan megfogalmazni, azokat összekapcsolni, kijelentések igazságtartalmát megállapítani. (2,3)
- Lássa az eltéréseket, illetve a kapcsolatokat a matematikai és a mindennapi nyelv között. (2)
- A matematika minden területén és más tantárgyakban is tudja alkalmazni a halmaz fogalmát, illetve a halmazműveleteket. (2)
- Legyen jártas alapvető kombinatorikus gondolatmenetek alkalmazásában, s legyen képes ennek segítségével gyakorlati sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldására. (2)
- Ismerje a gráfok jelentőségét, sokoldalú felhasználhatóságuk néhány területét, és legyen képes további felhasználási lehetőségek felismerésére a gyakorlati életben és más tudományágakban. (1,2)

*Aritmetika, algebra, számelmélet*

- Legyen képes a tanuló betűs kifejezések értelmezésére, ismerje fel használatuk szükségességét, tudja azokat kezelni, lássa, hogy mi van a "betűk mögött". (1,2)
- Ismerje az egyenlet és az egyenlőtlenség fogalmát, megoldási módszereit. (1)
- Legyen képes egy adott probléma megoldására felírni egyenleteket, egyenletrendszereket, egyenlőtlenségeket, egyenlőtlenség-rendszereket. (2)
- Tudja az eredményeket a feladat megoldása előtt megbecsülni, állapítsa meg, hogy a kapott eredmény reális-e. (3)

*Függvények, az analízis elemei*

- Legyen képes a tanuló a körülötte levő világ összefüggéseinek függvényszerű megjelenítésére, ezek elemzéséből tudjon következtetni jelenségek várható lefolyására. (2)
- Legyen képes a mennyiségek közötti kapcsolat felismerésére, a függés értelmezésére. Értse, hogy a függvény matematikai fogalom, két halmaz elemeinek egymáshoz rendelése. Ismerje fel a hozzárendelést, elemezze a halmazok közötti kapcsolatokat. (1,2)
- Lássa, hogy a sorozat diszkrét folyamatok megjelenítésére alkalmas matematikai eszköz, a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény. Ismerje a számtani és mértani sorozatot. (1)

*Geometria, koordinátageometria, trigonometria*

- Tudjon a tanuló síkban, illetve térben tájékozódni, térbeli viszonyokat elképzelni, tudja a háromdimenziós valóságot – alkalmas síkmetszetekkel – két dimenzióban vizsgálni. (1,2)

- Vegye észre a szimmetriákat, tudja ezek egyszerűsítő hatásait problémák megfogalmazásában, bizonyításokban, számításokban kihasználni. (1,2)
- Tudjon a számításokhoz, bizonyításokhoz megfelelő ábrát készíteni. (2)
- Tudjon mérni és számolni hosszúságot, területet, felszínt, térfogatot, legyen tisztában a mérési pontosság fogalmával. (1)

*Valószínűségszámítás, statisztika*

- Értse a tanuló a statisztikai kijelentések és gondolatmenetek sajátos természetét. (2)
- Ismerje a statisztikai állítások igazolására felhasználható adatok gyűjtésének lehetséges formáit, és legyen jártas a kapott adatok áttekinthető szemléltetésében, különböző statisztikai mutatókkal való jellemzésében. (1) ”

Szakdolgozatom következő fejezetében részletesen bemutatom, hogy az általam összeállított próbaérettségi feladatsor feladataiban hogyan jelennek meg ezek a most megismert matematikai kompetenciák.

# 4. A PRÓBAÉRETTSÉGI FELADATSOR BEMUTATÁSA

Most – hogy már megismertük a matematikai kompetenciák különböző megközelítéseit, illetve tisztáztuk azt is, hogy milyen matematikai kompetenciákat kell mérnie egy matematika érettséginek – sort keríthetünk az általam összeállított próbaérettségi elemzésére.

Ezt a feladatsort két gimnázium, a szigetszentmiklósi Batthyány Kázmér Gimnázium és a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium végzős diákjai is megírták próbaérettségiként. A diákok által kézhez kapott feladatsor és a javító tanároknak kiadott javítási-értékelési útmutató is megtalálható a Mellékletben – 1. és 2. számú melléklet (ezek szerkesztésileg teljes mértékben megfelelnek az elmúlt évek érettségi anyagainak). Itt most a feladatok szövegének és megoldásának egy másféle szerkesztésű bemutatásával fogunk megismerkedni.

## 4.1. A PRÓBAÉRETTSÉGI ÖSSZEÁLLÍTÁSÁNAK ALAPELVEI

A feladatsor és a megoldókulcs összeállítása során alapvető célom volt, hogy a születendő próbaérettségi teljes mértékben megfeleljen a 2005 óta érvényben lévő középszintű írásbeli érettségi feladatsorok szerkezeti és tartalmi követelményeinek. A „Részletes érettségi vizsgakövetelmények” című dokumentum alapján ezek az elvárások a következők:

**„II. A VIZSGA LEÍRÁSA**

KÖZÉPSZINTŰ VIZSGA

**A vizsga szerkezete**

A középszintű matematika érettségi 180 perces írásbeli vizsga. Az írásbeli vizsgán használható függvénytáblázat és számológép. Ezek paramétereit az egyes években kell meghatározni.

**Tartalmi szerkezet**

A feladatsor tematikailag lefedi a követelményrendszer 5 nagy témakörét. A feladatsor összeállításakor az alábbi tartalmi arányok az irányadók:

| | |
|---|---|
| Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok | 20% |
| Aritmetika, algebra, számelmélet | 25% |
| Függvények, az analízis elemei | 15% |
| Geometria, koordinátageometria, trigonometria | 25% |
| Valószínűségszámítás, statisztika | 15% |

Ezek az arányok természetesen csak hozzávetőlegesek lehetnek, hiszen a feladatok egy jelentős része több témakörbe is besorolható, összetett ismeretkörre épül, továbbá a feladatsor választható feladatokat tartalmazó részei miatt az egyes tanulók számára - a választásaiktól függően - az arányok eltolódhatnak. Az első témakörbe tartozik a feladatoknak minden olyan részeleme, amely a szöveg matematikai nyelvre való lefordítását, matematikai modellalkotást igényel.

A feladatsor feladatainak 30-50%-a a hétköznapi élet problémáiból indul ki, esetenként egyszerű modellalkotást igénylő feladat.

**A feladatsor jellemzői**

A feladatsor két, jól elkülönülő részből áll.

Az I. rész 10-12 feladatot tartalmazó feladatlap, amely az alapfogalmak, definíciók, egyszerű összefüggések ismeretét hivatott ellenőrizni. Ebben a részben megjelenhet néhány igaz-hamis állítást tartalmazó vagy egyszerű feleletválasztós feladat is, de a feladatok többsége nyílt végű. Az első rész megoldására 45 perc áll rendelkezésre, vagyis ezen idő eltelte után e feladatok megoldására nincs tovább mód. A feladatsor I. részében összesen 30 pont érhető el.

A II. rész megoldási időtartama 135 perc. Ez további két részre oszlik, melynek megoldása folyamatos, az adott időn belül nem korlátozott.

- A II/*A*. rész 3, egyenként 12 pontos feladatot tartalmaz, amelyből mind a hármat meg kell oldania a vizsgázónak. A feladatok egy vagy több kérdésből állnak.

- A II/*B.* rész 3, egyenként 17 pontos feladatot tartalmaz, amelyből kettőt kell megoldani, és csak ez a kettő értékelhető. Tehát a jelöltnek a háromból egyértelműen ki kell választania az értékelendő két feladatot. A feladatok a középszintű követelmények keretein belül összetett feladatok általában több témakört is érintenek és több részkérdésből állnak.
- A II/*A.* és II/B. rész megoldására fordított időt a jelölt szabadon használhatja fel.

**Értékelés**

Az írásbeli vizsgán elérhető pontszám: 100 pont. A dolgozatok javítására részletes javítási útmutató szolgál. A javítási útmutató tartalmazza a feladatok részletes megoldását, esetenként több változatot is, valamint az egyes megoldási lépésekre adható részpontszámokat."

Mint ahogyan azt fentebb olvashattuk: „A feladatsor feladatainak 30-50%-a a hétköznapi élet problémáiból indul ki...". Az elmúlt évek középszintű érettségi vizsgáit alaposan tanulmányozva a törekvés a kompetencia alapú feladatsorok készítésére egyértelműen kimutatható, de gyakran a 30%-os arányt is alig éri el az életszerű feladatok szerepeltetése.

Próbaérettségim összeállításakor a másik fontos alapelvem az volt, hogy a születendő feladatsor a lehető legnagyobb mértékben – azaz 50%-ban – a hétköznapi élet problémáiból kiinduló, kompetencia alapú feladatokat tartalmazzon.

## 4.2. A FELADATOK BEMUTATÁSA

A feladatok bemutatására a következő sémát fogom alkalmazni:

Először ismertetem a feladat szövegét és annak az általam a javítási-értékelési útmutatóban javasolt megoldását (esetenként megoldásait). Ezután megnevezem az adott feladat forrását (ha volt). Végezetül részletesen bemutatom azt, hogy milyen matematikai kompetenciákat mér az adott feladat; illetve azt, hogy az előző fejezetben megismert PISA-felmérés melyik képességszintjébe lenne besorolható az adott feladat.

## MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI – KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

### I. RÉSZ

**1. feladat:** Gergőnek lediktáltak egy néggyel osztható hétjegyű telefonszámot, de Ő az utolsó számjegyet elfelejtette leírni. A barátja úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy négyes volt. A kiolvasható szám: 586371_ . Igaza lehetett-e Gergő barátjának? Válaszát indokolja!

**Megoldás:** nem lehetett igaza, hiszen a néggyel való oszthatósági szabály szerint ($4|n \Leftrightarrow$ ha $n$ utolsó két számjegyéből alkotott szám osztható 4-gyel) az 5863714 nem osztható néggyel.

- **forrás:** saját feladat; alapötlet: 2005. októberi érettségi feladatsor 2. feladata: "Peti felírt egy hárommal osztható hétjegyű telefonszámot egy cédulára, de az utolsó jegy elmosódott. A barátja úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy nulla volt. A kiolvasható szám: 314726_. Igaza lehetett-e Peti barátjának? Válaszát indokolja!"
- **kompetenciák:** számolás, következtetés, érvelés (törekvés az állítások alátámasztására szolgáló indokok keresésére), szövegesfeladat-megoldás (szövegértés), problémamegoldás (a probléma matematikai modellezése), kritikai gondolkodásra való hajlam, hajlandóság mások véleményének bizonyítékok alapján történő elfogadására/elutasítására
- **PISA képességszint:** 2. szint

**2. feladat:** Az 1:2025000 méretarányú Google Maps online térképen a Bécs és Budapest közti távolságot 12 cm hosszú egyenes szakasz jelzi. Hány kilométerre van a két város egymástól légvonalban? Írja le a megoldás menetét is!

**Megoldás:** Az 1:2025000 méretarány értelmezése: ami a térképen 1 cm, az a valóságban 2025000 cm. A két város (légvonalban mért) távolsága tehát $12 \cdot 2025000 = 24300000$ cm, azaz 243 km.

- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** számolás, mértékegységváltás, szövegesfeladat megoldás (szövegértés), arányok kezelése, modellalkotás
- **PISA képességszint:** 2. szint

**3. feladat:** Határozza meg a következő tört értelmezési tartományát és egyszerűsítse a törtet!

$$\frac{6a^2 - 48a}{a^2 - 64}$$

**Megoldás:** a tört értelmezési tartománya: $|a| \neq 8$ vagy $a \neq \pm 8$;

a tört egyszerűsítése: $\frac{6a^2 - 48a}{a^2 - 64} = \frac{6a(a-8)}{(a+8)(a-8)} = \frac{6a}{a+8}$

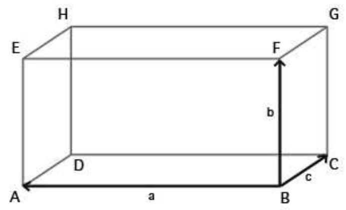
- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** számolás, figyelem, törekvés a "számoktól és betűs kifejezésektől való félelem" leküzdésére
- **PISA képességszint:** 3. szint

4. feladat: Egy 24 fős gimnáziumi osztályban a tanulók két helyre adták be a felvételi jelentkezésüket: az ELTE TTK Matematika szakára és az ELTE BTK Történelem szakára. A BTK-n az osztály 6/8-a, a TTK-n a tanulók 75%-a szeretne továbbtanulni. Hányan adták be mindkét karra a jelentkezésüket, ha mindenki beadta legalább az egyik helyre? Írja le a megoldás gondolatmenetét!

**Megoldás:** Történelem szakra $24 \cdot \frac{6}{8}$ = 18 fő; matematika szakra pedig $24 \cdot 0{,}75$ = 18 fő jelentkezett. Így mindkét helyre 18 + 18 = 36 – 24 = 12 fő adta be a jelentkezését.

- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** számolás, százalékok és törtek alkalmazása, rész-egész észlelés, szövegesfeladat-megoldás (szövegértés), rendszerezés, matematikai modellalkotás
- **PISA képességszint:** 3. szint

**5. feladat:** Az alábbi téglatest B csúcsából kiinduló három irányított szakasz **a** = $\overrightarrow{BA}$, **b** = $\overrightarrow{BF}$ és **c =** $\overrightarrow{BC}$. Állítsuk elő **a**, **b** és **c** segítségével a $\overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{BH}$ irányított szakaszokat!




[1. ábra]

**Megoldás:** $\overrightarrow{BD} = a + c$ és $\overrightarrow{BH} = a + c + b$

- **forrás:** saját feladat
- **kompetencia:** térlátás, térbeli viszonyok elképzelése, a háromdimenziós valóság vizsgálata két dimenzióban (alkalmas síkmetszetekkel), matematikai jelek használata, matematikai feladatok ábrázolásának megértése
- **PISA képességszint:** 1. szint

**6. feladat:** Egy jótékonysági bálon 150 db tombolajegyet adtak el. Hány tombolát kell vásárolnunk ahhoz, hogy legalább 75%-os legyen a nyerési esélyünk, ha egy nyereményt sorsolnak ki? Válaszát indokolja! (A jegyek nyerési esélye egyenlő.)

**Megoldás:** 75%-os nyerési esélyünk akkor van, ha nálunk van a 150 db tombolajegy 75%-a, ami $150 \cdot 0{,}75 = 112{,}5$ db tombolát jelent. Azaz legalább 113 db tombolát kell vásárolnunk ahhoz, hogy legalább 75%-os nyerési esélyünk legyen.

- **forrás:** saját feladat; alapötlet: 2005. májusi érettségi feladatsor 6. feladata: “Egy rendezvényen 150 tombolajegyet adtak el. Ági 21-et vásárolt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Ági nyer, ha egy nyereményt sorsolnak ki? (A jegyek nyerési esélye egyenlő.)”
- **kompetenciák:** számolás, százalékok kezelése, mennyiségi következtetés, kritikai gondolkodás, figyelem szövegesfeladat-megoldás (szövegértés), problémamegoldás
- **PISA képességszint:** 2. szint

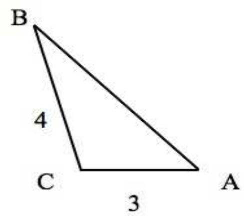
**7. feladat:** Egy több, mint tíz éves hazai múlttal rendelkező számítástechnikai cégnél minden egyes projekthez egy bináris számrendszerbeli számot rendelnek hozzá. A legutóbbi feladat a 111001101-es számot kapta. Az ehhez a céghez állásinterjúra jelentkező személyeknek a beugró kérdése az, hogy mondják meg ennek a számnak a tízes számrendszerbeli alakját. Mit válaszolt Ödön, ha tudjuk, hogy átment a beugrón?

**Megoldás:** Az 111001101 kettes számrendszerbeli szám tízes számrendszerbeli értéke: $2^8+2^7+2^6+2^3+2^2+2^0 = 461$. Ödön válasza tehát 461 volt.

- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** szövegesfeladat-megoldás (szövegértés), problémamegoldás, kritikai gondolkodásra való hajlam, hajlandóság a számtani műveletek alkalmazására a hétköznapi munkában adódó problémák megoldása során, eszközhasználat
- **PISA képességszint:** 2. szint

**8. feladat:** Adott egy olyan ABC háromszög, melynek $a$ oldala 3 cm, $b$ oldala 4 cm és az ACB szöge pedig $120°$. Készítsen rajzot a feladathoz! Határozza meg a háromszög harmadik oldalának a hosszát (két tizedesjegy pontossággal)!

**Megoldás:**




[2. ábra]

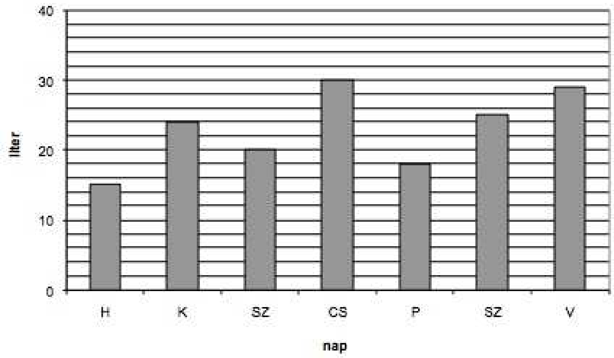
Mivel adott a háromszögnek két oldala és az általuk közbezárt szög, a harmadik oldalt meghatározhatjuk a koszinusztétel segítségével:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(120°)$$

tehát c = 6,08 cm

- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** számolás, síkbeli viszonyok / matematikai feladatok ábrázolása, a számításokhoz megfelelő ábra készítése, matematikai képletek alkalmazása
- **PISA képességszint:** 2 szint

**9. feladat:** Az elmúlt héten Pista bácsi mindennap feljegyezte, hogy mennyi tejet adott neki Riska nevű tehene, és az adatokból elkészítette az alábbi oszlopdiagramot [3. ábra]. Olvassa le az ábráról, hogy melyik nap hány liter tejet fejt Pista bácsi! Mennyi volt Riska egy napra eső átlagos termelése?



[3. ábra]

**Megoldás:**

A leolvasott adatok: H – 15, K – 24,
SZ – 20, CS – 30, P – 18, SZ – 25, V – 29

Riska egy napra eső átlagos termelése tehát

$$\frac{15+24+20+30+18+25+29}{7} = 23 \text{ liter volt.}$$

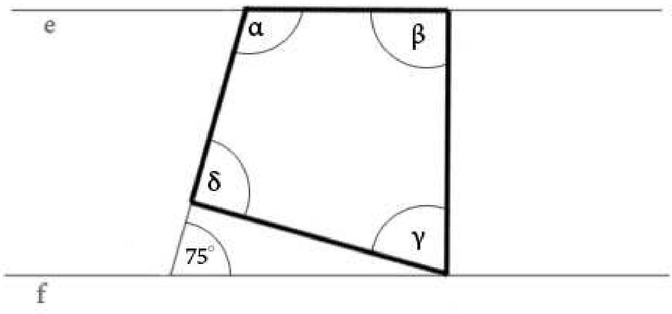
- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** számlálás, számolás, figyelem, matematika segítségével történő kommunikáció értelmezése, matematikai modellek értelmezése, jártasság a statisztikai mutatókkal való szemléltetésben
- **PISA képességszint:** 2. szint

**10. feladat:** Budapestről a buszok Győr felé 24 perces járatsűrűséggel közlekednek, Debrecen felé pedig 21 percenként indulnak. Reggel 8 órakor mindkét irányba indult egy jármű. Évi és Eszter szeretne egyszerre elindulni a buszállomásról a két különböző irányba, de a 8 órás járatokat már nem érik el. Hány órakor tudnak legközelebb egy időben indulni?

**Megoldás:** a feladat megválaszolásához a 24 és a 21 legkisebb közös többszörösét kell meghatároznunk. A buszok tehát [24,21]=168 perc múlva, azaz 10:48-kor fognak legközelebb mindkét irányba indulni.

- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** szövegesfeladatok megoldása (szövegértés), problémamegoldás, különböző matematikai algoritmusok alkalmazása, számolás, mértékegység-átváltás
- **PISA képességszint:** 2. szint

**11. feladat:** Határozza meg az ábrán [4. ábra] látható derékszögű deltoid összes szögét! Válaszait indokolja! ($e \parallel f$)



[4. ábra]

**Megoldás:**

$\alpha = 105°$, hisz ez a megadott $75°$-os szög kiegészítő szögével egyállású; $\beta = 90°$, hiszen a feladat szövege szerint egy derékszögű deltoidról van szó ($\alpha$ és $\gamma$ nem derékszögű); $\delta = 90°$ a szimmetria miatt; végül pedig $\gamma = 75°$, mert a deltoid belső szögeinek összege $360°$ (és $360° - 105° - 2 \cdot 90° = 75°$).

- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** számolás, geometriai tételek ismerete, síkbeli viszonyok kezelése – a szimmetriák észrevétele, és ezek egyszerűsítő hatásainak kihasználása; a matematika nyelvének dekódolása és értelmezése, a feladatok ábrázolásának megértése, kreativitás
- **PISA képességszint:** 3. szint

**12. feladat:** Fogalmazza meg a következő állítás tagadását: “Van olyan érettségiző, aki még nem nézte át az összes témakört matematikából.”

**Megoldás:** Minden érettségiző átnézte már az összes témakört matematikából. VAGY
Nincs olyan érettségiző, aki még nem nézte át az összes témakört matematikából.

- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** logikus gondolkodás, kritikai gondolkodásra való hajlam, különböző logikai állítások megértése, kijelentések szabatos megfogalmazása, a matematikai és mindennapi nyelv közötti kapcsolatok felismerése
- **PISA képességszint:** 1. szint

## II. RÉSZ

**13. feladat:** a) Oldja meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{9^{(x^2)}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^x}{3^4}=1$$

b) Találja meg a következő okoskodásban a hibát!

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$
$$x\,(x - x) = (x+x)\,(x - x)$$
$$x = x + x$$
$$x = 2x$$
$$1 = 2$$

c) Találja meg a következő egyenlőtlenség megoldásában a hibát!

$$-3x\,(1+2) > -18x$$
$$-3x - 6x > -18x$$
$$-9x > -18x$$
$$x > 2x$$
$$1 > 2$$

**Megoldás:**

a) 1. megoldás: $\frac{\left(3^2\right)^x\cdot\left(3^{-2}\right)^x}{3^4} = 3^0 \Rightarrow \frac{3^{2x^2}\cdot 3^{-2x}}{3^4} = 3^0 \Rightarrow 3^{2x^2-2x-4} = 3^0 \Rightarrow$ az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $2x^2-2x-4 = 0 \Rightarrow$ a másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva: $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$

2. megoldás: $\frac{9^{x^2}\cdot\left(9^{-1}\right)^x}{9^2} = 9^0 \Rightarrow \frac{9^{x^2}\cdot 9^{-x}}{9^2} = 9^0 \Rightarrow 9^{x^2-x-2} = 9^0 \Rightarrow$ az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $x^2-x-2 = 0 \Rightarrow$ a másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva: $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$

b) hiba: az okoskodás második lépésében az $(x-x)$ tényezővel osztunk, de 0-val nem lehet osztani, úgyhogy ez a hiba; illetve az utolsó lépésben az $x$ tényezővel osztunk, de mivel ez ismeretlen (és akár 0 is lehetne), ez hibás lépés

c) hiba: az egyenlőtlenség harmadik lépésében $-9$–cel osztunk $\Rightarrow$ a relációnak meg kellene fordulnia, ez azonban itt elmarad; illetve az utolsó lépésben ismeretlennel is osztunk

- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** számolás, a matematika nyelvének dekódolása és értelmezése, matematikai gondolkodásmód elsajátítása (matematikai gondolkodás és érvelés), egyenlet és egyenlőtlenség fogalmának ismerete, törekvés a „számoktól és betűs kifejezésektől való félelem” leküzdésére, kritikai gondolkodásra való hajlam, hajlandóság mások véleményének érvényes indokok vagy bizonyítékok alapján történő elfogadására vagy elutasítására.
- **PISA képességszint:** 3. szint

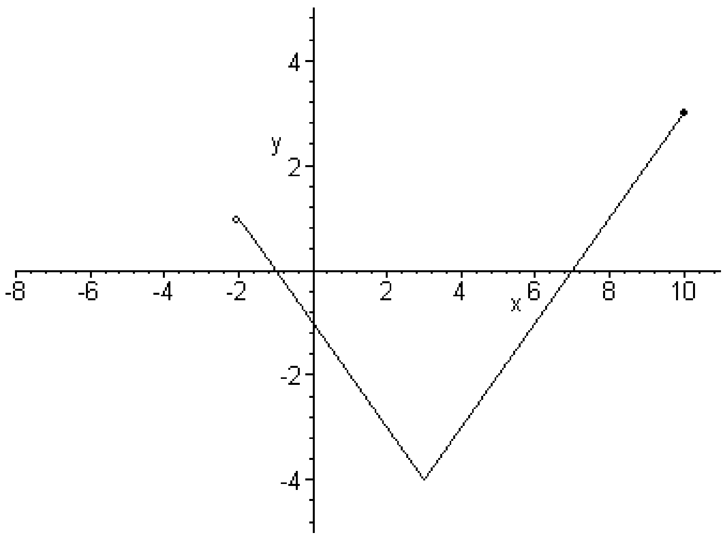
**14. feladat:** a) Ábrázolja az $f(x) = \sqrt{(x-3)^2} - 4$ függvényt a ]-2;10] intervallumon!

b) Adja meg az $f(x)$ függvény szélsőértékeit a megadott intervallumon!

c) Adjon meg olyan zárt intervallumot, ahol az $f(x)$ függvény szigorúan monoton nő, és olyat, ahol szigorúan monoton csökken!

**Megoldás:**

a) Az $f(x) = |x-3| - 4$ függvényt kell ábrázolni a megadott intervallumon:




[5. ábra]

b) A függvény minimum helye: x = 3, minimum értéke: y = – 4

maximum helye: x = 10, maximum értéke: y = 3

c) Szigorúan monoton nő a függvény a $[3;10]$ intervallumon és szigorúan monoton csökken pl.: a $[-1;3]$ intervallumon (de jó megoldás a ]-2;3] bármely zárt részintervalluma is)

- **forrás:** saját feladat; alapötlet: 2004. májusi próbaérettségi 12. feladata: „Ábrázolja az $x \mapsto \sqrt{(x-4)^2}$ függvényt a [–1;7] intervallumon!”
- **kompetenciák:** matematikai fogalmak ismerete és helyes alkalmazása, matematikai jelek és képletek használata, modellalkotás (a matematika nyelvének dekódolása), a függvénynek, mint matematikai fogalomnak az ismerete, képesség a függvények elemzésére
- **PISA képességszint:** 3. szint

**15. feladat:** A XX. század utolsó 4 nyári olimpiáján, a magyar csapat a következő érmes helyezéseket érte el:

| | Szöul 1988 | Barcelona 1992 | Atlanta 1996 | Sydney 2000 |
|---|---|---|---|---|
| arany | 11 | 10 | 7 | 8 |
| ezüst | 6 | 12 | 4 | 6 |
| bronz | 6 | 7 | 10 | 3 |

a) Készítsen az aranyérmek adataiból egy kördiagramot!

b) Átlagosan hány érmet szereztünk ezen a négy olimpián?

c) Ha véletlenszerűen kiveszünk egy érmet az 1992-es érmek közül, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy arany lesz a kiválasztott?

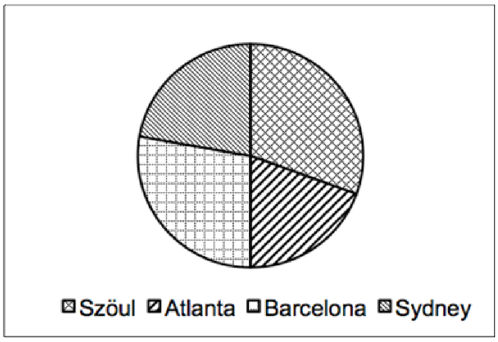
Tegyük fel, hogy ezeken az olimpiákon úgy számolták át az érmeket pontszámokká, hogy az aranyérmeket 3-mal, az ezüstérmeket 2-vel, a bronzérmeket pedig 1-gyel súlyozták.

d) Mennyi a fenti pontszámítás által kapott új (4 tagú) adatsornak az átlaga?

e) A b) és d) feladat eredményeit felhasználva hogyan lehetne megindokolni azt az állítást, hogy ezen a négy olimpián több aranyérmet szereztünk, mint bronzot?

**Megoldás:**

a)




[6. ábra]

Szöul: $110°$-os középponti szög

Atlanta: $70°$-os középponti szög

Barcelona: $100°$-os középponti szög

Sydney: $80°$-os középponti szög

b) Szöulban összesen 23 db érmet szereztünk, Barcelonában összesen 29 db-ot, Atlantában 21 db-ot és Sydneyben 17 db-ot. Így átlagosan $\frac{23+29+21+17}{4}$ = 22,5 érmet szereztünk.

c) Összes választási lehetőség: 29 db érem, amiből kedvező a 11 db aranyérem kiválasztása. Tehát annak a valószínűsége, hogy aranyat húzunk: $\frac{10}{29}$ = 0,3448 azaz kb. 34,5 %.

d) Szöulban 51 pontot szereztünk volna, Barcelonában 61-et, Atlantában és Sydneyben pedig 39-39-et. Ennek az új adatsornak az átlaga: $\frac{51+61+39+39}{4}$ = 47,5.

e) Ha ugyanannyi aranyérmet szereztünk volna, mint bronzérmet, akkor a pontszámok átlaga éppen kétszerese lenne a megszerzett érmek átlagának (22,5). A pontszámok átlaga (47,5) viszont nagyobb, mint a megszerzett érmek átlagának a kétszerese ($2 \cdot 22{,}5 =$ 45), azaz aranyéremből szereztünk többet.

- **forrás:** saját feladat

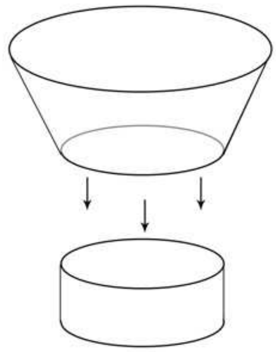
- **kompetenciák:** számolás, jártasság a statisztikai adatok szemléltetésében és különböző mutatókkal való jellemzésében, a matematikai kifejezésmód alapvető formáinak (grafikonok, táblázatok) ismerete, matematikai képletek alkalmazása, matematikai modellezés, kritikai gondolkodásra való hajlam, a fogalmak mögötti jelentéstartalom felismerése, matematikai úton való indoklás képessége, törekvés a dolgok logikus okának keresésére

- **PISA képességszint:** 4. szint

**16. feladat:** Egy színház nézőtere 15 soros; az első sorban 10 szék van és utána minden sorban hárommal több.

a) Mekkora a bevétele a színháznak egy teltházas díszelőadás estéjén, ha ilyenkor jegyeket mindenhová 2500 Ft-os egységáron adják?

Egy közelgő premier megrendezéséhez a következő átalakításokra van szükség a színházban: a színpad területét a kétszeresére kell megnövelni, és a magasságát is meg kell emelni 1 méterrel. Ezt a változtatást a kivitelezéssel megbízott cég tervezői egy, a színpadra emelt csonka forgáskúp megépítésével tervezik [7.ábra]. (Tudjuk, hogy a színház kör alakú színpadjának az átmérője 3 m)



[7. ábra]

b) Adja meg ennek a csonka forgáskúpnak a hiányzó adatait (R,a)! (Végig három tizedesjegy pontossággal dolgozzon!)

Az átalakítás után le is kell festeni az újonnan felépült színpad felső lapját és oldalát.

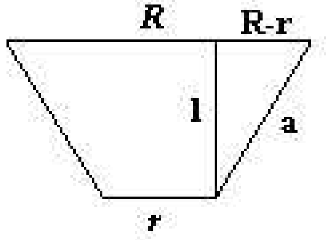
c) Hány liter festékre van ehhez szükség, ha 1 liter festék kiadósságát 4 $m^2$-re becsülik?

d) Fedezi-e az átalakítás költségeit a díszelőadás bevétele, ha tudjuk, hogy egy 2 literes festék 5000 Ft-ba kerül; az átalakítást végző cég 250000 Ft munkadíjat számláz ki; és a színpad megnagyobbításához felhasznált faanyag ára 385000 Ft?

**Megoldás:**

a) a feladat szövegét a sorozatok nyelvére lefordítva tudjuk, hogy egy olyan számtani sorozat első 15 tagjának az összegét kell meghatároznunk, amelynél: $a_1$ = 10 és d = 3. Ezekből tudjuk, hogy $a_{15}$ = 10+(15-1)3 = 52, aminek segítségével pedig már fel tudjuk írni az összegre vonatkozó képletet: $S_{15} = \frac{10+52}{2} \cdot 15$ = 465. A bevétel tehát $465 \cdot 2500$ Ft = 1162500 Ft volt.

b) Legyen az eredeti színpad területe: $T_1$; az átalakított színpad területe $T_2$. Ekkor: $T_2 = 2T_1 \Rightarrow R^2\pi = 2 \cdot r^2\pi \Rightarrow R = \sqrt{2} \cdot r \Rightarrow R = 2{,}121$ méter. A csonkakúp alkotójának meghatározásához egy alkalmas síkmetszetet kell vizsgálnunk (8. ábra). A Pitagorasz-tétel szerint a következő összefüggés írható tehát fel az alkotóra: $a^2 = m^2 + (R-r)^2 = 1^2 + 0{,}621^2 = 1{,}385$, tehát $a = 1{,}177$.




[8. ábra]

c) A lefestendő felszín: $A = R^2\pi + (R+r)\cdot a\cdot\pi = 2{,}121^2\pi + 3{,}621\cdot 1{,}177\cdot\pi = 27{,}522$ $m^2$. Ha 1 liter festék 4 $m^2$ lefestésére elegendő, akkor a színpad lefestésére $\frac{27{,}522}{4} = 6{,}880$ liter festékre van szükségünk összesen.

d) A színpad lefestéséhez több, mint 6 liter festékre van szükségünk, azaz a 2 literes festékekből 4 db-ot kell vennünk. Így az átalakítás összköltsége a következőképpen alakul: $4\cdot 5000$ Ft + 250000 Ft + 385000 Ft = 655000 Ft. Ez pedig kevesebb, mint az a) feladatrészben kiszámolt összbevétel $\Rightarrow$ a díszelőadás bevétele fedezi az átalakítás költségeit.

- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** számolás, térbeli viszonyok kezelése, a háromdimenziós valóság vizsgálata két dimenzióban (alkalmas síkmetszetek segítségével), matematikai jelek és képletek használata, szövegesfeladatok megoldása (szövegértés), problémamegoldás, különböző matematikai algoritmusok alkalmazása, matematikai modellezés, matematikai szituációk különféle leírásainak, ábrázolásainak megértése, kritikai gondolkodásra való hajlam, hajlandóság a számtani műveletek használatára a mindennapi munkában adódó problémák megoldása során
- **PISA képességszint:** 5. szint

**17. feladat:** Egy 32 lapos magyar kártyacsomagban 4-féle színű (piros, zöld, makk, tök) és 8-féle figurájú (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász) lap van. Hányféleképpen lehet kiválasztani 5 lapot úgy, hogy a sorrend nem számít, és:

a) egyik figurából három, egy másikból két darab van (full)?

b) egyik figurából 4 darab van (póker)?

c) A a) és b) részekben kapott eredmények felhasználásával számolja ki mennyi annak a valószínűsége, hogy valakinek fullja, illetve hogy pókere legyen! Ez alapján mit mondana, a full vagy a póker az „erősebb” lap? Válaszát indokolja!

Zsuzsa a legutóbbi póker bajnokságon 1 000 000 Ft-ot nyert, amit azonnal le is kötött a Bankban évi 9%-os kamatra.

d) Hány évig kell bent hagynia a pénzét (változatlan kamatláb mellett) a Bankban, hogy megkétszereződjön a kezdeti egymilliós összeg?

**Megoldás:**

a) Az a figura, amelyikből 3 db van 8-féle lehet. A 3 egyforma figura színét $\binom{4}{3}$-féleképpen választhatjuk ki. Az a figura, amelyikből 2 db van már csak 7-féle lehet. A 2 egyforma figura színét pedig már csak $\binom{4}{2}$-féleképpen választhatjuk ki.

Tehát összesen $8 \cdot \binom{4}{3} \cdot 7 \cdot \binom{4}{2} = 1344$ - féleképpen lehetséges a kiválasztás.

b) Az a figura, amelyikből 4 db van 8-féle lehet. Ha egy figurából 4 db van, az csak úgy fordulhat elő, hogy mind a 4 szín szerepel, ez pedig csak egyféleképpen lehet. Az utolsó lap figurája már csak 7-féle lehet; színe azonban mindegy, hogy milyen, azaz 4-féle lehet.

Tehát összesen $8 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 4 = 224$-féleképpen lehetséges a kiválasztás.

c) Összesen $\binom{32}{5}$ = 201376-féleképpen választhatunk ki a 32 darabos pakliból 5 lapot. A korábbiakat felhasználva: P(full) $= \frac{1344}{201376} = 0{,}00667$ és P(póker) $= \frac{224}{201376} = 0{,}00111$. Azaz a póker az „erősebb” lap, hiszen az kisebb valószínűséggel fordul elő.

d) A kamatos kamat képletét használva:

$$1000000 \cdot \left(1 + \frac{9}{100}\right)^n = 2000000 \Rightarrow 1{,}09^n = 2 \Rightarrow \log 1{,}09^n = \log 2 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1{,}09} = 8{,}04$$

Tehát Zsuzsának 9 évig kell bent hagyni a pénzét a Bankban ahhoz, hogy megkétszereződjön.

- **forrás:** saját feladat; alapötlet: Sokszínű Matematika 11. című tankönyv 35. oldalán található „2. példa” feladat: Egy 52 lapos francia kártyacsomagban 4-féle színű és 13-féle figurájú lap van. Hányféleképpen lehet kiválasztani 5 lapot úgy, hogy a sorrend nem számít és [...] e) egyik figurából három, egy másikból két darab van (full) f) egyik figurából négy darab van (póker)?”

- **kompetenciák:** számolás, jártasság alapvető kombinatorikus gondolatmenetek alkalmazásában és kiválasztási feladatok megoldásában, a matematika nyelve és a természetes nyelv közötti összefüggések felismerése, matematikai modellezés, matematikai gondolkodás és érvelés, kritikai gondolkodásra való hajlam, képesség a matematikai úton történő érvelésre.
- **PISA képességszint:** 5. szint

**18. feladat:** Egy háromszögnek a következő adatait ismerjük: az egyik csúcsa az A (7;– 5) koordinátájú pont, a BC szakasz felezőpontja $F_2\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ és az AC szakasz felezőpontja $F_3\left(\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

a) Határozza meg a háromszög B és a C csúcsainak a koordinátáit!

b) Igazolja, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú és derékszögű!

c) Írja fel a háromszög köré írható körének az egyenletét!

d) Hányad része az $F_1BF_2$ háromszög területe az ABC háromszög területének? Válaszát indokolja!

**Megoldás:**

a) A háromszög B és C csúcsainak a koordinátáiról a következő összefüggések írhatóak fel: $\frac{b_1+c_1}{2}=\frac{1}{2}$ és $\frac{c_1+7}{2}=\frac{5}{2}$, ahonnan $c_1=-2$ és $b_1=1$; valamint $\frac{b_2+c_2}{2}=\frac{5}{2}$ és $\frac{c_2-5}{2}=-\frac{7}{2}$, ahonnan $c_2=-2$ és $b_2=7$. A csúcspontok koordinátái tehát: $B(1;7)$ és $C(-2;-2)$.

b) A háromszög egyenlőszárúságának igazolásához szükségünk van oldalainak hosszára: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-12)^2}=\sqrt{180}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-9)^2+3^2}=\sqrt{90}$ és $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-9)^2}=\sqrt{90}$.

Mivel $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$, ezért a háromszög valóban egyenlőszárú. A fentiekből látszik, hogy $\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|\right)^2+\left(\left|\overrightarrow{BC}\right|\right)^2=\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\right)^2$, tehát a Pitagorasz-tétel megfordítása értelmében derékszögű is a megadott háromszög.

c) *1. megoldás:* Mivel a háromszög derékszögű, a Thalesz-tétel megfordítása miatt a háromszög köré írható körének középpontja az átmérő felezőpontja, azaz $F_1$ lesz: $F_1\left(\frac{7+1}{2};\frac{-5+7}{2}\right) \Rightarrow F_1(4;1)$. Szükségünk van még a köré írható kör sugarára is – ezt meg tudjuk határozni pl. a következőképpen: $r=\left|\overrightarrow{F_1C}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{45}$. Tehát a háromszög köré írható körének az egyenlete: $(x-4)^2+(y-1)^2=45$.

*2. megoldás:* Tudjuk, hogy a háromszög köré írható körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Meghatározásához tehát fel kell írni 2 oldalfelező merőlegesnek az egyenletét, majd az ebből a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a középpont két koordinátáját. Az AC oldal felező merőlegesének egyenese legyen $e$. Az $e$ egyenes egyenletének felírásához szükségünk van az egyenesnek egy normál vektorára: $\underline{n}=\overrightarrow{AC}$, azaz $\underline{n}(-9;3)$; és egy pontjára: $F_3$ az $\overrightarrow{AC}$ irányított szakasz felezőpontja $\Rightarrow$ rajta van a szakasz felező merőlegesén, azaz az egyenlet felírásához használhatjuk az $F_3\left(\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right)$ pontot. Az $e$ egyenes egyenletét ezeket az információkat felhasználva a következő alakban írhatjuk fel: $-9x+3y=-9\cdot\frac{5}{2}+3\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=-33$, ami egyszerűsítve: $3x-y=11$. Most határozzuk meg a BC oldalfelező merőlegesének egyenletéhez szükséges adatokat! Nevezzük ezt az oldalfelező merőlegest $f$-nek. Ismét szükségünk van az egyenlet felírásához az egyenesnek egy normálvektorára: $\underline{n}=\overrightarrow{BC}$, azaz $\underline{n}(-3;-9)$; és egy pontjára: $F_2$ a $\overrightarrow{BC}$ irányított szakasz felező pontja $\Rightarrow$ rajta van a szakasz felező merőlegesén, azaz az egyenlet felírásához használhatjuk az $F_2\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ pontot. Az $f$ egyenes egyenletét ezeket az információkat felhasználva a következő alakban írhatjuk fel: $-3x-9y=-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(-9)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)=-21$, ami egyszerűsítve: $x+3y=7$. Ezután ezekből az egyenletekből álló $3x-y=11 \ \wedge \ x+3y=7$ egyenletrendszert kell megoldanunk. Ennek eredményeként azt kapjuk, hogy $x=4$ és $y=1$. A háromszög köré írható körének középpontja tehát ebben az esetben is az $F_1(4;1)$ pont lesz. A kör sugarát pedig most is meghatározhatjuk az *1. megoldásban* szereplő módon, így a kör egyenlete ismét $(x-4)^2+(y-1)^2=45$ lett.

d) *1. megoldás:* a megadott két háromszög hasonló, hiszen a megfelelő oldalaik aránya egyenlő. Az oldalak aránya: 1:2 $\Rightarrow$ a területek aránya: 1:4. Tehát a $T_{F_1BF_2}$ területe negyed része a $T_{ABC}$ területének.

*2. megoldás:* a meglévő adatainkat felhasználva kiszámolhatjuk a háromszögek területét is: $T_{ABC} = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|}{2} = \frac{\left(\sqrt{90}\right)^2}{2} = 45$ és $T_{F_1BF_2} = \frac{\left|\overrightarrow{BF_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|}{2} = \frac{\left(\sqrt{22{,}5}\right)^2}{2} = 11{,}25$. Innen szintén azt kapjuk, hogy a $T_{F_1BF_2}$ területe negyed része a $T_{ABC}$ területének (hiszen $\frac{45}{11{,}25} = 4$).

- **forrás:** saját feladat
- **kompetenciák:** számolás, geometriai tételek ismerete, matematikai jelek és képletek használata, matematikai gondolkodás és érvelés, kritikai gondolkodásra való hajlam, matematikai modellek használata, kreativitás
- **PISA képességszint:** 5. szint

Mint ahogyan azt a szakdolgozat és a fejezet elején már említettem, ezt az általam összeállított feladatsort két gimnázium érettségiző diákjai is megírták próbaérettségiként.

A megírt dolgozatok alapján a következő fejezetben megtudhatjuk, milyen eredményt értek el a sima alap képzettségű osztályok, valamint ehhez képest mennyivel teljesítettek jobban a fakultációs és speciális matematika tantervű csoportok.

Sort kerítünk a feladatsor értékelésére összességében, illetve kiemelten a feladatsor néhány – bizonyos szempontból érdekesebbnek bizonyult – feladatának elemzésére.

# 5. A PRÓBAÉRETTSÉGI FELADATSOR ÉRTÉKELÉSE

Az előző fejezetben bemutatott feladatsor értékelését a már korábban említett két gimnáziumban gyűjtött gyakorlati tapasztalatok alapján fogom elvégezni. Először is röviden a mérések körülményeit, céljait és általános tapasztalatait ismertetem; majd részletesen elemzem a feladatsor azon feladatait, melyek a tanulói fogadtatás alapján érdekesebbnek bizonyultak. Ehhez az elemzéshez, a megírt dolgozatok eredményeit; a tanulók által kitöltött kérdőívekből nyert információkat és a szaktanároktól kapott írásos véleményeket fogom felhasználni (a kérdőívek és a tanári vélemények szempontjai megtalálhatóak a szakdolgozat Mellékletében **–** 3. és 4. számú melléklet).

## 5.1. A MÉRÉSEK KÖRÜLMÉNYEI, CÉLJAI ÉS ÁLTALÁNOS TAPASZTALATAI

A feladatsorom megíratására 2009. áprilisában összesen négyszer került sor. Első két alkalommal a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium egy alap és egy speciális matematikai képzettségű végzős osztályában; harmadszor a szigetszentmiklósi Batthyány Kázmér Gimnázium három tizenkettedikes osztályában; negyedszer pedig ugyanennek az iskolának két jelenleg középszintű érettségire készülő, tizenegyedikes fakultációs osztályában. A felmérések idejére már mindegyik tanulócsoport megkezdte az érettségire való felkészülést, a rendszerező összefoglalást, így tökéletes „célközönségei” voltak a próbaérettségimnek.

A dolgozatok megíratásának elsődleges célja az volt, hogy kiderüljön, hogy a korábbi próbaérettségikhez képest mennyire tér el a diákok teljesítménye egy ilyen, jelentősebb mértékben kompetencia alapúbb feladatsor megírásakor. A felmérésben résztvevő diákok már gimnáziumi tanulmányaik kezdetétől (2005) a kétszintű érettségire való készülés szellemében tanulhatták a matematikát, így az esély megvolt arra, hogy biztos alapokkal rendelkeznek egy ilyen típusú megmérettetéshez.

Ezentúl a mérések nem titkolt szándéka volt az is, hogy fényt derítsenek arra, hogy a gyakorlatban mennyire állják meg a helyüket a feladataim; és hogy az általam összeállított javítási-értékelési útmutató jól hasznosítható-e a szaktanárok számára.

A diákok teljesítménye és a megszerzett tapasztalatok végül meglehetősen vegyes – időnként önmagának is ellenmondó – végeredményt indukáltak.

**A feladatsor tanulói fogadtatása:**

A dolgozatok megírásakor a felmérésben résztvevő, 59 alapképzettségű diák szinte egyöntetűen nehéznek titulálta a feladatsort. Megrémítette őket az, hogy sokkal több szöveges feladat volt az I. részben, mint ahogyan azt eddig megszokták; illetve gyakran az eddig még ismeretlenebbnek tűnő feladattípusok (pl.: 11, 13/b,c és 15/e) ellen is megfogalmaztak negatív kritikát – mondván, hogy ők ilyet soha nem tanultak.

Néhány idézet a Kérdőívek „Egyéb megjegyzés(ek)" rovatát kitöltő tanulóktól (ezen vélemények eredeti, kézírásos változatai beszkennelt formában a Mellékletben olvashatóak – 5. számú melléklet):

1) „Összességében nagyon munkaigényesek a feladatok. Sok időt igényel egy-egy feladat megoldása." [I. rész]

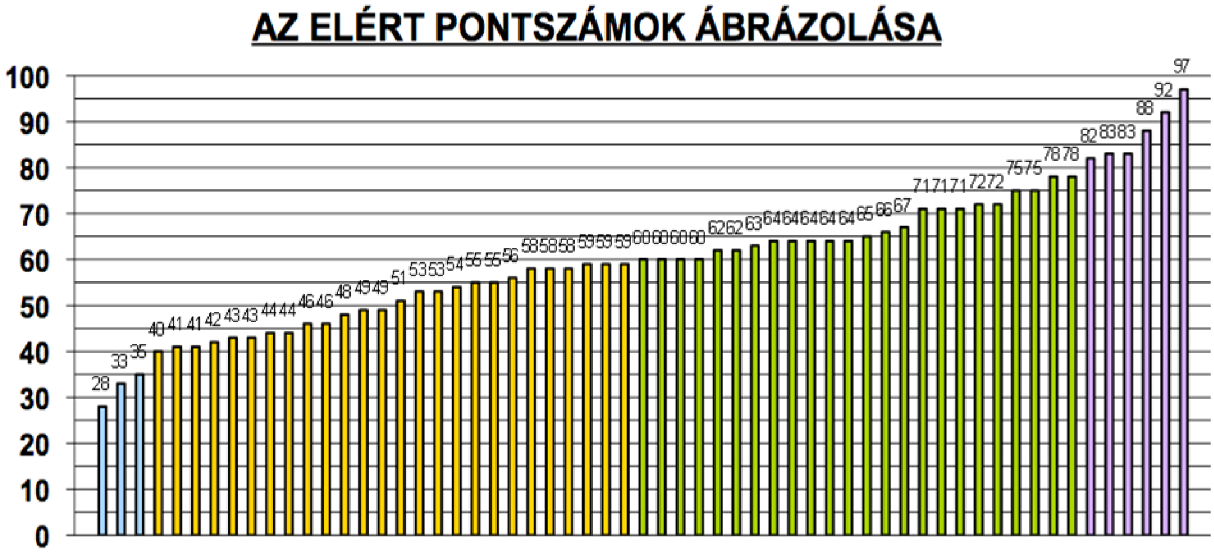
2) „Az eddigi feladatsorokhoz képest ezt nehezebbnek találtam (...) De utólag átbeszélve, végiggondolva nem volt olyan nehéz, mint amilyennek tűnt" [I. rész]

3) „A feladatok túlságosan összetettek voltak, és az idő szempontjából gondot okoztak." [II. rész]

4) „Ennél egyértelműbb feladatok kellenének a második részbe, ahol értelmezés helyett a matematika tudás számítson." [II. rész]

Ezekhez a hirtelen reakciókhoz képest azonban az eredményeik lényegesen jobbak lettek (a szaktanáraik véleménye szerint). Az 59 db alaposok által írt dolgozatnak az átlaga (a négy osztályban együttesen kiszámítva) 59,88 pont lett (ami a rendes érettségin közepes osztályzatnak felel meg). Ettől az átlagtól az egyes osztályok egyéni átlagai sem térnek el jelentős mértékben (50,66; 59,78; 60,37; 66), azaz nem volt nagy a szórása az adatsornak.

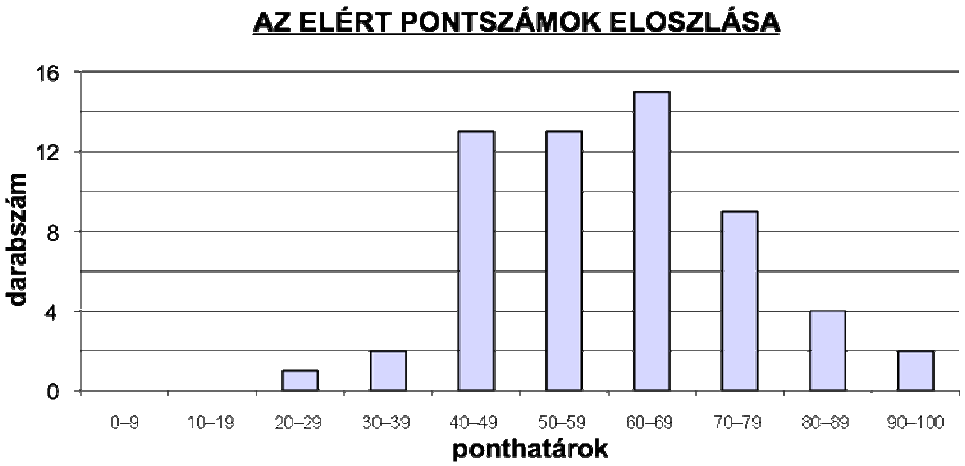
Az alábbi diagram [1. diagram] mutatja, hogy milyen pontszámok születtek ezekben a tanulócsoportokban (a kék színű oszlopok a rendes érettségin elégséges minősítést, a narancssárgák közepes, a zöldek jó, végül a lilák jeles osztályzatot érdemeltek volna):




[1. diagram]

(A diagram a Mellékletben is megtalálható egy jobban tanulmányozható formátumban – 6. számú melléklet)

Az elért pontszámok eloszlását ábrázolva [2. diagram] az látható, hogy egy majdnem normális eloszlású görbe rajzolható, ami a feladatsor nehézségét illetően egy megnyugtató eredménynek tekinthető.




[2. diagram]

A kijavított dolgozatok megtekintése után pedig, a Kérdőívek kitöltésekor a kezdeti „ijedtségnek” már csak apró nyomai voltak tapasztalhatóak a diákok véleményét illetően. Mindez a diákok szavaival megfogalmazva:

1) „Az eddigi feladatsorokhoz képest ezt nehezebbnek találtam (...) De utólag átbeszélve, végiggondolva nem volt olyan nehéz, mint amilyennek tűnt” [I. rész]

2) „Volt egy pár beugratós feladat, de csak figyelmetlenségekért vesztettem pontokat. Élveztem a feladatsor kitöltését, de lehetett volna egy pár gondolkodtatóbb feladat is.” [II. rész]

3) „A feladatsor első része meglepően sok kidolgozást igényelt. Maguk a feladatok nem voltak nehezek, de időben a 45 perc szűkösen volt rá elég. Az általam eddig megoldott érettségi tesztekben nem találkoztam olyannal, hogy ennyi feladatnál indokolni kellett volna rövid részben. Összességében nekem tetszett a feladatsor.”

A kitöltött Kérdőívekben a feladatsor I. részét átlagban 4,09-re, a II. részét pedig 3,35-re értékelték (egy 1-5-ig terjedő skálán). Bár a vegyes érzelmek itt is megfigyelhetőek. Az I. részről szóló kérdőíveket kitöltők (54 fő) 31,5%-a értékelte „nehezebben értelmezhetőnek” a feladatsort; 40,7%-uk szerint viszont „nagyon hasonlóak” voltak a feladatok az eddig általuk megoldott érettségi feladatsorokhoz képest. Mindössze a tanulók negyede találta „életszerűbbnek” ezt a próbaérettségit a korábbiakhoz képest. Ugyanezek az adatok a feladatsor II. részét illetően: 70,4% ; 40,7% és 11%.

A speciális matematikai képzettségű és fakultációs osztályok által elért eredmények a fentieknél lényegesen jobbak lettek (az átlagpontszám a három osztályban 86,5 lett). Ez nem meglepő, hiszen ők sokkal nagyobb óraszámban tanulják a matematikát már évek óta, és legtöbbjüknek a célja az emelt szintű matematika érettségire való felkészülés. Mindent egybe vetve elmondható, hogy ezek a tanulócsoportok jobban is értékelték a feladatsort (I. rész – 4,45; II. rész – 4,01); és a visszajelzések alapján a kompetencia alapúságot is többen díjazták.

**A feladatsor és a megoldókulcs tanári fogadtatása:**

A dolgozatot megíró osztályok tanárait is felkértem a próbaérettségi (különböző szempontok szerinti) értékelésére. A teljes vélemények idézésére itt sajnos nincs lehetőség, így most csak 1-2 olyan részletet idéznék, melyek a feladatsort összességében értékelik:

„Nagyon hasonlított a feladatsor az „igaziakhoz”, látszik rajta a törekvés, hogy minél több életszerű feladat legyen benne. Ez, szerintem ugyanúgy, mint az igaziakban kb. közepesen sikerült. Ez nem biztos, hogy baj, mert a diákok nem mindig lelkesednek azokért a feladatokért, amiknek a szövegét meg kell érteni, ki kell hámozni belőle mi is itt a matematika. (…) A feladatsor elég jól lefedte a gimnáziumi 4 éves tananyagot. A geometria mostanában eléggé kiszorult a feladatsorokból, itt jó volt, hogy az első részben is szerepelt geometria feladat (11.) és, hogy a koordinátageometria feladatnak megoldásához elég sok elemi ismeret is kellett.“ [U.K. matematika szaktanár, BDG]

„A feladatok között többnek a szövegezése életszerű volt, mely jól illeszkedik az új elvárásokhoz. (...) Nem éreztem nehéznek a feladatsort, a diákok a megszokott teljesítményt nyújtották. (...) A trigonometriát kevesellem, illetve ezen kívül valamilyen térgeometriával kapcsolatos probléma is egy kicsit hiányzik a feladatsorból.” [N.I. matematika szaktanár, Berzsenyi Dániel Gimnázium]

„Az egész feladatsort tekintve nagyon jól sikerült összeállítással volt dolgunk. A feladatok átgondoltak, minden területre kitértek, és valósághűek voltak. (...) Sokszor a dolgozat megíratásakor derül csak ki, hogy túlságosan könnyű vagy éppen nehéz volt egy-egy feladat, vagy sok illetve kevés feladatot tűztünk ki. Ebben a feladatsorban nem találkoztam ilyen hibával. Nagyon tetszett az is, hogy sok szöveges feladatot olvashattunk. Összességében szeretném, ha hasonló érettségi feladatsorokkal találkozhatnánk az „életben” is. (...) Informatikatanárként nagy hangsúlyt fektetek a feladatsor megszerkesztésére is. A rövid feladatoknál egy helyen korrigálnék a feladatlapon. Ez a 9. faladat válasza. Nehezen fér el a kihagyott helyen 7*2 adat. Vagy több helyet hagynék rá, vagy a kérdést máshogy tenném fel, (...) A hosszú feladatoknál az volt egy kicsit zavaró, hogy a feladatok mindig a jobb oldalon szerepeltek, és az érettségin is mindig van a feladatok után hely a kidolgozáshoz, (...) de ezek mindig a bal oldalra kerültek (...), ami nehézkessé teszi a feladatmegoldást, ami szintén koncentrációzavart okozhat.” [B.G. matematika szaktanár, Batthyány Kázmér Gimnázium]

„Az első rész feladatai nem voltak nehezek, inkább a sok szöveg volt furcsa, szokatlan a diákoknak. Elég nagy területet lefedett, végül is egyszerű feladatokkal. Szerintem érdekesek voltak a szövegek. (...) A gimnáziumi anyagot szerintem jól lefedte a dolgozat, a feladatok érdekesek voltak, csak még mindig nem tudunk ennyi szöveges feladatot a kezükbe adni, hogy rutinosabbak legyenek.” [Sz.P.M matematika szaktanár, Batthyány Kázmér Gimnázium]

„A feladatsor az előző éviekhez képest több időt vett igénybe (…) A diákok végigdolgozták a rendelkezésre álló időt. A feladatok összetettebbek voltak, mint az előzőek, sokrétű és átfogó tudást mértek. (…) A feladatok érdekesek, változatosak voltak, de a 16. feladat szövegét túlságosan erőltetettnek tartom.” [H.D.É. matematika szaktanár, BKG]

„A feladatsor formailag teljesen megegyezett az eddig megszokott érettségi feladatsorokkal, ami nagy munka lehetett, nem minden matematikatanártól várható el a szövegszerkesztés ilyen szintű használata. Apró zavaró körülmény volt, hogy néhány ábra vagy olyan matematikai kifejezés, amelyhez egyenletszerkesztőt szoktunk használni, kissé elmosódott. (…) Az I. részben meglepően sok kompetencia alapú feladat volt. Sokféle témakört lefedett. Kissé soknak találtam az olyan feladatot, ahol indokolni kellett a választ. (…) A feladatokat ötletesnek találtam, a kérdések világosan voltak megfogalmazva. (…) A II. részben (…) szerintem a feladatok jól megoldhatóak, ötletesek, sokfélék voltak. Nagyjából lefedték a tananyagot. Nekem a logaritmus egy kicsit hiányzott, de ez nem is biztos, hogy feltétlenül nélkülözhetetlen matematikai kompetencia. (…) Összességében a feladatsorról (…) nagyon pozitív a véleményem. Bármelyik, sok éves tapasztalattal rendelkező matematikatanár készíthette volna.” [K.H.É. matematika szaktanár, Batthyány Kázmér Gimnázium]

A dolgozatokat javító tanároktól az általam elkészített javítási-értékelési útmutató (mely a Mellékletben megtekinthető) értékelését is kértem. Néhány ezekből a véleményekből is:

„Összességében nagyon hasonló megoldókulcsot raktam volna össze.”
[U.K. matematika szaktanár Berzsenyi Dániel Gimnázium]

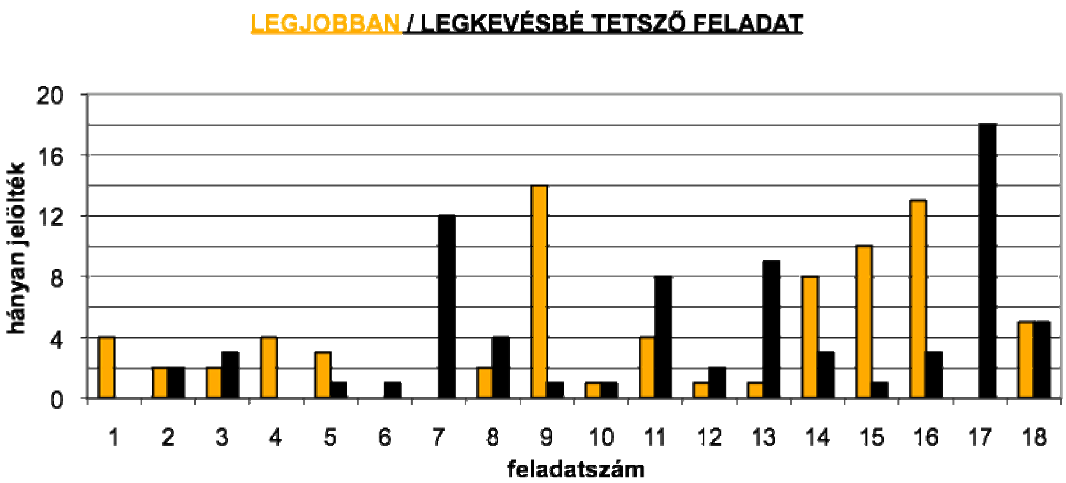
„A javítókulccsal nagyon meg voltam elégedve. Néhány pontnál kértem még szóban pontosítást. Ez teljesen természetes folyamat, sokszor felvételi dolgozatoknál és érettséginél is előfordul korrekció, javítás. A pontozás egyértelmű volt, jól volt egységekre bontva. Alakilag is megfelelt egy érettségi dolgozatnak.” [B.G. matematika szaktanár, BKG]

„A javítási-értékelési útmutató könnyen használható és áttekinthető volt. Amiben nem értettünk egyet, az a pontszámok további bontása, illetve az egyes gondolati egységek elválasztása volt. A felmerülő kérdéseket helyben meg tudtuk beszélni, ezek után az útmutató korrigálásra került. Ez még az érettségi vizsgán is gyakran előfordul. (...) Összességében (...) az útmutatóról nagyon pozitív a véleményem. Bármelyik, sok éves tapasztalattal rendelkező matematikatanár készíthette volna.” [K.H.É. matematika szaktanár, BKG]

## 5.2. NÉHÁNY FELADAT RÉSZLETESEBB ÉRTÉKELÉSE

A következőkben a diákoknak Legjobban tetsző / Legkevésbé tetsző feladatok (7, 9, 16, 17) részletesebb elemzésére; valamint még három, (az elért eredmények alapján) nehezebbnek bizonyult (rész)feladat (11, 13/b,c és 15/e) boncolgatására kerül sor.

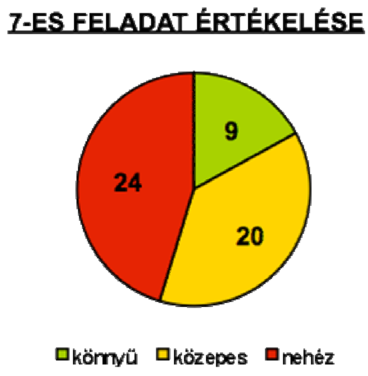
Az utóbbi feladatokat a dolgozatok javítása közben gyűjtött tapasztalataim alapján válogattam ki. Az előbbieket a kitöltött Kérdőívek 3-4. kérdéseire adott válaszok alapján, amiket a következő 3. számú diagram foglal össze:




[3. diagram]

**7. feladat, az I. rész legkevésbé tetsző feladata**

A próbaérettségit megíró alapképzettségű diákok több, mint $\frac{1}{5}$-e (egészen pontosan 12 fő a Kérdőíveket kitöltő 53 személyből) a feladatsor 7. feladatát jelölte meg a „Legkevésbé tetsző” feladatként. Ez az adat összhangban áll azzal az információval is, hogy az esetek több, mint 80%-ában (az 53 alkalomból 44-szer) „Nehéz”-nek vagy „Közepesen nehéz”-nek is minősítették ezt a feladatot a diákok [4. diagram].




[4. diagram]

Ezeknél az értékeléseknél a legfőbb indoklás nem az volt, hogy nem értették a szövegét a feladatnak; hanem az, hogy (nagyon) régen tanulták már ezt az anyagrészt, illetve ritkább esetben az, hogy egyáltalán nem is tanultak ilyesmit (bár itt megjegyezném, hogy akik ezzel érveltek, ugyanabba az osztályba jártak mindvégig, mint azok, akik szerint bizony tanulták, csak régen). De találkoztam olyan magyarázattal is, hogy azért volt nehéz, mert nem volt benne a függvénytáblázatban a feladat megoldásához szükséges „háttértudás”.

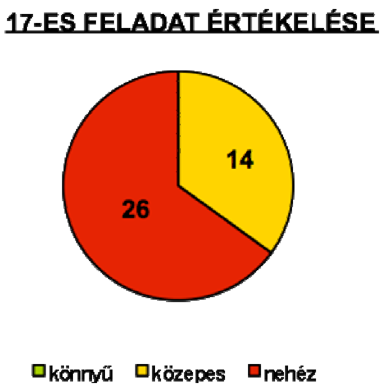
Az a 9 fő, aki szerint „Könnyű” volt ez a feladat általában arra hivatkozott, hogy csupán a számológépüket kellett elővenniük, és az megoldotta „helyettük” a példát. Az, hogy a diákok többségénél hiányzik ez a matematikai kompetencia (a megfelelő segédeszközök használatának képessége), igen meglepő tapasztalat volt.

A feladat legfőbb tanulsága az volt, hogy a diákok (sajnos) gyakran nem gondolnak bele az egyes matematika feladatok mögöttes tartalmába. Ha nem jut eszükbe egyből a megoldáshoz betanult „séma”, már általában nem is küzdenek tovább. Nem próbálják meg átgondolni, hogy mit is jelent az, ha egy számnak felírjuk a tizes számrendszerbeli alakját, és ehhez képest vajon mi változhat akkor, ha az adott számot kettes számrendszerben írjuk fel.

### 17. feladat, a II. rész legkevésbé tetsző feladata

Ez a feladat tulajdonképpen megkaphatná a „feladatsor legnehezebb feladata” címet is.

Ezt igazolja a tanulók értékelése – a 3. diagramról leolvasható, hogy ezt jelölték meg a legtöbben „Legkevésbé tetsző” feladatként; a tanárok véleményezése; de valójában ez is volt ennek a feladatnak a szerepe eredetileg is a próbaérettségi összeállításakor.

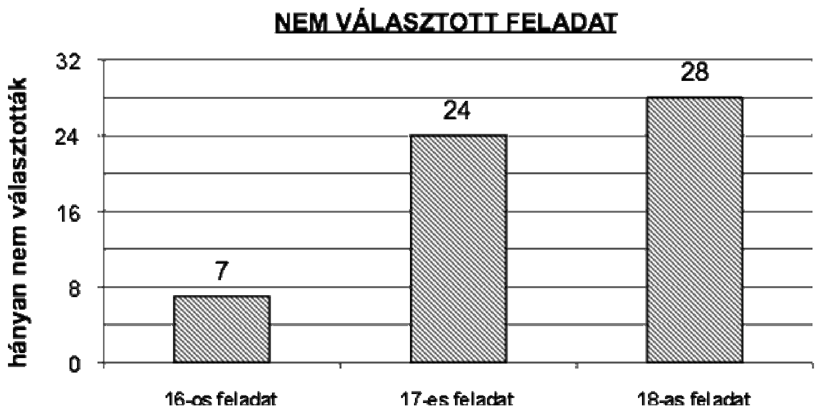



[5. diagram]

Az 5. diagramon látható, hogy ezt a példát egyetlen diák sem értékelte könnyűnek, ami ismét abszolút összhangot jelent a tetszési index eredményével.

A diákok a feladat nehézségét általában azzal indokolták, hogy nehezen volt értelmezhető a feladat; hogy túl sok mindenre kellett odafigyelni, túl sok mindent kellett volna kiszámolni; hogy (idézve egy tanuló szavait) „agyon kombinált” volt az a) és b) része a példának.

Azáltal, hogy ez a feladat a próbaérettségi II./B részében lett kitűzve, meg lett volna a lehetősége a tanulóknak, hogy „elpasszolják”, és ehelyett a 16. és 18. feladatokat oldják meg. Meglepő volt viszont, hogy a fentebb részletezett nehézségek ellenére mégsem ezt hagyták ki a legtöbben, hanem a 18. feladatot [6. diagram].




[6. diagram]

Az 59 tanulóból tehát 35-en megpróbálkoztak a feladat megoldásával. Általában azonban az összpontszámnak csak a töredékét (3-4 pont) sikerült elérniük. A megoldásokat részletesen áttanulmányozva típushibának mondható, hogy a feladat a) és b) részében nem gondolták át rendesen a diákok, hogy egy pár kiválasztásánál nem elég arra odafigyelni, hogy milyen figurákat választunk ki, hanem arra is ügyelni kell, hogy ezeknek a lapoknak milyen a színe.

A középszintű érettségire készülő tanulók közül mindösszesen 1 diáknak sikerült lényegében tökéletesen megoldania a feladatot (az egyetlen pontot, amit vesztett, azért kellett levonni tőle, mert nem fogalmazta meg a válaszát szövegesen a feladat c) részéhez). Az ő megoldása a Mellékletben megtalálható (7. számú melléklet).

Meglepő volt viszont, hogy ez a példa még a fakultációs és a speciális matematika tagozatú osztályba járó diákok nagy részén is kifogott – bár náluk az is jellemző volt, hogy ezt a feladatot „passzolta el” a legtöbb ember (a 31 főből összesen 9 próbálkozott meg a megoldással). Teljes mértékben tökéletes megoldás náluk sem született.

Összességében a szerzett tapasztalatok alapján ez a feladat talán egy kicsit valóban túl nehézre sikerült. De a diákok megoldásaiban megfigyelhető az is, hogy ha az a) és b) részre (megérzésük szerint) nem kaptak jó eredményt, akkor általában a gondolatmenetben is elakadtak, és nem tudtak jó megoldást adni a feladat d) részére sem – pedig ennek semmi köze nem volt a korábbi „nehézségekhez”.

### 9. feladat, az I. rész legjobban tetsző feladata

A 7. diagramon látható, hogy a tetszési index ez esetben is harmonizál a feladat nehézségének (illetve esetünkben inkább könnyűségének) megítélésével.

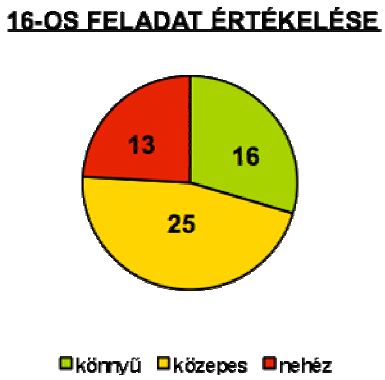
[7. diagram]

Ez a példa a tanulók indoklásai alapján megtisztelő címét a megfogalmazásának köszönheti; illetve annak, hogy egy olyan valóban életszerű és hétköznapi problémát mutat be, amelynek megoldásához alap matematikai tudás elegendő. A feladatot mindenki hibátlanul oldotta meg.

**16. feladat, a II. rész legjobban tetsző feladata**

A mérések eredményeit vizsgálva megállapítható, hogy ez a feladat váltotta ki a legszélsőségesebb érzelmeket a tanulókból. A fogadtatás alapján két részre osztható a feladatot megoldók tábora. Egyrészt volt, akinek nagyon tetszett az, hogy egy igazán életszerű problémát old itt meg az ember viszonylag könnyen elsajátítható matematikai tudást felhasználva. Másrészt volt, aki szerint túlságosan nehezen volt érthető a feladat szövege, és emiatt az alapprobléma megoldása sem ment.

Ez a kettősség megfigyelhető a feladat kapcsán megszületett tetszési és nehézségi mutatók vizsgálatakor is. A 3. diagramon már láthattuk, hogy a mérésben résztvevő tanulók ezt a feladatot jelölték a legtöbbször „Legjobban tetsző feladatnak”; de ugyanakkor a 8. diagramról leolvasható, hogy a legtöbben (az 53 kérdőívet kitöltő főből 38-an) inkább tartják nehéznek a példát, mint könnyűnek.




[8. diagram]

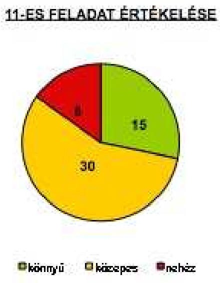
Általában akik nekiálltak ennek a feladatnak, azok lényegében jó eredményre is jutottak a megoldás során. Az egyetlen típushibaként az említhető, hogy gyakran nem vették azt figyelembe, hogy a feladat szövege a színpad átmérőjének a hosszát adta meg. Így a 3 méterrel, mint sugárral számoltak végig, és emiatt egészen más végeredményeket kaptak.

Meglepő volt, hogy csak nagyon kevés (4) tanuló tette szóvá azt, hogy a 3 méter átmérőjű színpad azért egy kicsit kicsinek tűnik a valódi (élethű) színpadokhoz képest (a feladatban direkt szerepelt olyan adat, amin el lehet már gondolkodni, hogy ez valóban reális-e).

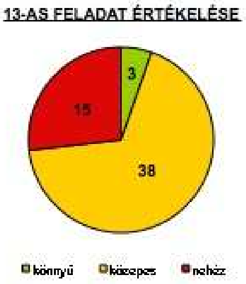
A feladathoz általam elkészített ábra is kettős érzelmeket váltott ki a diákokból. Volt, akinek segített elképzelni a feladatot; de a Kérdőívek megjegyzéseit olvasva találkoztam olyan véleménnyel is, hogy csak összezavarta a gondolatmenetben a rajz.

## Az „indoklós” feladatok

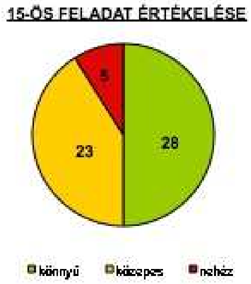
A mérésben résztvevő tanulók és tanárok körében is gyakran elhangzott az a vélemény, hogy az átlagosnál több volt ebben a feladatsorban az olyan típusú feladat, aminél indokolni kellett a megoldás gondolatmenetét. Különösen is ilyenek volt az I. rész 11. feladata, illetve a II. rész 13/b,c és 15/e feladatai. Ezen példák nehézségét a következőképpen értékelték a diákok:




[9. diagram]




[10. diagram]




[11. diagram]

Természetesen a 10. és 11. diagram a feladatok egészének értékelését mutatja, de mindkét esetben az állapítható meg, hogy a diákok a fent említett részfeladatok miatt jelölték „Közepesen nehéznek” vagy „Nehéznek” a példákat. A nehézség indoklásaként gyakran előfordultak olyan mondatok pl. a 13/b,c részfeladatoknál, hogy „Nehéz volt, mert ilyen típusú feladatot soha nem tanultunk megoldani”. Meglepő ezt pont azoknál a feladatoknál olvasni, amik olyan tudást kérnek számon, amit csaknem minden egyes egyenlet illetve egyenlőtlenség megoldásakor felhasználunk.

Valójában ezek azok a feladatok, amiket a feladatsor összeállításakor én a leginkább kompetencialapú példának szántam, hiszen az ilyen típusú feladatok alkalmasak a leginkább olyan matematikai kompetenciák mérésére, amik nem feltétlenül a szakmai ismeretek létét vagy nemlétét hivatottak számon kérni (hanem például azt, hogy végig tud-e követni a tanuló egy érvelést, vagy tud-e ő maga a matematika nyelvén indokolni).

Alapvetően mindhárom feladatnál azt láthatjuk, hogy alap matematikai ismeretek használatát kellene tudni megindokolnia a tanulónak. Ez azonban csak nagyon keveseknek sikerült. A 11. feladatra összesen 16, a 15/e részfeladatra pedig mindössze 11 ember kapta meg a maximális pontot. Olyan tanuló pedig csak 9 volt, aki a 13. feladat b) és c) részére is megkapta a 2-2 pontot (az alapképzettségű osztályokban).

# 6. ÖSSZEFOGLALÁS

Munkám elején szakdolgozatom céljaként két dolgot határoztam meg.

Az egyik cél egy a jelenleg érvényben lévő érettségik tartalmi és szerkezeti követelményeinek megfelelő, ám ezeknél kompetencia alapúbb, lényegében saját feladatokból álló próbaérettségi elkészítése volt. A másik cél pedig annak felmérése volt, hogy mennyire vannak olyan diákok felkészülve egy ilyen mértékben kompetencia alapú feladatsor megoldására, akik már gimnáziumi tanulmányaik kezdete óta a kétszintű érettségire való készülés szellemében tanulhatták a matematikát.

A mérések tapasztalatait összegyűjtve elmondható, hogy az első célt lényegében sikerült elérni. Bár tartalmilag egy fokkal talán nehezebb feladatsor született, mint amikhez a tanulók az eddigiekben hozzá voltak szokva, de azért megállta a próbaérettségi a helyét a gyakorlatban.

A mérések eredményeit vizsgálva viszont az állapítható meg, hogy a kompetencia alapú oktatás (legalábbis a méréseknek teret adó gimnáziumokban) annyira még nem érezteti pozitív hatását. Az út, úgy tűnik, még korántsem mondható kitaposottnak. Valószínűleg még hosszú éveknek kell eltelnie addig, amíg a tanárok megtalálják azokat a módszereket, melyekkel még hatékonyabban tudják majd tanítványaikat arra nevelni, hogy ne csak betanult sémákat alkalmazva tudjanak 1-1 matematikai példát megoldani, hogy ne csak képletekbe tudjanak számokat beírogatni, hanem kezdjenek el gondolkodni a feladatokon.

A gyakorlatban hatékonyan alkalmazható elméleti matematikatudást átadni a diákoknak – úgy gondolom, nagy kihívása ez a mai és a jövőbeli matematikatanároknak. Nagy, de nem leküzdhetetlen…

# FELHASZNÁLT IRODALOM


[1] http://www.nyf.hu/virtual/keptar/kotta/pedagogia/2/2_egyseg (2009. március)

[2] Halász Gábor: Előszó. In: A kompetencia. Kihívások és értelmezések. Szerk.: Demeter Kinga. Budapest, Országos Közoktatási Intézet (OKI), 2006. 3.o.

[3] http://www.consultationmagazin.hu/index.php?menu=cikk&id=89 (2009. március)

[4] Idegen szavak és kifejezések szótára. Szerk.: Bakos Ferenc. Bp, Akadémiai Kiadó, 1974.

[5] Idegen szavak magyarul. Szerk.: Tótfalusi István. Bp, Tinta Könyvkiadó, 2002.

[6] Szelestey Judit: Kompetencia modell kidolgozásának elméleti háttere

[7] Szilágyi Barnabás: Kompetencia-kutatás.

[8] Lyle Spencer – David McClelland – Signe Spencer: Competency Assessment Methods, History and State of Arts. Boston, Hay/McBer Research Paper, 1990.

[9] Pedagógiai Lexikon. Főszerk.: Báthory Zoltán – Falus Iván. Bp., Keraban, 1997.

[10] Nagy József: „A kritikus kognitív készségek és képességek kritériumorientált fejlesztése". In: Új Pedagógiai Szemle 2000, 7-8. 255-269.

[11] Balázsi Ildikó – Ostorics László – Szalay Balázs: PISA 2006. Összefoglaló jelentés. A ma oktatása és a jövő társadalma. Budapest, Oktatási Hivatal, 2007.

[12] Oktatás és képzés 2010 munkaprogram végrehajtása. B munkacsoport: Kulcskompetenciák. Európai Tanács, 2004. november

[13] Kulcskompetenciák az egész életen át tartó tanuláshoz – Európai referenciakeret. (http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:hu:pdf) (2009. február)

[14] 202/2007 (VII.31.) kormányrendelet (Oktatási Minisztérium honlapja)

[15] Korábbi érettségi időszakok feladatsorai és javítási-értékelési útmutatói (http://www.oh.gov.hu/main.php?folderID=1335&objectID=5006437) (2008. november)

[16] Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön: Egységes érettségi feladatgyűjtemény. Matematika I. és II. Budapest, Konsept-H Könyvkiadó, 2002.

[17] Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István: Sokszínű Matematika 11. Második, javított kiadás. Szeged, Mozaik Kiadó, 2004.

# KÉPEK FORRÁSAI


[1] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/30/Hugo_Munsterberg.jpg/150px-Hugo_Munsterberg.jpg (2009. március)

[2] http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic20826.files/McClelland2.jpg (2009. március)

[3] http://www.events.wvu.edu/foi/2002/goleman/picture.jpg (2009. március)

[4] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/db/Noam_chomsky_cropped.jpg/180px-Noam_chomsky_cropped.jpg (2009. március)

[5] http://pro.corbis.com (2009. március)

[6] http://www.nuim.ie/academic/education/News/photojco.jpg (2009. március)

[7] http://www.staff.u-szeged.hu/%7Enagyjozs/nj3.jpg (2009. március)

# MELLÉKLETEK

## TARTALOMJEGYZÉK:

Név:.................................................... Osztály:............

# MATEMATIKA

# PRÓBAÉRETTSÉGI

# KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2009. április

# I.

Időtartam: 45 perc

| Pótlapok száma | |
|---|---|
| Tisztázati | |
| Piszkozati | |

**KÉSZÍTETTE: REKOABT.ELTE**

# FONTOS TUDNIVALÓK

1. A feladatok megoldására 45 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A megoldások sorrendje tetszőleges.
3. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármelyik négyjegyű függvénytáblázatot használhatja, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
4. **A feladatok végeredményét az erre a célra szolgáló keretbe írja**, a megoldást csak akkor kell részleteznie, ha erre a feladat szövege utasítást ad!
5. A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
6. Minden feladatnál csak egy megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén egyértelműen jelölje, hogy melyiket tartja érvényesnek!
7. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon**!

Matematika próbaérettségi Név:........................................ Osztály:............

1. Gergőnek lediktáltak egy néggyel osztható hétjegyű telefonszámot, de Ő az utolsó számjegyet elfelejtette leírni. A barátja úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy négyes volt. A kiolvasható szám: 586371_ . Igaza lehetett-e Gergő barátjának? Válaszát indokolja!

| | | |
|---|---|---|
| | 1 pont | |
| Válasz: | 1 pont | |

2. Az 1:2025000 méretarányú Google Maps online térképen a Bécs és Budapest közti távolságot 12 cm hosszú egyenes szakasz jelzi. Hány kilométerre van a két város egymástól légvonalban? Írja le a megoldás menetét is!

| | | |
|---|---|---|
| | 1 pont | |
| A két város …………… van egymástól | 1 pont | |

3. Határozza meg a következő törtnek az értelmezési tartományát és egyszerűsítse a törtet!

$$\frac{6a^2 - 48a}{a^2 - 64}$$

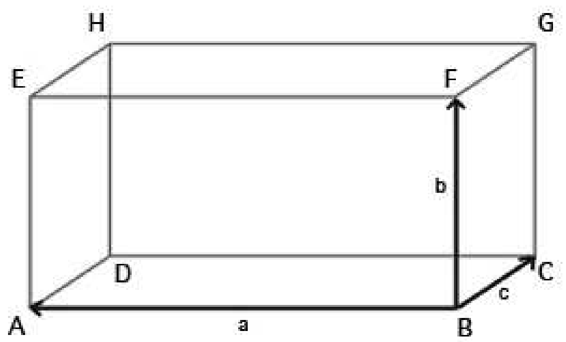
| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |
| Az értelmezési tartomány: | 1 pont | |

Matematika próbaérettségi Név:......................................... Osztály:............

4. Egy 24 fős gimnáziumi osztályban a tanulók két helyre adták be a felvételi jelentkezésüket: az ELTE TTK Matematika szakára és az ELTE BTK Történelem szakára. A BTK-n az osztály 6/8-a, a TTK-n a tanulók 75%-a szeretne továbbtanulni. Hányan adták be mindkét karra a jelentkezésüket, ha mindenki beadta legalább az egyik helyre? Írja le a megoldás gondolatmenetét!

| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |
| Mindkét karra ……… jelentkeztek. | 1 pont | |

5. Az alábbi téglatest B csúcsából kiinduló három irányíttott szakasz **a** = $\overrightarrow{BA}$, **b** = $\overrightarrow{BF}$ és **c =** $\overrightarrow{BC}$. Állítsuk elő **a**, **b** és **c** segítségével a $\overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{BH}$ irányított szakaszokat!




| | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{BD}$ =<br><br>$\overrightarrow{BH}$ = | 2 pont | |

6. Egy jótékonysági bálon 150 db tombolajegyet adtak el. Hány tombolát kell vásárolnunk ahhoz, hogy legalább 75%-os legyen a nyerési esélyünk, ha egy nyereményt sorsolnak ki? Válaszát indokolja! (A jegyek nyerési esélye egyenlő.)

| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |
| …… db tombolát kell vásárolnunk. | 1 pont | |

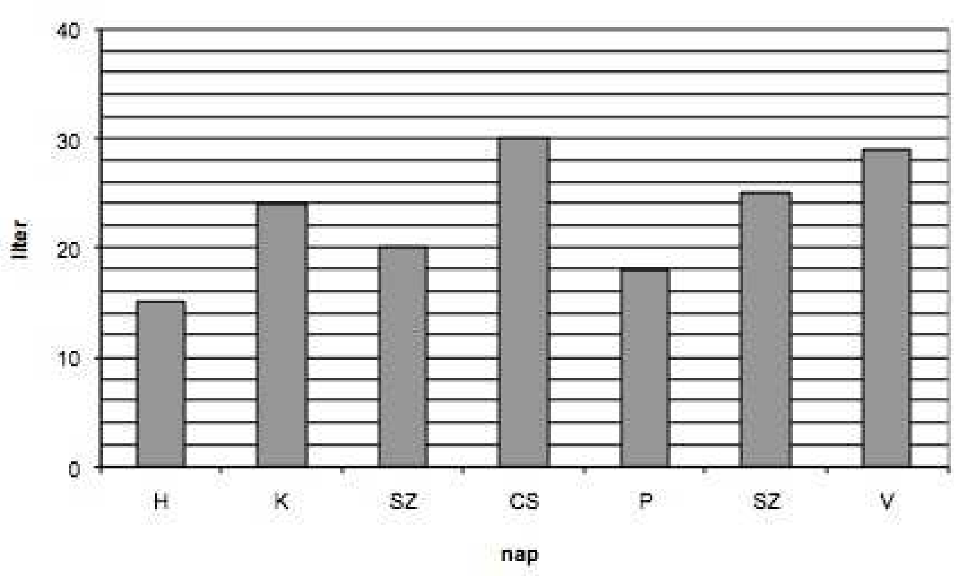
7. Egy több, mint tíz éves hazai múlttal rendelkező számítástechnikai cégnél minden egyes projekthez egy bináris számrendszerbeli számot rendelnek hozzá. A legutóbbi feladat a 111001101-es számot kapta. Az ehhez a céghez állásinterjúra jelentkező személyeknek a beugró kérdése az, hogy mondják meg ennek a számnak a tízes számrendszerbeli alakját. Mit válaszolt Ödön, ha tudjuk, hogy átment a beugrón?

| | | |
|---|---|---|
| Ödön válasza: | 2 pont | |

8. Adott egy olyan ABC háromszög, melynek $a$ oldala 3 cm, $b$ oldala 4 cm és az ACB szöge pedig $120°$. Készítsen rajzot a feladathoz! Határozza meg a háromszög harmadik oldalának a hosszát (két tizedesjegy pontossággal)!

| | | |
|---|---|---|
| | 2 pont | |
| c = …… cm | 1 pont | |

9. Az elmúlt héten Pista bácsi minden nap feljegyezte, hogy mennyi tejet adott neki Riska nevű tehene, és az adatokból elkészítette az alábbi oszlopdiagramot. Olvassa le az ábráról, hogy melyik nap hány liter tejet fejt Pista bácsi! Mennyi volt Riska egy napra eső átlagos termelése?

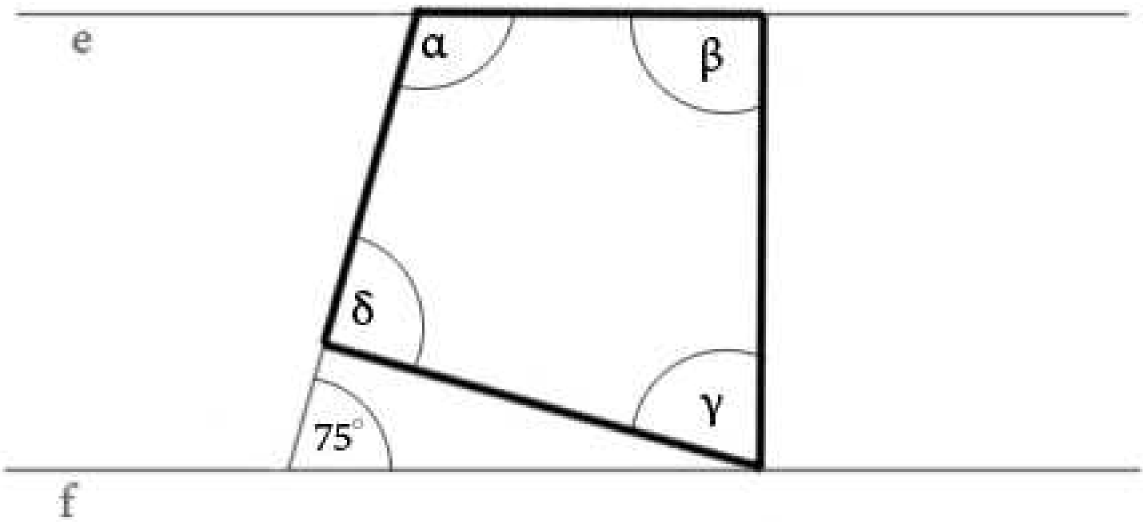



| | | |
|---|---|---|
| Leolvasott adatok: | 2 pont | |
| Átlagos termelés: | 1 pont | |

10. Budapestről a buszok Győr felé 24 perces járatsűrűséggel közlekednek, Debrecen felé pedig 21 percenként indulnak. Reggel 8 órakor mindkét irányba indult egy jármű. Évi és Eszter szeretne egyszerre elindulni a buszállomásról a két különböző irányba, de a 8 órás járatokat már nem érik el. Hány órakor tudnak legközelebb egy időben indulni?

| | | |
|---|---|---|
| ……. órakor | 2 pont | |

11. Határozza meg az ábrán látható derékszögű deltoid összes szögét! Válaszait indokolja! ($e \parallel f$)




| | | |
|---|---|---|
| $\alpha =$<br>$\beta =$<br>$\gamma =$<br>$\delta =$ | 3 pont | |

12. Fogalmazza meg a következő állítás tagadását:

"Van olyan érettségiző, aki még nem nézte át az összes témakört matematikából."

| | | |
|---|---|---|
| Az állítás tagadása: | 2 pont | |

# ÉRTÉKELŐ LAP

| | | maximális pontszám | elért pontszám |
|---|---|---|---|
| I. rész | 1. feladat | 2 | |
| | 2. feladat | 2 | |
| | 3. feladat | 3 | |
| | 4. feladat | 3 | |
| | 5. feladat | 2 | |
| | 6. feladat | 3 | |
| | 7. feladat | 2 | |
| | 8. feladat | 3 | |
| | 9. feladat | 3 | |
| | 10. feladat | 2 | |
| | 11. feladat | 3 | |
| | 12. feladat | 2 | |
| | Ö S S Z E S E N | 30 | |

javító tanár dátum

Név:.................................................... Osztály:............

# MATEMATIKA

# PRÓBAÉRETTSÉGI

# KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2009. április

# II.

Időtartam: 135 perc

| Pótlapok száma | |
|---|---|
| Tisztázati | |
| Piszkozati | |

**KÉSZÍTETTE: REKOABT.ELTE**

# FONTOS TUDNIVALÓK

1. A feladatok megoldására 135 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A **B** részben kitűzött három feladat közül csak kettőt kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 18. feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de *alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell.*

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon**!

# A

**13.** a) Oldja meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{9^{(x^2)} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x}{3^4} = 1$$

b) Találja meg a következő okoskodásban a hibát!

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$
$$x\,(x - x) = (x+x)\,(x - x)$$
$$x = x + x$$
$$x = 2x$$
$$1 = 2$$

c) Találja meg a következő egyenlőtlenség megoldásában a hibát!

$$-\,3x\,(1+2) > -\,18x$$
$$-\,3x - 6x > -\,18x$$
$$-\,9x > -\,18x$$
$$x > 2x$$
$$1 > 2$$

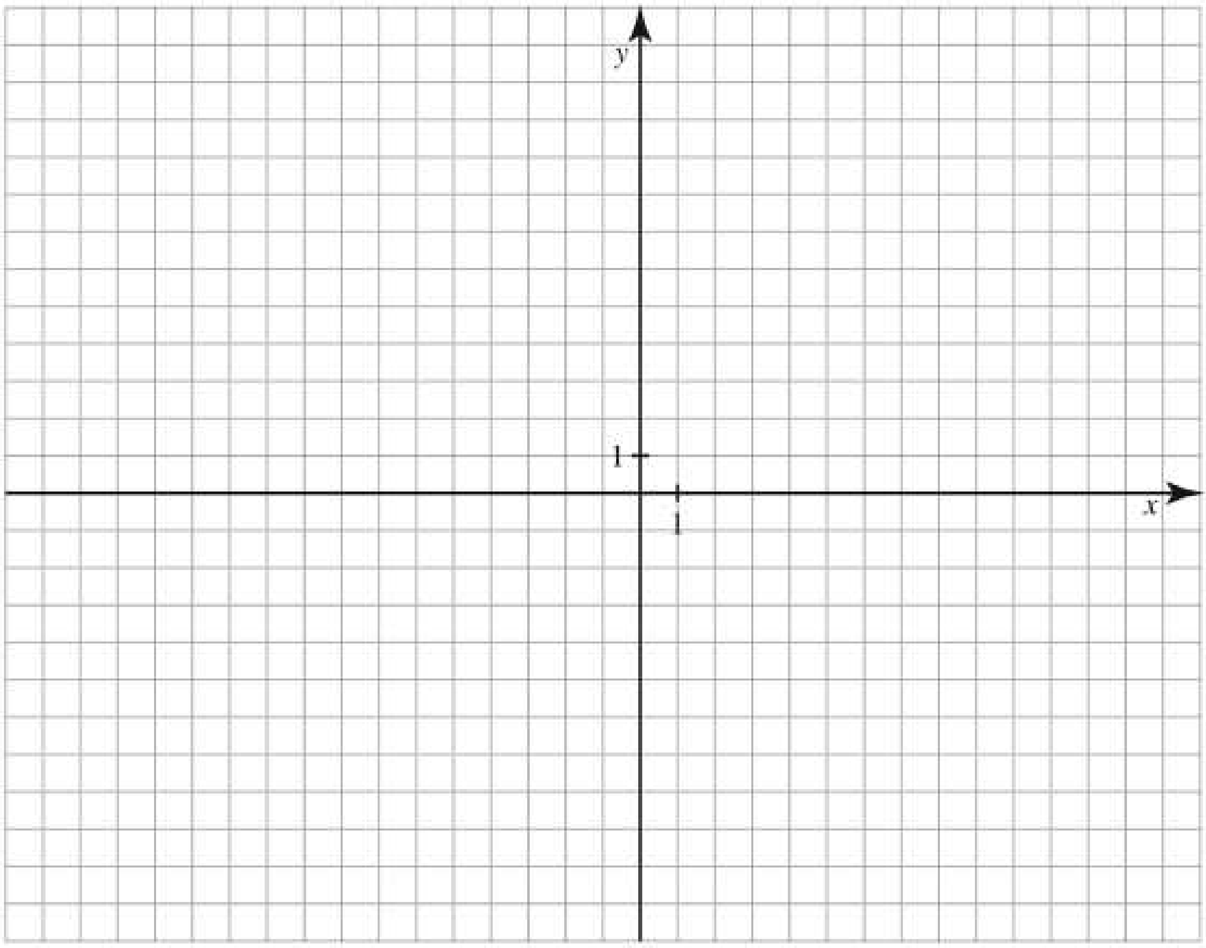
| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 8 pont | |
| **b)** | 2 pont | |
| **c)** | 2 pont | |
| **Ö:** | 12 pont | |

**14.** a) Ábrázolja az $f(x) = \sqrt{(x-3)^2} - 4$ függvényt a (-2;10] intervallumon!

b) Adja meg az $f(x)$ függvény szélsőértékeit a megadott intervallumon!

c) Adjon meg olyan zárt intervallumot, ahol az $f(x)$ függvény szigorúan monoton nő, és olyat, ahol szigorúan monoton csökken!

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 5 pont | |
| **b)** | 3 pont | |
| **c)** | 4 pont | |
| **Ö:** | 12 pont | |



**15.** A XX. század utolsó 4 olimpiáján, a magyar csapat a következő érmes helyezéseket érte el:

| | Szöul 1988 | Barcelona 1992 | Atlanta 1996 | Sydney 2000 |
|---|---|---|---|---|
| arany | 11 | 10 | 7 | 8 |
| ezüst | 6 | 12 | 4 | 6 |
| bronz | 6 | 7 | 10 | 3 |

a) Készítsen az aranyérmek adataiból egy kördiagrammot!

b) Átlagosan hány érmet szereztünk ezen a négy olimpián?

c) Ha véletlenszerűen kiveszünk egy érmet az 1992-es érmek közül, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy arany lesz a kiválasztott?

Tegyük fel, hogy ezeken az olimpiákon úgy számolták át az érmeket pontszámokká, hogy az aranyérmeket 3-mal, az ezüstérmeket 2-vel, a bronzérmeket pedig 1-gyel súlyozták.

d) Mennyi a fenti pontszámítás által kapott új (4 tagú) adatsornak az átlaga?

e) A b) és d) feladat eredményeit felhasználva hogyan lehetne megindokolni azt az állítást, hogy ezen a négy olimpián több aranyérmet szereztünk, mint bronzot?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 4 pont | |
| **b)** | 2 pont | |
| **c)** | 2 pont | |
| **d)** | 2 pont | |
| **e)** | 2 pont | |
| **Ö:** | 12 pont | |

# B

**A 16-18. feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon lévő üres négyzetbe!**

**16.** Egy színház nézőtere 15 soros; az első sorban 10 szék van és utána minden sorban hárommal több.

a) Mekkora a bevétele a színháznak egy teltházas díszelőadás estéjén, ha ilyenkor a jegyeket mindenhová 2500 Ft-os egységáron adják?

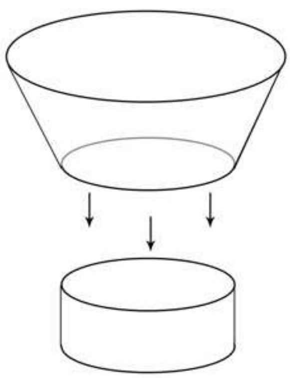
Egy közelgő premier megrendezéséhez a következő átalakításokra van szükség a színházban: a színpad területét a kétszeresére kell megnövelni, és a magasságát is meg kell emelni 1 méterrel. Ezt a változtatást a kivitelezéssel megbízott cég tervezői egy, a színpadra emelt csonka forgáskúp megépítésével tervezik (1.ábra). (Tudjuk, hogy a színház kör alakú színpadjának az átmérője 3 m)

b) Adja meg ennek a csonka forgáskúpnak a hiányzó adatait (R,a)! (Végig három tizedesjegy pontossággal dolgozzon!)

Az átalakítás után le is kell festeni az újonnan felépült színpad felső lapját és oldalát.

c) Hány liter festékre van ehhez szükség, ha 1 liter festék kiadósságát 4 $m^2$-re becsülik?

d) Fedezi-e az átalakítás költségeit a díszelőadás bevétele, ha tudjuk, hogy egy 2 literes festék 5000 Ft-ba kerül; az átalakítást végző cég 250000 Ft munkadíjat számláz ki; és a színpad megnagyobbításához felhasznált faanyag ára 385000 Ft?



1. ábra

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 4 pont | |
| **b)** | 6 pont | |
| **c)** | 4 pont | |
| **d)** | 3 pont | |
| **Ö:** | 17 pont | |

**A 16-18. feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon lévő üres négyzetbe!**

**17.** Egy 32 lapos magyar kártyacsomagban 4-féle színű (piros, zöld, makk, tök) és 8-féle figurájú (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász) lap van. Hányféleképpen lehet kiválasztani 5 lapot úgy, hogy a sorrend nem számít, és:

e) egyik figurából három, egy másikból két darab van (full)?

f) egyik figurából 4 darab van (póker)?

g) A a) és b) részekben kapott eredmények felhasználásával számolja ki mennyi annak a valószínűsége, hogy valakinek fullja, illetve hogy pókere legyen! Ez alapján mit mondana, a full vagy a póker az „erősebb” lap? Válaszát indokolja!

Zsuzsa a legutóbbi póker bajnokságon 1 000 000 Ft-ot nyert, amit azonnal le is kötött a Bankban évi 9%-os kamatra.

h) Hány évig kell bent hagynia a pénzét (változatlan kamatláb mellett) a Bankban, hogy megkétszereződjön a kezdeti egymilliós összeg?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 4 pont | |
| **b)** | 4 pont | |
| **c)** | 5 pont | |
| **d)** | 4 pont | |
| **Ö:** | 17 pont | |

**A 16-18. feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon lévő üres négyzetbe!**

**18.** Egy háromszögnek a következő adatait ismerjük: az egyik csúcsa az A (7;– 5) koordinátájú pont, a BC szakasz felezőpontja $F_2\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ és az AC szakasz felezőpontja $F_3\left(\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

a) Határozza meg a háromszög B és a C csúcsainak a koordinátáit!

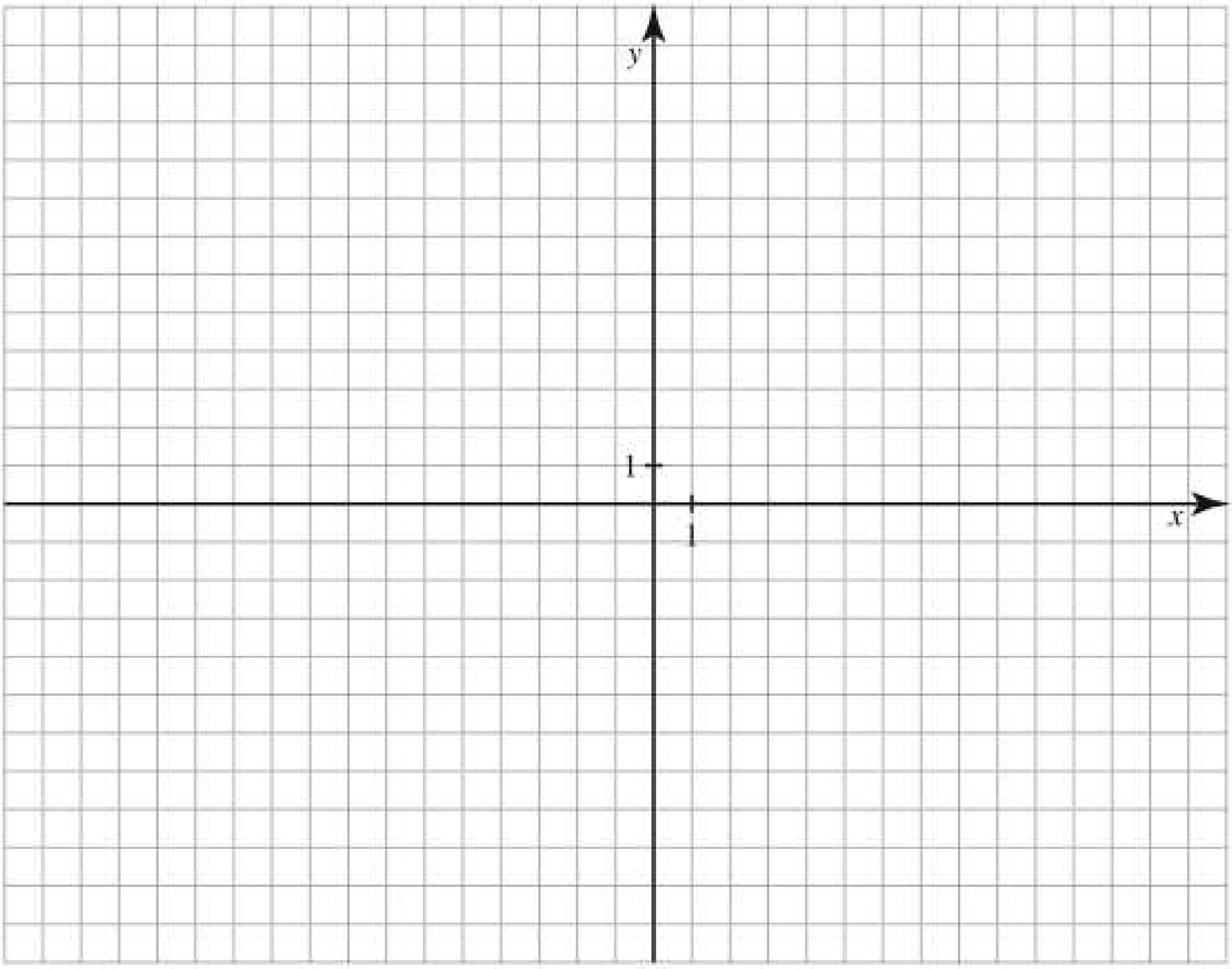
b) Igazolja, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú és derékszögű!

c) Írja fel a háromszög köré írható körének az egyenletét!

d) Hányad része az $F_1BF_2$ háromszög területe az ABC háromszög területének? Válaszát indokolja!

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 4 pont | |
| **b)** | 5 pont | |
| **c)** | 4 pont | |
| **d)** | 4 pont | |
| **Ö:** | 17 pont | |

Matematika próbaérettségi Név:......................................... Osztály:............



# ÉRTÉKELŐ LAP

<table>
<tr><td></td><td>a feladat sorszáma</td><td>elért pontszám</td><td>összesen</td><td>maximális pontszám</td></tr>
<tr><td rowspan="3">II./A rész</td><td>13.</td><td></td><td rowspan="3"></td><td>12</td></tr>
<tr><td>14.</td><td></td><td>12</td></tr>
<tr><td>15.</td><td></td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="3">II./B rész</td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td>17</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>17</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">← nem választott feladat</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">ÖSSZESEN</td><td></td><td>70</td></tr>
</table>

| | elért pontszám | maximális pontszám |
|---|---|---|
| I. rész | | 30 |
| II. rész | | 70 |
| **MINDÖSSZESEN** | | **100** |

dátum

javító tanár

# MATEMATIKA

## PRÓBAÉRETTSÉGI

## KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

## JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**KÉSZÍTETTE: REKOABT.ELTE**

# FONTOS TUDNIVALÓK

## Formai kérések:

1. A dolgozatot a diák által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.

2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, az Ön által adott **pontszám a mellette levő téglalapba** kerül.

3. **Kifogástalan** megoldás esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.

4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérem, az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

## Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtam. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.

2. A pontozási útmutató pontjai tovább **nem bonthatók**.

3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.

4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.

5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.

6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

7. A megoldásokért jutalompont (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.

8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a tanuló ténylegesen nem használ fel.

9. **A feladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A tanuló az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a diák melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

# I. RÉSZ

| **1. FELADAT** | | |
|---|---|---|
| 5863714 nem osztható 4-gyel, mert a 14 nem osztható 4-gyel | 1 pont | |
| nem lehetett igaza | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| **2. FELADAT** | | |
|---|---|---|
| 12*2025000 = 24300000 | 1 pont | |
| 24300000 cm = 243 km | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| **3. FELADAT** | | |
|---|---|---|
| $\frac{6a(a-8)}{a^2-64}$ | 1 pont | |
| $\frac{6a(a-8)}{(a+8)(a-8)} = \frac{6a}{a+8}$ | 1 pont | |
| értelmezési tartomány: $\lvert a \rvert \neq 8$ vagy $a \neq \pm 8$ | 1 pont | *Ha csak $a \neq -8$ szerepel, akkor nem jár az 1 pont.* |
| **ÖSSZESEN** | **3 pont** | |

| **4. FELADAT** | | |
|---|---|---|
| BTK: 24*6/8 = 18 fő | 1 pont | *Ha észrevette a 6/8 és a 75% egyenlőségét és így csak egy számolást végzett, akkor is jár a 2 pont.* |
| TTK: 24*0.75 = 18 fő | 1 pont | |
| metszet: 12 fő | 1pont | |
| **ÖSSZESEN:** | **3 pont** | |

| **5. FELADAT** | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{BD} = a + c$ | 1 pont | |
| $\overrightarrow{BH} = a + c + b$ | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| **6. FELADAT** | | |
|---|---|---|
| 150*0.75 = 112.5 | 2 pont | *Ha a szorzatot jól írja fel, de rosszul számolja ki, akkor 1 pont adható.* |
| 113 tombolát kell venni | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **3 pont** | |

| **7. FELADAT** | | |
|---|---|---|
| $2^8+2^7+2^6+2^3+2^2+2^0 = 461$ | 2 pont | *Ha az összegben minden kettőhatvány megfelelő, de a végeredmény hibás, akkor 1 pont adható.* |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| **8. FELADAT** | | |
|---|---|---|
| rajz | 1 pont | *A rajzra csak akkor jár az 1 pont, ha az ACB szögről egyértelműen látszik, hogy tompaszög.* |
| $c^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(120°)$ | 1 pont | |
| $c = \sqrt{37}$ | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **3 pont** | |

| 9. FELADAT | | |
|---|---|---|
| H – 15, K – 24, SZ – 20, CS – 30, P – 18, SZ – 25, V – 29 | 2 pont | *Ha legalább 6 leolvasott adat helyes, akkor 1 pont adható.* |
| $\frac{15+24+20+30+18+25+29}{7} = 23$ | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **3 pont** | |

| 10. FELADAT | | |
|---|---|---|
| [24,21] = 168, azaz 10:48-kor vagy 10.8 órakor | 2 pont | *Ha leszámolta a buszok indulási idejét, és úgy választotta ki a legközelebbi közös indulási időpontot, akkor is jár a 2 pont.* |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| 11. FELADAT | | |
|---|---|---|
| $\alpha = 105°$ | 1 pont | *Csak indoklással együtt jár az 1 pont.* |
| $\beta = 90°$ és $\delta = 90°$ | 1 pont | *Csak indoklással együtt jár az 1 pont.* |
| $\gamma = 75°$ | 1 pont | *Csak indoklással együtt jár az 1 pont.* |
| **ÖSSZESEN** | **3 pont** | |

| 12. FELADAT | | |
|---|---|---|
| Minden érettségiző átnézte már az összes témakört matematikából.<br>vagy<br>Nincs olyan érettségiző, aki még nem nézte át az összes témakört matematikából. | 2 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| **13 / a)** | | |
|---|---|---|
| *1. megoldás* | | |
| $\frac{\left(3^2\right)^{x^2} \cdot \left(3^{-2}\right)^x}{3^4} = 3^0$ | 3 pont | *A számláló helyes átalakítása 2 pont; a jobb oldal helyes átalakítása 1 pont* |
| $\frac{3^{2x^2} \cdot 3^{-2x}}{3^4} = 3^0$ | 1 pont | |
| $3^{2x^2-2x-4} = 3^0$ | 1 pont | |
| Az exponenciális függvény monotonitása miatt: $2x^2 - 2x - 4 = 0$ | 1 pont | *Ez az egy pont csak akkor adható, ha a megjegyzést is hozzátette a diák* |
| $x_1 = 2$ <br> $x_2 = -1$ | 1 pont | |
| helyes ellenőrzés | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **8 pont** | |

| *2. megoldás* | | |
|---|---|---|
| $\frac{9^{x^2} \cdot \left(9^{-1}\right)^x}{9^2} = 9^0$ | 3 pont | *A számláló helyes átalakítása 1 pont; a nevező helyes átalakítása 1 pont; a jobb oldal helyes átalakítása 1 pont* |
| $\frac{9^{x^2} \cdot 9^{-x}}{9^2} = 9^0$ | 1 pont | |
| $9^{x^2-x-2} = 9^0$ | 1 pont | |

| | | |
|---|---|---|
| Az exponenciális függvény monotonitása miatt: $x^2 - x - 2 = 0$ | 1 pont | *Ez az egy pont csak akkor adható, ha a megjegyzést is hozzátette a diák* |
| $x_1 = 2$ <br> $x_2 = -1$ | 1 pont | |
| helyes ellenőrzés | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **8 pont** | |

| **13 / b)** | | |
|---|---|---|
| 2. lépésben az (*x*-*x*) tényezővel osztunk, de 0-val nem lehet osztani, úgyhogy ez a hiba<br><br>vagy<br><br>az utolsó lépésben az *x* tényezővel osztunk, de mivel ez ismeretlen (és akár 0 is lehetne), ez hibás lépés | 2 pont | *Bármelyik hiba megtalálásáért jár a 2 pont* |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| **13 / c)** | | |
|---|---|---|
| 3. lépésben egy negatív számmal osztunk, ami miatt meg kellene hogy forduljon az egyenlőtlenség, de ez nem történik meg, úgyhogy ez a hiba<br><br>vagy<br><br>az utolsó lépésben az *x* tényezővel osztunk, de mivel ez ismeretlen (és akár 0 is lehetne), ez hibás lépés | 2 pont | *Bármelyik hiba megtalálásáért jár a 2 pont* |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| **14 / a)** | | |
|---|---|---|
| az $f(x) = \|x-3\| - 4$ függvényt kell ábrázolni | 1 pont | *Ez a pont arra jár, hogy rájött a diák, hogy abszolutérték függvényt kell ábrázolni.* |
| helyes transzformáció az *x* tengelyen | 1 pont | |
| helyes transzformáció az *y* tengelyen | 1 pont | |
| helyes intervallumon történő ábrázolás | 2 pont | *Ha a megadottnál tágabb intervallumon ábrázolta a függvényt, akkor csak 1 pont adható.* |
| **ÖSSZESEN** | **5 pont** | |

| **14 / b)** | | |
|---|---|---|
| minimum hely: x=3 minimum érték: y= – 4 | 1 pont | |
| maximum hely: x=10 maximum érték: y=3 | 2 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **3 pont** | |

| **14 / c)** | | |
|---|---|---|
| szigorúan monoton nő a függvény a $[3;10]$ intervallumon | 2 pont | *A* $[3;10]$ *bármely zárt részintervalluma elfogadható* |
| szigorúan monoton csökken pl.: $[-1;3]$ intervallumon | 2 pont | *A* $]-2;3]$ *bármely zárt részintervalluma elfogadható* |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| **15 / a)** | | |
|---|---|---|
| <table><tr><td>SZ</td><td>B</td><td>A</td><td>S</td></tr><tr><td>110°</td><td>100°</td><td>70°</td><td>80°</td></tr></table> | 4 pont | *Minden helyes adatért 1-1 pont jár.* |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| **15 / b)** | | |
|---|---|---|
| $\frac{23+29+21+17}{4} = 22{,}5$ | 2 pont | *Ha jó adatokkal számolt, de a végeredmény rossz, akkor 1 pont adható* |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| **15 / c)** | | |
|---|---|---|
| $\frac{10}{29} = 0{,}3448$ azaz kb. 34,5 % | 2 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| **15 / d)** | | |
|---|---|---|
| $\frac{51+61+39+39}{4} = 47{,}5$ | 2 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| **15 / e)** | | |
|---|---|---|
| Ha ugyanannyi aranyérmet szereztünk volna, mint bronzérmet, akkor a pontszámok átlaga éppen kétszerese lenne a megszerzett érmek átlagának. 47,5 viszont nagyobb, mint $2 \cdot 22{,}5 = 45$, azaz aranyéremből szereztünk többet. | 2 pont | *Bármilyen helyes indoklás elfogadható, ha hivatkozik valamilyen módon a b) és d) feladat eredményeire.*<br><br>*Ha a b) és d) feladatokra rossz végeredményt kapott, de azt logikailag jól használta fel, akkor 1 pont adható.* |
| **ÖSSZESEN** | **2 pont** | |

| 16 / a) | | |
|---|---|---|
| $a_1 = 10$<br>d = 3 | 1 pont | |
| $a_{15}$ = 10+(15-1)3 = 52 | 1 pont | |
| $S_{15} = \frac{10+52}{2} \cdot 15 = 465$ | 1 pont | |
| azaz a bevétel:<br>$465 \cdot 2500$ Ft = 1162500 Ft | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| 16 / b) | | |
|---|---|---|
| Legyen az eredeti színpad területe: $T_1$; az átalakított színpad területe $T_2$. Ekkor:<br>$T_2 = 2 \cdot T_1$<br>$R^2\pi = 2 \cdot r^2\pi$<br>$R = \sqrt{2} \cdot r$<br>$R = 2{,}121m$ | 3 pont | *Ha csak a végeredmény hibás, akkor 2 pont adható.* |
| A Pitagorasz-tétel miatt:<br>$a^2 = m^2 + (R-r)^2$<br>$a^2 = 1^2 + 0.621^2$<br>$a^2 = 1.385$<br>$a = 1.176m$ | 3 pont | *Ha csak a végeredmény hibás, akkor 2 pont adható* |
| **ÖSSZESEN** | **6 pont** | |

| 16 / c) | | |
|---|---|---|
| a lefestendő felszín:<br>$A = R^2\pi + (R+r) \cdot a \cdot \pi$<br>$A = 2.121^2\pi + 3{,}621 \cdot 1{,}176 \cdot \pi$<br>$A = 27{,}510m^2$ | 2 pont | |
| $\frac{27{,}510}{4} = 6.877l$ festék kell | 2 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| 16 / d) | | |
|---|---|---|
| a festéshez 6,877 liter festékre van ugyan csak szükségünk, de ehhez összesen 8 litert kell vásárolnunk: $4 \cdot 5000\,\text{Ft} = 20000\text{Ft}$ | 1 pont | |
| összes kiadás: 20000Ft+250000Ft+385000Ft = 655000Ft | 1 pont | |
| 655000 ‹ 1162500, azaz fedezi a költségeket a díszelőadás bevétele | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **3 pont** | |

| 17 / a) | | |
|---|---|---|
| az a figura, amelyikből 3 db van 8 féle lehet | 1 pont | |
| a 3 egyforma figura színét $\binom{4}{3}$ féleképpen választhatjuk ki | 1 pont | |
| az a figura, amelyikből 2 db van már csak 7 féle lehet | 1 pont | |
| a 2 egyforma figura színét pedig már csak $\binom{4}{2}$ féleképpen választhatjuk ki | 1 pont | |
| tehát összesen $8 \cdot \binom{4}{3} \cdot 7 \cdot \binom{4}{2} = 1344$ féleképpen lehetséges a kiválasztás | | |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| **17 / b)** | | |
|---|---|---|
| az a figura, amelyikből 4 db van 8 féle lehet | 1 pont | |
| ha egy figurából 4 db van, az csak úgy lehet, hogy mind a 4 szín szerepel, ez pedig csak 1 féleképpen lehet | 1 pont | |
| az utolsó lap figurája már csak 7 féle lehet | 1 pont | |
| az utolsó lap színe mindegy, hogy milyen, azaz 4 féle lehet | 1 pont | |
| tehát összesen $8 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 4 = 224$ féleképpen lehetséges a kiválasztás | | |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| **17 / c)** | | |
|---|---|---|
| összes eset $\binom{32}{5} = 201376$ | 1 pont | |
| P(full) = $\frac{1344}{201376} \cong 0{,}00667$ | 1 pont | |
| P(póker) = $\frac{224}{201376} \cong 0{,}00111$ | 1 pont | |
| a póker az „erősebb” lap, hiszen az kisebb valószínűséggel fordul elő | 2 pont | *Ha kiderül, hogy felismerte a gyakoriság és az „erősség” közti fordított arányosságot, akkor megadható a 2 pont* |
| **ÖSSZESEN** | **5 pont** | |

| 17 / d) | | |
|---|---|---|
| $1000000 \cdot \left(1+\frac{9}{100}\right)^n = 2000000$<br>$1{,}09^n = 2$<br>$\log 1{,}09^n = \log 2$<br>$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}09} = 8.04$ | 3 pont | *A helyes egyenlet felírásáért, a logaritmus bevezetéséért és az n helyes meghatározásáért jár 1-1 pont* |
| Tehát 9 évig kell bent hagynia Zsuzsának a pénzét a Bankban | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| 18 / a) | | |
|---|---|---|
| $\frac{b_1+c_1}{2} = -\frac{1}{2}$<br>$\frac{c_1+7}{2} = \frac{5}{2}$ | 1 pont | |
| innen: $c_1 = -2$, $b_1 = 1$ | 1 pont | |
| $\frac{b_2+c_2}{2} = \frac{5}{2}$<br>$\frac{c_2-5}{2} = -\frac{7}{2}$ | 1 pont | |
| innen: $c_2 = -2$, $b_2 = 7$ | 1 pont | |
| azaz $B(1;7)$, $C(-2;-2)$ | | |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| **18 / b)** | | |
|---|---|---|
| $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{180}$ <br> $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{90}$ <br> $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{90}$ | 2 pont | |
| $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, tehát egyenlőszárú a háromszög | 1 pont | |
| $\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\right)^2 + \left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\right)^2 = \left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\right)^2$, tehát a Pitagorasz-tétel megfordítása értelmében derékszögű a háromszög | 2 pont | *Ha nem hivatkozik a Pitagorasz-tétel megfordítására, akkor csak 1 pont adható* |
| **ÖSSZESEN** | **5 pont** | |

| **18 / c)** | | |
|---|---|---|
| *1. megoldás* | | |
| a Thalesz-tétel megfordítása miatt a háromszög köré írható köre az $F_1$ lesz | 1 pont | |
| $F_1(4;1)$ | 1 pont | |
| $r = \left\|\overrightarrow{F_1C}\right\| = \sqrt{45}$ | 1 pont | *Bármilyen módszerrel kiszámított jó eredményért jár az 1 pont* |
| a keresett kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 45$ | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| *2. megoldás* | | |
|---|---|---|
| 2 oldalfelező egyenletének helyes felírása | 1 pont | |
| a kapott egyenletrendszer helyes megoldása | 1 pont | |
| $r = \left\|\overrightarrow{F_1C}\right\| = \sqrt{45}$ | 1 pont | *Bármilyen módszerrel kiszámított jó eredményért jár az 1 pont* |
| a keresett kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 45$ | 1 pont | |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| **18 / d)** | | |
|---|---|---|
| *1. megoldás* | | |
| a két háromszög hasonló, mert megfelelő oldalaik aránya egyenlő | 2 pont | *Ha a hasonlóság nincs indokolva, akkor csak 1 pont adható.* |
| oldalak aránya: 1:2 | 1 pont | |
| területek aránya: 1:4 | 1 pont | |
| tehát $T_{F_1BF_2}$ területe negyed része $T_{ABC}$ területének | | |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

| *2. megoldás* | | |
|---|---|---|
| $T_{ABC} = \frac{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BC}\rvert}{2} = 45$ | 1 pont | |
| $T_{F_1BF_2} = \frac{\lvert\overrightarrow{BF_2}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{F_1F_2}\rvert}{2} = 11{,}25$ | 2 pont | |
| $T_{ABC} : T_{F_1BF_2} = 1:4$ | 1pont | |
| **ÖSSZESEN** | **4 pont** | |

# KÉRDŐÍV

## A PRÓBAÉRETTSÉGI I. RÉSZÉNEK FELADATAIHOZ

1) Értékeld a próbaérettségi I. részében megoldott feladatok nehézségi fokát (1: nehéz volt, 2: közepes nehézségű volt, 3: könnyű volt)! Ha nehéznek találtad a feladatot, kérlek pár szóval indokold, hogy miért ezt választottad (pl.: „nem tanultunk ilyesmit”, „régen tanultuk ezt”, „nem tudtam értelmezni a feladat szövegét”, „nem tudtam, mit kell számolni”, stb...)!

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **1. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **2. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **3. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **4. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **5. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **6. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **7. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **8. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **9. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **10. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **11. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **12. feladat** | | | |
| indoklás | | | |

2) Karikázd be a szerinted helytálló állítások betűjelét! (Többet is megjelölhetsz)

Az eddig általad megoldott érettségi feladatsorokhoz képest ebben az I. részben a feladatok:

a) életszerűbbek voltak

b) nagyon hasonlóak voltak

c) nehezebben értelmezhetőek voltak

d) jobban tetszettek

e) kevésbé tetszettek

3) Legjobban tetsző feladat sorszáma: ............

4) Legkevésbé tetsző feladat sorszáma: ............

5) Karikázd be, hogy összességében hányasra értékelnéd a feladatsornak ezt a részét!

1 2 3 4 5

6) Egyéb megjegyzés(ek):

........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................

# KÉRDŐÍV

## A PRÓBAÉRETTSÉGI II. RÉSZÉNEK FELADATAIHOZ

1) Értékeld a próbaérettségi II. részében megoldott feladatok nehézségi fokát (1: nehéz volt, 2: közepes nehézségű volt, 3: könnyű volt)! Ha nehéznek találtad a feladatot, kérlek pár szóval indokold, hogy miért ezt választottad (pl.: „nem tanultunk ilyesmit”, „régen tanultuk ezt”, „nem tudtam értelmezni a feladat szövegét”, „nem tudtam, mit kell számolni”, stb...)!

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **13. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **14. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **15. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **16. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **17. feladat** | | | |
| indoklás | | | |
| **18. feladat** | | | |
| indoklás | | | |

2) Karikázd be a szerinted helytálló állítások betűjelét! (Többet is megjelölhetsz)

Az eddig általad megoldott érettségi feladatsorokhoz képest ebben a II. részben a feladatok:

a. életszerűbbek voltak
b. nagyon hasonlóak voltak
c. nehezebben értelmezhetőek voltak
d. jobban tetszettek
e. kevésbé tetszettek

3) Legjobban tetsző feladat sorszáma: ............

4) Legkevésbé tetsző feladat sorszáma: ............

5) Karikázd be, hogy összességében hányasra értékelnéd a feladatsornak ezt a részét!

1 2 3 4 5

6) Egyéb megjegyzés(ek):

.............................................................................................................................................
.............................................................................................................................................
.............................................................................................................................................
.............................................................................................................................................
.............................................................................................................................................
.............................................................................................................................................
.............................................................................................................................................
.............................................................................................................................................
.............................................................................................................................................

# NÉHÁNY SZEMPONT AZ ÉRTÉKELÉSHEZ:

1. Mennyire találta a feladatokat ötletesnek / életszerűnek?

2. Mennyire voltak a feladatok jól megfogalmazva / a kérdések egyértelműen feltéve?

3. Mennyire volt nehéz a feladatsor (az osztálya korábbi teljesítményeihez viszonyítva)? Ha rosszabb teljesítményt tapasztalt, annak Ön szerint mi az oka?

4. Mennyire fedte le a feladatsor a gimnáziumi 4 éves tananyagot?

5. Mi hiányzott a feladatsorból?

6. A javítási-értékelési útmutató mennyiben tért el az Ön javítási módszereitől? Mit értékelt volna másképp?

4. **Egyéb megjegyzés(ek):**

A feladatok túlságosan összetettek voltak és az idő nem [illegible] gyorsan [illegible].

6. **Egyéb megjegyzés(ek):**

Összességében nagyon munkaigényesek a feladatok. Sok időt igényel egy-egy feladat megoldása.

4. Egyéb megjegyzés(ek):

Ennél egyértelműbb feladatok kellenének a második részbe, ahol értelmesen lehetett a matematikai tudást számítani.

6. Egyéb megjegyzés(ek):

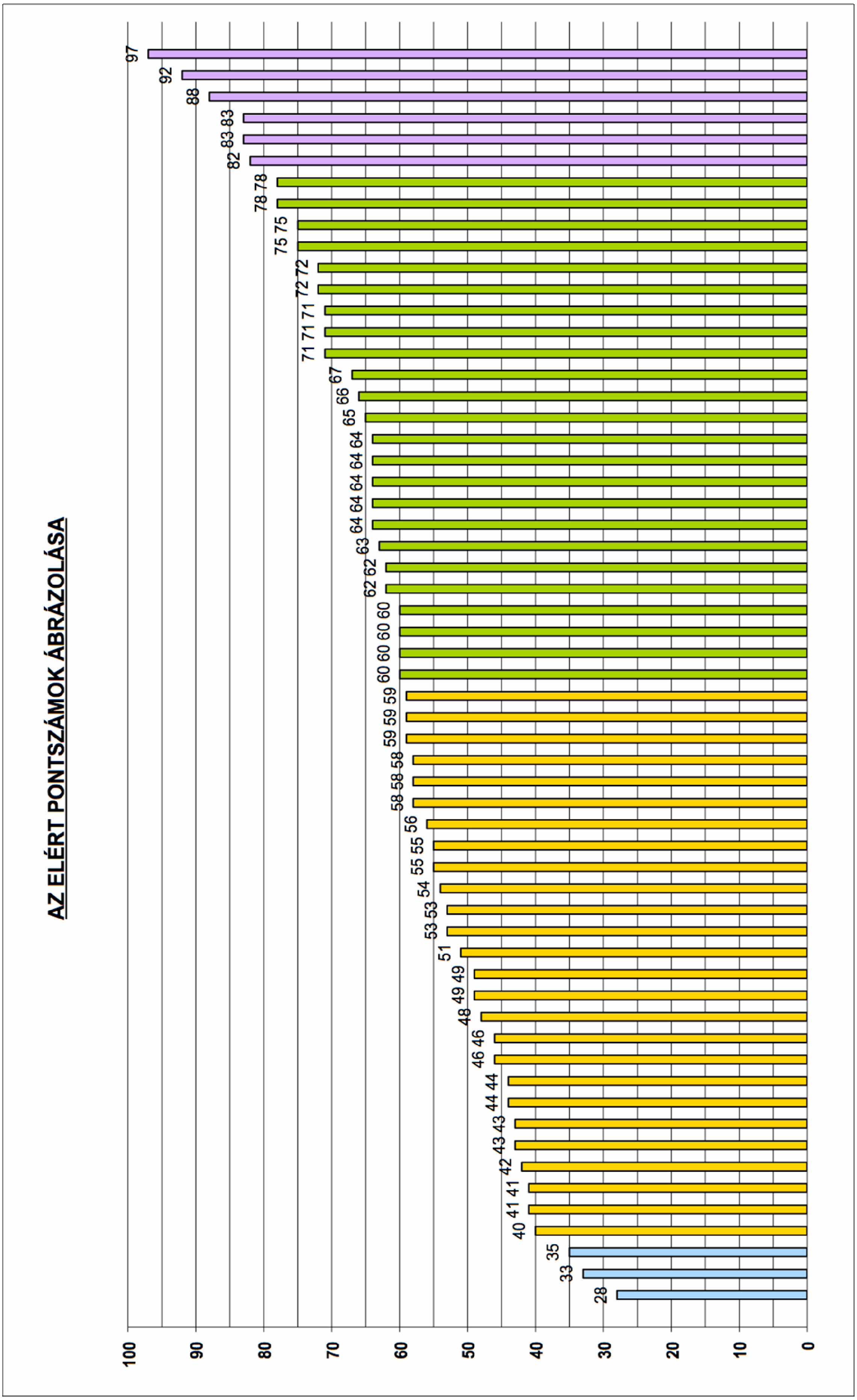
Az eddigi feladatsorokhoz képest ezt nehezebbnek találtam, ezért 45 perc alatt csak kevésbé tudtam befejezni. De utólag átbeszélve, végiggondolva nem volt olyan nehéz, mint amilyennek tűnt.

4. Egyéb megjegyzés(ek):

A feladatsor első része (rövid rész) meglepően sok kidolgozást igényelt. Magukban a feladatok nem voltak nehezek, de időben a 45 perc minimum volt rá elég. Az általam eddig megoldott érettségi tesztekben nem találkoztam olyannal, hogy ennyi feladatnál indokolni kellett volna rövid részben. Összességében nekem tetszett a feladatsor :)

4. Egyéb megjegyzés(ek):

Volt egy pár beugratós feladat, de csak jelentéktelen részletekben voltak. Élveztem a feladatsor kitöltését, de kellett volna egy pár gondolkodtatóbb feladat is.


AZ ELÉRT PONTSZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA
97
92
88
83 83
82
78 78
75 75
72 72
71 71 71
67
66
65
64 64 64 64 64
63
62 62
60 60 60 60
59 59 59
58 58 58
56
55 55
54
53 53
51
49 49
48
46 46
44 44
43 43
42
41 41
40
35
33
28
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0

**A 16-18. feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon lévő üres négyzetbe!**

**17.** Egy 32 lapos magyar kártyacsomagban 4-féle színű (piros, zöld, makk, tök) és 8-féle figurájú (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász) lap van. Hányféleképpen lehet kiválasztani 5 lapot úgy, hogy a sorrend nem számít, és:

a) egyik figurából három, egy másikból két darab van (full)?

b) egyik figurából 4 darab van (póker)?

c) A a) és b) részekben kapott eredmények felhasználásával számolja ki mennyi annak a valószínűsége, hogy valakinek fullja, illetve hogy pókere legyen! Ez alapján mit mondana, a full vagy a póker az „erősebb" lap? Válaszát indokolja!

d) Zsuzsa a legutóbbi póker bajnokságon 1 000 000 Ft-ot nyert, amit azonnal le is kötött a Bankban évi 9%-os kamatra. Hány évig kell bent hagynia a pénzét (változatlan kamatláb mellett) a Bankban, hogy megkétszereződjön a kezdeti egymilliós összeg?

| | | |
|---|---|---|
| a) | 4 pont | 4 |
| b) | 4 pont | 4 |
| c) | 5 pont | 4 |
| d) | 4 pont | 4 |
| Ö: | 17 pont | 16 |

a) $8 \cdot \binom{4}{3} \cdot 7 \binom{4}{2} = 1344$

3db (8 figura) 3 szín 2db 2 szín (7 figura)

1344 féleképpen lehet fullunk

b) $8 \cdot 28 = 224$ 224 féleképpen lehet pókerünk

8 figura maradék lapok

c) full: kedvező 1344 esély: $\frac{1344}{201376}$

összes: $\binom{32}{5} = 201376$

póker kedvező 224 esély: $\frac{224}{201376}$

összes: 201376

$\frac{1344}{224} = 6$

~~Ann~~ A full esélye hatszorosa a pókerének

Melyik az erősebb? tudoklás

d) $1000000 \cdot 1{,}09^x = 2000000$ ~~1,098~~

$1{,}09^x = 2$

~~$\log 1{,}09^x = \log$~~

$\lg 1{,}09^x = \lg 2$

$x \lg 1{,}09 = \lg 2$

$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}09}$

$x \approx 8{,}04$ Ell: $1{,}09^{8{,}04} = 1{,}999$

Hogy megkétszereződjön a kezdeti összeg 9 évig kell várakoznia a pénzzel