ELTE

Természettudományi Kar

Matematika Intézet

Szakdolgozat

Oktatási eszközök, játékok

Készítette: Ruzsányi Orsolya

Matematika BSc

Témavezető: Fried Katalin

Főiskolai docens

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Budapest, 2009

Tartalomjegyzék

Bevezetés:

Napjainkban egyre elterjedtebben használnak demonstrációs eszközöket, játékokat az oktatásban. Ez a matematika nehéz világába egy kis játékot tud belecsempészni. Szemléletesebbé, látványosabbá teheti egy-egy témakör bemutatását akár általános iskolában, akár középiskolában is.

Két nagy témakörre bontottam fel ezeket a munkám során. Az első csoportba tartozók inkább kisebb korban alkalmazhatóak, és főleg játékok találhatóak meg benne. Ezek fejlesztik a gyerekek logikai készségét, segítséget nyújthatnak egy-egy témakör bevezetése során, illetve a műveletek gyakorlásának „unalmasságát” kissé oldani tudják. A második csoportba számítógépes programokkal foglalkoztam. A teljesség igénye nélkül három darab programot emeltem ki, amelyek számomra is ismertek voltak. A GeoGebra, a Winplot és a Maple programot. Ezek közül az első kettő ingyenesen letölthető program. Kezelésüket egy gyerek is könnyedén meg tudja tanulni és segítségére lehet a matematika feladatok megoldása során. A Maple-nek nem létezik ingyenes verziója, és ennek kezelésének elsajátításához már több ügyesség szükségeltetik, inkább a pedagógus számára nyújthat segítséget.

1.Játékok:

Elsőben és másodikban ismerkednek a gyerekek a természetes számok összeadásával illetve kivonásával, ehhez nyújthat segítséget játékos formában az abakusz. A szorobán hasonló, japán eredetű számolóeszköz.

Második osztályban az eddig ismert műveletek kiegészülnek a szorzással és az osztással, amelyek gyakorlásához nyújt segítséget ez a tábla.

Mindkét eszköz használatát el tudom képzelni a matematika óra keretein belül is, persze otthoni gyakorláshoz is kitűnően használható. Az órán akár vetélkedőt is szervezhetünk a gyerekek között, miközben a szorzás, osztás, kivonás és összeadás műveletét gyakoroltatjuk velük. Kisebb csoportokra (kb. 4 fős) osztanám a társaságot, és együttes munkával kellene a feladatokat megoldani. A legjobban teljesítő csoport számára kisebb jutalmat tűzném ki.

A következő nagy témakör, ahol a számkört bővítjük tovább, a törtszámok témaköre. Ehhez már a több évtizede elterjedt és használt színes rúd készletet lehet jól hasznosítani. Itt a gyerekek megismerkedhetnek a törtszámokkal, kirakhatják az egységnek tekintett hossz felét, harmadát, negyedét stb. Ezáltal egy szemléletesebb képet kaphatnak a törtes kifejezésekről.

A számoláson kívül már alsó tagozatban is előtérbe kerül a geometria, síkbeli alakzatokkal is és térbeli testekkel is megismerkednek a gyerekek, ezek szemléltetéséhez nyújt segítséget ez a készlet.

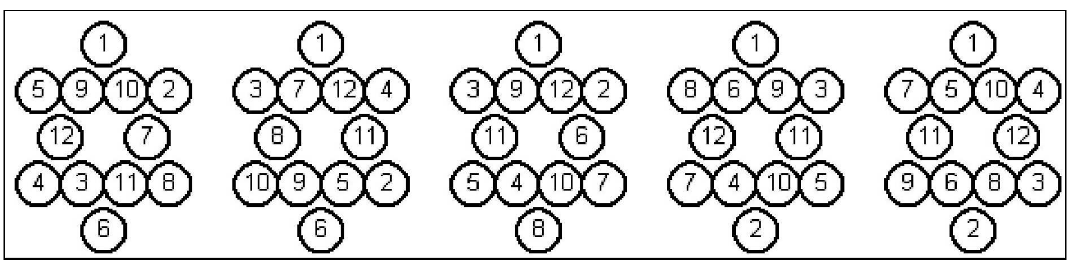
Ma már a játékok között nagyon sok logikai játék található meg, ezek közül választottam ki pár darabot, amelyek fejlesztik a gyerekek probléma megoldását.

Már többször találkozhatunk ezzel az eszközzel feladat formájában (Hanoi- torony), most a gyerekek akár meg is valósíthatják az elgondolásukat a gyakorlatban. A cél az, hogy egy pálcikán csökkenő átmérőjű sorba rendezett korongokat átpakoljuk egy másik pálcikára. Mindeközben használhatunk még egy pálcikát, de (1) minden korongnak mindig pálcikán kell lennie, (2) egy korong fölé csak nála kisebb átmérőjű korong kerülhet, (3) egyszerre csak egy korongot mozgathatunk.

A következő játékban bábukat kell mozgatni. El kell helyezni a sínre a bábukat az ábrán látható módon (azonos színűek egy azon oldalra kerüljenek, és középen kimarad egy lyuk). A cél az, hogy a színeket megcseréljük úgy, hogy itt is csak egyet léphetünk (vagy egyet lépünk, vagy egy bábut átlépve ugrunk), és csak egy bábuval előre (vagyis az ábrán a pirossal balra, a sárgával jobbra). Visszafelé nem szabad lépni.

Ennek a játéknak a neve a bűvös 26-os. Úgy kell rendezni a számokat a csillag hat oldalán, hogy a számok összege a csillag belsejében (ahol négy karika van egymás mellett) 26 legyen, és a számok összege a csillag összes külső vonalán (hegyén) 26 legyen.

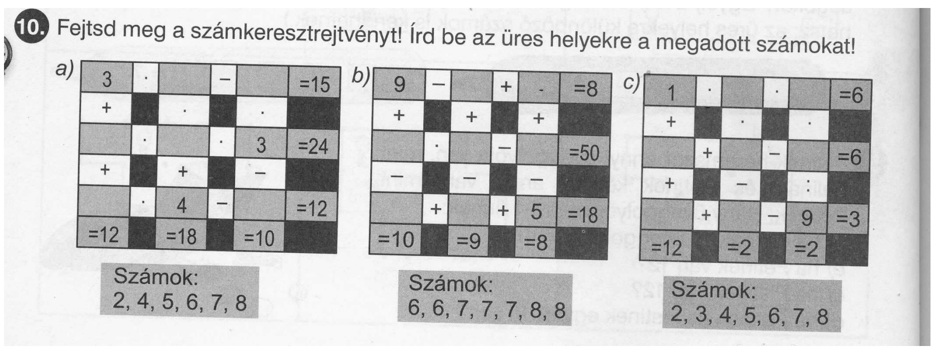
Összesen hét különböző megoldása létezik a feladatnak. Ezek közül néhány az ábrákon látható:



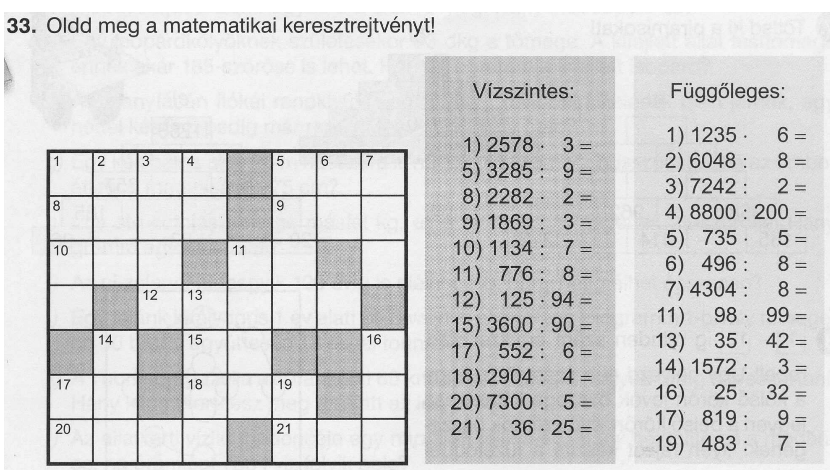
Ilyen szabályt követő feladattal a tankönyvekben is találkozhatunk (lásd irodalomjegyzékben 1.) bűvös négyzet néven. Ott a számok összegének kell minden sorban, illetve oszlopban és átlóban azonosnak lenni. Ennek egy változatával találkozhatunk például az interneten (lásd irodalomjegyzékben 6.), ahol a következő szabály szerint kell kitölteni a négyzetet: A jobb alsó sarokban lévő egész számokat kell beleírni a négyzetbe úgy, hogy az egy sorban illetve oszlopban lévő számok összege ugyanannyi legyen, mint a sor, illetve oszlop végén lévő szám. Például: (A megadott számokat fekete színnel jelöltem.)

2	**9**	**11**	**5**	**27**
3	**12**	**6**	**1**	**22**
4	**7**	**8**	**10**	**29**
9	**28**	**25**	**16**	**1-12**

Az egyik tankönyvében (lásd irodalomjegyzékben 1.) találtam még ezt a két feladatot, amelyek szintén a számolás gyakorlását tűzik ki célul játékos formában:



Ez a feladat az előzőhöz képest azzal bővül, hogy itt a műveletek is változnak egy-egy sorban.



Ezekhez a típusú feladatokhoz nagyon hasonló, a mostanában oly népszerű sudoku is, amely szintén fejleszti a logikus gondolkodást. Például:

	6		**9**				**7**	
8				**3**		**2**		**5**
		1						**3**
7			**8**			**4**		
			1		**6**			
		5			**9**			**1**
4						**8**		
6		**3**		**1**				**4**
	9				**2**		**5**	

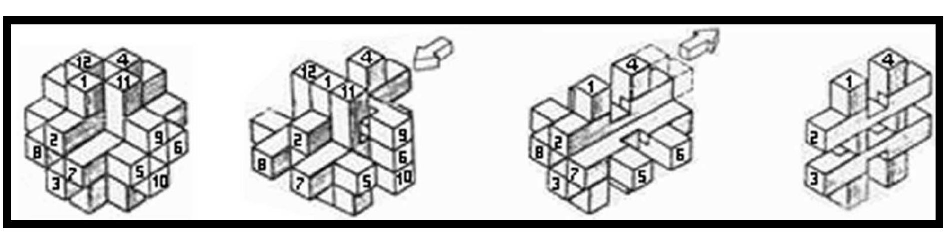
A térlátás fejlesztésére nagyon jól használhatóak az alább ismertetett játékok. Ezek később, a testek térfogat- és felszínszámításakor igen hasznosak lesznek, mert a térbeli alakzatok elképzelésében nyújtanak majd segítséget.

Kereszt kocka:

Próbáljuk szétszedni a 9db fa alkatrészt, aztán próbáljuk összerakni újra eredeti állapotába!

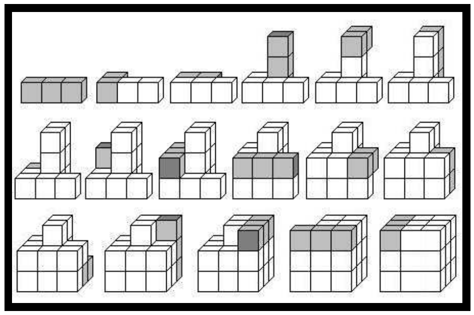
3D térbeli kocka:

Ez az egymásba rakható kirakós játék 12 db-ból épül fel. Szedjük szét és rakjuk össze!



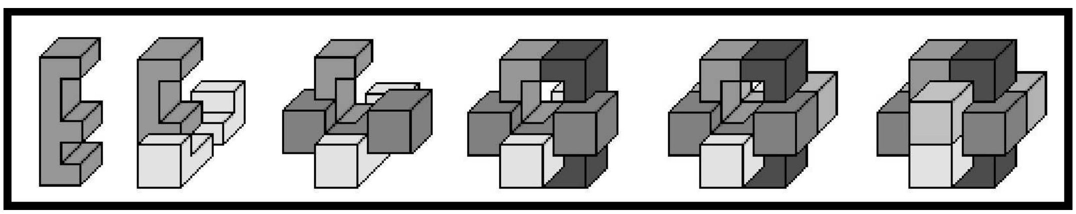
Kígyókoca:

A nagy kocka 27db kis kockából épül fel. Nyissuk szét a kockákat kígyóformára, aztán próbáljuk visszarakni eredeti állapotába.



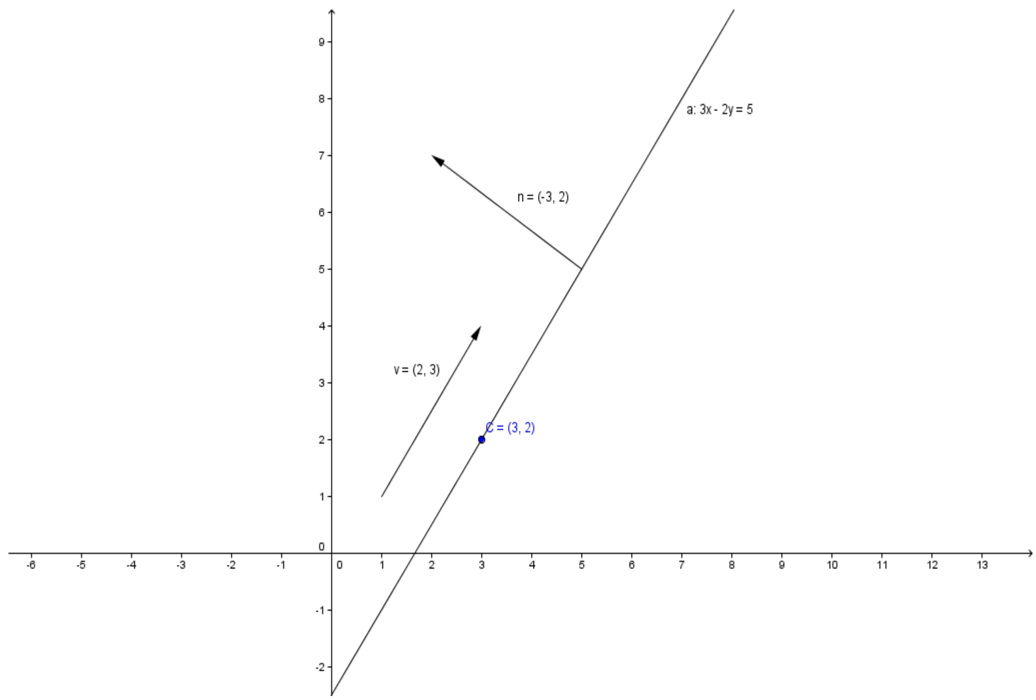
6 részes kereszt:

Próbáljuk szétszedni a 6db fa alkatrészt, aztán próbáljuk összerakni újra eredeti állapotába.

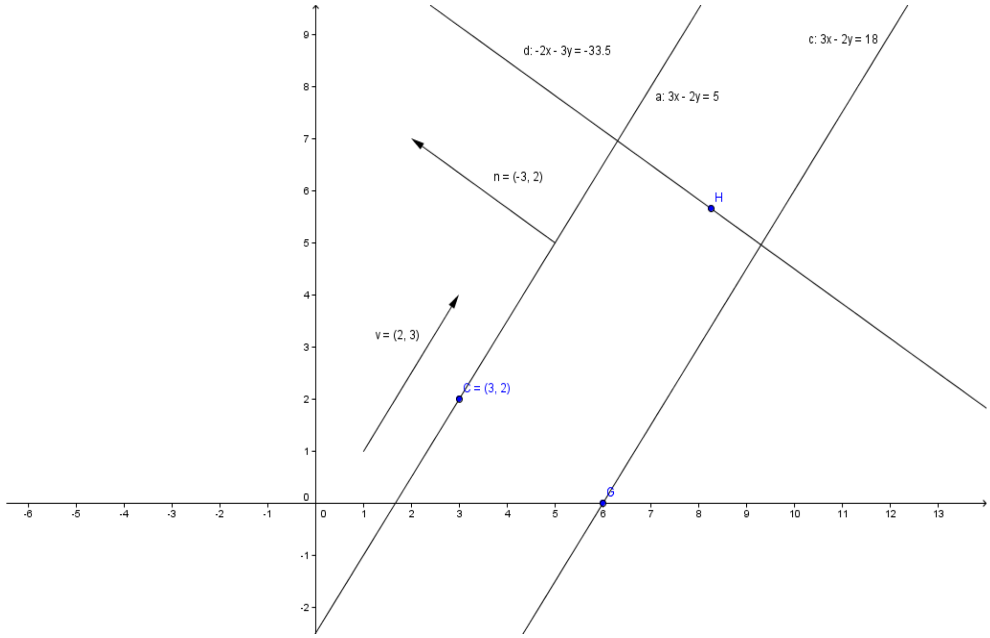


2.GeoGebra:

A program a **koordináta-geometria** területén nagyon jól alkalmazható. Szemléltethető vele a normálvektor, illetve az irányvektor, egyenesek egyenletének felírásában nyújthat segítséget, illetve körökkel kapcsolatos feladatok is demonstrálhatóak vele.



Az ábráról leolvasható az *a* egyenes egyenlete, ami átmegy a *C* (3; 2) ponton, párhuzamos a **v** vektorral, és merőleges az **n** vektorra. Szerkeszthetünk a program segítségével az egyenessel párhuzamos egyenest (*c* egyenes), amely adott ponton megy át (*G* pont) , vagy akár rá merőlegest is (*d* egyenes), ami adott ponton megy át (*H* pont).



Az ábrával szemléltethető, hogy az *a* egyenes normálvektora és az irányvektora milyen helyzetű a vele párhuzamos, illetve rá merőleges egyenessel.

Ennél összetettebb feladat is megoldható vele, például a következő:

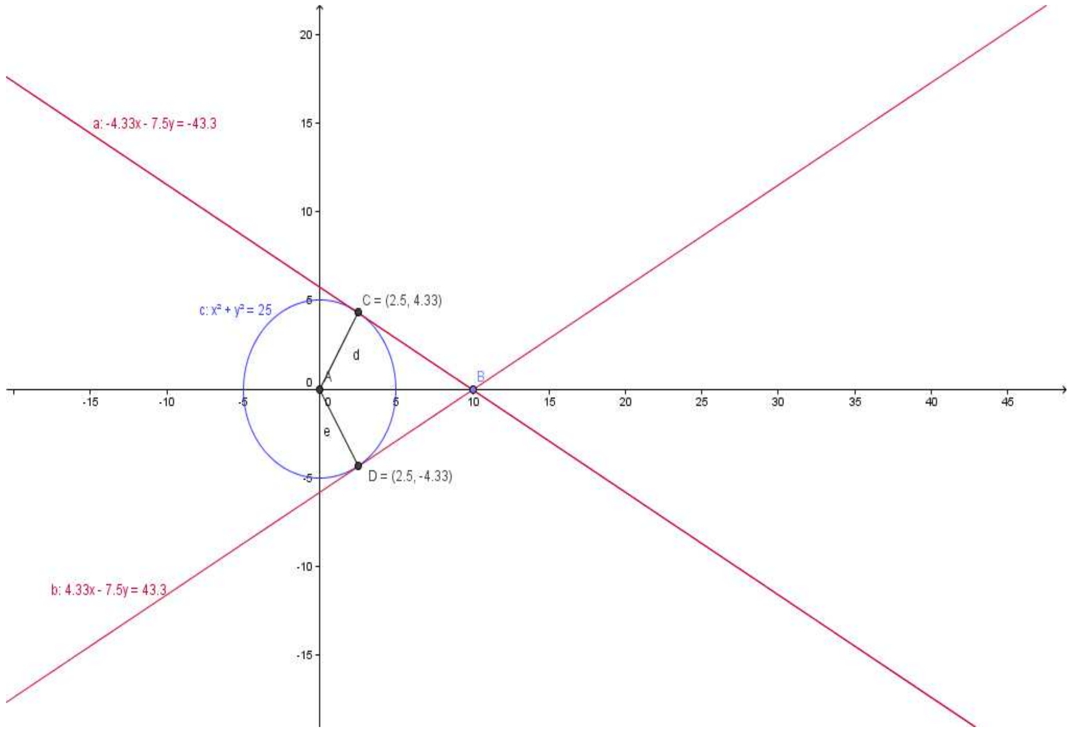
1. feladat: (Nemzeti Tankönyvkiadó: Geometriai feladatok gyűjteménye II./ 878. feladat a;)

Írjuk fel a (10; 0) pontból az $x^2 + y^2 = 25$ körhöz húzható érintők egyenletét.

Megoldás: (GeoGebra segítségével)

Első lépésben leolvassuk a kör egyenletéből a kör középpontját és a sugarát.

Létrehozzuk a program segítségével a kört, majd pedig a (10;0) pontot bejelöljük a koordináta-rendszerben. Ebből a pontból érintőt szerkesztetünk a programmal a körhöz. Az érintők egyenletét is megjeleníthetjük az ábrán, illetve az érintési pontok koordinátáit is.



A kapott két egyenlet:

a: $-4{,}33x - 7{,}5y = -43{,}3$ és

b: $4{,}33x - 7{,}5y = 43{,}3$.

<u>Megoldás: (számolással)</u>

Vegyük az *AB* szakasz felezőpontját. Majd pedig ezzel a ponttal mint középponttal és a felezési pont és az *A* távolságával mint sugárral írjunk fel egy köregyenletet. Ez egy Thalész-kör lesz *AB*-re, mint átmérőre.

$F_{AB} = ((0 + 10)/2; (0 + 0)/2) = (5; 0)$ ez lesz a Thalész-kör középpontja.

Sugár hossza pedig: $((5 - 0)^2 + (0 - 0)^2)^{1/2} = 5$.

A kör egyenlete: $(x - 5)^2 + y^2 = 25$

Keressük meg a két kör metszéspontját, mivel ez a két pont lesz az érintési pont (Thalész-tétel miatt). Vegyük a két egyenletből álló egyenletrendszert:

$x^2 + y^2 = 25$

$(x - 5)^2 + y^2 = 25$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$-10x + 25 = 0$$
$$25 = 10x$$
$$2{,}5 = x$$

Helyettesítsünk vissza:

$$2{,}5^2 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 18{,}75$$
$$y_1 = 4{,}33$$
$$y_2 = -\,4{,}33$$

Vagyis a két metszéspont: M_1 (2,5; 4,33) és M_2 (2,5; – 4,33).
Ebből már felírható a két érintő egyenlete, mivel ismerünk két pontot, ami illeszkedik az egyenesre:

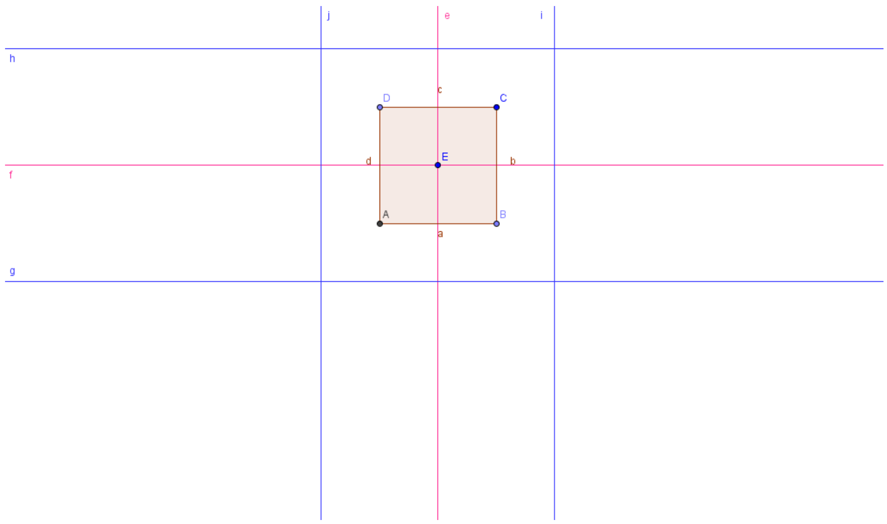
$4{,}33x + 7{,}5y = 43{,}3$ és
$-4{,}33x + 7{,}5y = -43{,}3$ a kapott két egyenletet. Ami megfelel a program által kiírt két egyenes egyenletének.

Tanulságként levonható, hogy a program által kapott megoldás sokkal gyorsabb, mint a „kézzel" való kiszámolása a feladatnak. Egy diák számára jól jöhet ellenőrzésként a program segítsége, de nem helyettesíti a feladat tényleges megoldását. A kézi megoldás előnye még az, hogy közben jó pár geometriából ismert dolgot át kell gondolnia a feladatmegoldónak, ahhoz hogy fel tudja írni a két egyenes egyenletét, és így gondolkodásra serkenti az illetőt. A programmal való megoldás esetén még nem kerülnek előtérbe a feladat mögött megbúvó tételek.
(Thalész- tétel, az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, magának az érintőnek a szerkesztési menete)

Nem csak koordináta-geometria feladat megoldására alkalmas a program, megoldhatunk sík **geometria**i feladatokat is vele, a tengelyek eltüntetése mellett.
Például tekintsük a következő geometriai példát:

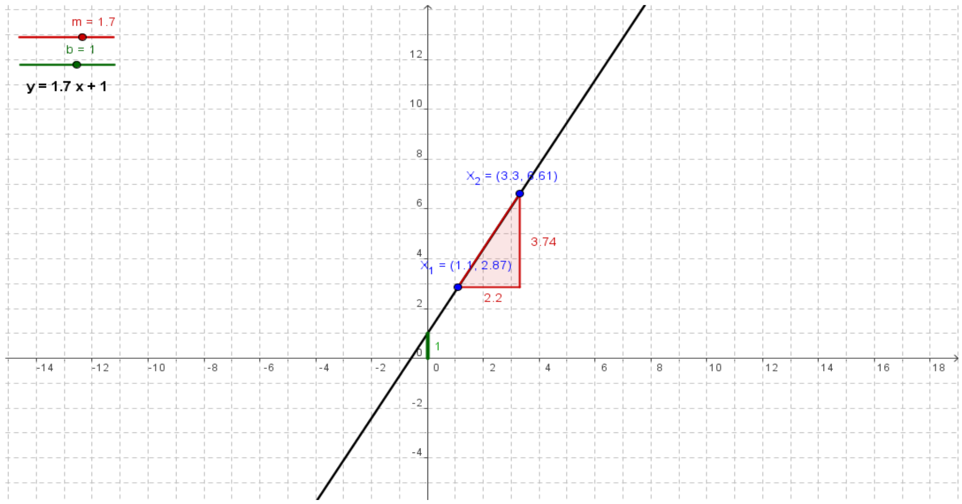
2. feladat: (Nemzeti Tankönyvkiadó: Geometriai feladatok gyűjteménye I./ 205. feladat)

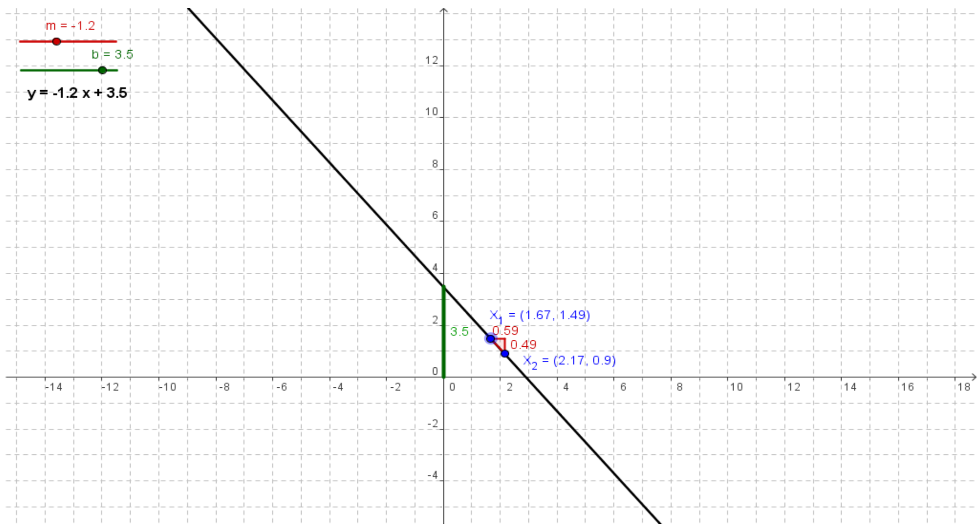
Határozzuk meg a következő pont(ok) mértani helyét: Egy 5 cm oldalú négyzet minden oldal egyenesétől 2,5 cm-re lévő pontok.



A feladat megoldása egyetlen pontot eredményez, mégpedig az *E* pontot. Az ábrán kék színnel jelöltem a négyzet oldalától kifelé 2,5 cm távolságra lévő pontokat, és rózsaszínnel pedig a négyzet oldalától befelé 2,5 cm-re lévő pontokat. A befelé rajzolt egyenesek közül kettő-kettő egy vonalba esik, ezért láthatunk az ábrán csak két rózsaszín egyenest. A megoldást a rózsaszínű egyenesek metszéspontja adja, ugyanis ezen a ponton mind a négy oldaltól 2,5 cm-re lévő egyenes át megy. A program lehetőséget ad arra, hogy egy úgynevezett csúszkát elhelyezzünk a képen, és ennek segítségével szemléltetni lehet a gyerekek számára, hogy milyen adatok esetén létezik a feladatnak megoldása, anélkül hogy újabb ábrát kellene szerkesztenünk.

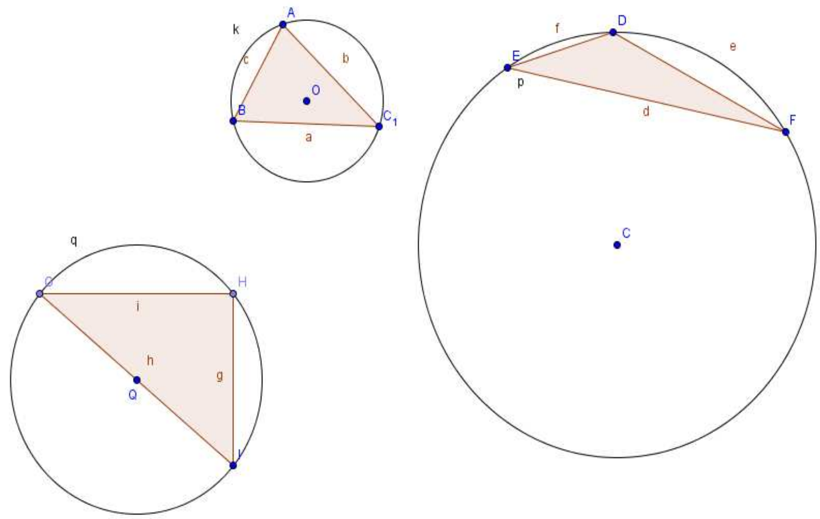
Ennek az alkalmazása látható a következő két egyenesnél (GeoGebra honlapján található példa lásd irodalomjegyzékben 3.):





A két ábra eltérését a csúszkák mozgatása okozza, aminek segítségével az egyenes meredekségét illetve az *y*-tengellyel való metszéspontját tudom változtatni egy bizonyos határon belül.

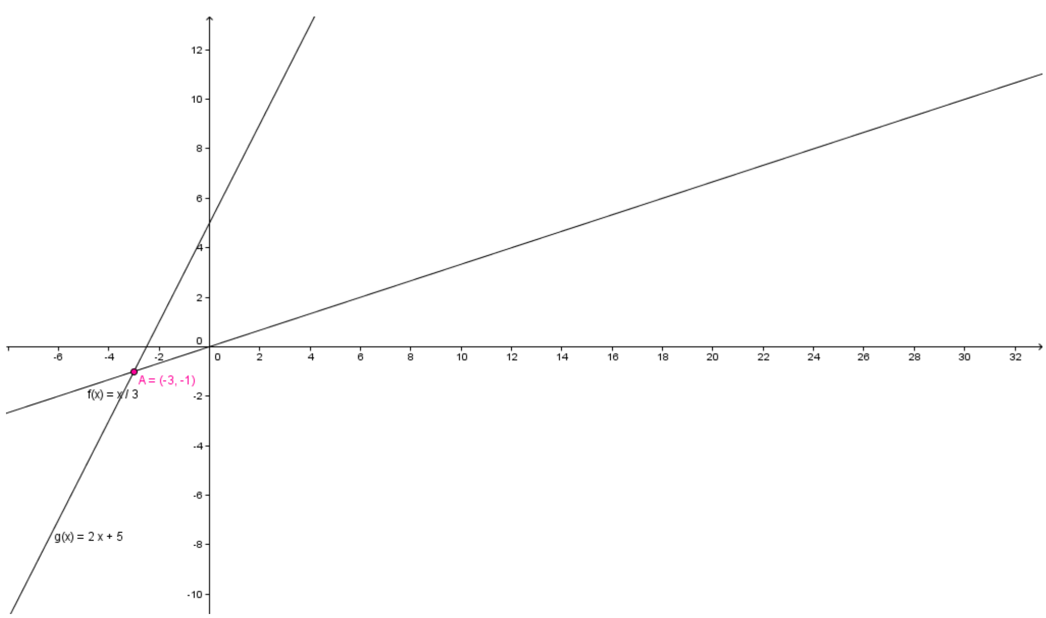
Ez a funkciója jól jöhet geometria példák szemléltetésekor, mivel nem kell minden egyes esetben újraszerkeszteni az adott alakzatot, hanem ennek segítségével demonstrálni lehet a különböző eltérő megoldásokat különböző adatok esetén.
Például háromszög köré írható kör középpontjának mértani helye hogyan változik hegyes-, tompa-, illetve derékszögű háromszög esetén:



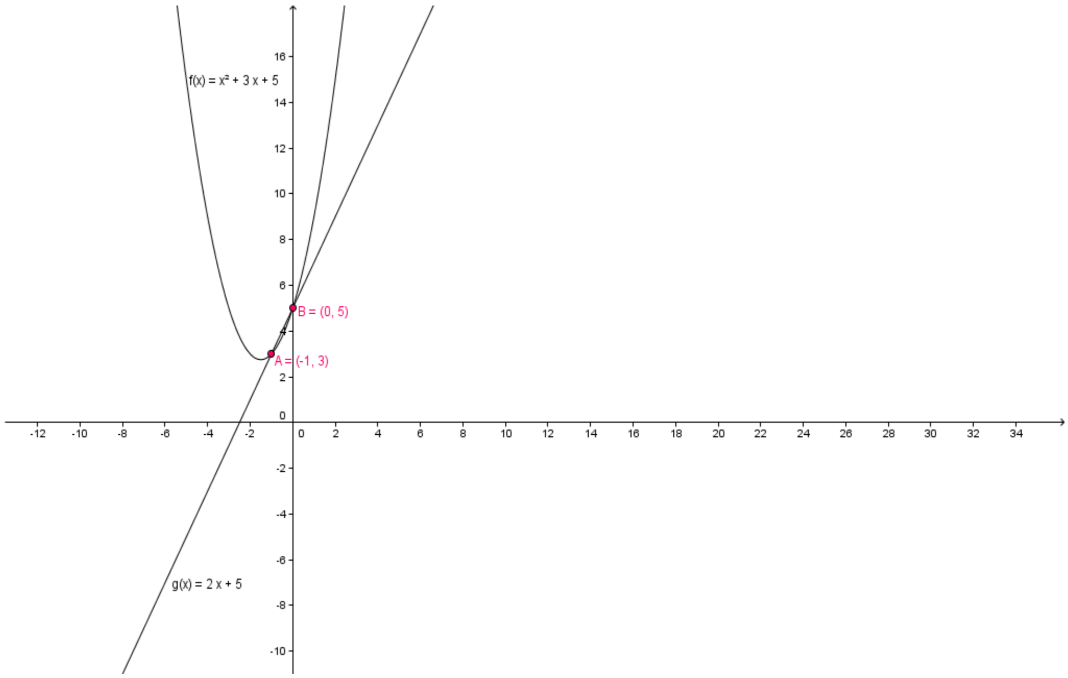
Egyenletek grafikus megoldására is használhatjuk.

3. feladat: Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

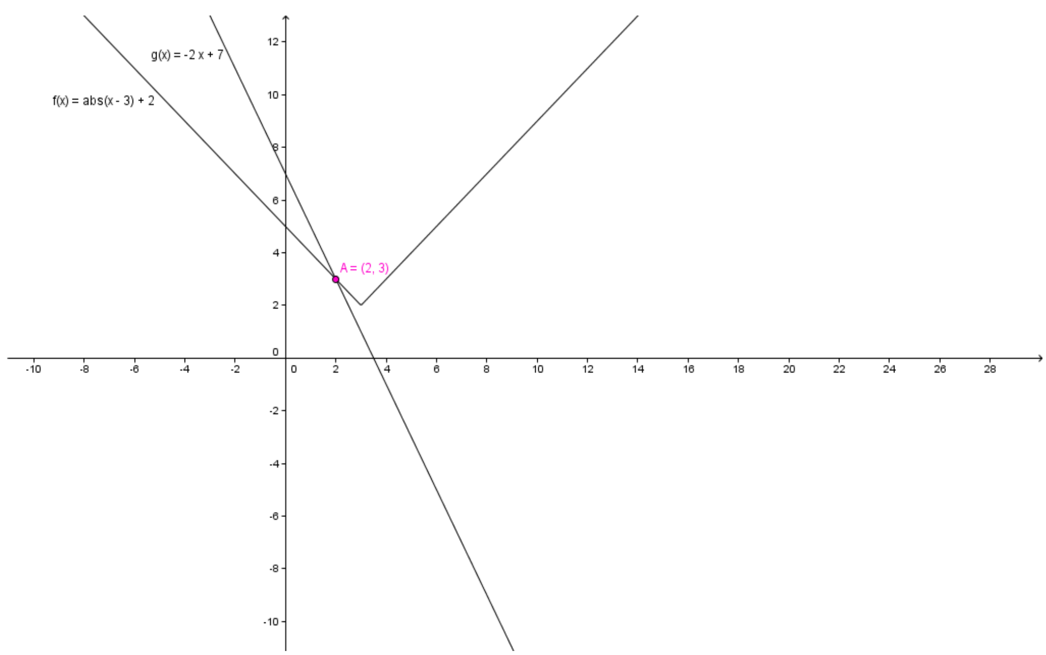
$$a:\ \frac{x}{3} = 2x + 5$$



b: $x^2 + 3x + 5 = 2x + 5$



c: $/x – 3/ + 2 = –2x + 7$



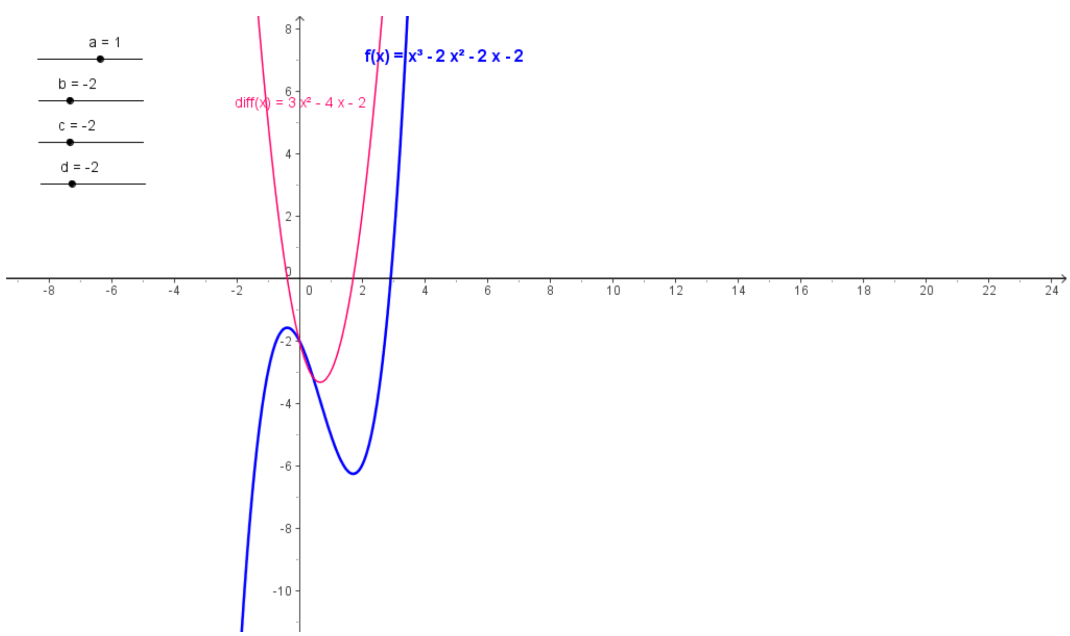
Az egyenletet megoldásait leolvashatjuk az ábráról. Akár ennél bonyolultabb függvényeket is megadhatunk (logaritmusfüggvényt, trigonometrikus függvényt stb.).

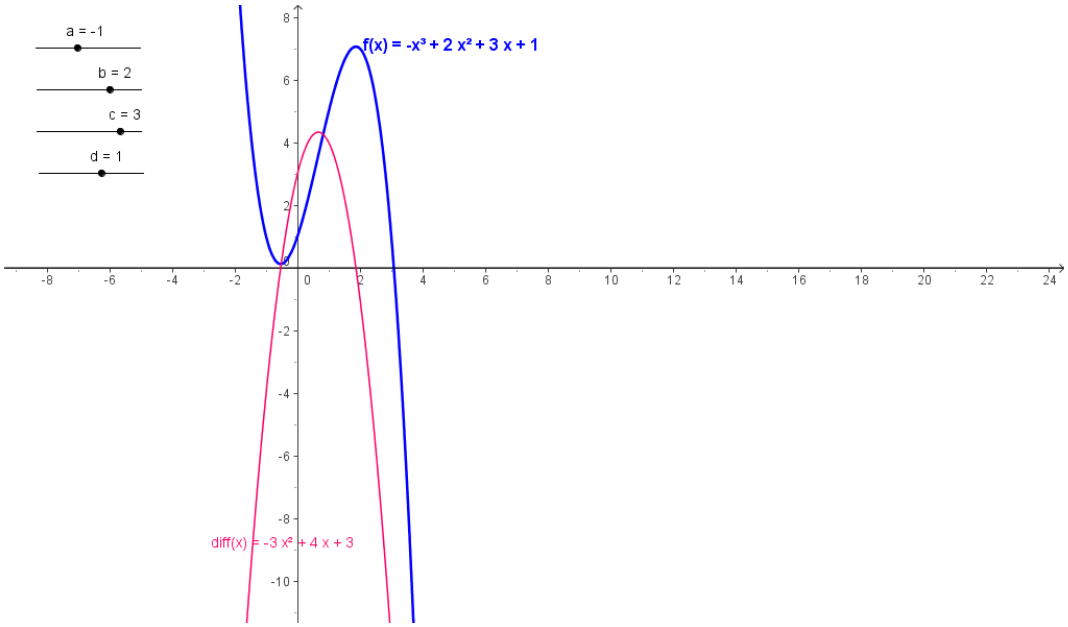
Deriválás:

Emelt szinten a gyerekeknek meg kell ismerkedni a deriválás, illetve az integrálás alapjaival is. Ehhez is ad segítségét a program, ábrázoltathatunk vele egy koordináta-rendszeren belül egy függvényt és annak deriváltját is. Sőt, a már említett csúszka segítségével egy ábrán belül szemléltethetjük, hogy az együtthatók megváltoztatása milyen hatással van a függvényre illetve a deriváltjára. Ezt mutatja be a következő két ábra. (GeoGebra honlapján található példa lásd irodalomjegyzékben 3.) A két kép közti különbséget a csúszka mozgatása okozta.

Az első esetben a függvény, amit deriválni szeretnénk: $x^3–2x^2–2x–2$, a deriváltja pedig: $3x^2–4x–2$.

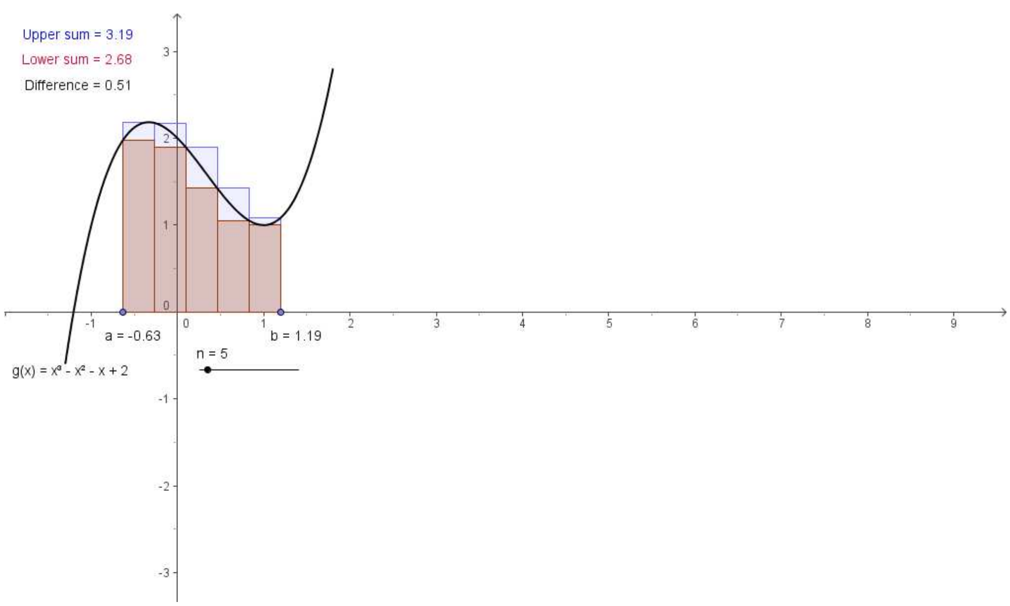
A második ábrán pedig: $–x^3+2x^2+3x+1$ az adott függvény, a $–3x^2+4x+3$ pedig a deriváltja.

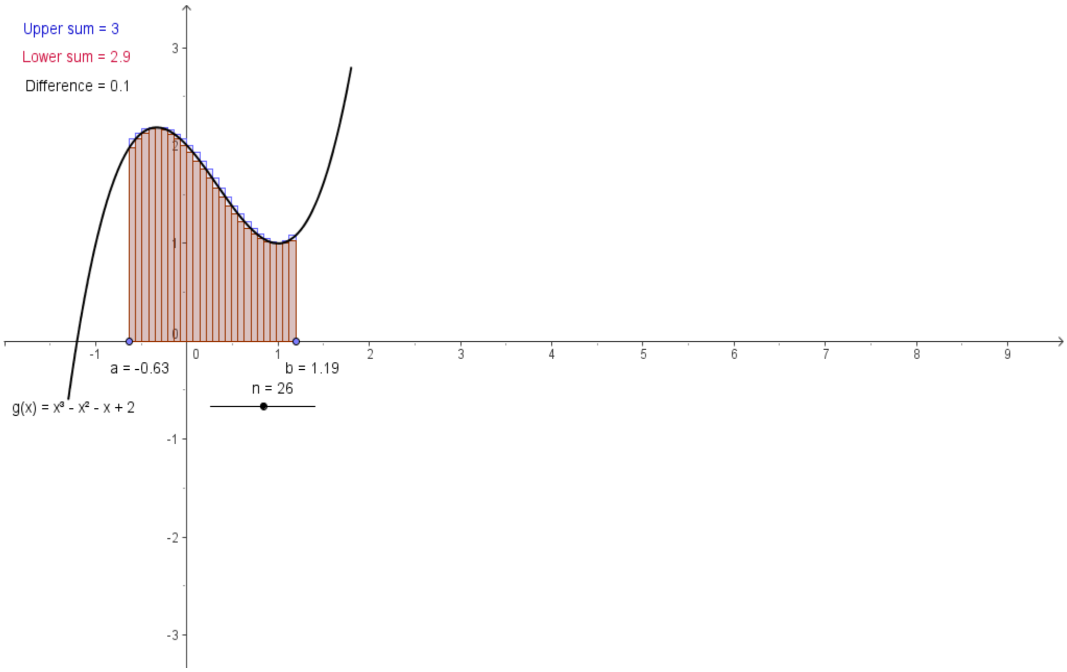




Integrálás:

Integrálszámítás esetén is nagy hasznát vehetjük a csúszka elhelyezésének, mert megmutathatjuk, hogy a felosztás növelésével pontosabbá tehető a függvény alatti terület közelítése. Az első ábrán, amikor csak öt felé osztottuk az intervallumot, az alsó és felső közelítés közti eltérés 0,51, még a második esetben, amikor 26 felé osztottuk fel, akkor 0,1 az eltérés. (GeoGebra honlapján található példa lásd irodalomjegyzékben 3.)





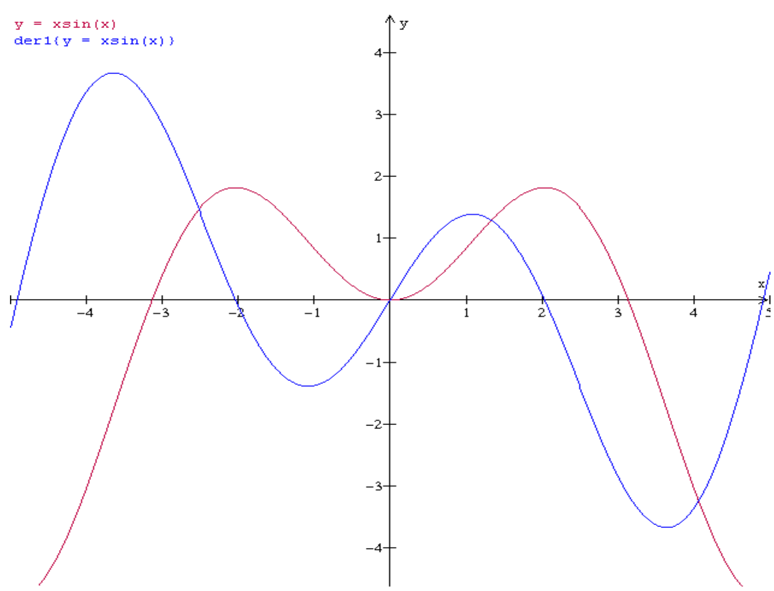
Upper sum = 3
Lower sum = 2.9
Difference = 0.1
a = -0.63
b = 1.19
n = 26
g(x) = x³ - x² - x + 2

3.Winplot:

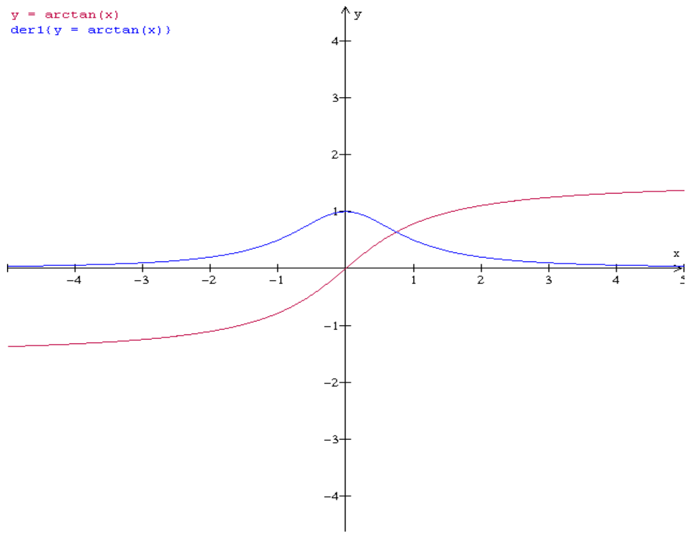
A winplot az analízis területén alkalmazható program. Függvényeket tudunk vele ábrázolni, illetve egy-egy függvény deriváltját, szélsőértékét, zérushelyeit is megkerestethetjük, ábrázoltathatjuk az adott koordináta-rendszerben. Hátrány a Geogebrával szemben, hogy a deriváltat képlettel nem írja ki, csak ábrázolja. Ez az integrálszámítással kapcsolatban is elmondható.

Deriválás:

1. feladat: Ábrázoljuk az $x\sin(x)$ függvényt és a deriváltját egy közös koordináta-rendszerben:

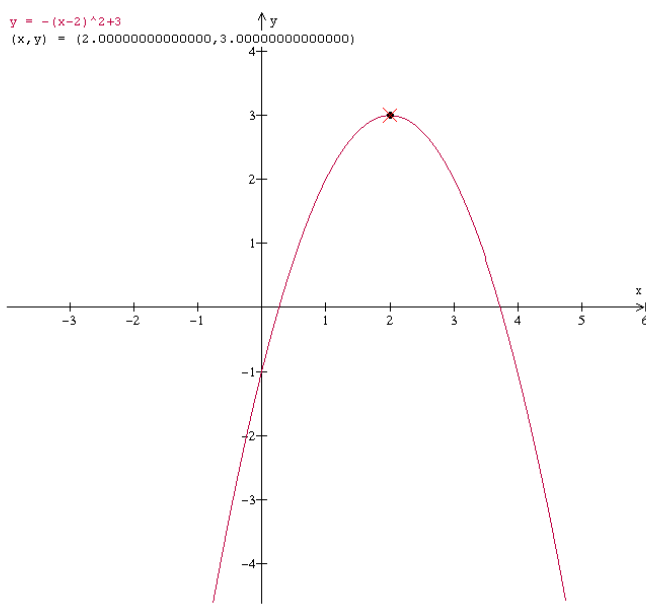


2. feladat: Ábrázoljuk az arctg(x) függvényt és annak deriváltját egy koordináta-rendszerben.



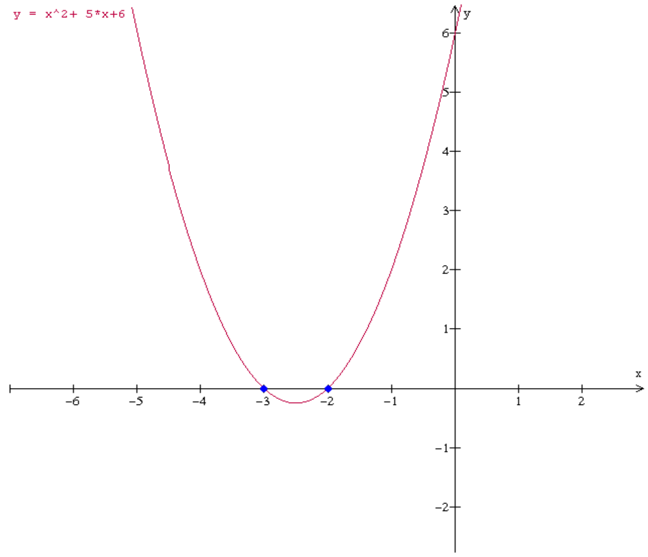
Szélsőérték-, zérushely:

3. feladat: Ábrázoljuk a – $(x–2)^2+3$ függvényt, és olvassuk le a szélsőérték helyét és értékét.



Válasz: Maximuma van a függvénynek a 2 helyen és az értéke 3.

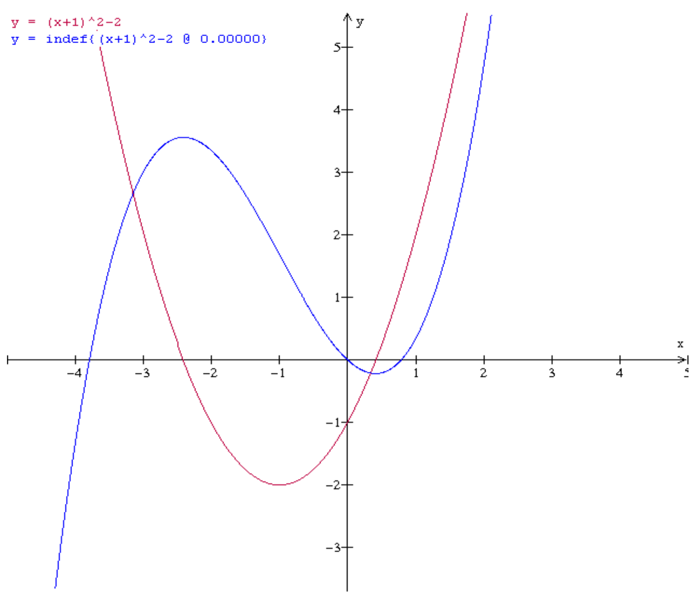
4. feladat: Határozzuk meg a következő függvény zérus helyeit: x^2+5x+6



Válasz: $x_1 = –2$ és $x_2 = –3$ pontban.

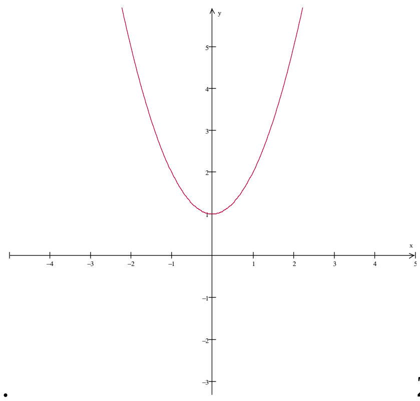
Határozatlan integrál:

5. feladat: Ábrázoljuk az $(x+1)^2–2$ függvényt és ennek integrálját egy koordináta rendszerben.

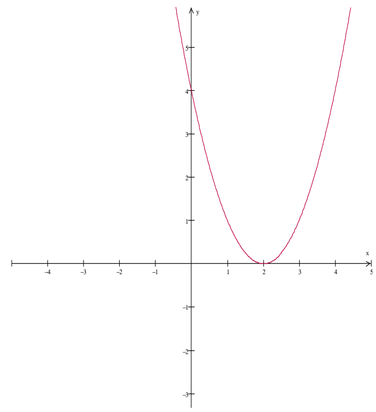


E programot leginkább függvények ábrázolásakor használhatjuk, amihez a következő képrejtvényes feladatot találtam ki:

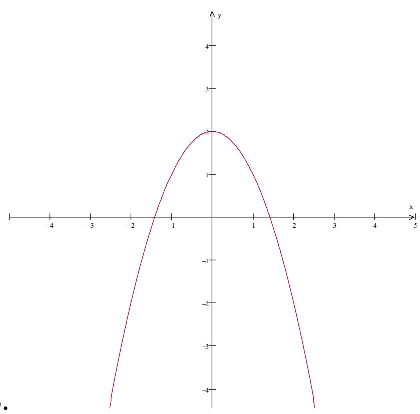
6. feladat: Párosítsd össze a megfelelő grafikont a megfelelő hozzárendelési szabállyal. (Ezt a típusú feladatot egy összefoglaló órán tudom leginkább elképzelni, amikor már az összes függvénytípussal megismerkedtek a gyerekek, akár érettségire való gyakorlás során is.)



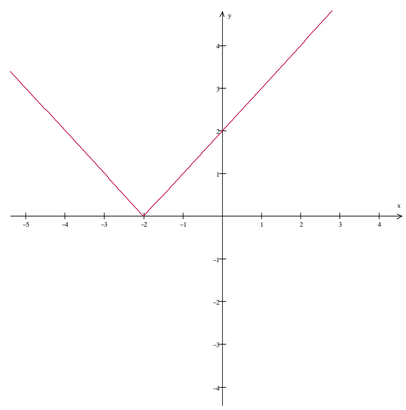
1.



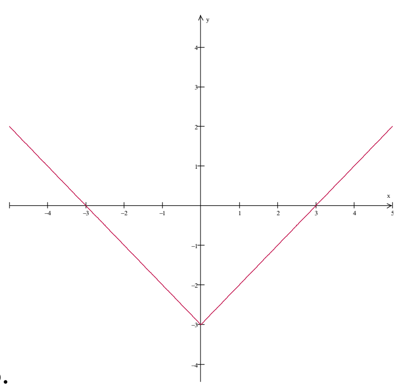
2.



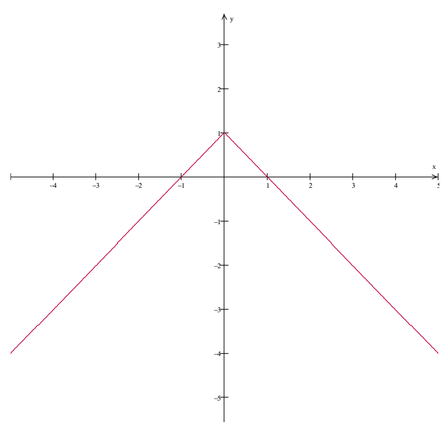
3.



4.



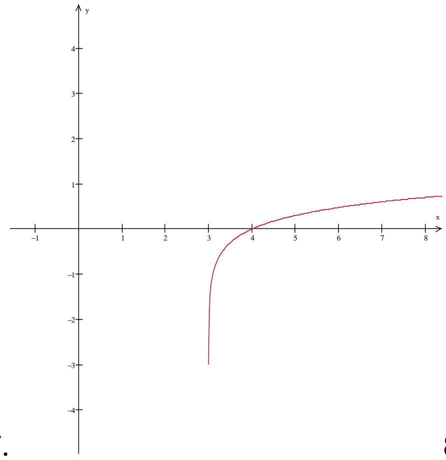
5.

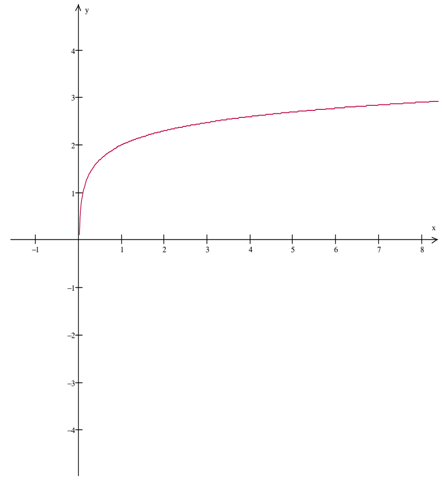


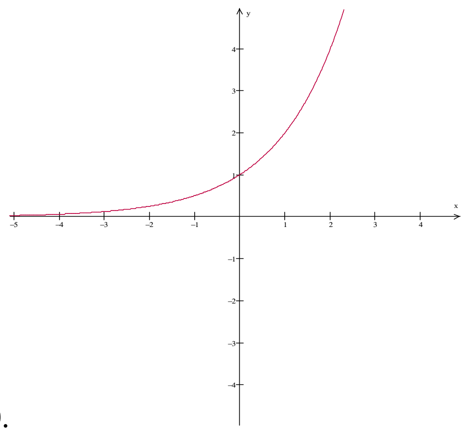
6.

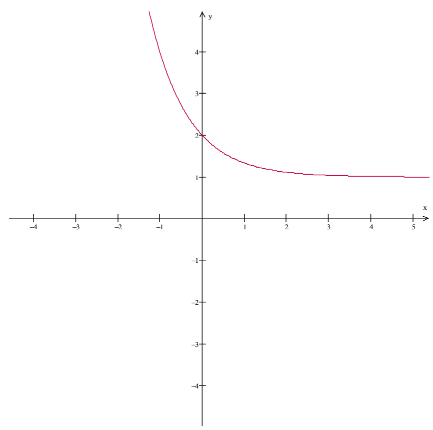
A: $(x-2)^2$ B: $/x+2/$ C: x^2+1

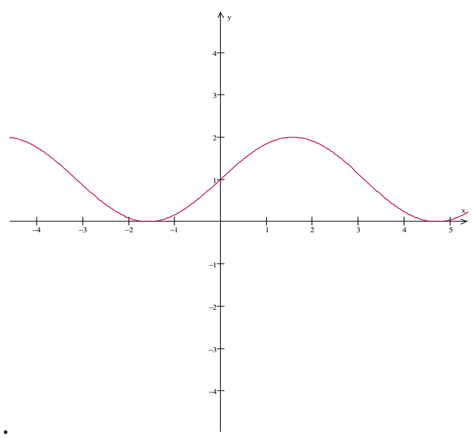
D: $/x/-3$ E: $-x^2+2$ F: $-/x/+1$

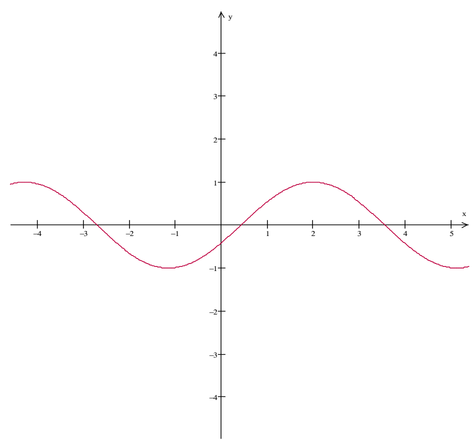
7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

G: sin(x)+1 H: lg(x - 3) I: 2^x

J: lg(x)+ 2 K: $(1/3)^x + 1$ L: cos(x–2)

Megoldás:

1—C	7—H
2—A	8—J
3—E	9—I
4—B	10—K
5—D	11 – G
6—F	12—L

Maple:

Ez a program már komolyabb felkészültséget igényel a kezelőjétől, mint az előző két program, mivel speciális nyelvezetet használ. További hátránya az előző két programmal szemben, hogy ingyenes verziója nem készült. Ebben a kis ismertetőben próbáltam a középiskolai tanításban használható részét áttekinteni 3 nagy témakörre bontva: számelmélet, algebra és analízis. Természetesen még sokféle alkalmazása lehetséges.

Számelmélet:

A program segítségével pillanatok alatt bonthatunk egy nagyon nagy számot is prímtényezőkre, illetve megkereshetjük a számok legnagyobb közös osztóját, illetve legkisebb közös többszörösét is, eldönthetjük egy számról hogy prím-e, illetve kiíratathatjuk vele a sorban valahányadik prímet is.
(Jelölések: piros sor: a begépelt parancs, kék sor a program által kiadott válasz.)

1. feladat: Keressük meg a 4. és 13. prímet:

```
> ithprime (4);
                    7
> ithprime (13);

                    41
```

2. feladat: Döntsük el a következő számról, hogy prím-e?

```
> isprime (7);
                   true

> isprime (15);
                   false
```

3. feladat: Bontsuk prímtényezőkre a következő számokat:

> ifactor (2540);

$$(2)^2\ (5)\ (127)$$

> ifactor (1372823);

$$(47)\ (29209)$$

4. feladat: Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját:

> gcd (120,80);

$$40$$

> gcd (2795,1340);

$$5$$

5. feladat: Határozzuk meg a következő számok legkisebb közös többszörösét:

> lcm (25,55);

$$275$$

> lcm (14,26);

$$182$$

Algebra:

Program segítségével szorzattá bonthatunk egy kifejezést, vagy akár össze is szoroztathatunk vele zárójeles kifejezéseket. Lehetőség van algebrai kifejezések egyszerűsítésére, illetve gyöktelenítésére, illetve megoldhatunk vele egyenleteket, egyenletrendszereket, és még az ellenőrzést is elvégeztethetjük a programmal, visszahelyettesítéssel.

1. feladat: Alakítsuk a következő kifejezést szorzattá:

```
> r:=x^2+5*x+6;
```

$$r := x^2 + 5\,x + 6$$

```
> factor(r);
```

$$(x + 3)\,(x + 2)$$

2. feladat: Szorozzuk össze a következő zárójeles kifejezéseket:

```
> q:=(x+2)*(x-4);
```

$$q := (x + 2)\,(x - 4)$$

```
> expand(q);
```

$$x^2 - 2\,x - 8$$

3. feladat: Számítsuk ki a következő kifejezés helyettesítési értékét:

```
> p:=x^2+3*x+7;
```

$$p := x^2 + 3\,x + 7$$

```
> subs(x=5,p);
```

$$47$$

4. feladat: Egyszerűsítsük a következő racionális kifejezést:

```
> f:=(k^2-1^2)/(k-1);
```

$$f := \frac{k^2 - 1}{k - 1}$$

```
> simplify(f);
```

$$k + 1$$

5. feladat: Gyöktelenítsük a következő kifejezés nevezőjét:

> y:=x/(2+(x)$^{1/2}$);

$$y := \frac{x}{2 + (x)^{1/2}}$$

> rationalize (y);

$$\frac{x\,(-2 + (x)^{1/2})}{x - 4}$$

6. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet:

> a:=z^2+3*z=2;

$$a := z^2 + 3\,z = 2$$

> b:=solve(a,z);

$$b := -3/2 + 1/2\, *(17)^{1/2},\ -3/2 - 1/2*\,(17)^{1/2}$$

Ellenőrizzünk:

> subs (z=b[1],a);

$$(-3/2 + 1/2\, *(17)^{1/2})^2 - 9/2 + 3/2\, *(17)^{1/2} = 2$$

> subs (z=b[2],a);

$$(-3/2 - 1/2\, *(17)^{1/2})^2 - 9/2 - 3/2*(17)^{1/2} = 2$$

7. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

> egyenlet1:=2*x+4*t=-10;

egyenlet1 := 2 x + 4 t = -10

> egyenlet2:=3*x-5*t=2;

egyenlet2 := 3 x - 5 t = 2

> solve({egyenlet1,egyenlet2},{x,t});

$$\left\{t = \frac{-17}{11},\ x = \frac{-21}{11}\right\}$$

<u>*Ellenőrizzünk:*</u>

> subs (t=-17/11, x=-21/11, egyenlet1);

-10 = -10

> subs (t=-17/11, x=-21/11, egyenlet2);

2 = 2

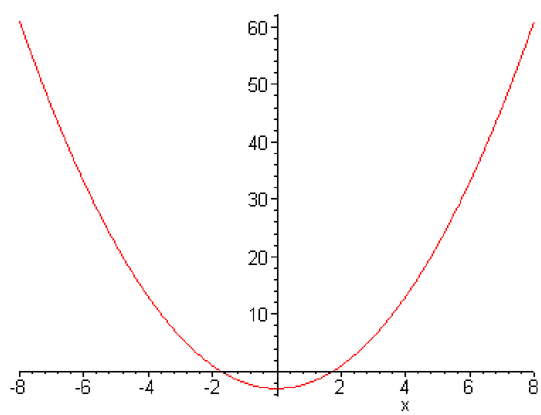
Analízis:

Függvények kirajzolásában meghatározhatjuk azt az intervallumot, amelyen ábrázolni szeretnénk a függvényt.

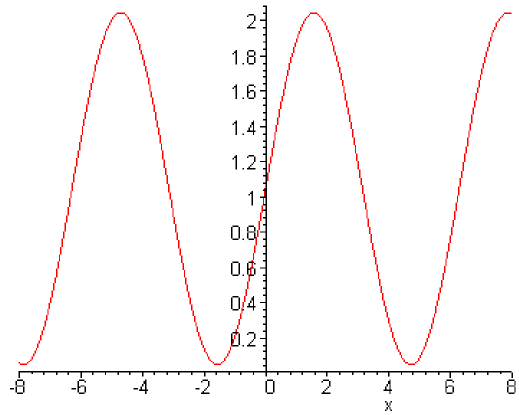
Függvények kirajzolása:

<u>1. Folytonos függvények:</u>

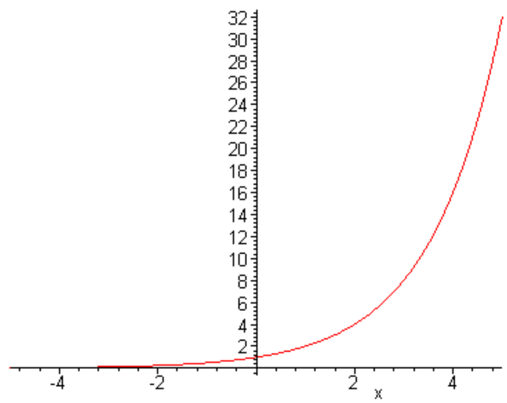
> plot (x^2-3, x=-8..8);



> plot (sin(x)+Pi/3, x=-8..8);

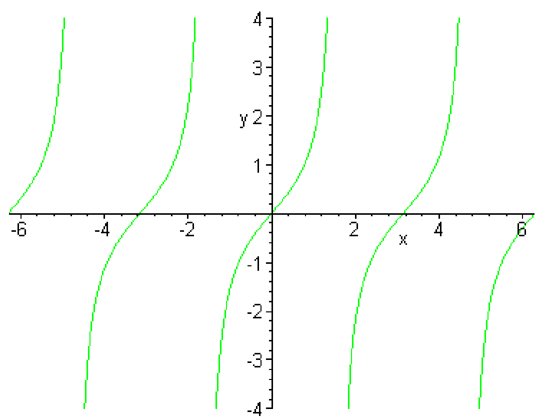


> plot (2^x, x=-5..5);

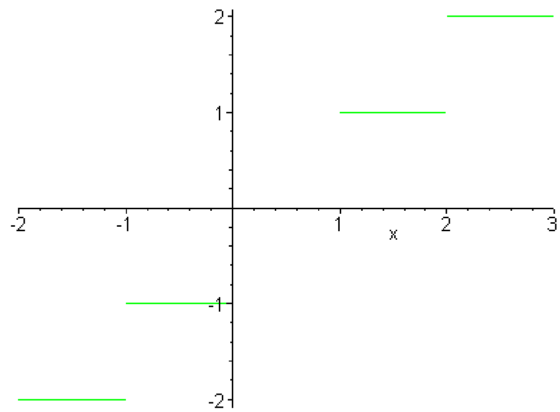


<u>2. Most ábrázoljunk olyan függvényeket, melyeknek szakadási pontjuk van:</u>

> plot(tan(x), x=-2*Pi..2*Pi,y=-4..4, discont=true);



> plot(floor(x), x=-2..3, discont=true);



Itt nem egészen az egész rész függvényt kapjuk meg, hiszen hiányos a grafikon, 0 és 1 között nem ábrázolja az értékeket. Az egész helyeken felvett helyettesítési értékekről sem tudunk meg semmit.

Függvényábrázolás mellett határértékszámítás is elvégezhető vele, deriválhatunk egy kifejezést akár többszörösen is, illetve integrálszámítás is elvégezhető vele (határozott vagy határozatlan is.)

Határérték kiszámítása:

1. feladat: Határrozzuk meg a sin(x) határértékét a nulla pontban.

> Limit(sin(x),x=0);

$$\lim_{x \to 0} \sin(x)$$

> limit(sin(x), x=0);

$$0$$

> Limit(sin(x),X=0)=limit(sin(x),x=0);

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$$

2. feladat: Határozzuk meg a sin(x)/x határértékét a nulla pontban.

> Limit(sin(x)/x,x=0)=limit(sin(x),x=0);

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

3. feladat: Határozzuk meg az $1/x^2$ határértékét a nulla pontban.

> Limit(1/x^2,x=0)=limit(1/x^2,x=0);

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \text{infinity}$$

(Azaz végtelen.)

4. feladat: Határozzuk meg az 1/x határértékét a nulla pontban.

> Limit(1/x,x=0)=limit(1/x,x=0);

$$\lim_{x \to 0} 1/x = \text{undefined}$$

(Nem létezik a határérték, amit a program helyesen ki is jelzett.)

5. feladat: Határozzuk meg az 1/x határértékét a végtelenben.

> Limit(1/x,x=infinity)=limit(1/x,x=infinity);

$$\lim_{x \to \text{infinity}} 1/x = 0$$

Deriválás:

1. feladat: Deriváljuk a következő kifejezést: sin(x), x szerint.

```
> Diff(sin(x),x);
                          d
                          -- sin(x)
                          dx
> diff(sin(x),x);
                           cos(x)

> Diff(sin(x),x)=diff(sin(x),x);
                       d
                       -- sin(x) = cos(x)
                       dx
```

Többszörös derivált:

2. feladat: Deriváljuk kétszeresen a következő kifejezést: x^3+2x, x szerint.

```
> Diff(x^3+2*x,x$2)=diff(x^3+2*x,x$2);
```

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^3 + 2\,x) = 6\,x$$

Határozatlan integrál:

3. feladat: Integráljuk a következő kifejezést: x^2.

```
> Int(x^2,x);
```

$$\int x^2\,dx$$

```
> int(x^2,x);

                          1/3 x^3

> Int(x^2,x)=int(x^2,x);

                  /
                 |
                 |  x^2  dx = 1/3 x^3
                 |
                /
```

Határozott integrál:

<u>4. feladat: Integráljuk a következő kifejezést nullától egyig: x^2.</u>

```
> Int(x^2,x=0..1)=int(x^2,x=0..1);

                   1
                  /
                 |
                 |   x^2 dx = 1/3
                 |
                /
                 0
```

Viszonylag sok probléma megoldásakor hasznosíthatjuk ezt a programot, de a három vizsgált program közül a gyerekek számára ez a legnehezebben kezelhető.

Összegzés:

Az itt felsorolt programokat és játékokat a teljesség igénye nélkül sorakoztattam fel. Minden pedagógus az osztálya igényeihez igazodva kell, hogy kiválassza a témához illő eszközöket, amelyekkel érdekesebbé, színesebbé teheti a matematikatanulást a gyerekek számára. Véleményem szerint a helyesen alkalmazott „játék" elősegítheti egy-egy feladat vagy esetleg egy adott témakör mélyebb átlátását a diákok számára. Emellett átfogóbb képet adhatunk számukra egy-egy adott témában.

Ezek a programok nem csak az iskolai órák keretében lehetnek hasznosak, hanem megfelelő módon alkalmazva otthoni gyakorlásban is segítséget nyújthatnak.

Irodalomjegyzék

1. Apáczai Kiadó: 4. Matematikakönyvem 2. kötet
2. Nemzeti Tankönyvkiadó: Geometriai feladatok gyűjteménye II.
3. www.geogebra.org (letöltés időpontja: 2009. április 18.)
4. www.fakopancs.hu (letöltés időpontja: 2009. április 21.)
5. www.fajatek-shop.hu (letöltés időpontja: 2009. április 21.)
6. www.logikaifeladatok.hu (letöltés időpontja: 2009. április 27.)
7. http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html (letöltés időpontja: 2009. február 19.)