A diákok motiválása a matematika eredményes tanulására

Írta: Szabó Hajnalka

Témavezető: Somfai Zsuzsa
Középiskolai matematikatanár
Eötvös József Gimnázium

Budapest, 2009.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A tanulás, a fejlődés egyik meghatározó mozgatórugója a motiváció, mely alapvető fontosságú céljaink kitűzéséhez és eléréséhez. Leendő tanárként elengedhetetlennek tartom, hogy tanítási feladataink között kiemelt helyen szerepeljen diákjaink megfelelő motiválása.

Magántanítványaim és ismerőseim szájából gyakran elhangzik a következő kérdés: „Mi értelme annak, hogy ilyen dolgokat tanulunk matekból, hiszen úgysem használjuk soha?” Nos, a kérdés felvetése részben jogos, hiszen tapasztalataim szerint a matematikaórán a legtöbb iskolában valóban minimális hangsúlyt kap a matematika gyakorlati életben vagy a tudomány más területein történő alkalmazása.

Némi megdöbbenéssel tapasztalom továbbá, hogy sok diák számára komoly nehézséget okoz a matematikaórán megtanult – és az ottani példákban hibátlanul alkalmazott – módszerek alkalmazása más tantárgyak teljesen azonos szerkezetű, ám eltérő szövegkörnyezetben megadott feladataiban.

A fenti két területen tapasztalt hiányosságok késztettek arra, hogy szakdolgozatomat a matematika más tárgyakban történő felhasználásáról és alkalmazásáról szóló vizsgálatnak szenteljem. Úgy vélem, hogy ezen lehetőségek feltérképezése és az összefüggések diákokkal való megismertetése motivációt, ösztönzést adhat a matematika iránt kevésbé érdeklődő tanulók figyelmének és szeretetének felkeltésére a tárgy iránt. A megfelelő összefüggések felismerése és tudatosítása komplex, globális látásmódot és jobb problémamegoldó-képességet eredményez, melyre a mindennapi életben is nagy szükség van.

Ennek megfelelően dolgozatomban a középiskolai matematika három természettudományos tárggyal (földrajz, kémia, biológia) való kapcsolatát veszem nagyító alá; megvizsgálva azt, hogy ezeknek a tantárgyaknak különböző témaköreihez milyen matematikai ismeretek szükségesek és azok hogyan jelennek meg az adott tárgyban. Úgy vélem, hogy ha ezen összefüggésekre a matematikaórán is megpróbálunk minél többször rávílágítani, akkor a diákok is elhiszik, hogy a matematika nem csupán a matematikusok kiváltsága, hanem a tudomány és az élet más területein is gyakran alkalmazható; így pedig talán ők is szívesebben foglalkoznak vele.

Bár a középiskolában tanult négy természettudományos tárgy közül a fizika az, amely leginkább összefonódik a matematikával, ez mégis kimarad a jelen áttekintésből, hiszen a matematika ezen területen történő alkalmazása általában a tanárok és a diákok körében is közismert, és éppen e szoros kapcsolat miatt a két tárgy kapcsolata a szakirodalomban is részletesen feldolgozott.

A dolgozat következő fejezetei sorra veszik a fent említett három középiskolai természettudományos tárgy matematikával kapcsolatba hozható témáit évfolyamok szerinti bontásban, rövid áttekintést nyújtanak az anyag – középiskolai szintű – matematikai hátteréről, példafeladattal szemléltetve a matematika adott témabeli alkalmazását. A szaktárgyak tanagyagának vizsgálatához a jelenleg forgalomban lévő népszerű tankönyveket, tankönyvcsaládokat vettem alapul.

2. Földrajz

A földrajz és a matematika kapcsolatáról elsőre talán nem sok minden jut eszünkbe, ám jobban belegondolva beláthatjuk, hogy a két terület számos helyen szorosan összefonódik egymással. Már a nagy ókori kultúrák is komolyan foglalkoztak például csillagászattal, melynek tanulmányozása, művelése nagy mértékben szükségessé tette és elősegítette a matematika fejlődését. A földmérések, az utazások, a hajózás, a földrajzi felfedezések igényt szolgáltattak az első térképek elkészítésére, amelyhez szintén matematikai ismeretek szükségesek. A gazdasági földrajz lépten-nyomon használja a statisztika eszközeit, a népességföldrajz pedig például a népsűrűség és a természetes szaporodás meghatározásához alkalmaz matematikai képleteket.

Az alábbiakban azt mutatom be, hogy a (középiskolás) matematika hogyan jelenik meg a földrajz órákon és hogy ezen összefüggésekre mikor és hogyan világíthatunk rá matematikaórán.

2.1. 9. osztály

9. osztályban elsősorban a természetföldrajzzal ismerkednek meg a diákok. A tanórákon szó esik a Földről mint bolygóról, a Föld történetéről, szerkezetéről; továbbá a légkörről, a vízburokról, a különböző felszínformáló erőkről és a földrajzi övezetességről. A természetföldrajzi ismeretek után a tanév végén a tanulók rövid betekintést nyernek a népesség- és településföldrajzba is.

A következőkben azt fogom bemutatni, hogy ezen témák hogyan kapcsolódnak a (középiskolás) matematikához, illetve hogy milyen matematikai alapismeretkre van szükség ahhoz, hogy a tanulók gond nélkül tudják teljesíteni a 9. osztályos földrajz követelményeit. A tárgy tantervi követelményeinek áttekintéséhez Nemerkényi Antal és Sárfalvi Béla *Általános természetföldrajz a gimnáziumok számára* [1] című, a Nemzeti Tankönyvkiadó gondozásában megjelent tankönyvét vettem alapul.

2.1.1. A földi tér ábrázolása, térképek

Mindennapi életünkben is fontos szerepet játszanak a térképek, hiszen ezek segítségével tájékozódhatunk és juthatunk el ismeretlen helyekre vagy általuk ismerhetjük meg a Föld közeli és távoli tájait, országait. A diákok sok hasznos információt kapnak a térképek jelrendszeréről vagy épp a térképek fajtáiról, ám fontos azt is kihangsúlyozni, hogy a térképek készítésekor egy matematikából jól ismert „eljárást”, a vetítést használják. Így a matematikaórán - például a merőleges vetületek tanításánál - érdemes hangsúlyozni a vetítés ezen nagyon is hasznos és gyakorlati alkalmazását, ezzel is bemutatva a diákoknak a matematika hasznosságát, sokszínűségét.

Mivel a térképen ábrázolandó felület görbült, annak síkban történő ábrázolásához – valamilyen fajta – vetítés szükséges. Ezen vetítéseknek több fajtája és sokféle csoportosítása létezik (a tankönyvek általában a képfelület jellege szerinti csoportosítást emelik ki, mely szerint sík-, henger- és kúpvetület különböztethető meg), ezek mélyebb megértéséhez azonban már a középiskolán túlmutató matematikai ismeretek szükségesek.

A térképek kapcsán szintén előkerülő és elengedhetetlenül fontos matematikai fogalom a hasonlóság. A térképeken a kicsinyítés mértékét a méretarány mutatja meg, tehát egy 1:10 000 méretarányú térképen mért 1 cm-es távolság a valóságban 10 000 cm-nek felel meg. Azaz a matematika nyelvén megfogalmazva jelen esetben egy $\lambda = 0{,}0001$ arányú hasonlóságról van szó. A hasonlóság tanításánál javasolt kitérni erre az alkalmazásra, hiszen így a diák számára is kézzelfoghatóbbá válik ez a fogalom. A földrajz tankönyv [1] két feladata is kiváló példa a hasonlóság alkalmazására:

1) *Az 1:100 000 vagy az 1:25 000 méretarányú térkép ábrázolja-e részletesebben a környezetet?*
2) *Egy 20 cm x 30 cm méretű 1:100 000 vagy 1:25 000 térképlapra fér-e rá nagyobb terület?*

<u>Megoldás:</u>

1) *Nyilván az 1:25 000 méretarányú térkép a részletesebb, hiszen ott a térképen mért 1 cm a valóságban 25 000 cm = 250 m-t jelöl, míg az 1:100 000 méretarányú térképen mért 1 cm a valóságban már 1 km-nek felel meg.*
2) *A térképlap területe: 20 cm * 30 cm = 600 cm^2.*
   *Az 1:100 000 méretarányú térképre 600 cm^2 * 100 000^2 = 6 000 000 000 000 cm^2 = 600 km^2 terület fér rá.*
   *Az 1:25 000 méretarányú térképre 600 cm^2 * 25 000^2 = 375 000 000 000 cm^2 = 37,5 km^2 terület fér rá.*
   Tehát az 1:100 000 méretarányú térkép (jóval) nagyobb területet tud ábrázolni.

Mindkét feladattal jól mérhető, hogy a tanulók mennyire értették meg a hasonlóság fogalmát és mennyire tudják azt alkalmazni egy nem tipikusan matematikai példában. A feladatok más kérdések feltételére is lehetőséget adnak: a feladatok megtárgyalása előtt meg lehet például kérdezni, hogy az 1:25 000, illetve az 1:100 000 méretarány milyen arányú hasonlóságot jelent.

2.1.2. Geotermikus gradiens

A geotermikus gradiens azt mutatja meg, hogy a Föld felszínéről a mélység felé haladva 100 méterenként hány ^{o}C-kal nő a hőmérséklet. A geotermikus gradiens földi átlagértéke 100 méterenként 3 ^{o}C, ám a Föld ma is változó területein ez az érték jóval magasabb, míg az idősebb részeken alacsonyabb.

Matematikaórán is adhatunk fel feladatot a Föld egy bizonyos pontján mért geotermikus gradiens meghatározásával kapcsolatban. Bár ennek kiszámításához csupán az – általános iskolában már megtanult – egyenes arányosság ismerete és magabiztos alkalmazni tudása szükséges, úgy vélem, hogy 9. osztályban – például az egyenletek tanítása előtt vagy akár egy esetleges év eleji ismétléskor – érdemes időt szánni e matematikai összefüggés felelevenítésére, hiszen több tantárgy 9.-es tananyaga is építkezik erre. Az alábbi, földrajz tankönyvből [1] származó példa jó lehetőség az egyenes arányosság felelevenítésére/gyakoroltatására:

3) *Egy dél-afrikai bányában 3578 m mélyen a kőzetek hőmérséklete 52 ^{o}C-os. Mennyi itt a geotermikus gradiens, ha a felszíni kőzethőmérséklet 15 ^{o}C?*

<u>*Megoldás:*</u>

- *A felszíni és a mélyben mért hőmérsékletek különbsége 52 ^{o}C – 15 ^{o}C = 37 ^{o}C*
- *Ekkor: 3578 m → 37 ^{o}C-os hőmérséklet növekedés*
  100 m → x ^{o}C-os hőmérséklet növekedés
- *Mivel a hőmérséklet növekedése egyenesen arányos a Föld belseje felé megtett úttal, a következő írható fel:* $\frac{37}{3578} = \frac{x}{100}$
- *Innen: x = 1,0341*
- *Tehát a dél-afrikai bányában a geotermikus gradiens értéke 1,0341 ^{o}C/100m, vagyis 100 méterenként kb. 1,0341 ^{o}C-kal nő a hőmérséklet.*

2.1.3. A hőmérséklet

A földrajzban a hőmérséklet, illetve a különféle hőmérsékletváltozások jellemzésére a matematikából jól ismert statisztikai mutatókat használnak. 9. osztályban a statisztika tanításánál gyakorlásként ajánlott legalább egy ilyen jellegű példát is feladni, ezzel is bemutatva a matematika földrajzban történő alkalmazhatóságát. A különböző hőmérsékletre jellemző értékek statisztikai mutatókkal való kapcsolatát az alábbi, Ütősné Visi Judit *Földrajz Érettségi Feladatgyűjtemény* [2] című könyvéből vett példán keresztül fogom szemléltetni:

4) *2001. április 10-én egy városban a következő hőmérsékleti adatokat mérték:*

óra	*01*	*03*	*05*	*07*	*09*	*11*	*13*	*15*	*17*	*19*	*21*	*23*	*24*
^{o}C	*6*	*5*	*3*	*3*	*9*	*14*	*12*	*11*	*10*	*8*	*7*	*6*	*6*

Milyen, az adott nap hőmérsékletére jellemző értékek számíthatók ki az adatokból?

- Ebben a példában az adatsokaságot vagy mintát az egyes időpontokban mért hőmérséklet értékek adják.
- Ezen értékek számatani közepe vagy átlaga adja meg a napi középhőmérsékletet.
- A 24 óra alatt mért legmagasabb és legalacsonyabb hőmérséklet különbsége, vagyis az adatsokaság terjedelme adja meg a hőmérséklet napi ingását.

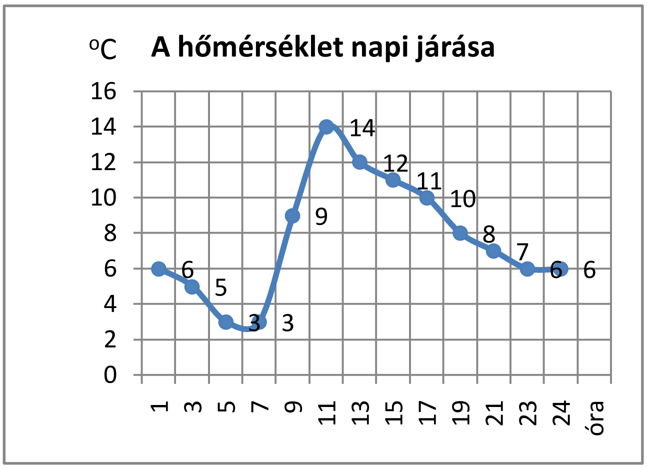
<u>*Megoldás:*</u>

- *Az adatsokaságból tehát meghatározható a napi középhőmérséklet:*
  $$\frac{6+5+3+3+9+14+12+11+10+8+7+6+6}{13} = 7{,}8$$
  Tehát a napi középhőmérséklet 7,8 ^{o}C.
- *A napi hőingást pedig az adatsokaság terjedelme adja meg, mely jelen esetben 14^{o}C – 3 ^{o}C = 11 ^{o}C*

Hőmérsékleti értékek nem csak egy adott napra, hanem hónapra, illetve évre vonatkozóan is megadhatók. A napi középhőmérséklethez hasonlóan létezik havi középhőmérséklet is, mely egy adott hónap napi középhőmérsékleteinek átlaga; illetve évi középhőmérséklet, mely a tizenkét hónapi középhőmérsékletek átlaga. Itt fontos megjegyezni, hogy a középhőmérsékletek – amint az az átlagszámításnál gyakran előfordul – nem árulnak el sokat az adott terület hőmérsékleti viszonyairól, hiszen a kiugró adatok nagyon eltorzíthatják a kapott értéket.

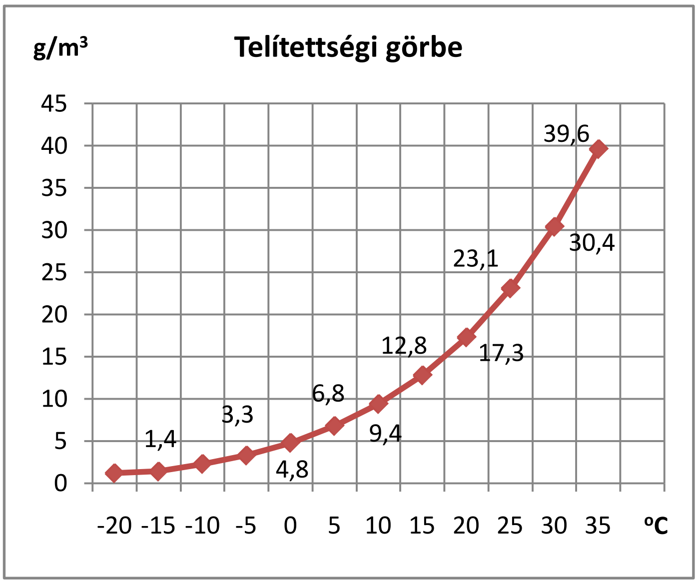
A hőmérsékleti viszonyokat jobban jellemző érték a napi hőingás, vagyis a napi hőmérsékleti adatok terjedelme; illetve az ehhez hasonlóan kiszámított évi közepes hőingás, mely a legmelegebb és lehidegebb hónap középhőmérsékletének különbsége.

Megjegyezném még, hogy a példa úgy is feladható matematika órán, hogy az adatokat nem táblázatban adjuk meg, hanem az 1. ábrán látható grafikonon szemléltetjük őket és a tanulóknak onnan kell leolvasni az egyes értékeket. Ezzel a statisztikai diagramok – jelen esetben a vonaldiagram – használata is gyakoroltatható. Másik lehetőség, hogy a diákoknak a táblázat adatai alapján kell elkészíteniük a hőmérséklet napi járását ábrázoló diagramot.



1. ábra

2.1.4. Tényleges és viszonylagos vízgőztartalom



2. ábra

A tényleges vízgőztartalom azt mutatja meg, hogy adott térfogatú levegő mennyi vízgőzt képes befogadni. Mértékegysége így g/m^3. A tényleges vízgőztartalom azonban nem sokat árul al az adott levegő nedvességi viszonyairól, hiszen minél magasabb a levegő hőmérséklete, annál nagyobb mennyiségű vízgőzt képest magába fogadni. A 2. ábrán (forrás: [1]) látható telítettségi görbe megmutatja, hogy a levegő egy adott hőmérsékleten mennyi vízgőzt tud befogadni. Ezt a hőmérsékletet nevezik harmatpontnak. Ez alapján a viszonylagos vízgőztartalom azt adja meg, hogy egy adott hőmérsékletű levegőben lévő vízgőz hány százaléka az ott befogadhatónak.

A telítettségi görbe kiváló példa a függvények és a függvénygrafikonok gyakorlati alkalmazására. 9. osztályban a függvények bevezetésénél érdemes bemutatni a földrajz és matematika ezen kapcsolatát, hiszen ez egy jó példa a függvény fogalmának szemléltetésére.

A függvény alaphalmazát az egyes hőmérsékleti értékek alkotják, az értékkészletbeli értékek pedig az 1 m^3 levegőben befogadható vízgőzmennyiségek. Nyilvánvaló, hogy ha egy adott hőmérséklethez hozzárendeljük az ott befogadható maximális vízgőzmennyiséget, akkor egyértelmű hozzárendelést, azaz függvényt kapunk.

Emellett a függvénygrafikon elemzésével kapcsolatban példát is adhatunk fel a telítettségi görbe kapcsán, hiszen a diákok számára gyakran okoz gondot a különféle grafikonok értelmezése.

5) *Mennyi a 9,4 g/m^3 tényleges vízgőztartalmú, 20 ^oC-os levegő viszonylagos vízgőztartalma? [1]*

<u>*Megoldás:*</u>

A telítettségi görbéről leolvasható, hogy a levegő 20 ^oC-on 17,3 g/m^3 vízgőzt tud befogadni. Így tehát a viszonylagos vízgőztartalma:

$$\frac{9{,}4\ g/m^3}{17{,}3\ g/m^3} * 100\% \approx 54\%,$$

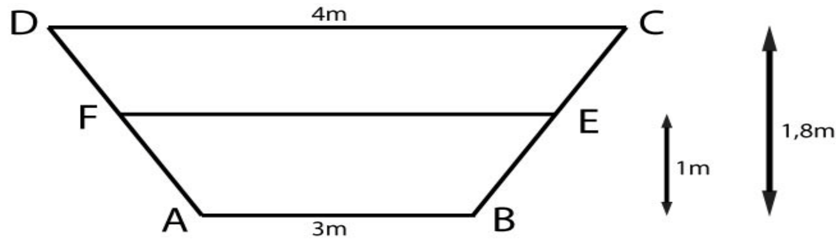
vagyis a 9,4 g/m^3 tényleges vízgőztartalmú, 20 ^oC-os levegő viszonylagos vízgőztartalma kb. 54%.

2.1.5. Vízhozam

A vízhozam a folyómeder adott keresztmetszetén egységnyi idő alatt átfolyó vízmennyiséget jelenti. [1] Mértékegysége m^3/s. Egyes folyók, csatornák vízhozamának kiszámítása az elemi térgeometria témaköréhez jól kapcsolható feladat, mely a diákokat meggyőzi(het)i a terület és térfogatszámítás gyakorlatban történő hasznosíthatóságáról, így mindenképpen érdemes ilyen jellegű példát is feladni elemi terület-, illetve térfogatszámítás kapcsán. Az *Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény* [3] is tartalmaz ehhez a témához kapcsolódó feladatot; az alábbi – vízhozamszámítással kapcsolatos – példa is ebből való:

6) *Egy csatorna keresztmetszete olyan lefelé keskenyedő szimmetrikus trapéz, amelynem két párhuzamos oldala4 m és 3 m, magassága 1,8 m. Mennyi víz folyik rajta keresztül óránként, ha a víz folyásának sebessége 1,5 m/s és a vízmagasság 1 m? (EÉFGY1/1986.)*

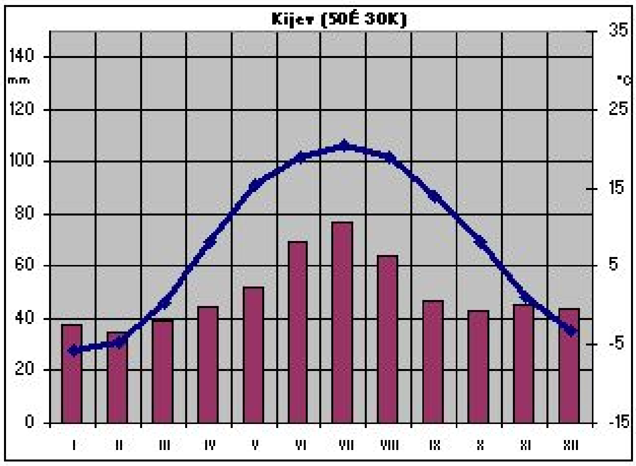
Megoldás:



- *EF szakasz meghatározása a trapéz területének segítségével:* $\frac{(EF+CD)*0,8}{2} + \frac{(EF+AB)*1}{2} = \frac{(AB+CD)*1,8}{2}$
- *behelyettesítve:* $0,4EF + 1,6 + 0,5EF + 1,5 = 6,3$ *, melyből EF ≈ 3,556 (m)*
- *innen az ABEF trapéz területe 3,278 m*^{2}
- *így a csatorna vízhozama:* $3,278\ m^2 * 1,5\ \frac{m}{s} = 4,92\ \frac{m^3}{s}$

2.1.6. Éghajlati diagramok

A földrajz számos területen alkalmazza a statisztika eszközeit, erre láthattunk példát a 2.1.3.-as, hőmérsékletről szóló részben is. A különböző éghajlatok bizonyos jellemzőinek bemutatására gyakran használják az éghajlati diagramokat, melyek hosszas szöveges jellemzés nélkül is jól ábrázolják az egyes éghajlatok hőmérsékleti, illetve csapadékadatait. Az a meglátásom, hogy a statisztika tanításánál mindenképpen ajánlott kitérni az éghajlati diagramokra, hiszen ezek – ahogy az a 3. ábrán (forrás: [14]) is látható – egy ábrán belül kétféle diagramtípust is használnak: a volaldiagramot, illetve az oszlopdiagramot. Egyes diákok számára azonban nehézséget jelenthet annak eldöntése, hogy melyik típus melyik adatot ábrázolja. A matematikaórán cél a különféle grafikonok értelmezésének, valamint elemzésének megtanítása és erre kiválóan alkalmas lehet – többek között – egy ilyen földrajzi példa, hiszen ez egyrészt egy összetettebb grafikon, másrészt pedig a diákoknak motivációt is jelent ha tudják, hogy ezen ismeretekből földrajz órán is profitálhatnak. Az alábbi feladatban egy ilyen grafikonelemzésre adok mintapéldát:



3. ábra

7) *A 3. ábra [14] alapján oldja meg a következő feladatokat!*
   a) *Olvassa le a grafikon adatait és készítsen táblázatot belőlük.*
   b) *Mennyi Kijevben az évi középhőmérséklet, illetve az évi közepes hőingás?*

Megoldás:

a)

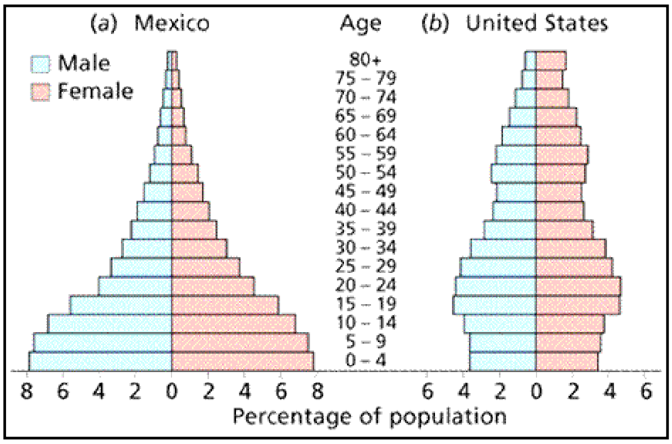
hónap	*I.*	*II.*	*III.*	*IV.*	*V.*	*VI.*	*VII.*	*VIII.*	*IX.*	*X.*	*XI.*	*XII.*
havi középhőmérséklet (°C)	*-5*	*-3*	*0*	*8*	*16*	*19*	*21*	*19*	*14*	*8*	*1*	*-2*
havi csapadákmennyi-ség (mm)	*38*	*36*	*40*	*44*	*52*	*70*	*78*	*62*	*46*	*42*	*45*	*43*

b) *Az évi középhőmérséklet a 12 havi középhőmérséklet átlaga, azaz:* $\frac{-5-3+0+8+16+19+21+19+14+8+1-2}{12}=\frac{96}{12}=8$*;*
az évi közepes hőingás pedig a havi középhőmérsékletek terjedelme, azaz a legmelegebb, illetve a leghidegebb hónap havi középhőmérsékletének különbsége: $21-(-5)=26$
Tehát Kijevben az évi középhőmérséklet 8 °C és az évi közepes hőingás 26 °C.

A fenti példából tehát látható, hogy az éghajlati diagramok jól alkalmazhatók a grafikonok értelmezésének tanításánál, továbbá a diagram elemzése a statisztikai mutatók gyakoroltatására is lehetőséget biztosít.

2.1.7. Korfa

A népességföldrajzban gyakran használt korfa, mely a népesség kor és nemek szerinti összetételét mutatja be, egy újabb példa a statisztikából már jól ismert oszlopdiagram használatára. Amint azt a 4. ábra (forrás: [15]) is jól mutatja, a korfa ötéves korcsoportokból épül fel, melyek függőlegesen olvashatók le a grafikonról, a vízszintes tengely pedig az egyes életkorok népességen belüli százalékos eloszlását jelzi. Hasonlóan a 2.1.6.-os részben tárgyalt éghajlati diagramokhoz, a korfa is jó lehetőséget nyújt a grafikonok értelmezésének, illetve elemzésének gyakoroltatására. Feladható például két ország – például a 4. ábrán látható Mexikó, illetve az Egyesült Államok – vagy egy ország két különböző korszakbeli korfájának összehasonlításával kapcsolatos feladat. Mivel a korfával kapcsolatban feladható, matematikai szempontból érdekes feladatok hasonlóak a 2.1.6.-os részben tárgyalt példához, így ebben a pontban nem mutatok újabb mintafeladatot.



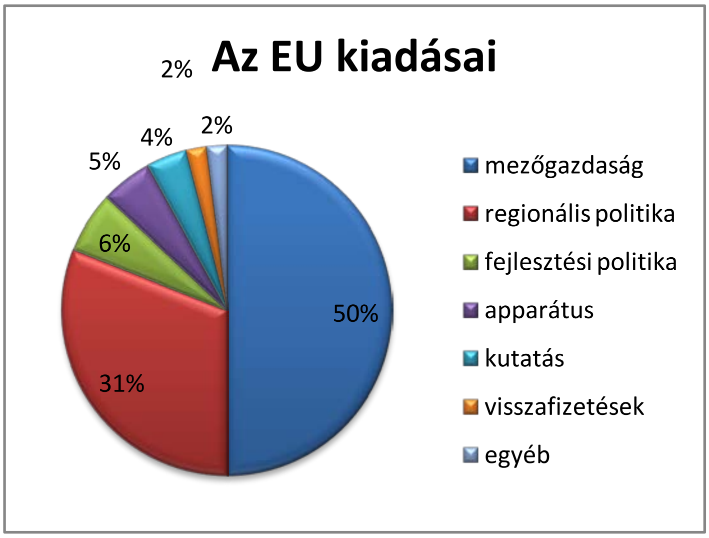
4. ábra

2.2. 10. osztály

10. osztályban a gazdaság- és társadalomföldrajz alapjaival, valamint különböző globális problémákkal ismerkednek meg a tanulók. Bár a gazdaságföldrajz, a különféle gazdasági mutatók mind lépten-nyomon matematikai képleteket és összefüggéseket alkalmaznak, ezek a középiskolás földrajz tananyagban nem kerülnek bemutatásra. Ennek következtében a 10. osztályos földrajz anyag nem kapcsolható sok helyütt a középiskolai matematikához, kivéve a már a korábbi részekben is előbukkanó statisztikát. Mind a tankönyvek, mind a feladatgyűjtemények rengeteg diagramon szemléltetik például a különböző gazdasági mutatókat vagy termelési adatokat.

Így a következőkben – ellentétben a 9.-es tananyagnál alkalmazott szisztémával – a 10. osztályos anyagot nem témánként fogom áttekinteni, hanem földrajzi témájú grafikonokkal mutatok példát az egyes diagramtípusokra. Ezzel az a célom, hogy a diákok a matematikaórán olyan grafikonokat is lássanak, amelyekkel nagy valószínűséggel mind földrajz órán, mind pedig esetleges későbbi tanulmányaik során vagy akár a való életben is találkozhatnak. A tananyag áttekintéséhez Jónás Ilona, Pál Viktor és Vízvári Albertné *Társadalomföldrajz és globális problémák* [4] című, 10. osztályosok számára íródott és a Mozaik kiadó gondozásában megjelent könyvét vettem alapul. Megjegyezném még, hogy bár ebben a dolgozatban csak a természettudámonyos tárgyakat tekintem át, a középiskolai történelem tananyag is számtalan példával szolgál különféle statisztikai diagramokra, így azokból is érdemes válogatni a matematikaórán tárgyalt példák közé.

2.2.1. Kördiagram

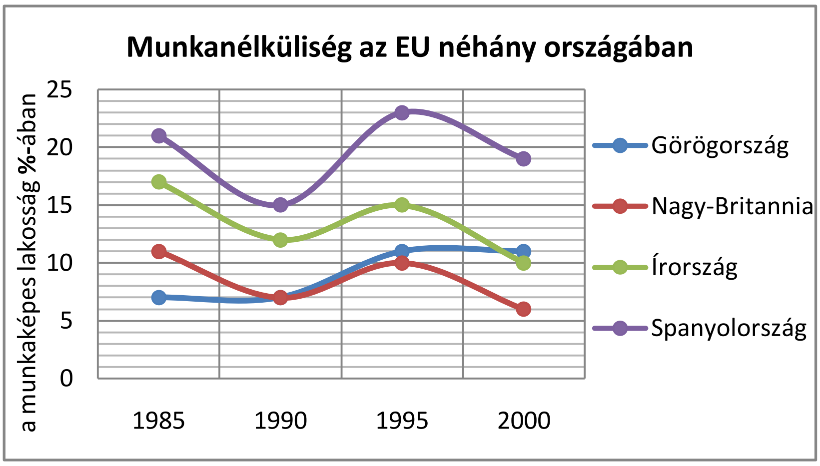


5. ábra

Az 5. ábrán (forrás: [4]) látható diagram az Európai Unió kiadásairól ad tájékoztatást. A kördiagram tanításánál bemutatható például ez az ábra is, mely jól szemlélteti, hogy a kördiagram alkalmazása akkor célszerű, ha az adatok az egésznek az arányában érdekesek. Ekkor természetesen a kört az egyes adatok arányában osztjuk fel. A kördiagrammal kapcsolatban is feladhatók 2.1.6. résznél látotthoz hasonló grafikonelemzési feladatok.

2.2.2. Vonaldiagram

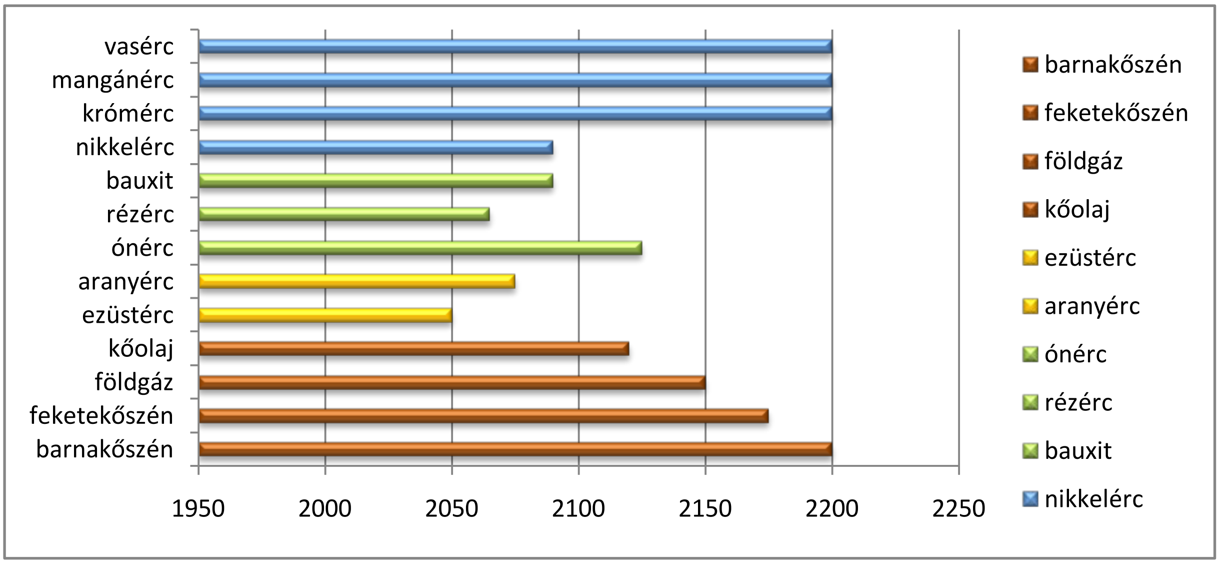
A 6. ábra (forrás: [4]) az Európai Unió négy országának 1985 és 2000 közötti munkanélküliségi adatait ábrázolja. Mint azt ez a grafikon is jól mutatja, a vonaldiagramok használata akkor célszerű, ha bizonyos adatok változását szeretnénk tanulmányozni.
Természetesen a szemléltetés mellett a vonaldiagrammal kapcsolatban is adhatók fel grafikonelemzési példák.



6. ábra

2.2.3. Oszlopdiagram

Oszlopdiagramokra már a 2.1.6., illetve a 2.1.7. részekben is láthattunk példát. A 7. ábra egy valamivel „megszokottabb” szerkezetű oszlopdiagramon ábrázol egy manapság igen gyakran hangoztatott kérdést, nevezetesen azt, hogy a – jelenleg ismert és gazdaságosan kitermelhető – legfontosabb érc-, nemesfémes ásvány-, színesfém-, valamint energiahordózókészletek vajon meddig elegendőek. A grafikontípus alábbi alkalmazása jól mutatja, hogy az oszlopdiagram használata akkor célszerű, ha az adatok egymáshoz való viszonya érdekes.



7. ábra

2.2.4. Grafikus manipulációk

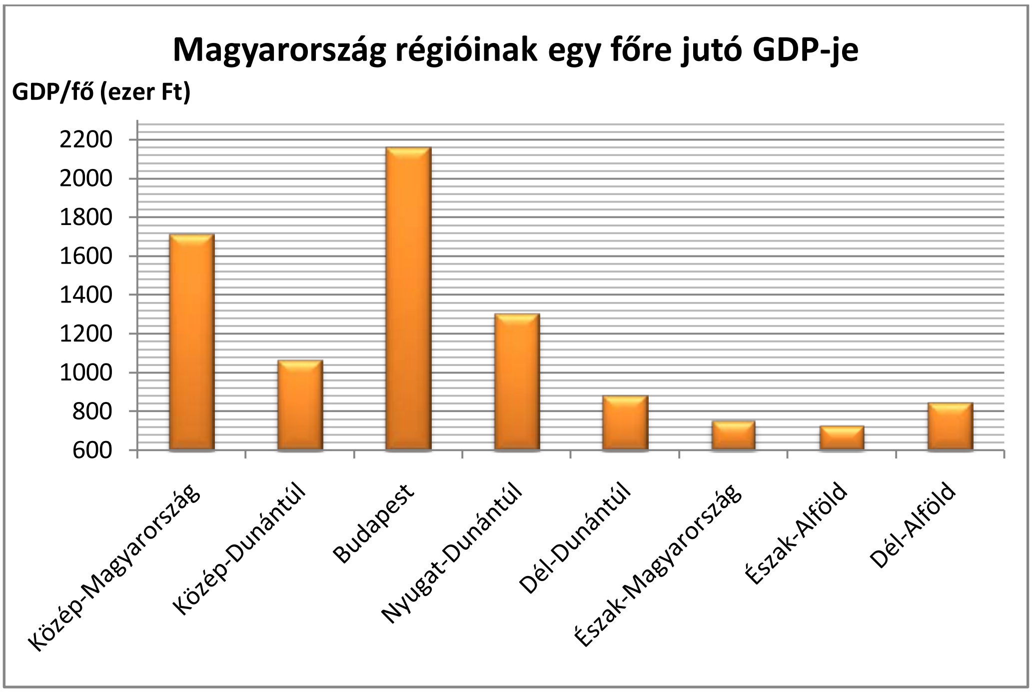
A diagramokkal kapcsolatban nagyon fontos megemlíteni, hogy amellett, hogy rengeteg információt képesek magukban hordozni, helytelen ábrázolásmód alkalmazása esetén könnyen válhatnak félrevezetővé, sőt manipulatívvá. Különösen igaz ez a gazdasági élet adatait ábrázoló diagramokra, hiszen a különböző újságok, tévéműsorok, politikai plakátok gyakran tartalmaznak megtévesztő szándékú diagramokat. Fontos tehát, hogy a gazdaságföldrajzban is előkerülő mutatókat (infláció, munkanélküliség, stb.) tartalmazó diagramokat a diákok helyesen tudják ábrázolni és értelmezni; valamint hogy képesek legyenek az egyes ábrák alapvető hibáit és a mögöttük álló megtévesztő szándékot felismerni.

A helyes, nem félrevezető és informatív diagram elkészítéséhez több tényezőt is figyelembe kell venni. Fontos, hogy a diagram ne legyen túlzsúfolt, a mérete legyen megfelelő, az adatokat könnyen le lehessen olvasni. Mindig meg kell gondolni, hogy a kívánt adatok ábrázolására melyik a legmegfelelőbb diagramtípus. Az esztétikai élménynél is lényegesebb azonban léptékek helyes, arányos használata a tengelyeken. Ez természetesen nem vonatkozik a kördiagramra, de az sokkal kevésbé alkalmas a manipulációra, mint a vonal- vagy az oszlopdiagram. A számozást (a függőleges tengelyen) általában 0-tól érdemes kezdeni (kivételek természetesen lehetnek) és fontos ügyelni a beosztás részletességére.

Érdemes tehát a mindennapi életben és a gazdaságföldrajzban egyaránt előforduló diagramokkal kapcsolatos manipulációkkal matematikaórán is foglalkozni, hiszen matematikatanárként is fontos feladat felhívni a diákok figyelmét az ilyen csapdákra.

Az alábbi, gazdaságföldrajzi témájú feladat matematikaórán is bátran feladható:

8) *Az alábbi diagram Magyarország régióinak egy főre jutó GDP-jét ábrázolja. Miért hibás az ábra? Hogyan ábrázolná az adatokat helyesen? (forrás: [2])*



8. ábra

Megoldás:

> *A diagram hibája természetesen az, hogy az* y *tengelyen a számozás 600-tól és nem 0-tól indul. Így az ábra igen megtévesztő, hiszen a fejlett és a kevésbé fejlett régiók egy főre jutó GDP-jének egymáshoz viszonyított aránya teljesen eltorzul; a fejlett régióknál leolvasható értékek jóval magasabbnak, a fejletleneknél láthatók pedig jóval alacsonyabbnak tűnnek a valóságosnál. Ha az* y *tengelyt 0-tól számozzuk, akkor a diagram nem lesz félrevezető.*

Természetesen a 8. példán kívül számtalan más jellegű, grafikus manipulációkkal kapcsolatos feladat adható fel matematika órán. Érdemes megnézni félrevezető vonaldiagramot is; olyan ábrát, amelyből hiányoznak bizonyos adatok vagy a számozás sűrűsége nem megfelelő. Még a matematika iránt szinte teljesen közönbös tanulókat is motiválhatjuk, ha például megkérjük az osztályt, hogy próbáljanak meg ők maguk is hibás/félrevezető diagramokat gyűjteni újságokból vagy az internetről. Mindenképpen érdemes erre időt szánni, hiszen mind a gazdaságföldrajzban, mind pedig a való életben gyakran találkozhatunk ezzel a jelenséggel és a diákok mindig örömmel veszik, ha olyan téma kerül terítékre matematikaórán, aminek a gyakorlatban is hasznát tudják venni.

3. Kémia

A többi természettudományhoz hasonlóan a kémia is használ bizonyos matematikai fogalmakat, számítási módszereket, melyek biztos ismerete nélkül még a kémia iránt érdeklődők is nehézségekkel találhatják szemben magukat. Mindazonáltal néhány alapvető és nem túl bonyolult matematikai módszer ismeretének birtokában a középiskolai kémia megértése, a különféle számítások elvégzése lényegesen könnyebbnek bizonyulhat.

Fontosnak tartom, hogy a matematika más tárgyakban történő alkalmazásáról a matematikaórán is essen szó, így ebben a fejezetben a középiskolás kémiához szükséges matematikai módszerek, illetve ismeretek áttekintésére kerül sor.

3.1. 9. osztály

A 9. osztályos kémia az atomok szerkezetét, tulajdonságait, a különféle kémiai kötéseket, anyagi halmazokat és halmazállapotokat, kémiai reakciókat, valamint elektrokémiai alapismereteket veszi nagyító alá.

A következőkben arról lesz szó, hogy a fent említett témákhoz kapcsolódó számításokhoz milyen matematikai ismeretek és azoknak biztos alkalmazni tudása szükségeltetik. A kémia tantárgyi követelményeinek áttekintéséhez, valamint a legtöbb példafeladathoz Dr. Siposné Dr. Kedves Éva, Horváth Balázs és Péntek Lászlóné 9.-eseknek szóló, *Általános kémia* [5] című, a Mozaik kiadó gondozásában megjelent tankönyvét vettem alapul.

3.1.1. Avogadro törvénye

Avogadro a XIX. század elején élő olasz fizikus volt, aki a gázok térfogata és a molekulák száma között fedezett fel összefüggést. Avogadro törvénye azt mondja ki, hogy az azonos nyomású és hőmérsékletű gázok egyenlő térfogatában – az anyagi minőségtől függetlenül – azonos számú molekula van; illetve megfordítva, a gázok azonos számú molekulája azonos hőmérsékleten és nyomáson egyenlő térfogatot tölt be. Ebből adódik, hogy az azonos állapotú gázok térfogatának (V) és anyagmennyiségének (n) hányadosa állandó, azaz $V_m = \frac{V}{n}$, ahol V_m a moláris térfogat, ami tehát 1 mol gáz térfogatát adja meg (mértékegysége: dm^3/mol). [5]

Állapot	Moláris térfogat (dm^3/mol)
standard (25 °C; 0,1 MPa nyomás)	24,5
szobahőmérséklet (20 °C; 0,1 Mpa nyomás)	24
normál (0 °C; 0,1 Mpa nyomás)	22,41

1. táblázat

Az 1. táblázat (forrás: [5]) a különböző állapotú gázok moláris térfogatát adja meg. Avogadro törvényét és a táblázat adatait felhasználva kiszámíthatók az egyes gázok jellemző adatai. Hasonlóan a 2.1.2. részben tárgyalt geotermikus gradienshez, az Avogadro- törvény alkalmazásával kapcsolatos számítási feladatok is az általános iskolában tanult egyenes arányosságon alapszanak. Mégis az a meglátásom és tapasztalatom, hogy sok diák számára komoly nehézséget okoz ezen nem túl bonyolult matematikai fogalom alkalmazása egy „kémiai szövegkörnyezetbe” burkolt példa kapcsán. Így 9. osztályban például a függvények tanításakor érdemes lehet kitérni egy ilyen kémiai feladatra, hiszen ezzel mind a matematikában, mind a kémiában történő előrehaladást segíthetjük. Az alábbi, 9. osztályos kémia tankönyvből [5] származó példa jól alkalmazható matematikaórán is, hiszen Avogadro törvényén és az 1. táblázat adatain kívül nem szükségesek hozzá komolyabb kémiai ismeretek, mégis alkalmas arra, hogy bemutassuk a diákoknak a matematika ezen felhasználását.

1) *Hány db molekula van 1 m^3 szobahőmérsékletű gázban?*

Megoldás:

Az 1. táblázat adatait felhasználva:

*24 dm^3 szobahőmérsékletű (20 ^{o}C; 0,1 MPa) gázban 6 * 10^{23} db molekula van*

1 m^3 = 1000 dm^3 x db molekula van

$\frac{x}{6*10^{23}} = \frac{1000}{24}$ *; innen pedig* $x = \frac{1000}{24} * 6 * 10^{23} = 2{,}5 * 10^{25}$

*Tehát 1 m^3 szobahőmérsékletű gázban 2,5 * 10^{25} db molekula van.*

Jól látható tehát, hogy a feladat megoldásához valóban ,,csak” alapvető kémiai ismeretekre és az egyenes arányosságra van szükség. Emellett ebben a példában előkerül még a mértékegységek átváltása, illetve a tizedestörtekkel való számolás és a normálalak is, így a feladat kapcsán ezek a matematikai ismeretek is felfrissíthetők.

3.1.2. Az oldatok töménységének megadása

Az oldatok összetételének (töménységének) jellemzésére a kémiában többféle mód is kínálkozik, ám közös bennük az, hogy az összetétel mindig az oldott anyag és az oldat mennyiségének arányát jelenti, melyet általában %-ban adnak meg. 9. osztályban a diákok ötféle ,,mutatót” tanulnak az oldatok összetételének jellemzésére:

a) tömegszázalék: $tömeg\% = \frac{oldott\ anyag\ tömege}{oldat\ tömege} * 100$

b) térfogatszázalék: $térfogat\% = \frac{oldott\ anyag\ térfogata}{oldat\ térfogata} * 100$

c) anyagmennyiség-százalék: $anyagmennyiség\% = \frac{az\ oldott\ anyag\ anyagmennyisége}{az\ oldat\ anyagmennyisége} * 100$

d) tömegkoncentráció: $tömegkoncentráció = \frac{az\ oldott\ anyag\ tömege}{az\ oldat\ térfogata}$
Megjegyzés: A tömegkoncentráció mértékegysége tehát g/dm^3.

e) anyagmennyiség-koncentráció: $anyagmenny.konc. = \frac{az\ oldott\ anyag\ anyagmennyisége}{az\ oldat\ térfogata}$

Megjegyzés: Az anyagmennyiség-koncentráció mértékegysége tehát mol/dm^3.

A fenti definíciókból látható, hogy az első három mutató meghatározásához százalékszámításra, illetve kicsit összetettebb feladatoknál egyenes arányosságra van szükség, ám mivel kémiai feladatban ez gyakran problémát okoz, az alábbiakban egy matematikaórán is feladható példát mutatok ennek gyakoroltatására. Hasonlóan a 3.1.1. részbeli példához, ezt is például az egyenletek tanításánál lehet feladni.

2) *A 10 tömeg%-os ételecetből kiveszünk 50 g-ot és 150 g vízzel felhígítjuk. Hány tömeg%-os lesz az így keletkezett salátaecet? [5]*

<u>Megoldás:</u>

100 g ételecetben	*10 g esetsav*
↓	↓
50 g ételecetban	$\frac{10}{2} g = 5\ g$ *ecetsav*
↓ *+ 150 g víz*	↓ *+ 0 g ecetsav*
200 g ecetsavoldat	*5 g ecetsav*
↓	↓
100 g ecetsavoldat	$\frac{5}{2} g = 2{,}5\ g$ *ecetsav*

A salátaecet tehát $\frac{2{,}5\ g}{100\ g} * 100 = 2{,}5$ *tömegszázalékos.*

Látható tehát, hogy ehhez a feladathoz is valójában az egyenes arányosság megfelelő alkalmazására volt szükség. A d) és e) pontokban definiált mutatók meghatározására vonatkozó példák már gyakran összetettebbek, így megoldásukhoz komolyabb ismeretekre és gondolatokra is szükség lehet. A következő feladat a tömegkoncentrációval kapcsolatos és itt az egyenes arányosság alkalmazásán kívül a tanulóknak tisztában kell lenni a sűrűség fogalmával is. Ezen példa matematikaórán történő feladása inkább csak jobb képességű csoportokban érdemes/ajánlott.

3) *Hány mol/dm^3 koncentrációjú a 30 tömeg%-os kénsavoldat, amelyet az akkumulátorok töltésére használnak, ha a sűrűsége 1,22 g/cm^3. [5]*

<u>Megoldás:</u> (a levezetés során V *a térfogatot,* m *a tömeget,* n *az anyagmennyiséget,* M *a moláris tömeget,* ρ *pedig a sűrűséget jelöli)*

100 g oldatban	*30 g H_2SO_4 van*
$V_{oldat} = \frac{m_{oldat}}{\rho_{oldat}}$; $\rho_{oldat} = 1{,}22\ \frac{g}{cm^3}$	$n_{o.anyag} = \frac{m_{o.anyag}}{M_{o.anyag}}$; $M_{o.anyag} = 98\ \frac{g}{mol}$
$V_{oldat} = 81{,}97 cm^3 = 0{,}08197\ dm^3$	$n_{o.anyag} = 0{,}306\ mol$
↓	↓
<u>1 dm^3 oldat</u>	*<u>x mol</u>*

Az egyenes arányosság alapján: $\frac{1}{0{,}08197} = \frac{x}{0{,}306}$ → $x = \frac{1}{0{,}08197} * 0{,}306 = 3{,}73$

Így tehát a 30 tömeg%-os H_2SO_4-oldat 3,73 mol/dm^3 anyagmennyiség-koncentrációjú.

Vegyük észre tehát, hogy a 3)-as feladatban a már említett matematikai ismeretek mellett szükség volt alapvető fizikai (sűrűség kiszámítására vonatkozó képlet) és korábbi kémiai (anyagmennyiség, illetve moláris tömeg meghatározása) tanulmányokra is, valamint ezek összetett alkalmazására, így ez a példa valóban a tehetségesebb diákoknak javasolt.

Természetesen a többi, az oldatok összetételének jellemzésével kapcsolatos mutató meghatározásával kapcsolatban is adhatóak fel a 2)-es és 3)-as feladatokhoz hasonló példák.

3.1.3. Kémiai számítások (sztöchiometria)

A sztöchiometria a kémia azon ága, mely a kémiai reakciók során végbemenő tömeg- és térfogatviszonyok törvényszerűségeivel foglalkozik. Minden kémiai reakció megjelenítésére felírható egy reakcióegyenlet, mely kifejezi, hogy a kölcsönhatásban mely anyagok vesznek részt és mely anyagok keletkeznek, valamint hogy milyen az anyagmennyiségek aránya. Az ezen egyenleteken alapuló kémiai számítások során meghatározható az egyes résztvevő és keletkező anyagok tömege, térfogata, illetve anyagmennyisége.

A reakcióegyenlet felírását a diákok csak kémiaórán tudják megtanulni, ám a kémiai számítások már szorosan kötődnek a matematikához. Az alkalmazott matematikai ismeret itt is az egyenes arányosság, ám mivel a feladat a korábbiakhoz képest egy kicsit más jellegű, ennél a témánál is bemutatok egy mintapéldát. A kémiai számításokat akkor érdemes elővenni a matematikaórán is, ha a kémiatanár jelzi, hogy komoly tudásbeli hiányosságokat tapasztal az egyenes arányosság ezen alkalmazásának terén.

4) *Számítsuk ki, hogy hány gramm kalcium szükséges 20 g kalcium-oxid előállításához!*

Megoldás:

EGYENLET:	*2 Ca*	+	O_2	=	*2 CaO*
ANYAGMENNYISÉG:	*2 mol Ca*		*1 mol* O_2		*2 mol CaO*
TÖMEGEK SZÁMÍTÁSA:	$M_{Ca} = 40\,\frac{g}{mol}$				$M_{CaO} = 56\frac{g}{mol}$
ADOTT, ILLETVE	*80 g*				*112 g*
KERESETT MENNY.:	*x g*				*20 g*

SZÁMÍTÁS az egyenes arányosság alapján: $\frac{x\,g}{80\,g} = \frac{20\,g}{112\,g}$;

amelyből: $x = \frac{20}{112} * 80 \approx 14,29.$

Tehát kb. 14, 29 g kalciumra van szükség 20 g kalcium-oxid előállításához.

(Megjegyzés: A tömegek kiszámításához az m = n * M *összefüggést használtuk, ahol* n *az anyagmennyiséget,* M *pedig – ez a periódusos rendszerből leolvasható – a moláros tömeget jelöli)*

3.1.4. A kémhatás

A kémiában a protonátmenettel járó reakciók (más néven protolitikus folyamatok vagy sav-bázis reakciók) során előkerülő fogalom a kémhatás. A sav-bázis kölcsönhatások során a víz (H_2O) savként és bázisként is viselkedhet, attól föggően, hogy mely másik vegyület molekulájával vagy ionjával – mint reakciópartnerrel – kerül kapcsolatba. Ha egy vizes oldatban az oxóniumionok (H_3O^+) koncentrációja nagyobb, mint a hidroxidionoké (OH^-), akkor savas, ellenkező esetben pedig lúgos kémhatásról beszélünk; a semleges oldatokban és a tiszta vízben pedig a víz ionjainak koncentrációja egyenlő. A vizes oldatok kémhatása így valamely vízion koncentrációjával jellemezhető. [5] Általában az oxómiumion-koncentrációt szokták megadni 10-es alapú hatványként felírva, s ekkor a kitevő -1-szeresét nevezzik pH-nak. A pH lehetséges értékei egy 1-től 14-ig terjedő skálán mozoghatnak, a semleges oldatok pH-ja 7, 7 alatti pH érték savas, 7 feletti pH érték pedig lúgos kémhatást mutat. A pH kiszámításához az oxóniumion-koncentrációt mol/dm^3-ben kell megadni. Ha a hidroxidion-koncentrációt ismerjük, akkor ezen érték 10-es alapú hatványként való felírásánál a kitevő -1-szeresét 14-ből kivonva kapjuk a pH értéket.

A különböző vizes oldatok pH-értékének, illetve kémhatásának meghatározásához szükséges a tizedes törtekkel való számolásban és a hatványozásban való jártasság, valamint a normál alak ismerete. Ezt az alábbi kémiapélda is jól mutatja:

5) *Mennyi a pH-ja annak az oldatnak, amelyben a sósav koncentrációja 0,010 mol/dm^3? [5]*

<u>*Megoldás:*</u>

0,010 mol/dm3 = 10^{-2} mol/dm3

Mivel a sósav esetén megadott koncentráció az oxóniumion-koncentrációt mutatja, az oldat pH-ja (-2)(-1) = 2, tehát az oldat savas kémhatású.*

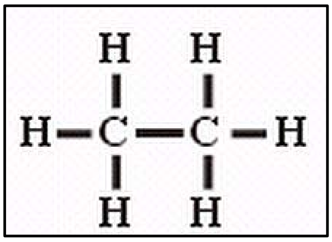
Láthatjuk tehát, hogy a feladat megoldásához szükség van a hatványozás és a normál alak ($10^{-2} = 1 * 10^{-2}$ valójában a 0,010 normál alakja) biztos alkalmazására. Megjegyezném még, hogy a pH – a logaritmus fogalmának ismerete esetén – az oldat oxóniumion koncentrációjának negatív logaritmusaként is definiálható: az oxóniumion-koncentráció tízes alapú logaritmusának ellentettje jelenti a pH-értéket.

3.2. 10. osztály

A 10. osztályos kémia teljes egészében a szerves vegyületekkel foglalkozik, ennek következtében a 10.-es kémiaórákon nem sok matematikai ismeretre van szükség. Bár a kémia tankönyvek adnak fel a 3.1.3. részben tárgyalt reakcióegyenletekkel kapcsolatos számításokat, mivel ezekről korábban már esett szó, ebben a fejezetben nem foglalkozom velük újból. Fontosnak tartom azonban megemlíteni szerves vegyületek gráfokkal való szemléltetését, így ebben a részben főként erről esik szó.

A 10. osztályos kémia tananyag áttekintéséhez Dr. Siposné Dr. Kedves Éva, Horváth Balázs és Péntek Lászlóné *Szerves kémia* [6] című, a Mozaik kiadó gondozásában megjelent tankönyve volt segítségemre.

3.2.1. Szerves vegyületek és gráfok kapcsolata



9. ábra

A 9. ábra (forrás: [16]) az etán (C_2H_6) szerkezetét mutatja. Ez a szerkezeti ábra felfogható gráfként is, melyben az atomok a csúcsokat, a kötések pedig az éleket jelölik. Az egy csúcsból kiinduló élek száma, azaz az adott csúcs fokszáma azt mutatja meg, hogy az egyes atomok hány másik atommal létesítenek kötést. Mivel az etánéhoz hasonló szerkezeti ábrákkal a diákok szinte minden kémiaórán találkoznak, matematikaiórán a gráfok tanításánál feltétlenül ajánlott megemlíteni a gráfok molekulák szerkezeti modelljeivel való kapcsolatát.

4. Biológia

Talán mindenki számára nyilvánvaló, hogy a biológia számos helyen szorosan kapcsolódik a kémiához (pl.: molekuláris- és sejtbiológia), valamint a földrajzhoz (pl.: hőmérséklet, éghajlati övek jellemzői), ám minden bizonnyal kevesebben gondolnák, hogy a biológia néhány területe összefonódik a matematikával is. A következőkben ezeket a kapcsolódási pontokat fogom áttekinteni, hiszen ezáltal lehetségessé válik a biológia alaposabb megértése, továbbá a tanulók megismerkedhetnek a matematika ezen területen történő alkalmazásaival is.

A gimnáziumi tananyag áttekintéséhez Dr. Szerényi Gábor, Dr. Altbäcker Vilmos, Dr. Berend Mihály és Dr. Fazekas György *Biológia I.* [7] és *Biológia II.* [8], valamint Dr. Lénárd Gábor *Biológia II.* [9] és *Biológia III.* [10], a Nemzeti Tankönyvkiadó gondozásában megjelent tankönyvek és a Mozaik kiadó online tanterve [17] voltak segítségemre.

4.1. 10. osztály

10. osztályban a diákok a rendszertan alapjaival; az állatok, a növények és a gombák testével és életműködéseivel ismerkednek meg, ezen témák azonban nem kapcsolhatók a matematikához.

4.2. 11. osztály

A 11. osztályos biológia tananyag egyik fő témaköre a sejtek felépítése, azok anyagcsere folyamatai, valamint a szaporodás és az öröklődés sejttani alapjai, így ezen témák elsősorban a kémiával állnak szoros kapcsolatban. Mivel ezeken az órákon gyakran esik szó a szerves vegyületekről, a diákok itt is hasznát vehetik a 3.2.1. részben már tárgyalt szerves vegyületek és gráfok közötti kapcsolat ismeretének. Az anyag másik fő témája az emberi test, annak részei, az ember önfenntartó életműködései és ezek szabályozása, továbbá alapvető egészségügyi ismeretek. Ezen témák középiskolában történő tárgyalása során azonban nem kerülnek elő matematikához is kapcsolható anyagrészek.

4.3. 12. osztály

12. osztályban a genetika alapjaival, ökológiával és az evolúcuióval foglalkoznak a tanulók. Ellentétben a 10. és 11. osztályos tananyaggal, a 12.-ben tárgyalt témák több helyen is kötődnek a matematikához, így egyes matematikai fogalmak és módszerek ismerete nagy segítséget jelenthet a biológia feladatok megoldásához is. A következőkben ezeket a kapcsolódási pontokat fogom áttekinteni, megvizsgálva, hogy a matematikaórán mikor és hogyan hívhatjuk fel a tanulók figyelmét a matematika biológiai alkalmazásaira.

4.3.1. A genetika alaptörvényei

A DNS molekulájában, mint örökítőanyagban, található gének határozzák meg egy-egy tulajdonság természetét. A működésük következtében az egyed kialakuló külső megjelenését fenotípusnak nevezzük. A mögötte található genetikai háttér, vagyis az egyed génjeinek összessége alkotja az egyed genotípusát. Egy adott génnek több különböző változata létezhet, ezek a génváltozatok az allélok. A haploid sejtekben minden génnek csak egyetlen allélja, míg a diploid sejtekben két allélja lehet jelen. Ha egy diploid sejtben egy meghatározott génhelyet két egyforma allél tölt be, akkor homozigóta, ha pedig két különböző allél tölt be, akkor heterozigóta az egyed az adott génre nézve. Ha a következő nemzedék utódaiban a két szülői tulajdonság közül csak az egyik jelentkezik a fenotípusban, akkor ez a domináns jelleg, míg a másik, rejtve maradó tulajdonság a recesszív. [10] Ha a két eltérő hatású allél között nem alakul ki uralkodó és lappangó viszony, hanem mindkettő kifejti a hatását, akkor a fenotípusban megjelenő tulajdonság köztes, intermedier jellegű lesz. [8]

A genetika törvényszerűségeit elsőként Johann Gregor Mendel osztrák szerzetes, tanár és botanikus vizsgálta a XIX. században. Megfigyeléseit a Mendel-szabályokban foglalta össze. Eszerint (1) az eltérő tulajdonságváltozatú, homozigóta szülők első hibridnemzedékének (F_1) minden egyede egyforma, a nemzedék minden egyede heterozigóta, fenotípusa a domináns-recesszív öröklődésmenetben a domináns tulajdonság, intermedier öröklődéskor pedig az intermedier tulajdonság (uniformitás szabálya); valamint (2) az eltérő tulajdonságváltozatú homozigóta szülők második hibridnemzedékében (F_2) a szülői tulajdonságok szétválnak, mert az F_2 nemzedék egyedei között a heterozigóták mellett a homozigóták is megjelennek (szegregáció szabálya). [8]

A Mendel-törvényekhez kapcsolódó biológia feladatok több matematikai vonatkozást is magukban foglalnak, így az alábbiakban több ilyen jellegű példát is mutatok, kiemelve az egyes feladatok matematikával való kapcsolatát, illetve matematikai tartalmát.

1) *(forrás: [8] és [10])*

a) *A kerti borsónak egymással jól kereszteződő gömbölyű és szögletes magvú változata van. A mag gömbölyűségét kialakító (domináns) allélt jelöljük G-vel, a szögletes magért felelős (recesszív) allélt pedig g-vel. A kerti borsó magalakja domináns-recesszív módon öröklődik. Táblázattal (Punnett-tábla) szemléltesse az F_1 és F_2 nemzedék genotípusait, ha a szülők eltérő tulajdonságváltozatú homozigóták!*

b) *A csodatölcsér növénynek piros, fehér és rózsaszín virágú változata van. A piros színt kialakító allélt jelöljök P-vel, a fehér színért felelős allélt pedig p-vel. A csodatölcsér virágjának színe intermedier módon öröklődik. Táblázattal szemléltesse az F_1 és F_2 nemzedék genotípusait, ha a szülők eltérő tulajdonságváltozatú homozigóták!*

c) *Adja meg a domináns-recesszív és az intermedier öröklés F_2 nemzedékének genotípusainál, valamint fenotípusainál tapasztalt hasadási arányokat!*

d) *A kerti borsó sziklevele sárga vagy zöld lehet. Mendel kísérletei során azt tapasztalta, hogy az F_2 nemzedékben 6022 db sárga sziklevelű és 2001 db zöld sziklevelű borsója termett. Milyen hasadási arányt mutat itt a fenotípus? Milyen típusú öröklődésre következtethetünk ebből?*

e) *Mi annak a valószínűsége, hogy az F_2 nemzedék tagjai közül véletlenszerűen kiválasztott borsó magalakja gömbölyű?*
f) *Mi annak a valószínűsége, hogy a csodatölcsér F_2 nemzedékéből véletlenszerűen kiválasztott növény virága piros vagy rózsaszín?*

<u>*Megoldás:*</u>

a)

szülők	*G*	*G*
g	*Gg*	*Gg*
g	*Gg*	*Gg*

szülők	*G*	*g*
G	*GG*	*Gg*
g	*gG*	*gg*

Az első táblázat az F_1 nemzedék tagjait mutatja. Ezek mind eltérő tulajdonságváltozatú homozigóta szülőktől származnak, így az uniformitás törvénye alapján mind heterozigóták. Az F_2 nemzedék szülei már az F_1 nemzedékből származó heterozigóták, így a szegregáció szabálya szerint F_2-ben homozigóta és heterozigóta egyedek is vannak.

b)

szülők	*P*	*P*
p	*Pp*	*Pp*
p	*Pp*	*Pp*

szülők	*P*	*p*
P	*PP*	*Pp*
p	*pP*	*pp*

Látható, hogy az intermedier öröklődésnél mind az F_1, mind az F_2 nemzedék tagjainak genotípusai megegyeznek a domináns-resesszív öröklődésmenetnél előfordulókkal. Különbséget a fenotípusok fognak jelenteni (c) feladat).

c) *Láttuk tehát, hogy a genotípusok megoszlása azonos a domináns-recesszív és az intermedier öröklődés esetén is. Minkét esetben egy domináns homozigóta, két heterozigóta és egy recesszív homozigóta egyed jön létre, tehát a genotípusoknál tapasztalt hasadási arány egységesen 1 : 2 : 1.*
A fenotípusok szempontjából azonban már más a helyzet. A domináns-recesszív öröklődésnél a GG genotípusú borsó gömbölyű, a Gg (= gG) genotípusú szintén gömbölyű, a gg genotípusú pedig szögletes magvú lesz, tehát itt a fenotípusok hasadási aránya 3 : 1. Ezzel szemben az intermedier öröklődésnél a PP genotípus piros, a Pp (= pP) genotípus rózsaszín, a pp genotípus pedig fehér virágot eredményez, így ebben az esetben a fenotípusok hasadási aránya, a genotípusnál tapasztalthoz hasonlóan, 1 : 2 : 1.

d) A fenotípus hasadási aránya 6022 : 2001, ezt 2001-gyel leosztva 3,01 : 1 arányt kapunk, ami megközelítően annyi, mint a domináns-recesszív öröklődésmenetnél megállapított 3 : 1 – es arány, tehát az öröklődés típusa domináns-recesszív.

e) A gömbölyű magvú borsó genotípusa vagy GG vagy Gg (= gG), ezekből – a táblázat adatai alapján – összesen három van, az utódok száma pedig négy. Tehát azt kapjuk, hogy a keresett valószínűség:

$$P_{gömbölyű} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

f) <u>első megoldás:</u> A piros virágú növények genotípusa PP, ebből – a táblázat alapján – egy darab van; a rózsaszín növények genotípusa pedig Pp (= pP), ebből két darab van; az utódok száma pedig négy. Tehát így a keresett valószínűség:

$$P_{piros} + P_{rózsaszín} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0{,}75.$$

<u>második megoldás:</u> Az, hogy a keresett növény virága piros vagy rózsaszín, felfogható úgy is, hogy nem fehér. A fehér virágú növény genotípusa pp, ebből egy darab van, az utódok száma pedig négy. Így a keresett valószínűség:

$$P_{piros\ vagy\ rózsaszín} = 1 - P_{fehér} = 1 - \frac{1}{4} = 0{,}75.$$

Jól látható, hogy az 1. példa megoldásához több matematikai módszer, fogalom, illetve tétel ismerete és helyes alkalmazása is szükséges. Ezek közül a középiskolás matematika szempontjából a legfontosabbak talán a valószínűségszámítással kapcsolatos kérdések. Az 1/e és 1/f feladatok jó példák a klasszikus valószínűségi modellre, hiszen a kísérlet során véges sok elemi esemény következhet be – a borsós kísérletben például GG, Gg, gG, gg (megjegyzés: bár a GG, Gg és gG genotípus is egyaránt gömbölyű magvú borsót eredményez, mégis itt a genotípusokat tekintjük elemi eseményeknek) – és mindegyik egyforma valószínűséggel ($1/4$). Így a keresett valószínűség meghatározásához alkalmazható a

$$P = \frac{kedvező\ esetek\ száma}{összes\ eset\ száma}$$

képlet. Ezen felül az 1/f példa második megoldásában a kérdéses valószínűség meghatározásához a komplementer esemény (fehér virág) valószínűségét használó

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

tételt is felhasználtuk. A valószínűségszámításon kívül a feladat megoldásához (1/c) szükséges még az aránynak, mint matematikai fogalomnak az ismerete és alkalmazni tudása is. Bár ez a téma középiskolában önálló anyagrészként nem kerül tárgyalásra, mégis számos témakörben (például szakaszok osztópontjai, párhuzamos szelők tétele, súlypont, stb.) szükség van az alkalmazására. Végezetül pedig az 1/d feladatban történő arány „egyszerűsítéséhez” a legnagyobb közös osztó fogalmának és meghatározásának ismerete szükséges, bár a jelen példában ezt nem a számelméletben megszokott módon alkalmaztuk.

Láthatjuk tehát, hogy az 1. feladat matematikai szempontból igen összetettnek mondható, ezért úgy gondolom, hogy egy ilyen példát leginkább a 12.-es érettségi előtti ismétlésnél ajánlott feladni, hiszen ez jó alkalom nem csupán a matematikai, hanem a bilógiai tanulmányok összegzésére/ismétlésére is és kiválóan szemlélteti a matematika más tárgyakban/tudományokban történő alkalmazását.

Az 1. feladatban látott genetikai kísérletekben csak egy tulajdonság allélpárjait vizsgáltuk. Mendel azonban olyan kísérleteket is végzett, melyekben a szülők két tulajdonságban is különböztek egymástól, erre mutat példát az alábbi feladat:

2) *Sárga (SS) és gömbölyű magvú (GG), valamint zöld (ss) és szögletes magvú (gg) homozigóta borsókat keresztezünk egymással. Mindkét tulajdonságpár domináns-recesszív módon öröklődik, sárga szín és a gömbölyű magalak a domináns tulajdonságok.*

a) *Táblázattal szemléltesse az F1 és F2 nemzedék genotípusait!*
b) *Hány egymástól lényegében különböző genotípus keletkezik az F2 nemzedékben?*
c) *Hogyan magyarázható kombinatorikailag az egymástól lényegében különböző genotípusok száma?*

(forrás: [8])

Megoldás:

a)

szülők	*SG*	*SG*
sg	*SsGg*	*SsGg*
sg	*SsGg*	*SsGg*

szülők	*SG*	*Sg*	*sG*	*sg*
SG	*SSGG*	*SSGg*	*SsGG*	*SsGg*
Sg	*SSgG*	*SSgg*	*SsgG*	*Ssgg*
sG	*sSGG*	*sSGg*	*ssGG*	*ssGg*
sg	*sSgG*	*sSgg*	*ssgG*	*ssgg*

Az első táblázat az F1, a második táblázat pedig az F2 nemzedék genotípusait mutatja.

b) *Mivel – ahogy azt már az 1. feladatban is láttuk – az Ss = sS és Gg = gG, ezért az SSGg = SSgG, sSGG = SsGG, sSgg = Ssgg, ssgG = ssGg és sSgG = sSGg = SsgG = SsGg. Ezen felül az SSGG, SSgg, ssGG és ssgg genotípusok mindegyikéből egy-egy egyed jön létre. Így tehát összesen kilencféle különböző genotípus keletkezik az F2 nemzedében.*
c) *A táblázat is jól mutatja, hogy összesen elvileg* $2 * 2 * 2 * 2 = 16$ *genotípus jöhetne létre, ám ahogy azt a b) feladatban láttuk, ezekből csak 9 egymástól különböző van. Ez kombinatorikai úton úgy magyarázható, hogy négy különböző betűnk van (S, s, G, g) és ezeket kell sorbarendezni úgy, hogy az első két helyre csak S/s, a második két helyre csak G/g betűk kerülhetnek. Érdemes tehát „összeragasztani” a betűket és a helyeket is, vagyis így az első helyre az S és s betűk lehetséges kombináció (SS, Ss, sS, ss), a második helyre pedig az G és g*

betűk lehetséges kombinációi (GG, Gg, gG, gg) kerülhetnek. Mivel azonban – ahogy azt korábban már láttuk – Ss = sS és Gg = gG, így az első és a második helyre is 4 helyett csak 3-3 lehetséges „elem” kerülhet, azaz $3 * 3 = 9$ *különböző kombináció lehetséges.*

Láthatjuk tehát, hogy a 2. feladat megoldásához a biológiai ismeretek mellet matematikai háttértudásra is szükség van. Ez a példa jól szemlélteti a kombinatorika más területen történő alkalmazását és így jó motivációként szolgálhat – különösen a biológia iránt érdeklődőknek – ezen matematikai témakör minél alaposabb megismerésére. Hasonlóan az 1. feladathoz, a 2. példát is leginkább 12. osztályban, érettségi előtti ismétlésnél ajánlott feladni, hiszen egyrészt a megoldáshoz szükséges biológia tananyag tárgyalására többnyire 12. osztályban kerül sor, másrészt pedig a feladat elsősorban azt méri, hogy a diákok mennyire értették meg a kombinatorikát.

A fenti két példán kívül még számos genetikával kacsolatos, matematikai ismeretekre épülő feladat kreálható. További feladatokat azonban nem adok, hiszen megoldásukhoz matematikai szempontból csak a már tárgyalt kombinatorika, valószínűségszámítás és arányok megfelelő alkalmazni tudása szükséges, biológiai szempontból viszont már bonyolultabb ismeretekre van szükség, ami túlmutat a jelen dolgozat tárgykörén. Úgy gondolom, hogy az 1. és 2. példa matematikai hátterének valódi megértése a biológia szempontjából nehezebb példák megoldására is felkészíti a tanulókat.

4.3.2. Populációk szerkezete

Az azonos fajhoz tartozó élőlények adott helyen és időben együtt élő és egymás között szaporodó egyedei alkotják a populációt. [10] Egy populáció szerkezetének egyik fontos jellemzője a koreloszlás mely a populációt alkotó egyedek különböző korosztályainak egymáshoz viszonyított aránya. A koreloszlás szemléltetésére a 2.1.7. részben már bemutatott korfát használják. A korfa azonban nem csupán a népesség, hanem különböző állatok populációinak bemutatására is alkalmas, így a statisztika tanításánál az állatok korfájával kapcsolatban feladhatók diagramelemzési feladatok.

4.3.3. Biomok

Az éghajlati övezetekhez alkalmazkodva, zonálisan helyezkednek el a bioszférát alkotó nagy élőlényközösségek, a biomok. [10] Az egyes éghajlati övekben különféle biomok alkaultak ki, így például a trópusi éghajlati öv biomjai a trópusi esőerdők, a monszunerdők és a szavannák; míg a mérsékelt égöv biomjai a füves puszták, a lombos erdők és a tűlevelű erdők. Az egyes biomok jellemzéséhez tehát szükséges a földrajznál megismert éghajlati övek éghajlati diagramjainak ismerete és elemzése. A 2.1.6. feladatban már láttunk példát ilyen grafikon elemzésével kapcsolatos feladatra. Bár a biológia nem igényli a földrajznál látott adatok (pl.: középhőmérsékletek) meghatározását, nagyon fontos, hogy a diákok képesek legyenek a grafikon adatainak leolvasására és értelmezésére. Mivel tehát az éghajlati diagramokat a földrajz és a biológia is gyakran használja, mindenképpen ajánlott a velük való foglalkozás matematikaórán, a statisztika tanításánál is.

4.3.4. A populációk genetikai egyensúlya

A populáció génállománya a populációban különböző gyakorisággal előforduló allélok összessége. Amennyiben a populáció egyedeinek egymás között történő szaporodása az egymást követő nemzedékek során külső hatásoktól mentes, akkor a géngyakoriság nem változik meg, vagyis az adott populáció genetikai egyensúlya állandó. Ezen – a populációk genetikai egyensúlyáról szóló – megfigyelést Hardy-Weinberg törvénynek is szokták nevezni, ugyanis a felfedezés Godfrey Harold Hardy angol matematikus és Wilhelm Weinberg német orvos nevéhez fűződik. A Hardy-Weinberg törvény alapján tehát ha egy adott génnek egy populációban kétféle allélja létezik úgy, hogy az egyik allél (A) előfordulásának relatív gyakorisága p, a másiké (a) pedig q, akkor az A allélt tartalmazó petesejtek, valamint hímivarsejtek relatív gyakorisága is p, az a allélt tartalmazóké pedig q. Tehát a petesejtek és a hímivarsejtek összeségére is fennáll a következő összefüggés:

$$p + q = 1,$$

Mivel elméletben bármely hímivarsejt bármely petesejtet megtermékenyítheti, ezért fennáll a következő matematikai összefüggés:

$$(p + q) * (p + q) = p^2 + 2pq + q^2 = 1,$$

ahol p^2 az AA, $2pq$ az Aa, q^2 pedig aa genotípus kialakulásának valószínűsége.

szülők	A	a
A	AA	Aa
a	aA	aa

→

szülők	p	q
p	p^2	pq
q	pq	q^2

Ekkor a fenti két táblázat [forrás: 10] alapján:

az A allél előfordulásának relatív gyakorisága:

$$p^2 + \frac{2pq}{2} = p^2 + pq = p^2 + p(1 - p) = p^2 + p - p^2 = p,$$

és hasonlóképpen az a allél előfordulásának relatív gyakorisága:

$$q^2 + \frac{2pq}{2} = q^2 + pq = q^2 + q(1 - q) = q^2 + q - q^2 = q,$$

azaz valóban nem változott a két allél előfordulásának relatív gyakorisága a következő nemzedékben sem.

A fentiekből jól látható, hogy a genetika ezen törvénye szoros kapcsolatban áll a matematikával. Egy jó képességű diákokból álló, emelt óraszámú csoportban például akár a valószínűségszámítás és relatív gyakoriság kapcsán (feltéve hogy biológia órán már esett szó genetikáról), akár egy 12.-es érettségi előtti ismétlés alkalmával érdemes feladni, hogy az egyes allélok relatív gyakoriságának ismeretében határozzák meg, hogy hogyan változik az allélok előfordulásának gyakorisága a nemzedékek során. Elsőként ajánlott p és q helyett konkrét számokat megadni, majd ezután meg lehet nézni, hogy mi történik általános esetben.

A Hardy-Weinberg törvény levezetése mellett annak alkalmazásához is matematikai ismeretekre van szükség. Az alábbi feladat megoldásához – annak ellenére, hogy egy biológia témazáró dolgozatból (forrás: [18]) való – a fent látott biológiai alapismereteken kívül elsősorban matematikai gondolkodásmódra van szükség.

3) *A festékhiányos állapotot, az albinizmust okozó allél (*a*) recesszív a normális testszínezetet kialakító* A *alléllal szemben. Két egérpopulációban megvizsgálták az albinizmus előfordulását. Az I. populáció genetikai egyensúlyban van, benne 500 egyed között 5 albínót találtak. A II. populációban 500 egér közül 255 normális testszínezetű volt. Azt is kimutatták, hogy a normális testszínezetű egyedek 60 %-a volt homozigóta.*

a) *Az I. populáció hány százaléka heterozigóta?*
b) *Döntse el, hogy a II. egérpopuláció genetikai egyensúlyban van-e! Válaszát az adatok felhasználásával, számolással indokolja!*
c) *Számolja ki, mennyi a recesszív allél relatív gyakorisága a II. populációban!*

Megoldás:

a) *A populációban – ahogy azt korábban már láttuk –* AA, Aa *és* aa *genotípusú egyedek lehetnek. Mivel a testszín domináns-recesszív módon öröklődik és az albínó tulajdonság a recesszív, így csak az aa genotípusú egyedek lesznek albínók. Ez azt jelenti, hogy az 5 albínó egyed genotípusa* aa. *Ha a normális testszínt kialakító allél relatív gyakoriságát p-vel, az albínó színt kialakító allélét pedig q-val jelöljük, akkor a Hardy-Weinberg törvény és a feladat adatai alapján azt kapjuk, hogy* $\frac{5}{500} = \frac{1}{100} = 0{,}01 = q^2$*, ahonnan* $q = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$. *Ebből pedig* $p = 1 - q = 0{,}9$.
Szintén Hardy-Weinberg törvényéből tudjuk, hogy az Aa, *vagyis a heterozigóta, genotípus előfordulásának valószínűsége* $2pq = 2 * 0{,}1 * 0{,}9 = 0{,}18$.
Tehát az az I. populáció 18%-a heterozigóta.

b) *Az albínó színért felelős allél előfordulásának relatív gyakorisága genetikai egyensúlyban* $q = \sqrt{\frac{500-255}{500}} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$*; ebből pedig a másik allél relatív gyakorisága* $p = 1 - q = 0{,}3$ *lenne. Eszerint a homozigóta normális testszínezetűek száma a Hardy-Weinberg törvény alapján* $0{,}3^2 * 500 = 45$.
Azonban a normális testszínezetű egyedek száma 255, az adatok szerint ennek 60%-a, vagyis $255 * 0{,}6 = 153$ *homozigóta (*AA *gentotípusú), ez pedig jóval több, mint* 45.
Tehát a II. egérpopuláció nincs genetikai egyensúlyban.

c) *A recesszív allél relatív gyakoriságának meghatározásához szükséges az* aa *és* Aa *genotípusú egyedek számának ismerete. A b) feladat eredményeit felhasználva azt* *kapjuk, hogy* 245 aa *és* $255 - 153 = 102$ Aa *genotípusú egyed van a populációban. Tehát a recesszív* (a) *allél előfordulásának relatív gyakorisága:*

$$\frac{245+\frac{102}{2}}{500} = \frac{245+51}{500} = \frac{296}{500} = 0{,}592.$$

Láthatjuk, hogy a 3. példa mind matematikai, mind biológiai szempontból viszonylag összetett, így ebben a formában történő feladása matematikaórán csak akkor ajánlott, ha a diákok jól ismerik a megoldáshoz szükséges biológiai fogalmakat. Azért választottam mégis ezt a feladatot, mert egy biológia témazáró példasorból való, tehát a biológia iránt komolyabban érdeklődők így is találkozhatnak vele. Mindazonáltal a példa adatai alapján egyszerűbb, kevesebb biológiai ismeretet igénylő, a matematikához szorosan kapcsolódó feladatok és készíthetők.

Egy gyengébb képességű csoportban feladható például az albínó, illetve a normális testszínezetű egerek gyakoriságának, valamint relatív gyakoriságának meghatározása az egyes populációkban; majd a kapott adatok diagramon való szemléltetése. Ez a feladat – bár igen egyszerű – még a kevésbé tehetséges diákoknak is betekintést enged a matematika egy más tudományágban történő fontos felhasználására.

Ettől már valamivel bonyolultabb – az eredetinél azonban mégis könnyebb – lesz a feladat, ha például azt kérdezzük meg, hogy mekkora a normális testszínt, illetve az albínó tulajdonságot kialakító allélok előfordulásának relatív gyakorisága az I. populációban. Ahogy az a) feladat megoldásában látható, ennek meghatározásához már alaposabb biológiai ismeretek és a Hardy-Weinberg törvény alkalmazása is szükséges, de nem igényel olyan összetett gondolkodást, mint a b), illetve a c) feladat.

Összességében tehát az állapítható meg, hogy a genetika rendkívül szoros kapcsolatban áll a kombinatorikával és a valószínűségszámítással, így ezen témák tanításának alkalmával javasolt néhány hasonló jellegű példa bemutatása/feladása is. Ez elsősorban a biológia iránt érdeklődőket motivál(hat)ja a matematika tanulására, ám mivel a genetika és a genetikai kutatások manapság egyre nagyobb támogatottságnak és közfigyelemnek örvendenek, még a matematika iránt kevéssé elkötelezett tanulók figyelme is felkelthető.

5. Összegzés

Dolgozatom célja a középiskolás földrajz, kémia, illetve biológia matematikával kapcsolatba hozható témáinak áttekintése volt. Az egyes fejezetekben sorra vettem a három tárgy középiskolai tananyagának matematikai vonatkozású részeit, javaslatot tettem ezen részek matematikaórán való tárgyalására, valamint ennek elősegítése érdekében lehetséges példafeladatokat is mutattam az egyes témákhoz.

Úgy vélem, hogy ha ezen összefüggésekre matematikaórán is rávilágítunk, akkor számos – a matematika iránt kevésbé, a földrajz, biológia vagy kémia iránt azonban annál inkább érdeklődő – diákot motiválhatunk a matematika eredményesebb tanulására, hiszen így számukra is gyakorlati értelmet nyerhet több absztraknak és használhatatlannak vélt matematikai ismeret.

Fontos azonban azt is megjegyezni, hogy az előző fejezetekben ismertetett javaslatok megvalósítása sokszor ütközhet nehézségekbe. Gyakran előfordul ugyanis, hogy az egyes szaktárgyakban hamarabb lenne szükség bizonyos matematikai ismeretek alkalmazására, mint ahogy azokról matematikaórán szó esne. Megeshet továbbá e helyzet fordítottja is; vagyis az, hogy matematikaórán egy adott témánál nem hivatkozhatunk annak más tárggyal való kapcsolatára, ugyanis az adott tárgyból még nem került sor a kérdéses ismeretek elsajátítására.

Mindazonáltal az a meglátásom, hogy ezen nehézségek a szaktanárok közötti kooperáció segítségével nagy mértékben orvosolhatóak. Amennyiben a különböző szaktárgyakat oktató tanárok hajlandóak ilyen együttműködésre, esetlegesen a tanmenet kisebb átrendezésére, akkor jó eséllyel érhető el a diákok motiválása nem csupán a matematika, de a tárgyalt három természettudományos tárgy eredményes tanulására is.

6. Irodalomjegyzék

[1] Nemerkényi Antal, Sárfalvi Béla, Általános természetföldrajz a gimnáziumok számára, *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest* (2006).

[2] Ütősné Visi Judit, Földrajz Érettségi Feladatgyűjtemény, *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest* (2005).

[3] Hortobágyi I., Marosvári P., Pálmay L., Pósfai P., Siposs A., Vancsó Ö., Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény I., *Konsept-H Könyvkiadó, Piliscsaba* (2003).

[4] Jónás Ilona, Pál Viktor, Vízvári Albertné, Társadalomföldrajz és globális problémák, *Mozaik Kiadó, Szeged* (2003).

[5] Dr. Siposné Dr. Kedves Éva, Horváth Balázs, Péntek Lászlóné, Általános Kémia, *Mozaik Kiadó, Szeged* (2007).

[6] Dr. Siposné Dr. Kedves Éva, Horváth Balázs, Péntek Lászlóné, Szerves Kémia, *Mozaik Kiadó, Szeged* (2003).

[7] Dr. Szerényi G., Dr. Altbäcker V., Dr. Berend M., Dr. Fazekas Gy., Biológia I., *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest* (2003).

[8] Berend M., Dr. Fazekas Gy., Biológia II., *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest* (2003).

[9] Dr. Lénárd Gábor, Biológia II., *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest* (2002).

[10] Dr. Lénárd Gábor, Biológia III., *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest* (2003).

[11] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J., Vincze I., Sokszínű Matematika 9, *Mozaik Kiadó, Szeged* (2004).

[12] Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia, Matematika 10. a gimnáziumok számára, *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest* (2003).

[13] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J., Vincze I., Sokszínű Matematika 11, *Mozaik Kiadó, Szeged* (2006).

A képek forrásai

[14] http://termtud.akg.hu/okt/7/idojaras/6eghok.htm

[15] http://www.biologycorner.com/resources/population_pyramid4.gif

[16] http://www.sulinet.hu/tovabbtan/felveteli/2001/12het/kemia/kemia12.html

Egyéb internetes források

[17] http://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal

[18] http://www.sulinet.hu/tovabbtan/felveteli/2001/tembiosz.html