ELTE
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZAKDOLGOZAT

FELADATOK TÖBBFÉLE MEGOLDÁSSAL

Témavezető:
Ambrus Gabriella
egyetemi adjunktus
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Készítette:
Tóth Enikő
Matematika BSc

Budapest, 2009

TARTALOMJEGYZÉK

Irodalomjegyzék

A kilenc megoldásos feladat:

Módszertani lapok, Matematika,1. évfolyam 3. szám, 1994 december, 8. – 15. oldal

Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, ISBN 963 9132-50-0

23. Területátalakítások fejezet, 105. oldal

31. Teljes indukció fejezet, 159. oldal

KöMaL feladatok és megoldások az alábbi honlapról:

www.komal.hu (letöltés időpontja: 2007. október 10., illetve 2008 szeptember 28.)

Abacus feladatok az alábbi honlapról:

http://www.mategye.hu/index_1024.php (letöltés időpontja: 2007. október 12.)

Feuerbach-kör leírás és ábrája:

http://hu.wikipedia.org/wiki/Feuerbach-k%C3%B6r (letöltés időpontja: 2009. április 4.)

Elemi matematika feladat:

Az Elemi matematika 2 kurzus kitűzött feladatai közül az alábbi honlapról:

http://mathdid.elte.hu/html/elemibsc.html (letöltés időpontja: 2008. március 25.)

GeoGebra rajzoló program:

www.geogebra.org (letöltés időpontja: 2009. május 20.)

Bevezető

A szakdolgozati témám úgy választottam, hogy a kiírt lehetőségek közül megnéztem, melyikben tudom a legtöbbet adni magamból. A „Feladatok többféle megoldással” című téma azért tetszett meg, hiszen annak idején az elemi matematika kurzusaimon, mindig hasonló stílusban próbáltam megoldani a beadandóimat.

A téma feldolgozása előtt a témavezető megkérdezte tőlem és a többi szakdolgozójától, hogy mit szeretnénk elérni a dolgozatunk megírásával. Nos én ekkor az alábbi válaszokat adtam:

Mindenek előtt talán a legfontosabb számomra, hogy önmagam fejlesszem. A tanári pályán, melyet választottam, úgy látom nagyon fontos az, hogy széles legyen a látóköre a tanárnak. Ezt azért tartom ilyen fontosnak, mert bármikor előfordulhat, hogy egy gyerek az órán egy másfajta, más jellegű, vagy más matematikai eszközt használó megoldással áll elő. Ekkor erre nem szabad a tanárnak negatívan reagálnia, hanem képesnek kell lennie arra, hogy felülvizsgálja, vajon a diák által mutatott módszer annak a feladatnak a megoldásához megfelelő úton halad-e. Ez persze nem jelenti azt, hogy képesnek kell lennie bármely apró mozzanatot ott helyben ellenőrizni, hanem a logikai gondolatmenet követése az, ami szerintem fontos. Ehhez a tanár számára, egy mélyebb, szövedékesebb, összeszedettebb háttértudás szükséges. Ez egyben magabiztosabbá teheti a tanárt is, hiszen biztosabb a tudása; akár úgy is mondhatnánk, hogy szakmai biztonságot nyújt neki.

Ezek mellett saját észrevételeimből kiindulva, a szakdolgozatom megírása előtt úgy gondoltam, ez a téma megfelelő arra, hogy akár a laikusoknak is megmutassuk, milyen szép és sokszínű a matematika. Ez számomra nagyon fontos, hiszen motiválni kell a gyereket, mert különben hajlamosak arra, hogy lebecsüljék a matematika tantárgyat, amely sokak szemében „csak képletekből áll”.

Szakdolgozatom anyaga inkább a matematika szakkör, emelt szintű érettségi, valamint tanulmányi versenyek nehézségi szintjéhez igazodik.

Miközben a dolgozatomat írtam, elgondolkoztam azon, hogy mi lehet még, ami a feladatok többféle megoldására, vagy többféle megoldás bemutatására ösztönözhet egy tanárt. Ennek megválaszolására a legmegfelelőbb módszernek azt láttam, hogy megkérdezem egy tanárom véleményét erről, hiszen nekem még nincsen tanítási tapasztalatom. A választás Pálmay Lóránt tanár úrra esett, mivel tőle sokszor hallhattuk, hogy középiskolában tanított, illetve szakkört vezetett.

Pálmay tanár úrral készítettem egy villáminterjút április elején, melyből kiderült, hogy a tanár úr körül-belül 39 évig tartott szakkört, 1955 és 1976 között volt osztálya a Szent László Gimnáziumban, ezen felül 1995 óta zsűrielnök tanulmányi versenyeken. Ezek után úgy gondoltam, hogy tényleg a megfelelő emberhez fordultam a kérdésemmel, mely így hangzik: Hogyan jelenik meg a gyakorlati oktatásban a feladatok többféle megoldása, és ez miért jó?

A legelső és legfontosabb dolog, amire felhívta a figyelmemet az volt, hogy a feladatok többféle megoldását nem érdemes erőltetni, illetve felhozni egy gyengébb képességű osztályban, mivel általában az ilyen gyerekek számára ez mást mutat. Ugyanis, vegyük Pálmay tanár úr példáját: a Pitagorasz-tétel bizonyítása. A gyengébb matematikai képességekkel rendelkező ám rendkívül szorgalmas diákok ezekből a bizonyításokban nem azt szűrik le, hogy több oldalról is meg lehet egy problémát közelíteni, hanem azt, hogy itt van még egy másik bizonyítás is, amit meg kell tanulni. Ez abból is ered, hogy a matematikából nem olyan erős diákok „félnek a bizonyítástól, számukra egyszerűbb a számolás”.

Ezek szerint a korábbi gondolat, ami bennem is megfogalmazódott tényleg igaz: a feladatok többféle megoldásainak alkalmazása vagy emelt matematika óraszámú osztályban, vagy szakkörön, esetleg emelt szintű érettségi előkészítőn célszerű. Ezek után a tanár úr elkezdte taglalni azt, hogyan is jelent meg ez az ő szakkörén, és miért alkalmazta ezt.

Elsőként azt említette Pálmay Lóránt tanár úr, hogy amikor valaki nekilát egy matematika versenyen egy feladatnak elképzelhető, nem tud elindítani olyan gondolatmenetet, amely eljuttatja a feladat megoldásáig. Ezért lényeges, hogy lássák a gyerekek, „érdemes nekifogni a nehezebb feladatnak is”, hiszen elképzelhető, hogy mégis be tudja mondjuk bizonyítani. A versenyre való felkészülést szakkör keretében szokták megpróbálni, így érthető, hogy miért fontos ezen a téren a több megoldás alkalmazása. Ám kihangsúlyozandó, hogy ha például egy bizonyításos jellegű geometriai feladat második, illetve sokadik megoldása nagyon bonyolult, akkor azt még szakköri szinten sem érdemes bemutatni. Lényeges dolog, hogy próbáljuk felismerni, illetve kiválasztani, melyek azok a feladatok, amelyeket a gyerekek biztosan meg tudnak oldani, és ne állítsuk őket túl nagy feladat elé.

A tanár úr szerint mind a geometriai, mind a kombinatorikai, illetve számelméleti feladatokban látványosan megjelennek a több megoldásos feladatok. „A geometria terén gondoljunk az elemi geometria, a trigonometria, a koordinátageometria vagy vektorok felhasználásával történő bizonyításokra. A számelméletben az osztó párok vagy osztók száma alkalmazható, illetve az oszthatósággal kapcsolatos bizonyítások is megoldhatók teljes indukció mellett osztási maradékok alkalmazásával is.”

Végül pedig a tanár úrtól megtudtam egy olyan dolgot is, amit magamtól nem gondoltam volna. Szakkörvezető évei alatt tapasztalta ugyanis az alábbit az egyik csoportjában: Egy-két feladat megoldásánál a diákok másképpen gondolkoztak, így több megoldás is született belőle adott feladatra. Ezek után elindult egy folyamat: maguk kezdték el keresni, hogy azt a feladatot nem lehet-e másféleképpen megoldani. Ők kezdték el maguktól gyűjteni a különböző megoldásokat, sőt még versenyezni is elkezdtek azon, hogy ki talál több megoldást, illetve ki találja meg a legegyszerűbbet, a legszebbet.

A tanár úr gondolatai megerősítettek abban, hogy a többféle megoldás bemutatása és együttes kidolgozása igen hatékony motivációs módszer. Ez igazolta azt a célkitűzést, amelyet szakdolgozatom megkezdésekor jelöltem meg: szeretném majd megmutatni a matematika sokszínűségét a diákoknak, ha tanár leszek. Úgy gondolom, hogy egyszerűbb feladatok többféle megoldása segítheti a matematikában különösebb tehetséget nem mutató diákokat is a tárgy megértésében, megkedvelésében.

Ezúton is szeretném megköszönni Pálmay Lóránt tanár úrnak a segítőkészségét, hiszen sok értékes információt kaptam tőle a gyakorlati tanításra vonatkozóan témámmal kapcsolatban.

Dolgozatom első részében bemutatom azt a feladatot, amellyel először ismerkedtem meg a témaválasztás után. Ezt követi a legterjedelmesebb rész, melyben különböző jellegű feladatokat dolgozok fel, többféle megoldással. Ezeknél a feladatoknál mindig szerepel, hogy milyen forrásból vettem a megoldást, illetve amit magam készítettem, annál azt is jelöltem. Végül összeállítottam egy olyan feladatsort, amely egy több „megoldásos feladathoz” próbál segítséget nyújtani a diákoknak abban, hogy ennek átgondolása után az eredeti feladat minél több megoldást megtalálják.

Egy szélsőérték feladat kilenc megoldással

Mikor elkezdtem a szakdolgozati témán gondolkozni, akkor ez a feladat volt az, amellyel először megismerkedtem a témakörben. Nagyon megtetszett nekem, hogy egy feladatot ennyiféleképpen is meg lehet oldani. Úgy gondolom, végül ezért is maradtam ennél a témánál. Talán az egész időszak alatt, amíg a szakdolgozatommal foglalkoztam, ez volt legtöbb „geometriai látást” igénylő feladat. Előrebocsátom, hogy ez nem egy kifejezetten könnyű feladat szerintem, de megéri végiggondolni a megoldásokat, ezért is tettem bele a dolgozatomban kiegészítésként.

A feladat így hangzik: *Adott kerületű derékszögű háromszögek közül melyiknek minimális az átfogója?*

A válasz pedig röviden: Az, amelyik egyenlőszárú derékszögű háromszög az adott kerülettel.

Eredetileg egy régi 8.-os KMBK (Kis Matematikusok Baráti Köre) feladatlapon jelent meg. A kilenc megoldásos verzióját Ambrus Gabriella készítette el, aki az eredetileg megadott megoldásokat különböző források alapján kiegészítette továbbiakkal, valamint még néhányat készített is hozzájuk. Így jött össze összesen a kilenc.

Mikor végignéztem a feladat megoldásait (lásd mellékletben) mindenek előtt elcsodálkoztam, hiszen én magam valószínűnek tartom, hogy még gimnazistaként sem lettem volna képes megoldani ezt a feladatot, talán még egyféleképpen sem. Az elemi geometriai megoldásokat tartom kifejezetten nehéznek. A számtani és négyzetes középre, valamint a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenségekkel történő megoldások számomra érthetőbbek, kedvesebbek.

Mindenesetre ezen felbuzdulva kezdtem el írni a szakdolgozatomat, amelyben „sajnos” a legtöbb megoldással rendelkező feladat, egy „mindössze” öt megoldással bíró bizonyítás lett.

FELADATOK TÖBBFÉLE MEGOLDÁSSAL

1. Az első feladatok

Ezeket a feladatokat témavezetőm adta kezdetként, hogy legyen miből elindulnom. Eredetileg 6 feladatot kaptam, ezekből ennyit sikerült megcsinálnom. Itt az összes megoldás a sajátom, hiszen nem kaptam hozzá semmilyen könyvet, vagy forrást amelyben esetleg láttam volna valamelyiket.

I. feladat:

Bizonyítandó, hogy n + 4 nem osztója $n^2 + 8n + 15$-nek n természetes szám esetén!

1. megoldás:

$n^2 + 8n + 15 = n^2 + 8n + 16 - 1$

$(n + 4)^2 = n^2 + 8n + 16$

Tehát, ha $n + 4 \mid n^2 + 8n + 15$ (és tudjuk, hogy $(n + 4)^2$ a fenti kifejezéssel egyenlő), akkor n + 4-nek osztania kell a két kifejezés különbségét is, azaz

$n + 4 \mid (n^2 + 8n + 16) - (n^2 + 8n + 15)$, így $n + 4 \mid 1$ adódna, ami ellentmondás bármely $n \in$ **N.**

2. megoldás:

Fogjuk fel a feladatot az alábbi módon: adott két polinom **N** felett. Be kell látni, hogy n + 4 nem osztja $n^2 + 8n + 15$-et. Erre a legegyszerűbb módszer a polinomok maradékos osztása.

$(n^2 + 8n + 15) : (n + 4) = n + 4$

$\underline{-(n^2 + 4n)\quad}$

$\quad 4n + 15$

$\quad \underline{-(4n + 16)}$

$\qquad \boxed{-1}$ → nem osztható maradék nélkül

3. megoldás:

$n^2 + 8n + 15$ felfogható akár egy függvényként is, ezzel a feladat így értelmezhető: Vizsgáljuk az adott kifejezés gyökeit. Amennyiben ezek közt szerepel a 4, mint gyöktényező, akkor osztja az n + 4.

Ekkor oldjuk meg az $n^2 + 8n + 15 = 0$ egyenletet.

$n_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot 15}}{2}=\frac{-8\pm 2}{2}$ → $n_1=-5$, $n_2=-3$

Tehát nem írható fel (n + 4)(n + c) alakban, mivel a 4 nem gyöke.

A megoldások értékelése:

Számomra az első megoldás volt az, ami elsőre szembe ötlött. Lehet, hogy annak köszönhető a szívemhez közel áll a számelmélet. Ha egy ilyen feladat akkor szerepel a középiskolában, mikor a polinomokat tanítják, akkor inkább a második megoldás lehet az, amit egy középiskolás inkább adna.

A harmadik megoldás egy jó trükköt alkalmaz. Szerintem így utólag visszagondolva ez a legkönnyebb megoldási mód.

II. feladat:

Legyen $n\geq 2$ természetes szám. Bizonyítandó, hogy $10 \mid 2^{2^n}-6$ **!**

1. megoldás:

$10 \mid 2^{2^n}-6 \Leftrightarrow 2 \mid 2^{2^n}-6$, és $5 \mid 2^{2^n}-6$

Az jól látható, hogy a kettő osztja a fenti kifejezést, mivel egy kettőhatvány és egy kettővel osztható szám különbsége mindig osztható kettővel.

Azt kell belátni, hogy a kifejezést az öt is osztja.

$2^{2^n}-6=2^{2^n}-5-1$

Ebből az átírásból jól látszik, hogy a fenti kifejezés akkor lesz osztható 5-tel, ha 2^{2^n} öttel osztva 1 maradékot ad.

Ennek belátására alkalmazzunk teljes indukciót.

n = 2-re 2^4 = 16 = 15 + 1

n = 3-ra 2^8 = 126 = 125 + 1

Eddig úgy tűnik, hogy igaz a feltevésünk.

Tegyük fel, hogy n-re tudjuk, hogy 2^{2^n} 5-tel osztva 1 maradékot ad.

n + 1-re:

$2^{2^{n+1}}=2^{2^n}=\left(2^{2^n}\right)^2$ →mivel a zárójelen belüli rész egy maradékot ad, ezért ennek négyzete s egy maradékot fog adni. Az állítást tehát beláttuk.

2. megoldás:

Mivel $2^{2^2} = 16$, ezért próbáljuk meg felírni a kifejezést 16 hatványaként!

Átírható a kifejezés 16^k-on alakba, ahol k az alábbi módon megadható:

$$2^{2^n} = 16^k \Leftrightarrow 2^{2^n} = 2^{4k} \Leftrightarrow 2^n = 4k \Rightarrow k = \frac{2^n}{4}$$

Valóban jó a $16^k = 2^{2^n}$ átírás, ugyanis $2^{2^n} = 2^{4k}$ alakban írható, hiszen a kitevőben levő kettőhatvány osztható 4-gyel ($n > 1$).

16^k hatványai 6-ra végződnek. Ennek oka, k = 1-re a 16 6-ra végződik, és a hatványozás során az utolsó számjegy mindig 6-os ilyen esetben.

Ebből már következik az állítás.

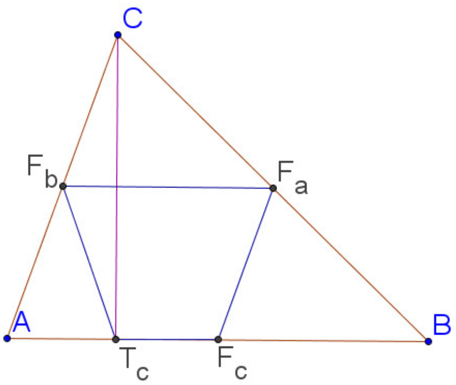
A megoldások értékelése:

Ez a feladat szerintem kifejezetten nem könnyű feladat, hiszen egy oszthatósággal kapcsolatos feladatban egyszerre csak egy trükköt szoktak alkalmaznia középiskola gyakorlatban, ám ez az első esetben egy oszthatóság kettébontása mellett még a teljes indukciót is alkalmazza. A második megoldás pedig olyan „cselt" alkalmaz, amely hosszas gondolkodás után jutott az eszembe, és bárki, aki látta nagyon bravúrosnak tartotta. Nekem személy szerint a második megoldást sokkal nehezebb volt megtalálni, de visszagondolva lehet, hogy éppen ez a könnyebb.

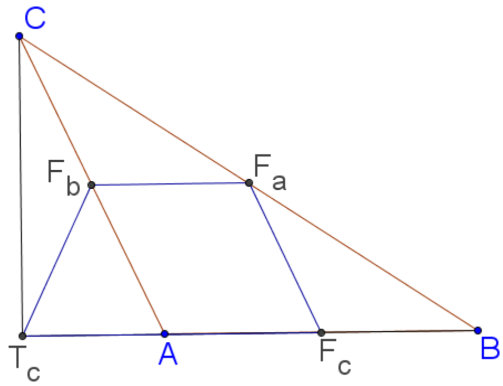
III. feladat

Bizonyítandó, hogy tetszőleges ABC háromszögben az oldalfelező pontok és az egyik oldalhoz tartozó magasság talppontja húrtrapézt határoz meg!

Készítsünk ábrát a feladat megoldása előtt hegyes- és tompaszögű háromszögre:
(1. és 2. ábrák)



1. ábra



2. ábra

Legyen F_a BC, F_b AC és F_c AB felezőpontja, valamint T_c a C oldalhoz tartozó magasság talppontja. Azt állítjuk, hogy **$T_cF_cF_aF_b$ négyszög húrtrapéz**.

1. megoldás:

ABC háromszögben F_a, F_b és F_c felezőpontok az oldalakon, ezért F_aF_b párhuzamos és fele akkora, mint AB. Hasonlóan viszonyul F_aF_c AC-hez, illetve F_bF_c BC-hez.
Ebből tudjuk, hogy trapéz az alakzat, hiszen a fenti jelölések szerint $F_aF_b \parallel AB$, valamint $AB \parallel T_cF_c$ (mivel egy egyenesen vannak) $\rightarrow F_aF_b \parallel T_cF_c$.
Azt kell még belátni például, hogy $F_cT_cF_b\angle = T_cF_cF_a\angle$
$AF_b \parallel F_aF_c \rightarrow AF_bF_aF_c$ egy paralelogramma, tehát $F_aF_cA\angle = AF_bF_a\angle$, valamint $F_bAT_c\angle = F_cF_aF_b$
Ezen kívül még az is igaz, hogy $AF_bT_c\Delta$ egyenlőszárú, ugyanis F_aF_b egyenesére tükrözve C-t éppen T_c-t kapjuk, mivel F_aF_b középvonalvonal, ezért ugyanolyan messze van AB egyenesétől, mint a C-n át húzott, AB-vel párhuzamos egyenestől. Így mivel F_b rajta van a tükörtengelyen az F_aF_b-re vett tükrözésnél, ezért $|F_bC|=|F_bT_c|$.

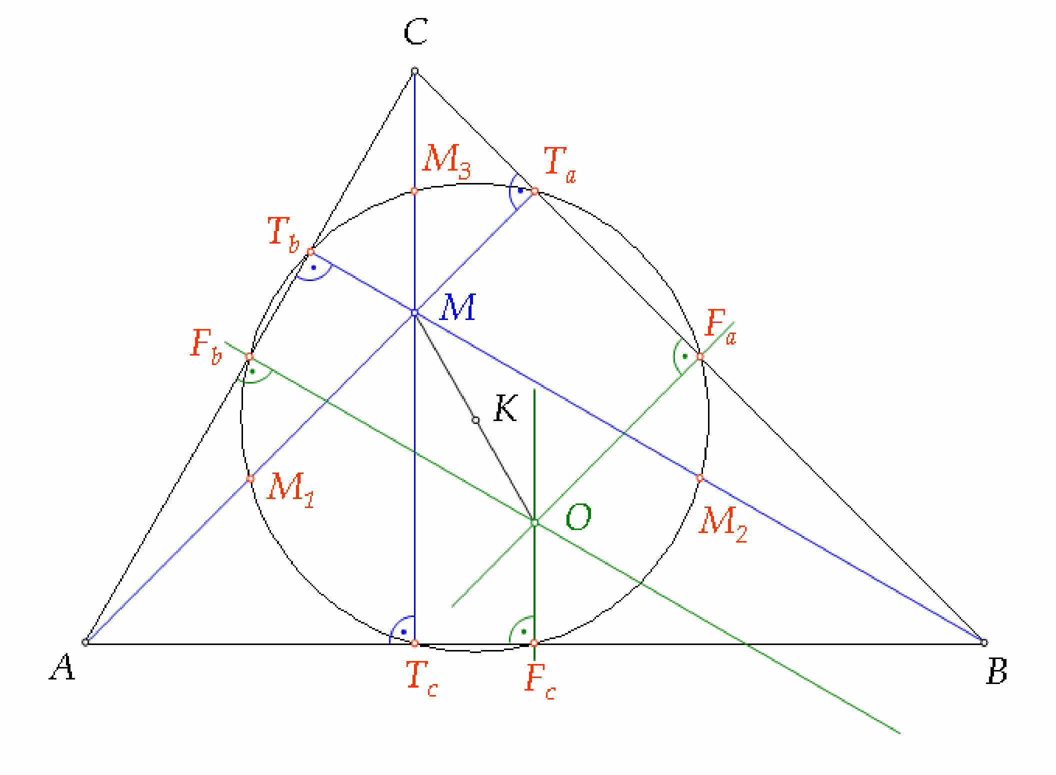
Tehát ez egy húrtrapéz.

2. megoldás:

Ez a bizonyítás a Feuerbach-körön alapul.

Egy középiskolai szakkör keretében már megtanítható a Feuerbach-kör, vagy kilenc pont köre. Azt a kört, amely tartalmazza egy háromszög oldalfelezőpontjait (3 darab), a magasságvonalainak talppontjait (3 darab), illetve a csúcsokat a magasságponttal összekötő szakaszok felezőpontjait (3 darab). Ezt nevezzük Feuerbach-körnek (lásd 3. ábra).

Bizonyítás (Lásd: Hajós György:Bevezetés a geometriába, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999, 303. oldal)



3. ábra

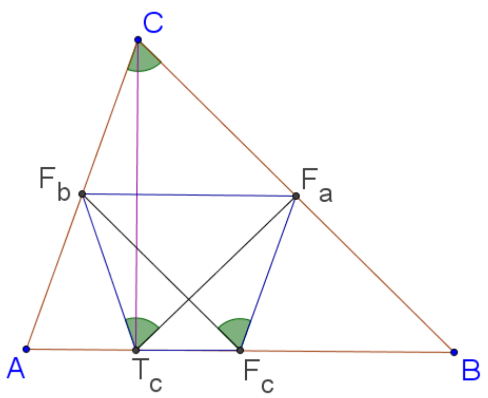
A fenti ábra az *ABC* háromszög Feuerbach-körének kilenc nevezetes pontját mutatja (piros szín). A Feuerbach-kör középpontja az *M* magasságpont és az *O* körülírható kör középpontját összekötő szakasz felezéspontja (*K*). A kör sugara a körülírható kör sugarának fele. (Az *MO* szakasz pedig az Euler-egyenesbe esik.) A kör ívén elhelyezkedő kilenc nevezetes pont: F_a, F_b és F_c a háromszög oldalainak felezéspontjai, T_a, T_b és T_c a háromszög magasságvonalainak talppontjai, M_1, M_2 és M_3 pedig a rendre a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezéspontjai.

Mivel a négy említett pont rajta van az ABC háromszög Feuerbach-körén, így ezek egy húrnégyszöget határoznak meg. Ezen kívül F_aF_b párhuzamos AB-vel, így létezik egy párhuzamos oldal. Valamint az F_aF_b ívhez tartozó szög $F_aT_cF_b\angle = F_aF_cF_b\angle$, tehát húrtrapéz

3. megoldás:

Ez a megoldás a látókört használja fel. Maga a megoldás úgy született, hogy konzulensem felhívta rá a figyelmem, hogy így is meg lehet oldani, ezért gondoltam végig hogyan.

Tehát adottak a felezőpontok és a c oldalhoz tartozó magasság talppontja. (4. ábra) Azt Tudjuk, hogy F_aF_b középvonal ABCΔ-ben, ezért párhuzamos AB-vel. Ezen kívül azt is tudjuk, hogy T_C és F_C rajta vannak AB-n, tehát T_CF_C párhuzamos F_aF_b –vel . Tehát ez a négy pont egy trapézt határoz meg. Be kell még látnunk, hogy húrtrapéz, azaz létezik olyan kör, amelyen mindhárom pont rajta van T_c, F_c, F_a, F_b sorrendben. Ehhez elég belátnunk, hogy a jelölt szögek egyenlők.



4. ábra

Mivel F_cF_b és F_cF_a is középvonal, így $F_bF_cF_aC$ négyszög parallelogramma, így a szemközti szögei megegyeznek, tehát $F_bCF_a\angle = F_bF_cF_a\angle$.

Valamint F_aF_b-re tükrözve C-t éppen T_c-t kapjuk, mivel F_aF_b középvonal. Így $F_bT_cF_aC$ négyszög deltoid, melynek tengelye F_aF_b, amiből következik, hogy T_c-nél, illetve C-nél lévő szöge megegyezik. $F_bCF_a\angle = F_bT_cF_a\angle$

Az előző két egyenlőség miatt $F_bT_cF_a\angle = F_bF_cF_a\angle$, tehát mindkettő rajta van az F_aF_b szakasz $F_bCF_a\angle$-ű látókörívén, azaz létezik olyan kör, amely mind a négy pontot tartalmazza ebben a sorrendben: $F_aF_bT_cF_c$, így $F_aF_bT_cF_c$ húrtrapéz.

A megoldások értékelése:

A második megoldásról nem szeretnék beszélni annyit, mivel ahhoz kell, hogy megtanítsuk a Feuerbach-kör fogalmát a gyerekeknek. Ám ez a témakör szerintem nagyon érdekes lehet, úgyhogy én mindenképp megtanítanám egy szakkörön.

Az első és harmadik megoldás is szögek segítségével bizonyít, ám teljesen más jellegű a kettő.

Az első azért fontos, mert csak a húrtrapéz és a tükrözés tulajdonságait használja fel, így akár bármelyik középiskolai tanulótól elvárhatnánk, hogy egy ilyen bizonyítást meg tudjon csinálni, főleg ha emelt szinten tanulja a matematikát.

A második megoldás a látókört alkalmazza, ami ma már csak az emelt szintű tananyagban fordul elő, így ez a megoldás „nehezebbnek" számít, ám szerintem, ha valaki tudja a látókört, itt kevesebbet kell bizonyítania, mint az első megoldás szerint.

IV. feladat

Oldjuk meg az egészek körében:

$x^2 + y^2 = 2 \cdot x + 2 \cdot y - 3$

1. megoldás:

Rendezzük át az egyenletet teljes négyzetté alakítással. Ennek segítségével valószínűleg megsejthető lehet az eredmény, illetve ha nem lehet megoldani az egyenletet, akkor így könnyebben meglátjuk.

$$x^2 + y^2 = 2 \cdot x + 2 \cdot y - 3$$
$$x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y = -3$$
$$(x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 = -3$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = -1$$

Az így kapott egyenlet nem oldható meg, hiszen két négyzetszám összege nem lehet negatív. Tehát a valós számok halmazán nincs megoldása, így az egészek körében sem lesz.

Megjegyzés: a feladat koordinátageometriai feladatként is előkerülhet, hiszen x és y azonos együtthatóval szerepel, valamint a kifejezésben nem szerepel $x \cdot y$-os tag, így felfogható köregyenletként is. Számomra ez volt az alapgondolat, hogy köregyenletre rendezzem.

2. megoldás:

(Ez a megoldás akkor jutott eszembe, amikor az első megoldást már begépeltem.) Bontsuk ketté a feladatot! Ez egy x-et tartalmazó és egy y-t tartalmazó egyenlőtlenség összege. Az a sejtésünk, hogy nincsen megoldás, tehát ezt bizonyítjuk.

$x^2 > 2 \cdot x$, ha x>2 vagy ha x<0,

illetve $y^2 > 2 \cdot y - 3$ bármely egész y-ra.

Mivel a fent szereplő függvények mind szigorúan monotonok, így az összeadás után a következő egyenlőtlenség is fennáll:

$x^2 + y^2 > 2 \cdot x + 2 \cdot y - 3$ (1), ha x>2 vagy x<0 azaz, ezeken az intervallumokon nincs megoldása az egyenletnek.

Mivel véges sok kimaradó eset van: {0, 1, 2}, ezért ezeket külön meg kell néznünk, hogy mi történik, ha x ezeket az értékeket veszi fel.

Ha $x = 0 \rightarrow x^2 = 0 = 2 \cdot x$, viszont bármely y-ra $y^2 > 2 \cdot y - 3$, így

$x^2 + y^2 > 2 \cdot x + 2 \cdot y - 3$ igaz lesz minden y-ra, tehát ekkor sincs megoldás.

Ha $x = 1 \rightarrow x^2 = 1 < 2 = 2 \cdot x$. Ekkor úgy alakul át az (1) egyenlőtlenség, hogy $y^2 + 1 > 2 + 2 \cdot y - 3 \Rightarrow y^2 > 2 \cdot y - 2$, amely szintén igaz, hiszen átrendezhetjük:

$y^2 > 2 \cdot y - 2 \Leftrightarrow y^2 - 2 \cdot y > -2 \Leftrightarrow (y-1)^2 - 1 > -2 \Leftrightarrow (y-1)^2 > -1$, ez pedig bármely egész y-ra igaz. Tehát ebben az esetben is nagyobb a baloldalon álló kifejezés értéke, tehát nincs megoldás.

Ha $x = 2 \rightarrow x^2 = 4 = 2 \cdot x$. Innentől viszont ugyanaz a bizonyítás alkalmazható rá, mint $x = 0$ esetén tettük.

3. megoldás:

Rendezzük át úgy az egyenletet, hogy a baloldalon csak az x-et tartalmazó tagok legyenek, míg a jobb oldalon az összes többi. A következő adódik:

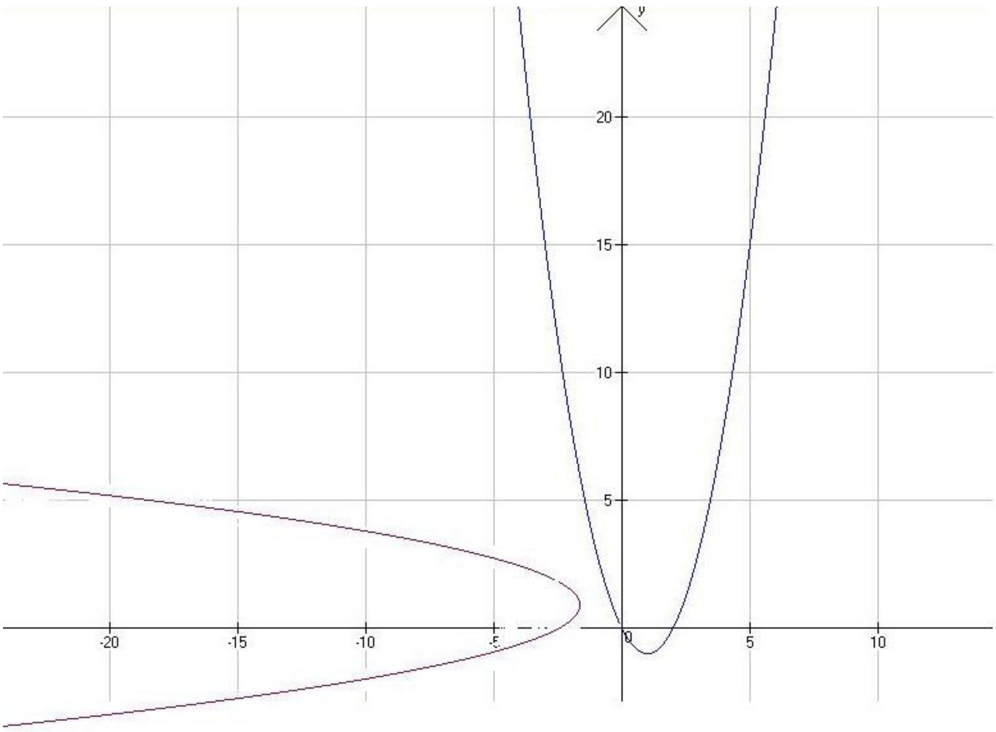
$x^2 - 2 \cdot x = -y^2 - 2 \cdot y - 3$

Mit is kaptunk? A baloldalon egy olyan parabola egyenlete áll, amelyiknek tengelye párhuzamos az y tengellyel, míg a jobb oldalon egy x tengellyel párhuzamos tengelyű parabola áll.

Ezzel a feladatot átvezettük két parabolára, amelyeknek a metszéspontját kell megkeresni, amennyiben létezik. Az ábrázoláskor célszerű átírni a kifejezést a következő alakba (5. ábra):

$x \cdot (x-2) = -(y-1)^2 - 2$

Ebből jól látszik, hogy a bal oldali kifejezés zérushelyei 0 és 2, minimuma 1-ben van, melynek értéke -1. A jobboldali kifejezés szélsőértéke -2, amit az y=1-ben vesz fel.



5. ábra

4. megoldás:

Ez egy kis algebrai okoskodás, amellyel az x és y paritását vizsgáljuk.

$x^2 + y^2 = 2 \cdot x + 2 \cdot y - 3$

Ha x és y egyszerre páros, vagy páratlan, akkor a baloldalon mindig egy páros szám áll, míg a jobb oldal páratlan. Ebben az esetekben nem oldható meg.

Tehát csak az az eset marad, hogy az egyik páros, a másik páratlan. Ekkor válasszuk x-et párosnak, így y páratlan, amit megtehetünk, mivel szimmetrikus az egyenlet x-y-ra.

Ekkor x felírható $2 \cdot a$ alakban, y pedig $2 \cdot b + 1$ alakban, ahol a és b szintén egész számok.

Írjuk be x és y előbbi alakjait az eredeti egyenletbe:

$$(2 \cdot a)^2 + (2 \cdot b + 1)^2 = 2 \cdot (2 \cdot a) + 2 \cdot (2 \cdot b + 1) - 3$$

$$4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 + 4 \cdot b + 1 = 4 \cdot a + 4 \cdot b + 2 - 3$$

$$4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 + 4 \cdot b + 1 = 4 \cdot a + 4 \cdot b - 1$$

Látható, hogy a baloldal 4-gyel osztva egy maradékot ad, míg a jobboldal maradéka -1 (azaz 3), tehát nem lehet egyenlő a két oldal semmilyen a-ra és b-re.

Így az eredeti feladat akkor sem oldható meg, ha x páros és y páratlan.

Tehát a feladat nem oldható meg az egészek körében.

A megoldások értékelése:

Ez a feladat sok örömet okozott nekem, miközben írtam a dolgozatom. Az első megoldás a tipikus iskolai megoldása a feladatnak szerintem, ám mint már említettem, nekem a kör egyenlete volt az első gondolatom, mikor megláttam.

A második megoldás az egyenlőtlenségekkel szerintem akár már akkor is bemutatható, amikor a diákok még nem tanultak nevezetes azonosságokat.

A harmadik megoldást valószínűleg nem választaná egy középiskolás sem véleményem szerint, mivel a grafikus ábrázolást inkább az egyenletrendszerek megoldására szokták alkalmazni, nem pedig egy egyenletre.

Az utolsó megoldás egy kis számelméletet használ fel, ami számomra sokkal inkább elképzelhető, hogy előkerül egy hasonló jellegű feladat megoldásánál, mint mondjuk a harmadik megoldás. Szerintem ha a legegyszerűbb és leggyorsabb megoldást keressük, akkor mindkét esetben az első az.

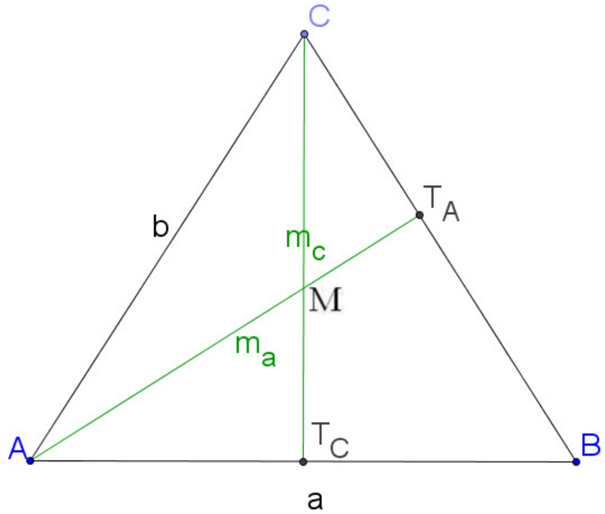
V. feladat

Szerkesszünk egyenlőszárú háromszöget, amelynek az alaphoz tartozó magassága 4,2cm, az oldalhoz tartozó magassága 3,8cm!

1. megoldás:

Ezt a megoldást magam találtam ki. Hasonló háromszögek, valamint Pitagorasz-tétel segítségével kiszámolható a két magasságvonalból a két különböző oldal (az alap és a szár) hossza. Ez a megoldás inkább a formális számolást részesíti előnyben, mondjuk úgy, nem kell kifejezetten sok ötlet hozzá.

Mielőtt elkezdenénk a feladatot megoldani, készítsünk egy vázlatrajzot (6. ábra)



6. ábra

Adottak:

$m_c = 4{,}2$

$m_a = 3{,}8$

A két magasságvonal két hasonló derékszögű háromszöget hoz létre az ABCΔ-ben.

$ABT_A\Delta \sim CT_CB\Delta$, mivel derékszögűek, és a B-nél lévő hegyesszögük közös.

Ebből felírható az alábbi aránypár: $\frac{a}{b} = \frac{m_a}{m_c} = \frac{3{,}8}{4{,}2} = \frac{19}{21}$

Tehát $a = \frac{19}{21} \cdot b$

Ez egy összefüggés a és b között, ám ha nézzük $CT_CB\Delta$-et, akkor ebben felírható a Pitagorasz tétel, és T_CB éppen a fele, mivel az egyenlőszárú háromszög szárszögéből induló magasságvonal súlyvonal is.

Így tehát $m_c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$

Behelyettesítve: $4{,}8^2 + \left(\frac{19}{42} \cdot b\right)^2 = b^2$. Ez egy másodfokú egyenlet b-re melynek megoldásai közül az egyik negatív, tehát csak a pozitívat nézzük, mivel b hosszúság.

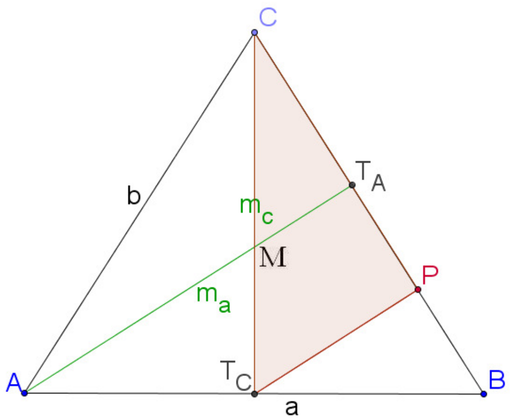
Tehát $b \approx 5{,}38 \rightarrow a \approx 4{,}87$

A szerkesztés menete:

- vegyünk fel egy egyenest, rajta a T_C pontot
- T_C pontból induló két félegyenesre mérjünk fel $\frac{a}{2}$-t. Így megkaptuk A és B pontokat
- A és B pontokból mint középpontból húzott b sugarú körívek metszéspontjai lesznek a lehetséges C-k.

2. megoldás:

Ez a megoldás, valamint a harmadik egy konzultáció alkalmával született meg a témavezetőm segítségével.



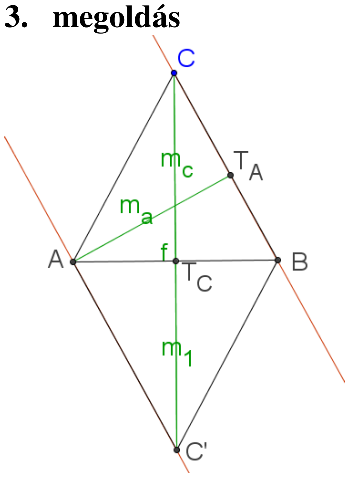
7. ábra

Ismert CT_C hossza: 4,2 cm, valamint mivel CT_C súlyvonal $ABC\Delta$-ben, ezért ha T_C-ben húzunk egy párhuzamost AT_A-val, akkor az így keletkező T_CP szakasz hossza éppen 3,8 fele lesz, azaz 1,9cm. Mivel ez a $CT_CP\Delta$ derékszögű és ismert az átfogója, valamint egy befogója, így ez megszerkeszthető és így $ABC\Delta$ is szerkeszthető. (7. ábra)

A szerkesztés lépései:

- vegyünk fel egy 4,2 cm hosszú szakaszt (CT_C), majd írjuk fel a Thalesz-körét
- az egyik végpontjából (T_C) körívezzünk 1,9cm-rel →megkapjuk P pontot
- CP egyenesét meghosszabbítjuk
- CT_C szakasz T_C pontjába állítsunk merőlegest CT_C-re, ennek metszete a fenti meghosszabbítással megadja B-t
- B-t tükrözzük CT_C egyenesre→A

3. megoldás

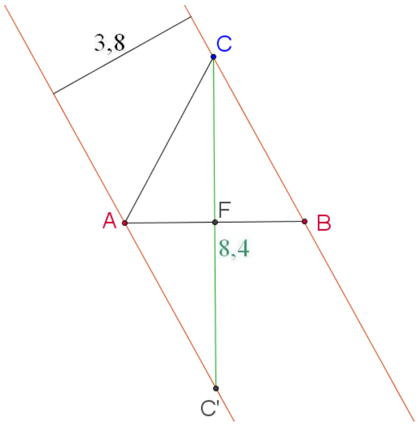


8. ábra

Ebben kihasználjuk, hogy ha tükrözünk egy egyenlőszárú háromszöget az alapjának felezőpontjára, akkor egy paralelogrammát (jelen esetben rombuszt) kapunk, ahol $m_1 = m_c$. (8. ábra)

Szerkesztés lépései (9. ábra):

- vegyünk fel egy párhuzamos egyenespárt 3,8 cm (m_a = 3,8 cm) távolságra egymástól.
- az egyik egyenesen vegyünk fel egy tetszőleges pontot, legyen ez C
- ebből körívezzünk 8,4cm (d) sugarú körívvel míg elmessük a másik egyenest, amely ezzel párhuzamos volt (ez azért jó így, mert a fent említett paralelogrammát fogjuk megszerkeszteni az átlói segítségével)→kapunk egy C' pontot
- CC' felezőpontja lesz T_C pont (az egyenlőszárú háromszög alapjának felezőpontja, F)
- T_C pontban merőlegest állítunk C T_C egyenesre (mivel ez magasságvonal)→ahol az eredeti két párhuzamos egyenesünket metszi ez a merőleges ott lesznek A és B pontok.



9. ábra

A megoldások értékelése:

Ez a feladat számomra kifejezetten nehéz volt, ami betudható annak is, hogy sohasem szerettem a geometriai szerkesztéseket. Ezt mutatja az is, hogy a három megoldásból önállóan csak egyet sikerült alkotom. Valójában a feladat m_Iegoldása így utólag nem olyan nehéz, de át kell látni, hogy mi hogyan használható fel. Ez utóbbi nehezíti meg a megoldást.

Az első megoldás mindössze a geometria algebráját alkalmazza, hiszen minden kellő adat kiszámolásával oldjuk meg a feladatot. Ezen kívül megjegyezném még azt, hogy a feladat befejezése nem csak az oldalak megadásának segítségével fejeződhet be. Ha az a-b-re felírt arányt alkalmazva rajzolunk ez tetszőleges háromszöget, akkor annak magasságvonalai segítségével a párhuzamos szelők tételét alkalmazva megadható a keresett egyenlőszárú háromszög.

2. Feladatok a KöMaL és az Abacus folyóiratokból

Ezeket a matematikai folyóiratokat az Elemi matematika nevű tárgy keretében ismertem meg. Ezek közt is találtam egy két nagyon jó példát, melyhez tudtam a KöMal honlapján megjelenő megoldáson felül másikat is találni. Az Abacus feladatot a folyóirat honlapján találtam, ott viszont nem szerepel megoldás.

VI. feladat:

KöMaL 2007 októberi szám:

K. 134. Egy pozitív egész számról tudjuk, hogy osztható 2-vel, 5-tel és 9-cel. Tudjuk még azt is, hogy ezeken a számokon kívül pontosan 9 további pozitív osztója van. Melyik ez a pozitív egész szám?

Megoldás ötlete: Meg kellene találni az összes osztót, illetve amennyit csak tudunk.erre van egy formális megoldásmód.

1. **megoldás: formálisan**

$x = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot k = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot k$, ahol k egy nem nulla természetes szám

Ekkor mik az osztók?

$1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0$

$2 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0$

$3 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0$

$5 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1$

$6 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0$

$9 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0$

$10 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1$

$15 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

$18 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0$

$30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

$45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Ez összesen 12 darab osztó, azaz k=1. Maga a 90 az a szám, aminek 12 osztója van.

2. **megoldás:** a még formálisabb megoldás, ha ismerik a tételt, amely megfogalmazza, hogy a prímtényezős felosztásból hogyan kapható meg az összes osztók száma. (Ez megtanítható egy szakkörös osztályban!)

   Használjuk a meglevő adatokra az osztók számára vonatkozó tételt:
   $x = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot k = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot k$, ahol k egy pozitív egész szám.
   Tétel szerint, az osztók száma minimum: $(1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 12$.
   Konklúzió: mivel a számunknak pontosan 12 osztója van, ezért k=1 adódik. Tehát a szám: $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$

3. **megoldás:** „az okoskodás”, amely azután, hogy a feladatot megoldottam szerepelt a KöMaL-ban is megoldásként:

   Tudjuk hogy 2, 5 és 9 osztja a számot. Milyen más osztói lehetnek?
   $9 = 3 \cdot 3$ ezért az osztók: 3, 6, 10,15, 18, 30, 45 és 90 illetve az 1 mindennek osztója.
   Ezzel összesen 12 darab osztó számolható össze, és pontosan ennyi kell. Akkor ezek közül a legnagyobb szám lesz a keresett, tehát 90 a megoldás.

A megoldások értékelése:

A feladat megoldása még egy-két félévvel korábban történt. Ekkor számomra az első megoldás volt a legegyszerűbb. A harmadik megoldást, mint fent jeleztem én „okoskodásnak” gondoltam, ám valószínűleg ez az általánosabb, ha ezt közölték a KöMal-ban. Ez engem meglepett.

Az első és második megoldás két hasonló jellegű megoldás, ám mégis külön vettem. Ennek az az oka, hogy ebben a félévben találkoztam egy tanárnővel, akitől megtudtam, hogy ő tanítja a prímszámok témakörében az osztók számára vonatkozó tételt a középiskolában. Ezen én magam meglepődtem, hiszen annak idején mi ezt a tételt nem ismertük, sőt én magam először az egyetemen ismerkedtem meg vele. Ennek hatására gondoltam, akkor megtanítható ez egy szakkör keretében, így beírtam ezt a lehetőséget is.

VII. feladat:

KöMaL 2008 szeptemberi szám:

B. 4104. Keressünk olyan *a*, *b*, *c* számokat, amelyekre minden pozitív egész *n* esetén teljesül az

$$(n+3)^2 = a \cdot (n+2)^2 + b \cdot (n+1)^2 + c \cdot n^2$$

1. **megoldás:**

A két kifejezés felfogható egy-egy másodfokú polinomként. Ekkor ha kifejtjük ezeket a kifejezéseket, akkor már tudjuk, hogyan kell megoldani ezt a problémát: egyenlő együtthatók módszerével.

$$(n+3)^2 = n^2 + 6 \cdot n + 9$$

$$a \cdot (n+2)^2 + b \cdot (n+1)^2 + c \cdot n^2 = a \cdot (n^2 + 4 \cdot n + 4) + b \cdot (n^2 + 2 \cdot n + 1) + c \cdot n^2 =$$

$$a \cdot n^2 + 4 \cdot a \cdot n + 4 \cdot a + b \cdot n^2 + 2 \cdot b \cdot n + b + c \cdot n^2 =$$

$$= (a+b+c) \cdot n^2 + (4 \cdot a + 2 \cdot b) \cdot n + (4 \cdot a + b)$$

$\Downarrow$(egyenlő együtthatók módszere)

$$1 = a + b + c$$

$$6 = 4 \cdot a + 2 \cdot b$$

$$9 = 4 \cdot a + b$$

Tehát $b = 9 - 4 \cdot a$ $\rightarrow$az egyenletrendszer második egyenletébe helyettesítve:

$6 = 4 \cdot a + 2 \cdot (9 - 4 \cdot a) = 4 \cdot a + 18 - 8 \cdot a \rightarrow 4 \cdot a = 12 \rightarrow$ **a=3**

Ebből következik:

$\mathbf{b} = 9 - 4 \cdot a = 9 - 12 = \mathbf{-3}$

$\mathbf{c} = 1 - a - b = 1 - 3 - (-3) = \mathbf{1}$

Tehát a=3, b=-3 és c=1 megoldás. Ez minden n-re jó, hiszen a két polinom egyenlő, tehát ha valamely n-re a bal oldal igaz, akkor a jobb is!

2. megoldás:

$(n+3)^2 = a\cdot(n+2)^2 + b\cdot(n+1)^2 + c\cdot n^2$

$(n+3)^2 = a\cdot(n+2)^2 + b\cdot(n+1)^2 + c\cdot n^2$ minden n-re igaz→ írjunk fel egy egyenletrendszert a, b, c-re az n = 1, 2, 3 számok behelyettesítésével! Azért csak háromig kell elmenni, mert a, b, c három ismeretlen.

n = 1

$$(1+3)^2 = a\cdot(1+2)^2 + b\cdot(1+1)^2 + c\cdot(1)^2$$
$$16 = 9\cdot a + 4\cdot b + c$$

n = 2

$$(2+3)^2 = a\cdot(2+2)^2 + b\cdot(2+1)^2 + c\cdot(2)^2$$
$$25 = 16\cdot a + 9\cdot b + 4\cdot c$$

n = 3

$$(3+3)^2 = a\cdot(3+2)^2 + b\cdot(3+1)^2 + c\cdot(3)^2$$
$$36 = 25\cdot a + 16\cdot b + 9\cdot c$$

Ezekből a következő adódik:

Az első egyenletből:

$c = 16 - 9\cdot a - 4\cdot b$

A második egyenletet használva:

$$25 = 16 + 9\cdot b + 4\cdot(16 - 9\cdot a - 4\cdot b)$$
$$25 = 16\cdot a + 9\cdot b + 64 - 36\cdot a - 16\cdot b$$
$$39 = 20\cdot a + 7\cdot b$$

$\rightarrow b = \dfrac{(39 - 20\cdot a)}{7}$

A harmadik egyenletet használva:

$$36 = 25\cdot a + 16\cdot b + 9\cdot(16 - 9\cdot a - 4\cdot b)$$
$$36 = 25\cdot a + 16\cdot b + 144 - 81\cdot a - 36\cdot b$$
$$56\cdot a + 20\cdot b = 108$$

Így felhasználva az imént kiszámolt b-t:

$$56\cdot a + 20\cdot(\frac{39 - 20\cdot a}{7}) = 108$$
$$392\cdot a + 780 - 400\cdot a = 756$$
$$24 = 8\cdot a$$

→a = 3

Ebből már következik, hogy b = - 3, c = 1

Viszont ennél a megoldásnál még nem következik, hogy ha erre a három értékre jó a megoldás, akkor ugyanúgy jó lesz n = 4-re, vagy n = 121-re!

Ezért itt egy teljes indukciót kell alkalmazni, hogy belássuk, hogy a = 3, b = - 3 és c=1 minden n-re megoldás.

Mivel már tudjuk n = 1, 2, 3-ra, már csak az indukciós lépést kell levezetni

Tehát be kell bizonyítani, hogyha n-re már adottak a,b,c értékek, akkor ezek (n+1)-re is jó!

$$((n+1)+3)^2 = 3\cdot((n+1)+2)^2 - 3\cdot((n+1)+1)^2 + (n+1)^2$$

Itt, vagy kifejtük a zárójeleket, és úgy jön ki, vagy pedig észre vesszük azt, hogy az összeadás kommutatív, tehát bele lehet csempészi az eredeti egyenletet az újba az alábbi módon:

Eredeti egyenlet: $(n+3)^2 = 3\cdot(n+2)^2 - 3\cdot(n+1)^2 + n^2$

$((\mathrm{n}+1)+3)^2 = 3\cdot((n+1)+2)^2 - 3((n+1)+1)^2 + (n+1)^2$, átalakítva:

$((\mathrm{n}+3)+1)^2 = 3\cdot((n+2)+1)^2 - 3((n+1)+1)^2 + (n+1)^2$

$$\Downarrow$$

baloldal:

$(\mathrm{n}+3)^2 + 2\cdot(n+3)+1 = (n+3)^2 + 2\cdot n + 7$

jobboldal:

$$3\cdot(n+2)^2 + 6\cdot(n+2) + 3\cdot 1 - 3\cdot(n+1)^2 - 6\cdot(n+1) - 3\cdot 1 + n^2 + 2\cdot n + 1 =$$
$$3\cdot(n+2)^2 - 3\cdot(n+1)^2 + n^2 + 6\cdot n + 12 - 6\cdot n - 6 + 2\cdot n + 1 =$$
$$3\cdot(n+2)^2 - 3\cdot(n+1)^2 + n^2 + 2\cdot n + 7$$

Tehát $(n+3)^2 + 2\cdot n + 7 = 3\cdot(n+2)^2 - 3\cdot(n+1)^2 + n^2 + 2\cdot n + 7$

→ $(n+3)^2 = 3\cdot(n+2)^2 - 3\cdot(n+1)^2 + n^2$ ez maga az indukciós feltétel, tehát teljesül minden n-re!

A megoldások értékelése:

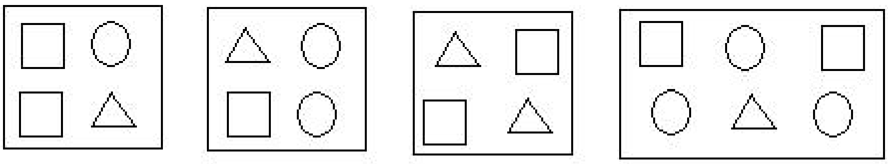
Az első megoldást tartom általánosnak, és ezt közölték a KöMaL-ban is. A második megoldás inkább az érdekes. Ebben kifejezetten fontosnak tartom és hibaként meg is jelenhet, hogy miután behelyettesítettünk az 1, 2, 3 számokat, ne felejtsük el, hogy ez még nem garantálja azt, hogy minden természetes számra jó lesz, ezért kell még az indukció is.

VIII. feladat:

Abacus matematikai pontverseny:

B564. Egy ajándékboltban többféle összeállításban kaphatók karácsonyfadíszek. Egy-egy csomag ára úgy adódik, hogy a benne lévő díszek árát összeadják. (Egyforma díszekért azonos összeget kell fizetni.) Az alábbi csomagok árát a képek alatt feltüntettük. Mennyibe kerül a negyedik csomag? (10. ábra)

10. ábra



210Ft 190Ft 240Ft ? Ft

1. **megoldás:**

Ügyesen összerakjuk az első 3 csomagból a negyediket: Az első és második csomagot egybe megvesszük, akkor megkapjuk a negyediket, plusz egy háromszög, és egy négyszög díszt, ami pedig egy fél harmadik csomag. Tehát akkor az első és második összege mínusz a harmadik fele, ugyanazt a csomagot adja, tehát ezek áraival számolva ugyanazt kapjuk. $210+190-(\frac{240}{2})=280$ Ft. Szöveges válasz: Tehát a negyedik csomag karácsonyfadísz ára 280Ft.

2. **megoldás:**

Az egyenletek segítségével felírjuk az adatokat:

(1) □+□+○+ Δ=210

(2) □+○+○+ Δ=190

(3) <u>□+□+ Δ+Δ=240</u>

□+□+○+○+○+ Δ=?

Az (3)-ból egyszerűsítéssel az alábbi egyenletet kapjuk: □+ Δ=120 (hiszen a baloldalon 2 darab volt mindenből, ezért kettővel oszthatunk.)

Aztán észrevehető, hogy a második egyenletben pontosan egy □ és Δ található, tehát innen kiszámolható a ○ egységára:

○=(190-(□+ Δ))/2

○=(190-120)/2=35

Aztán ha már tudjuk a ○ egységárát, és □+ Δ értékét, akkor az első egyenletből ezek segítségével kifejezhető □ értéke/egységára.

□+○+(□+ Δ)=210

□+35+120=210

□=210-120-35

□=55

Innen már magától következik, hogy a Δ egységára:

Δ=120-□

Δ=65

Ekkor az egységárakból kiszámolható a csomag ára:

□+□+○+○+○+ Δ=?

2 · □ + 3 · ○ + Δ = 2 · 55 + 3 · 35 + 65 = 280

Tehát a negyedik csomag ára: 280 Ft

Ezt a megoldást akár egyenletrendszerként is felírhatjuk x, y, z-re, sőt akár az egyenletek és egyenletrendszerek megtanítására is jó lehet!

A megoldások értékelése:

Ez a feladat szerintem kifejezetten alkalmas arra, hogy az egyenleteket megtanítsuk a diákoknak. Miután megtanulták, akkor megmutatható nekik a másik módszer is, amennyiben nem jöttek rá.

3. Feladatok Róka Sándor 2000 feladat az elemi matematika köréből című könyvéből

Erről a könyvről annak idején Elemi matematika kurzusaim során sokszor hallottam, hogy igen érdekes feladatok vannak benne. Munkám során azt tapasztaltam, hogy nem csak érdekesek, de számomra nagyon hasznos feladatok is szerepeltek benne a több megoldás szempontjából. Ezek közül válogattam ebben a fejezetben.

IX. feladat

1815. Igazoljuk a következő oszthatóságokat.

a) $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$, n=1,2,…

1. megoldás:

A maradékokon keresztül próbáljuk megfogni a feladatot.

Mennyit ad egy héthatvány maradékul 4-gyel osztva?

N	7 hatványai	Osztási maradék	3 hatványai	Osztási maradék
1	7	3 (vagy -1)	9 = 3^2	1
2	49 = 72	1	27 = 3^3	3
3	343 = 7^3	3	81 = 3^4	1
4	7^4	1	3^5	3
	Tehát 7n esetén: ha n páratlan, ha n páros	 3 1	Tehát 3^{n+1} esetén: ha n páratlan, ha n páros	 1 3

Tehát bármilyen n-re a két tag osztási maradékainak összege, ami egyenlő az összeg osztási maradékával, az 3+1, illetve 1+3 lesz, ami 4.

Így tehát a kifejezés felírható az alábbi módon:

$7^n + 3^{n+1} = 4 \cdot A + 4 \cdot B + 3 + 1$, ahol A és B szimbólumok. Így már könnyen látható, hogy mivel $4 \mid 3+1$, azért az egészet osztja.

2. megoldás:

Mivel ez a feladat a könyvben a teljes indukció fejezetben szerepel, ezért feltehető, hogy a szerző elsősorban ezt a megoldást várja. A feladat megoldása nem szerepel a könyvben.

$4 \mid 7^n + 3^{n+1}$ állítás bizonyításához alkalmazzunk teljes indukciót!

$n = 1$ –re $7^1 + 3^{1+1} = 7 + 9 = 16$, és 4 | 16, ez igaz.

Tegyük fel, hogy n-re már tudjuk, hogy igaz az állítás, be kell látnunk, hogy n+1-re is az. A kapott kifejezést írjuk fel a következőképpen:

$7^{n+1} + 3^{n+2} = 7 \cdot 7^n + 3 \cdot 3^{n+1}$

Most alkalmazzunk egy trükköt, hogy használhassuk az indukciós feltételt: $7 \cdot 7^n + 3 \cdot 3^{n+1} = 7 \cdot (7^n + 3^{n+1}) - 4 \cdot 3^{n+1}$

Használjuk az oszthatóság tulajdonságát, mely szerint egy szám akkor oszt egy kéttagú összeget illetve különbséget, ha a műveletben szereplő mindkét számot osztja. Jelen esetben:

$4 \mid 7^n + 3^{n+1}$, az indukciós feltétel miatt, tehát a kisebbítendőt osztja. Mivel a kivonandónak is osztója a 4 az állítás igaz.

3. megoldás:

Itt az első megoldáshoz hasonlóan az osztási maradékok kapják a főszerepet, ám másfelől „közelítjük meg” a számokat:

$7 = 8 - 1$

$3 = 4 - 1$

Tehát az általunk vizsgált oszthatóság így alakul át: $4 \mid (8-1)^n + (4-1)^{n+1}$

Használjuk a binomiális tételt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Ebből látszik, hogy $(8-1)^n$ esetén a 4 (az utolsó tag kivételével) minden tagban szerepel szorzóként, így ezek a tagok mind oszthatók 4-gyel, és az utolsó tag, n-től függően, 1 vagy -1.

Hasonló módon $(4-1)^{n+1}$ esetén is, felírva összegként csak az utolsó tag nem osztható 4-gyel, és ez is 1 vagy -1.

Rendezzük táblázatba amit kaptunk:

n paritása	$(8-1)^n$ utolsó tagja	$(4-1)^{n+1}$ utolsó tagja
n páros	1	-1
n páratlan	-1	1

Ha összeadjuk a sorokban lévő értékeket, akkor kijön, hogy 0 a maradék 4-gyel osztva, hiszen a $(-1)^n$-ből illetve a $(-1)^{n+1}$-ből jövő tagok éppen kiejtik egymást.

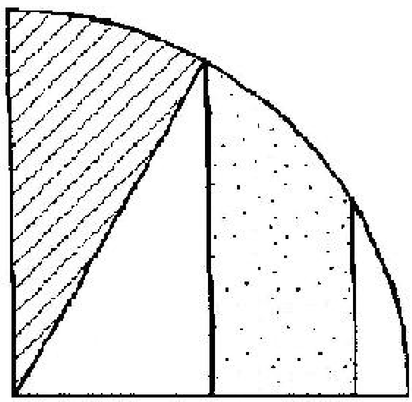
A megoldások értékelése:

Mikor elkezdtem a megoldott feladatokat összerendezni, akkor nagyon elgondolkoztam azon, hogy ez a feladat belekerüljön-e a dolgozatba, ugyanis már volt egy hasonlónak mondható feladat, melyet témavezetőm adott. Végül úgy döntöttünk, hogy maradjon, mivel az más jellegű. Ezen felül amiért én ragaszkodtam hozzá az volt, hogy a harmadik megoldás egy olyan trükköt alkalmaz, ami nagyon érdekes és még nem volt olyan feladat, aminek a megoldása során előkerült volna a binomiális tétel.

X. feladat

Ez a területátalakítások témakör alatt szerepel. A feladat, hogy mutassuk meg, hogy a vonalkázott és pöttyözött részek területe egyenlő.

1303. Egy körlemez negyedét határoló körív harmadolópontjaiból merőlegeseket bocsátottunk az egyik határoló sugárra, továbbá az egyik harmadolópontot összekötöttük a kör középpontjával a 11. ábra szerint.



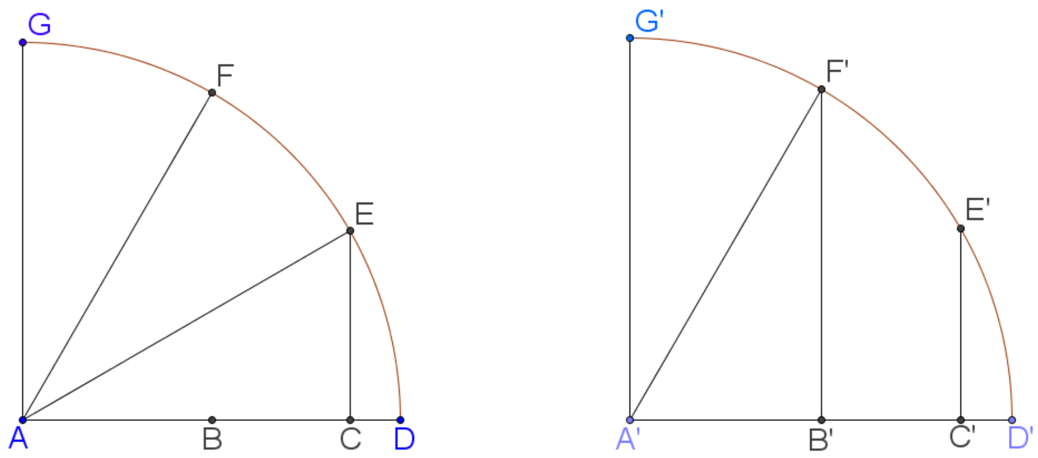
11. ábra

Megjegyzés:

Mivel én a GeoGebra nevű matematikai rajzoló programot használom az ábrák rajzolásához (kivéve a 11. ábra), ezért betűzzük meg az adódó metszéspontokat. A metszéspontok által alkotott síkidomok segítségével utalok a következőkben az alakzatokra. Van, amikor két ábrában ábrázolom őket, akkor a bal oldali ábra tartozik a körcikkhez, amely betűzése A-tól H-ig mehet. A jobboldali ábra betűzése a bal oldalihoz hasonló, ám itt A'-től H'-ig megy.

1. megoldás:

Ez volt a gyakorlaton az én saját megoldásom. (12. ábra)



12. ábra

Bebizonyítható hogy a két terület egyenlő úgy, ha megmutatjuk, hogy a körlemez negyed többi része (a AFG és A'F'G' síkidomokon kívül fennmaradó) azonos területű. Mivel azonos területekből (a körnegyed) azonos nagyságú területeket veszünk el, így a maradékok is azonos területek kell, hogy legyenek.

A baloldali és a jobboldali ábrán az azonos színnel jelölt területek, egyenlő nagyságúak. Ennek oka:

- CDE és C'D'E' síkidom területe ugyanakkora, ez nyilvánvaló

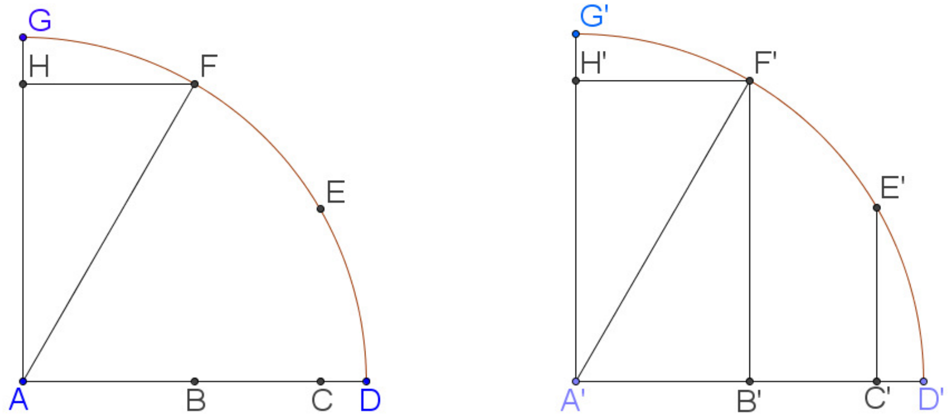
- AEF és A'F'G' körcikkek területe ugyanakkora, mivel mindkettő ugyanannak a körnek a 30°-os szöghöz tartozó körcikke

- valamint ACE és A'B'F' háromszögek egybevágók, így területünk egyenlő, mivel van egy derékszögük, valamint a másik két szög 30, illetve 60°, és ezen felül mindkettőnek az átfogója az eredeti kör sugara.

Tehát a feladatban jelöletlen részek a két egybevágó körnegyedben egyenlő területű, így a maradék részek területei is egyformák. Ezzel készen is vagyunk.

2. megoldás:

A következő megoldás ugyanazon a geometria gyakorlaton született, és ez az, amihez a megoldás gondolatát adja a Róka példatár is. (13. ábra)



13. ábra

A fenti baloldali ábrán látható egy körcikk (AFG síkidom), amely az adott negyedkör területének $\frac{1}{3}$-át teszi ki, mivel 30°-hoz tartozó körcikk, ha F harmadolópont.

Most próbáljunk meg hasonló darabokat keresni a jobboldali ábrán:

- A'F'G' síkidom ezen az ábrán is ugyanaz a körcikk
- B' egy F'-ből induló A'D'-re merőleges és A'D' metszete, valamint ha merőlegest állítunk F'-ből A'G'-re is, akkor kapjuk H' pontot. Így A'B'F'H' négyszög téglalap lesz, A'F' az átlója, tehát A'B'F'$\Delta \cong$ A'F'H'Δ.
- ezen felül C'D'E' síkidom azonos HGF síkidommal, ugyanis mindkettő úgy keletkezett, hogy egy adott kör negyedének egyik harmadolópontjából merőlegest bocsájtottunk a hozzá közelebb eső határoló sugárra. Így tehát A'B'F'Δ + E'C'D' síkidom együttes területe szintén kiad egy AFG-fel egybevágó körcikket.

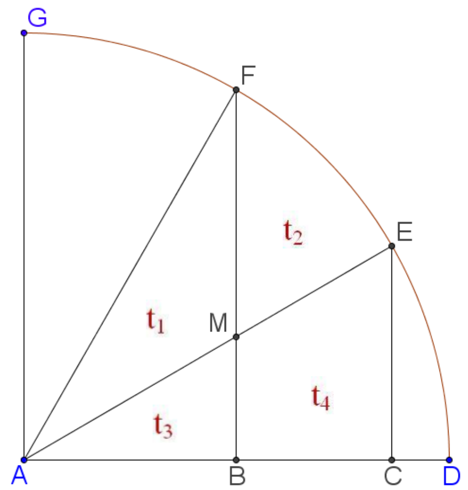
➔ Tehát a jelöletlen terület a jobboldali ábrán a körnegyed $\frac{2}{3}$-át teszi ki, tehát a jelölt terület ugyanakkora, mint a baloldali ábrán: $\frac{1}{3}$ körnegyed területnyi.

3. megoldás:

Ezt a megoldást a geometria gyakorlaton a gyakorlatvezető Moussong Gábor mutatta.

A megoldás lényeges lépése, hogy mivel egy adott sugarú körben minden azonos szögnagysághoz tartozó körcikk egybevágó, ezért forgassuk el az eredeti feladatban megadott körcikket AEF körcikkbe.

14. ábra



Az ábra kissé átrajzolva így néz ki. (14. ábra)

Tehát kell: T_{AEF}=T_{BCEF}.

Az ábrán látszik, hogy itt összesen ACEF síkidomon belül 4 rész jelenik meg.

Legyen $T_{AMF} = t_1$, $T_{MEF} = t_2$, $T_{ABM} = t_3$, és $T_{BCEM} = t_4$

ABF$\Delta \cong$ ACEΔ, ugyanis AF = AE, ezzel szemközti szög derékszög, a másik két szög pedig 30°, illetve 60°. Tehát ebből következik, hogy $T_{ABF}\Delta$ = $t_1+t_3 = t_3+t_4 = T_{ACE}\Delta$, amiből következik, hogy $t_1 = t_4$.

Most írjuk fel, hogy miből állnak az eredeti „körrészeink” t_i-k segítségével:

$T_{AEF} = t_1+t_2$, és $T_{BCEF} = t_4+t_2$. Mivel t_2-t egyenlő önmagával, a másik két területről pedig az előbb láttuk be, hogy egyenlők, így a két adott terület is egyenlő.

4. megoldás:

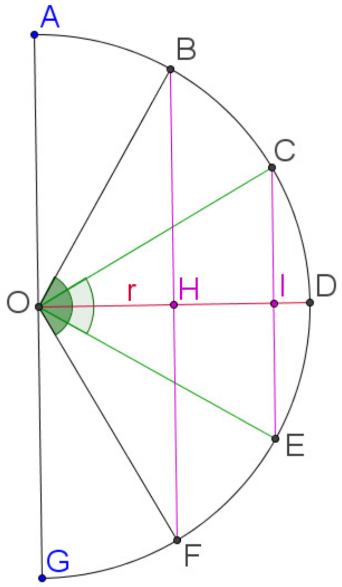
Ez a megoldás mindössze a körcikk és a körszelet területképletét alkalmazza.

Először tükrözzük arra a határoló sugárra az ábrát, amelyre merőlegest bocsátottunk a harmadolópontokból. Így ezt az ábrát kapjuk, amelyen a csúcsokat elbetűztem. (15. ábra)

Eddig is ki tudtuk számolni a körcikk területét, mert ez egy 30°-hoz tartozó körcikk egy r sugarú körben. Tehát a körcikk területe:

$$T_{körcikk} = \frac{30°}{360°} \cdot r^2\pi = \frac{1}{12} \cdot r^2\pi$$

Most próbáljuk meg kifejezni a feladat szerint pöttyözött rész területét. Ezen az ábrán jól látható, hogy a BF húr által határolt körszelet területéből, ha levonjuk a CE húr által határolt körszelet területét, akkor éppen a keresett terület kétszeresét kapjuk. (A keresett terület BCIH síkidom.) A BF húrhoz a 120°-os középponti szög tartozik, mivel AOB∠= 30°, tehát BOD∠= 60°, és a tükrözés miatt lesz BOF∠= 120°. Hasonlóan COE∠= 60°.



15. ábra

Tehát a BF-hez tartozó körszelet területe: $T_{120°\text{-os körcikk}} - T_{BOF\Delta} =$

$$\frac{120°}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sin(120°)}{2} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

A CE-hez tartozó körszelet területe: $T_{60°\text{-os körcikk}} - T_{COE\Delta} =$

$$\frac{60°}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sin(60°)}{2} = \frac{1}{6} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{1}{6} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Most vonjuk ki a BF-hez tartozó körszelet területéből a CE-hez tartozó körszelet területét:

$$\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \left(\frac{1}{6} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{6} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{1}{6} \cdot r^2 \cdot \pi$$

Tehát a BCEF síkidom területe $\frac{1}{6} \cdot r^2 \cdot \pi$, ennek fele a keresett pöttyözött terület területe, ami $\frac{1}{12} \cdot r^2 \cdot \pi$, amely éppen a 30°-os körcikk területével egyenlő.

A megoldások értékelése:

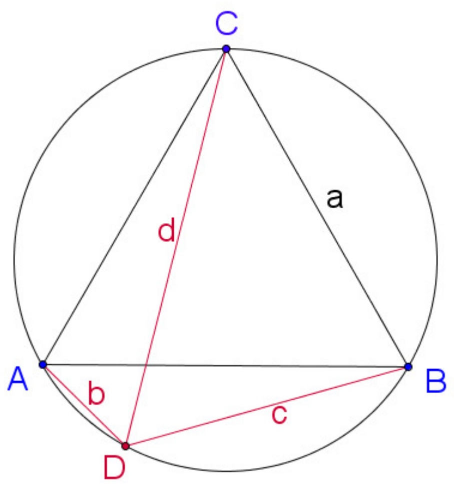
Bevallom ez a feladat volt az egyik kedvencem a munka során. Ezzel a feladattal még a negyedik féléves geometria gyakorlaton találkoztam először. Akkor született meg a feladat első három megoldása, ahol kikötés volt, hogy számolás nélkül hajtsuk végre a bizonyítást. Az első a saját „házi feladatom” volt. A második és harmadik megoldásnál feltüntettem, hogy honnan származnak. A negyedik megoldás, melyet készítettem, tipikusan olyan embereknek szól, akik inkább mindent kiszámolnak.

4. Feladat az Elemi matematika kurzusról

Talán a legtöbb segítséget ez a több féléves kurzus adta számomra a szakdolgozatomhoz. Ugyanis itt gyakran előfordult az, hogy többen többféleképpen próbáltunk megoldani egy feladatot. Ezen feladatok közül az alábbit tartottam kifejezetten fontosnak, hogy bekerüljön a szakdolgozatomba, mivel a megoldások szépek, nagyon jól elkülönülnek, és talán ezt a feladatot élveztem legjobban a szakdolgozat készítése közben.

XI. feladat

Az ABC szabályos háromszög körülírt körén felveszünk egy D pontot az AB közti köríven. Mutasd meg, hogy a DC=DA+DB!



16. ábra

1. megoldás

Először is készítsünk egy ábrát a feladatról. (16. ábra)

Egyszerűbb ha megbetűzzük az oldalakat, mert így lehet, hogy később a bizonyítás során könnyebb lesz átlátni:

Legyen szabályos háromszög oldala: a,

DC=d, DA=b és DB=c.

Így a feladat: d=b+c

Legegyszerűbb megoldás, ha úgy tekintünk az ábrára, hogy látunk egy ADBC négyszöget, amely húrnégyszög.

Erre a húrnégyszögre alkalmazható a Ptolemaiosz-tétel, amely kimondja: egy négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha a két-két szemközti oldal szorzatának összege egyenlő az átlók szorzatával.

Tehát Ptolemaiosz tételéből következik, hogy igaz az alábbi:

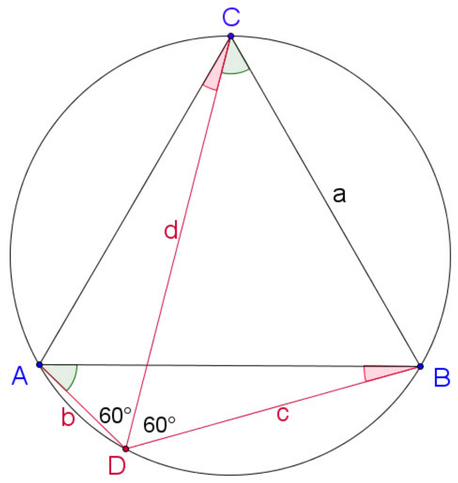
$$a \cdot c + b \cdot a = a \cdot d$$

Ha mindkét oldalt osztjuk a-val máris megkaptuk a kívánt egyenletet.

2. megoldás:

Az ábrán (17. ábra) jelölt színes szögek azonos nagyságúak, hiszen ACD szög és ABD szög mindketten az AD ívhez tartozó kerületi szögek.

Hasonlóan DAB és DCB szögek a DB ívhez tartoznak.



17. ábra

Ha megnézzük ACB szöget, látjuk, hogy a kétféle sárga szög összege 60°.

Ebből kiszámolható, hogy DBC háromszög D-nél lévő szöge 60°, ugyanis ABC szög 60°-os mivel ABC háromszög szabályos. Ehhez hozzáadva a narancs és sárga színű szöget 120°-ot kapunk, tehát CDB szög 180°-120°=60° (Ez a kerületi szögek tételéből is adódik: ugyanis CDB szög CB ívhez tartozik, akárcsak CAB szög.)

Ugyanilyen módon ADC szög is 60°.

Ezek után írjuk fel DBC háromszögben a cosinus-tételt:

$$a^2 = d^2 + c^2 - 2 \cdot d \cdot c \cdot \cos(60°)$$

Hasonlóan DCA háromszögben a cosinus-tétel: $a^2 = d^2 + b^2 - 2 \cdot d \cdot b \cdot \cos(60°)$

Használjuk fel, hogy cos(60°)=$\frac{1}{2}$, majd vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$a^2 = d^2 + c^2 - d \cdot c$$

$$\underline{a^2 = d^2 + b^2 - d \cdot b}$$

$$0 = c^2 - b^2 - d \cdot c + d \cdot b$$

➔ $0 = (c^2 - b^2) - d \cdot (c + b) = (c - b)(c + b) + d \cdot (c - b)$ **=(c-b)(c+b-d)**

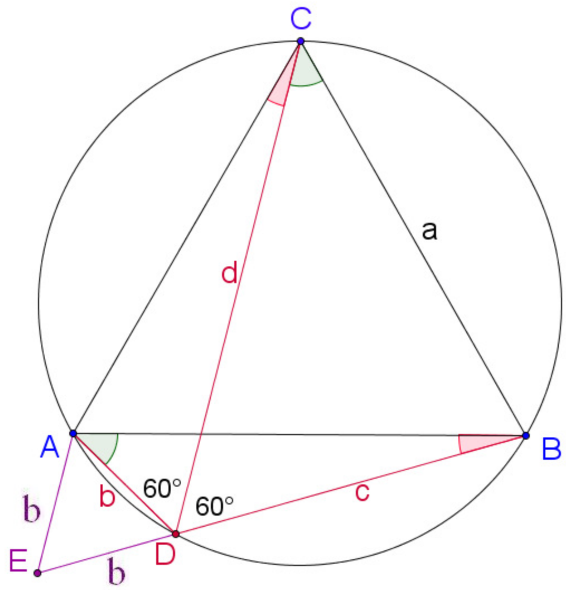
Innen két lehetőség adódik:

a. Ha c≠b → $c + b - d = 0$, azaz $c + b = d$. Ezt kellett bizonyítani.
b. Ha c=b, akkor (c-b)(c+b-d) lehet nulla úgy is, ha d≠c+b. Ám ekkor az történik, hogy CD húr felezi az AB szakaszt, ezzel együtt ACB szöget is. Ekkor ACD és DCB szögek 30°-osak lesznek. Tehát ACD és DBC háromszögek derékszögűek, amelyek átfogója lesz d. Az ilyen speciális

háromszögekről (a 30°-60°-os szögű derékszögű háromszögekről) tudjuk, hogy a rövidebb befogó az átfogó fele. Így következik, hogy $b = c = \frac{1}{2} \cdot d$, így $b + c - d = 2 \cdot b - d = d - d = 0$ ismét teljesül.

Ezzel a bizonyítás teljes.

3. megoldás:



18. ábra

Ez a megoldás más jellegű ötletet igényel. Ez a megoldás egy óra kellős közepén jutott eszembe, amikor is éppen a Napóleon-háromszögekről volt szó, amely arról szól, hogy szabályos háromszögeket rajzolunk a háromszög oldalaira. Nos ezt én is megtettem. (18. ábra)

Az ötlet úgy indul, hogy mivel d-t szeretnénk összehasonlítani b+c-vel, ezért jó lenne egy b+c hosszt egyben látni.

Mérjünk tehát c mellé DB-t meghosszabítva D-ből kiindulva egy b hosszúságú szakaszt. Ez gyakorlatilag az AD szakasz elforgatottja. Ennek másik végpontja legyen E. Kössük össze E-t A-val.

Azt állítom, hogy az így kapott ABE háromszög egybevágó ACD háromszöggel.

Tudjuk, hogy hasonlóak:

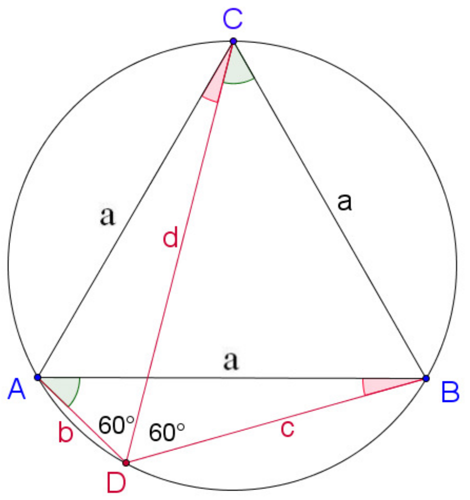
- ACD és ABD szögek egyenlők (a kerületi szögek tétele miatt, lásd fentebb),
- AEB és ADC szögek egyenlők (mindkettő 60°),

Már tudjuk, hogy hasonlók, de nekünk egybevágóság kell. Mivel a 60°-kal szemközti szög mindkét háromszögben a, illetve AD = AE ezért egybevágóak.

Tehát az harmadik oldal is megfelel egymásnak: $b + c = d$. Ezzel megmutattuk, hogy DC=DA+DB.

4. megoldás:

Ez a megoldás a 2007-2008-2 féléves Vancsó Ödön-féle elemi matematika 2 gyakorlaton született meg az egyik csoporttársam által. (19. ábra)



19. ábra

Az AC húrhoz (illetve ívhez) tartozó kerületi szögek egyenlők, így

ADC∠=ABC∠=60°

Ezen kívül tudjuk, hogy ADBC húrnégyszög→ADB∠+ACB∠=180°, így adódik, hogy ADB∠=120°

Tehát d oldal az ADB∠ szögfelezője.

Írjuk fel a húrnégyszög területét kétféleképpen:

$$T=T_{ADC\Delta}+T_{CDB\Delta}=T_{ABC\Delta}+T_{ADB\Delta}$$

$$T_{ADC\Delta}+T_{CDB\Delta}=\frac{b\cdot d\cdot\sin(60°)}{2}+\frac{d\cdot c\cdot\sin(60°)}{2}=\frac{b\cdot d\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}+\frac{d\cdot c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$T_{ABC\Delta}+T_{ADB\Delta}=\frac{b\cdot c\cdot\sin(120°)}{2}+\frac{a\cdot a\cdot\sin(60°)}{2}=\frac{b\cdot c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}+\frac{a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

Ha a fenti két egyenletet egyenlővé tesszük, átalakítások után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\boxed{d\cdot(b+c)=b\cdot c+a^2}$$

Valamint írjuk fel a cosinus-tételt ADBΔ-re:

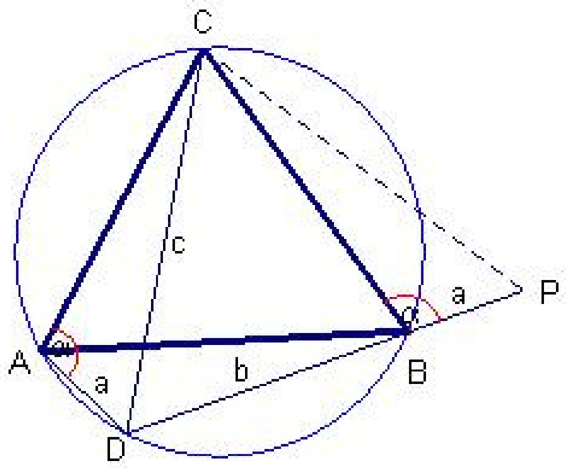
$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(120°)=a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot(-\frac{1}{2})$$

Tehát $a^2=b^2+c^2+bc$, ezt behelyettesítve a területképletekből kapott, bekeretezett egyenletbe:

$$d\cdot(b+c)=b\cdot c+a^2=b\cdot c+b^2+c^2+b\cdot c=b^2+2\cdot b\cdot c+c^2=(b+c)^2$$

Ha leosztunk (b+c)-vel, ami nyilvánvalóan nem nulla, hiszen egy háromszög két oldala b és c, akkor megkapjuk az egyenlőséget, amit bizonyítani akartunk: d=b+c.

5. **megoldás:** Ezt a megoldást egy konzultáció keretében mutatta meg a témavezetőm a másik megoldás mellé (20. ábra):



20. ábra

DB egyenesére mérjük fel a-t B-től, így kapjuk meg a P pontot.

Mivel ADBC húrnégyszög, ezért

CBP∠ = CAD∠ =α

CAD Δ ≅ CBP Δ mivel két oldal és a közbezárt szög egyenlő. Így CD=CP.

CDP ∠=60° mert CB ívhez tartozó kerületi szög.

CDP Δ szabályos, mert egyenlőszárú (CP=CD) és van 60°-os szöge (CPD ∠).

Így PC=PD=a+b. Ezzel a feladatot beláttuk.

A megoldások értékelése:

Mint már az előző feladatnál is említettem vannak kedvenc feladataim az itt szereplők közül, és ez is ilyen. A feladat megoldása közül egyet egy évfolyamtársam, egyet témavezetőm, a többit pedig magam készítettem.

Az öt megoldás mindegyike teljesen mást használ fel. Az első a Ptolemaiosz–tételt, amely inkább csak szakkörön fordul elő. Viszont ez a legegyszerűbb megoldás.

A második egy trükköt alkalmaz, aminek segítségével egy egyenesre „rakjuk" b-t és c-t, ezt alkalmazza az ötödik megoldás is.

A harmadik és negyedik megoldások inkább „számolásosak". A harmadik például a cosinus-tétel ismerete nélkül nem alkalmazható. Számomra így egyben látva az öt megoldást ez tűnik a leghosszasabbnak, legbonyolultabbnak. A negyedik viszont, a területek felírására épül, ami nem követel más ismeretet csak azt, hogyan lehet két oldal és a közbezárt szög segítségével felírni a területet.

ELŐKÉSZÍTŐ FELADATSOROK FELADATOK TÖBB MEGOLDÁSÁHOZ

Dolgozatom elkészítéséhez több vonatkozásban hozzájárult az Elemi matematika kurzus, ahogy ezt már korábban is említettem. A kurzus beadandó feladatainál többek között előkészítő feladatsort is kellett készíteni, amelyek megoldása segítheti a tanulókat a megoldás megtalálásában. Ez adta az ötletet, hogy dolgozatomban két feladathoz, de ezúttal a több megoldás megtalálásához készítsek ilyen feladatsorokat.

Az egyikben az elemi matematika kurzuson készített beadandóm előkészítő feladatsorát vettem alapul. Ezt kissé átalakítva „emeltem be” a dolgozatomba, megoldásokkal kiegészítve. A feladat témája számelmélet volt.

A másik feladat ebből a dolgozatból a korábban tárgyalt Róka Sándor-féle példatárból vett feladatok közül a geometriai jellegű lett. Azért gondoltam, hogy ez kifejezetten megfelelő egy ilyen feladatsorhoz, ugyanis nem csak az egyik kedvenc feladatomról van szó, de nem is kifejezetten nehéz. Ehhez egy 3 feladatból álló feladatsort állítottam össze.

A segítő feladatok nem úgy készültek, mint egy óravázlat, vagy óraterv. Ez mindössze egy fiktív feladatsor ahhoz, hogy miket kellene és milyen módon átismételni az adott több megoldásos feladat előtt.

Úgy gondoltam, hogy nem ismétlem meg a megoldásokat ebben a részben, hiszen ezek már korábban szerepelnek. Viszont a feladatokban vannak visszautalások a korábbiakra.

Most következzenek a lehetséges előkészítő feladatsorok:

1.) feladat: szakdolgozatom VI. feladata

K. 134. Egy pozitív egész számról tudjuk, hogy osztható 2-vel, 5-tel és 9-cel. Tudjuk még azt is, hogy ezeken a számokon kívül pontosan 9 további pozitív osztója van. Melyik ez a pozitív egész szám?

ELŐKÉSZÍTŐ FELADATSOR

A feladathoz olyan előkészítő feladatsort kellene gyártani, amely a fenti fogalmakat átismételteti, ezáltal a hiányosságok vagy bizonytalanságok még a feladat megkezdése előtt felszínre kerülnek, ezáltal korrigálhatóak.
A feladat megoldásához szükséges összefüggések szerintem az előkészítő feladatsor megoldása után már láthatók, így nem szándékozom erre külön felhívni a figyelmet.
A feladatokat ebben a témakörben nagyon könnyen létrehozhatók, hiszen például, egy prímtényezős alak felírásához csak egyszerűen összeszorozgatunk néhány prímet, így máris készen van a feladat.
A harmadik feladatban szereplő feladatok valószínűleg bármely számelmélet könyvben illetve matematikai feladatgyűjteményben megtalálhatóak, ezért nem tartanám őket saját feladatnak.

1. **13860-nak mi a prímtényezős alakja?**

   Megoldás:
   Például történhet így is: 13860 osztója a 4 mivel 60-ra végződik (négyes oszthatósági szabály), a 3 is osztja, ugyanis $1 + 3 + 8 + 6 + 0 = 18$. Sőt mivel $9|18$, így kilenccel is osztható Ezen kívül 5-tel is osztható, mivel 0-ra végződik.
   Ekkor mi marad $13860 = 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 77$. Innen már látszik a prímtényezős felosztása:
   $13860 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

2. **Hány osztója van a 20-nak? Írjuk fel ezeket prímtényezős alakban a 20-ban szereplő prímszámok segítségével!**
   (Például: a 2 osztja a 6-ot. Ekkor $2 = 2^1 \cdot 3^0$)

Megoldás:

A húsz osztói: 1, 2, 4, 5, 10, 20

A húsz prím osztói: 2, 5

$1 = 2^0 \cdot 5^0$

$2 = 2^1$

$4 = 2^2$

$5 = 5^1$

$10 = 2^1 \cdot 5^1$

$20 = 2^2 \cdot 5^1$

3. **Igazak-e az alábbi következtetések? Ha igen indokoljunk, ha nem adjunk ellenpéldát!**
   a) 9|x => 3|x?
   b) 15|xy => 15|x vagy 15|y?
   c) ha p prímszám, akkor osztói: az 1 és p?
   d) Ha $x = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^7$ és $y = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 11^0$, akkor y|x?

Megoldás:

a) Igen, mivel ha kilenccel osztható, akkor a számjegyek összege osztható 9-cel (9-es oszthatósági szabály), akkor viszont 3-mal is osztható az összeg (3-mas oszthatósági szabály).

b) Nem igaz. Például x = 3, y = 5.

c) Igaz, p prímszám volta miatt.

d) Akkor osztja y x-et, ha minden prím szerepel x-ben, ami y-ban is, és a prímek hatványkitevője kisebb vagy egyenlő y-ban. Az alábbi táblázat segítségével könnyen eldönthető. Ebben az y-ban szereplő prímek és azok hatványkitevői szerepelnek a két számban. Ha a középső oszlop értékei **nem nagyobbak**, mint a harmadik oszlopban szereplők, akkor osztható x y-nal.

Prímszám	Kitevője y-ban	Kitevője x-ben
2	2	4
5	1	7
11	0	0

Tehát osztja x-et y.

4. $10500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$**. Hogyan számoljuk ki 10 500 az összes osztójának a számát? Gondold meg az osztók számát abban az esetben is, ha a szám alakja:** $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$**.**

/Ezzel a feladattal az osztók száma tételre lényegében rávezetjük a gyerekeket!/

Megoldás:

Vegyük az összes prím szerint végig hatványozva, akár úgy, mint ahogy azt a második feladatban próbáltuk.

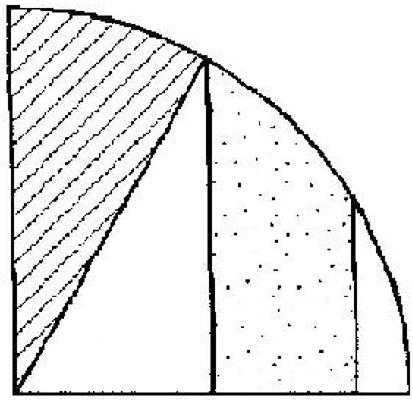
Tehát az osztók általános alakja: $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$

Milyen értékeket vehetnek fel? a = {0, 1, 2}, b = {0, 1}, c = {0, 1, 2, 3}, d = {0, 1}.

Tehát akkor hányféle szám prímtényezős felbontását tudom felírni ezeknek a számoknak a segítségével: $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 48$, tehát ennyi osztója van.

2.) feladat: a szakdolgozatomban szerepelt X. feladat

1303. Egy körlemez negyedét határoló körív harmadolópontjaiból merőlegeseket bocsátottunk az egyik határoló sugárra, továbbá az egyik harmadolópontot összekötöttük a kör középpontjával az ábra szerint. (21. ábra)



21. ábra

ELŐKÉSZÍTŐ FELADATSOR

Mivel ez a feladat volt az egyik kedvencem, ezért nagy örömmel álltam neki, hogy előkészítő feladatsort gyártsak ehhez. Mindössze négy feladatot állítottam össze, de véleményem szerint ez megfelelően összeszedi a trükköket, amelyek segíthetnek a megoldásban.

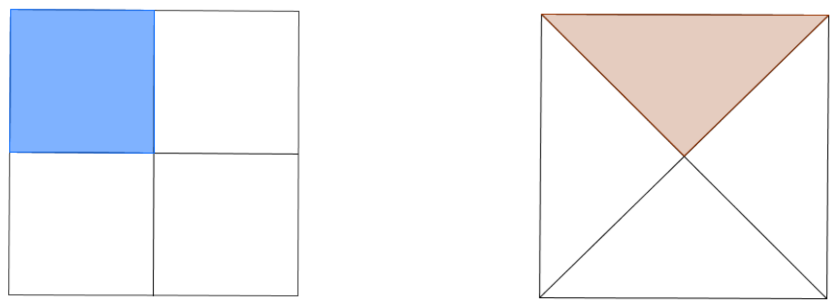
Az elején az előkészítő feladatsorban egy kifejezetten egyszerű feladattal indítottam, amelyet többféleképpen meg lehet oldani, hiszen mondhatjuk azt, hogy ha a két vonal közül az egyiket veszem csak, az felezi a négyzet területét, majd a másik középvonal vagy átló a felét felezi, így negyede a terület a négyszög területének mindkét oldalon. A másik megoldás az lehet, ha megmutatjuk, hogy mindkét alakzat két darab egybevágó derékszögű egyenlőszárú háromszögből áll, aminek szára éppen az alapnégyzet fele. Harmadik megoldásként pedig, a nem színezett területeket próbáljuk meg bemutatni, hogy egyenlők.

A második és harmadik feladatok inkább a számolásos megoldást készítik elő. Megpróbáltam úgy megkonstruálni a feladatokat, hogy minden fellelhető problémát előkészítsek vele, de úgy gondoltam, hogy a negyedik megoldáshoz szükséges tükrözést nem szeretném megmutatni nekik, hiszen erre könnyen rá lehet jönni. Ezen kívül kell egy kis gondolkodás is a feladat megoldása előtt, nem szabad mindent előre megmondani.

A negyedik feladatot inkább érdekességnek szántam, ám ezen felül kifejezetten alkalmas arra is, hogy a harmadik megoldási módszert „modellezze”. Hippokratész holdacskái egy ókori görög matematikai probléma, melyet én egy egyetemi kurzus keretében ismertem meg (Görög matematika).

1. feladat

Az alábbi két színezett terület közül melyik a nagyobb? (22. ábra) A választ indokoljuk meg!



22. ábra

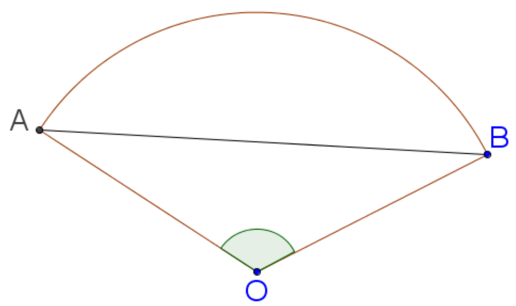
Megoldás:

A két terület megegyezik, mivel a baloldali és a jobboldali ábrán is a négyzet negyedét színeztük ki. (Vettük a felét, és az elfeleztük.)

Másik megoldás, ha azt válaszoljuk, hogy a jelölt területek felbonthatók két egyforma háromszögre, amelyek egyenlő szárúak, a szárai a négyzet oldalának felével egyenlők, és a szögeik 2 darab 45°-os és 1 darab 90°-os.

Harmadik megoldásként megmutatható, hogy a nem színezett területek egyeznek, így a színezetteknek is meg kell egyezniük a két négyzet egybevágósága miatt.

2. feladat



23. ábra

Mekkora a területe egy 120°-os körcikk alakú virágoskertnek, ha a körcikkhez tartozó sugár 5 m? (23. ábra) A virágoskert a mellékelt ábra szerint oszlik meg a margaréta és a tulipán virágok közt.

A tulipánt az A, B, O pontok által határolt háromszög alakú területre ültették. A tulaj azt állítja, hogy ha minden négyzetméteren ugyanannyi nyílik tulipánból, mint margarétából, akkor több tulipánja lesz, mint margarétája. Igaza van-e?
(A válaszokra szöveges választ adjunk! A kert területét két tizedes jegyre kerekítsük!)

Megoldás:

A feladat megoldásához használnunk kell a körcikk és körszelet területére vonatkozó képletet, illetve ezek a területek kiszámíthatók a körcikk és teljes kör területére és a körponti szögek arányára felírt aránypárokból.
Az egész terület az első kérdés. A válasz:

$$T_{kert} = \frac{120°}{360°} \cdot 5^2 \cdot \pi = \frac{25 \cdot \pi}{3} \approx 75{,}54.$$

Ezek után azt kell leellenőrizni, hogy igazat mondott-e a tulaj, azaz az ABO háromszög területe nagyobb-e, mint az AB ívhez tartozó körszelet területe.
ABO háromszög területe számolható a trigonometrikus területképlet segítségével:

$$T_{ABO\Delta} = \frac{5 \cdot 5 \cdot \sin 120°}{2} = \frac{25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 10{,}83.$$

Így a körszelet területe kétféleképpen is számolható: vagy arra is alkalmazzuk a képletet, vagy pedig kivonjuk a háromszög területét a kert területéből. Én most utóbbit alkalmazom.

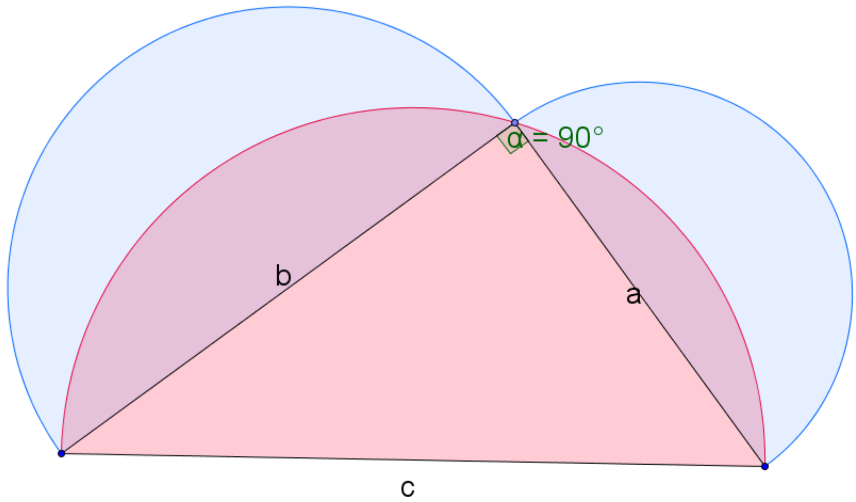
$$T_{körszelet} = \frac{25 \cdot \pi}{3} - \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{25 \cdot (4 \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{3})}{12} \approx 15{,}35.$$ (Ez az eredmény az előbbi közelítő eredményekből is megadható!)

Tehát a válaszok:
A kert területe megközelítőleg 75,54 m^2.
A tulajnak nincsen igaza, mert ha minden m^2-en ugyanannyi nyílik a virágokból, akkor margarétából több lesz, mivel nagyobb területen van ültetve.

3. feladat

Ez a feladat egy ókori görög probléma volt, mellyel Hippokratész foglalkozott, ezért nevezték el róla. Íme Hippokratész holdacskái (24. ábra):

Bizonyítsd be, hogy a két világoskék „holdacska” területe egyenlő az a, b, c oldalú derékszögű háromszög területével, ha a félkörívek az átfogó és a befogók fölé, mint átmérő fölé írt Thalesz-körök ívei.



24. ábra

Megoldás:

Tudjuk, hogy a c oldal felé, mint átmérő felé írt Thalesz-kör fele éppen a háromszög, a lila körszeletek területösszege.

Ezen kívül tudjuk, hogy Pitagorasz-tétel szerint

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Ha a fenti második egyenletet végig szorozzuk π-vel, akkor éppen azt kapjuk meg, hogy a két befogó felé írt Thalesz-kör felek területe éppen egyenlő az átmérő fölé írt területtel. Így tehát a $T(\textit{lilák} + \textit{rózsaszín}) = T(\textit{lilák} + \textit{kékek})$

Így tehát ha a két egyenlő területből ugyanazokat levonjuk (lilák területe), akkor a maradék területeknek is meg kell egyezniük. Ezzel be is bizonyítottuk.

Másképpen bizonyítható úgy is, ha megnézzük mekkora az egész síkidom területe (a háromszög területe + a két félkör területe), akkor ebből levonva a c felé írt Thalesz-kör felének területét éppen a két „holdacska” területét kapjuk. Itt ismét alkalmazható a Pitagorasz-tétel, és ezzel bebizonyítottuk.

Összegzés

Szakdolgozatom zárásaként szeretném összegezni élményeim és gondolataim.

A témaválasztásom így utólag nagyon szerencsésnek tartom, hiszen nem csak korábban elkészített anyagaimból tudtam használni hozzá ötleteket, megoldásokat, hanem lehetőségem volt arra is, hogy ezeket és az új részeket kidolgozva, azt hozhattam ki belőle, ami számomra fontos volt.

A munka során volt olyan, hogy akár napokig képes voltam gondolkodni egy feladaton, mikor már volt hozzá két megoldásom. Ezek után úgy gondolom, remek agytorna volt. Olyan megoldások is eszembe jutottak (főleg a geometriai jellegű feladatokra gondolva), amelyek korábban meg sem fordultak a fejemben. Így kifejezetten hasznosnak tartom ezt a pár hónapos munkát, amit végeztem. Mondhatnám ezt úgy is, hogy talán „szélesebb lett a látóköröm", amit azért fontos kiemelni, hiszen a szakdolgozatom bevezetőjében, ezt említettem, mint legfőbb megvalósítandó célt.

Ezen felül úgy érzem, hogy nem csak nekem sikerült a témából sok mindent kihoznom, hanem fordítva is, a témából magától is adódtak ötletek, hiszen például a villáminterjú, amelyet Pálmay Lóránt tanár úrral készítettem, talán soha meg sem született volna, hogyha nem ezt a témát választom.

Összességében tehát nagyon élveztem a munkát, sok újat tanultam, és remélem egyszer lesz lehetőségem arra, hogy az előkészítő feladatsoraim, vagy az ezek alapján készíthető óraterveim kipróbáljam egy matematika tagozatos osztályban.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani még egyszer témavezetőmnek a kezdeti feladatokért, a sok segítségért, valamint Pálmay Lóránt tanár úrnak a villáminterjúért.

MELLÉKLET

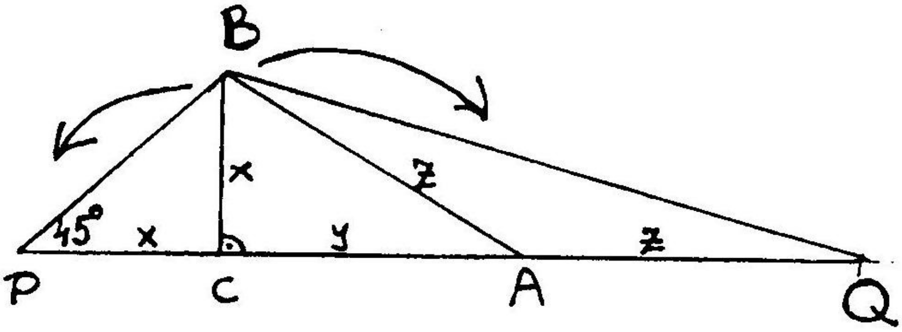
Feladat kilenc megoldással

A feladat:

Adott kerületű derékszögű háromszögek közül melyiknek minimális az átfogója?

1. megoldás

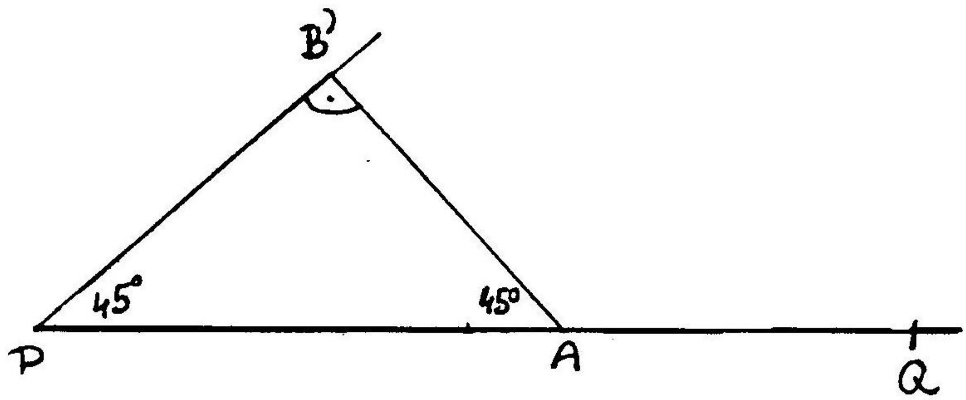
Legyen az ABC derékszögű háromszög, és a kerületét (2s) mérjük fel az 1. ábrán látható módon AC egyenesére. Ekkor PQ = 2s.



1. ábra

A PQ = 2s kerületű derékszögű háromszögek B csúcsai a PQ-val 45°-os szöget bezáró félegyenesen vannak, A-tól z távolságra. Ez a pont nyilvánvalóan PQ belső pontja. A keresett B pont az A körül AQ = z sugárral rajzolt kör és a félegyenes közös pontja (B') (2. ábra)

E közös pont akkor létezik, ha $AB = AQ \geq \frac{\sqrt{2}}{2} AP \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(2s - AQ)$ azaz, ha $AQ \geq 2s(\sqrt{2} - 1)$. $x + y > z$ miatt a $\frac{PQ}{2} = s > AQ$ feltételnek is teljesülnie kell.



2. ábra

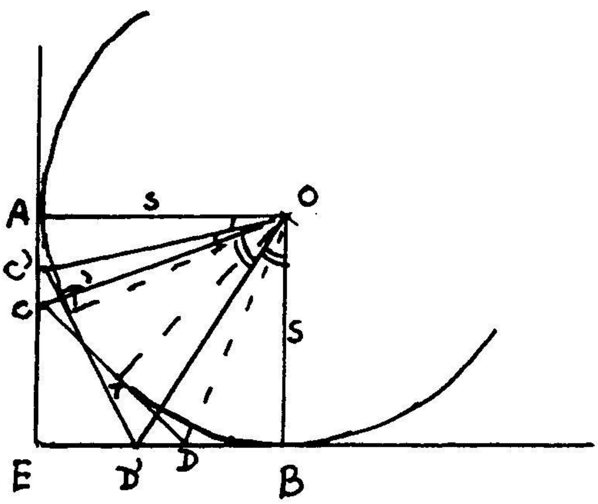
Így $2s(\sqrt{2}-1) \leq AQ < s$.

Ebből következik, hogy $AQ = z$ akkor minimális, ha $AQ = 2s(\sqrt{2}-1)$. Ebben az esetben az A középpontú, AQ sugarú kör érinti a PB félegyenest, így a $PBA\angle$ 90°-os, azaz az ABC háromszög egyenlőszárú.

2. megoldás

Tekintsünk egy derékszög szárait érintő, O középpontú s sugarú kört! E derékszögből az adott 2s kerületű derékszögű háromszögeket lemetszik a kör azon érintői, amelyek elválasztják az E csúcsot O-tól. (3. ábra)

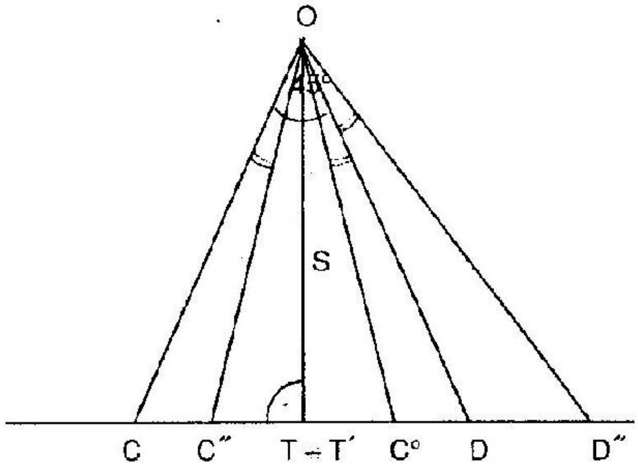
Az EBOA négyzet, és a $DOC\angle = D''OC'\angle = 45°$, ahol C és D, a CO = OD esetén a megfelelő érintő metszéspontjai a szögszárakkal, C', D' ugyanilyen metszéspontok $C'O \neq OD'$ esetén. OT a CDO háromszög, OT' a $C'OD'$ háromszög, CD illetve $C'D'$ oldalhoz tartozó magassága. Így $OT = OT'$.



3. ábra

Forgassuk el az $C'OD'$ háromszöget O körül úgy, hogy T' a T-re kerüljön. (4. ábra) A CD egyenesén így C'-nek feleljen meg a C'', a D'-nek a D''. Az O pont A illetve B vetületeitől való távolsága miatt $OB = OA < OC' < OC = OD < OD'$. (1)

Ezért C'' a CT-nek belső pontja, míg D'' a CD félegyenesén a CD szakaszon kívül van. Ez nyilvánvalóan feltehető, hiszen ekkor a D', ED szakasz pontja lesz.



4. ábra

Megmutatjuk, hogy $CC'' < DD''$.

$COC''\angle = DOD''\angle$, hiszen $C''OD''\angle = 45°$. Tükrözzük COC'' háromszöget az OT-re. Ekkor C'' képe $C°$. A $C°OD''$ háromszögben OD szögfelező és mivel (1) miatt $OD'' > OC''(= OC°)$, így $C°D = C''C < D''D$.

Így $CD < C''D''$, tehát OC=OD feltétel mellett teljesül a kívánt tulajdonság, azaz az egyenlőszárú derékszögű háromszög adja a minimális átfogót.

3. megoldás

Az 5. ábra alapján készítsük el a $C'CC''$ háromszöget, amelyben $C'C'' = 2s$. C rajta van a

$C'C'' = 2s$-hez tartozó 135°-os látóköríven. A CC', CC'' és a $C'C''$ szakaszok felezőpontjai rendre F', F'' és F.

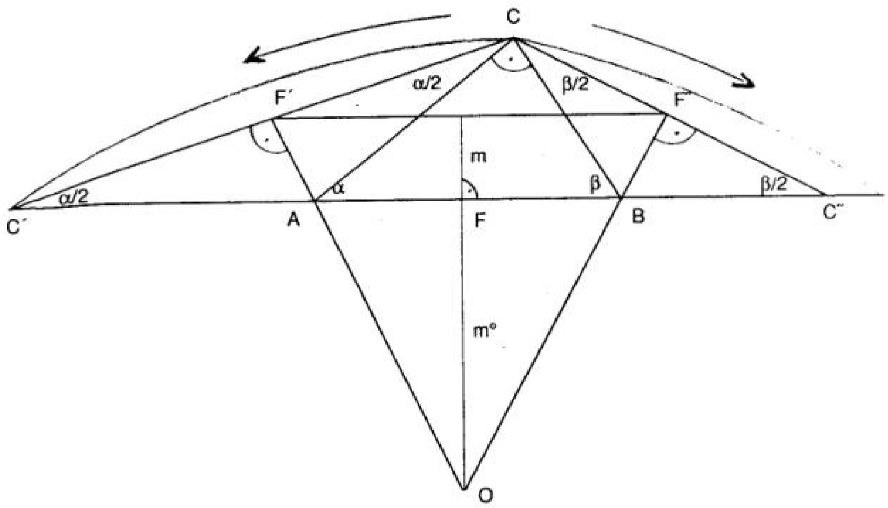
A CC' és CC'' szakaszok felezőmerőlegesei egymást a $C'CC''$ háromszög körülírt körének középpontjában (O) metszik.

$FF' = s$ és $F'F'' \parallel C'C''$, hiszen $F'F''$ középvonal a $C'CC''$ háromszögben.

$$\frac{F'F''}{AB} = \frac{m° + m}{m°}.$$

Mivel $F'F''$ hossza állandó, AB, azaz az átfogó akkor minimális, ha $\frac{m° + m}{m°}$ maximális.

Mivel $\frac{m° + m}{m°} + 1 + \frac{m}{m°}$ és m° állandó, az előbbi kifejezés akkor a legnagyobb, ha m maximális. A $C'CC''$ háromszög $C'C''$ oldalához tartozó magasságának fele m, tehát ez akkor maximális, ha a $C'CC''$ háromszög, és így az ABC háromszög is egyenlőszárú.



5. ábra

4. megoldás

Legyen σ az ABC derékszögű háromszög beírt körének sugara, t a területe.

Így $a + b = c + 2\sigma$, azaz $2s + 2c + 2\sigma$ (2)

Mivel $\sigma = \frac{t}{s} = \frac{c \cdot m_c}{2s}$, a $t = \sigma \cdot s$ ismert összefüggést és (2)-t is felhasználva $c = \frac{2s^2}{2s + m_c}$ adódik.

Így c akkor minimális, rögzített kerület mellett, ha m_c maximális.

Az 5. ábra alapján C rajta van a $C'C'' = 2s$ -hez tartozó, 135°-os látóköríven, s emiatt m_c akkor maximális, ha talppontja a $C'C''$ felezőpontja, azaz ha AC = BC, tehát a háromszög egyenlőszárú.

5. megoldás

Derékszögű háromszögünkre a szokásos jelöléseket alkalmazzuk, és felhasználjuk a számtani-mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget a^2, b^2-re.

$$c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2c^2$$

Így $a + b \leq \sqrt{2} \cdot c$ adódik.

Mivel $\sigma = \dfrac{a+b-c}{2}$, következik, hogy:

$$\sigma \leq \frac{1}{2} \cdot (c \cdot \sqrt{2} - c) = \frac{c}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) \quad (3)$$

(2)-ből következik, hogy $s - \sigma = c$ (4)

Adott kerületű derékszögű háromszög átfogója tehát akkor minimális, ha σ maximális.

$\sigma_{\max} = c \cdot \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$ (3) miatt, bármely c esetén.

Így $s - c \cdot \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} = c$ írható (4) alapján, ahonnan $c = \dfrac{2s}{\sqrt{2} + 1} = 2s \cdot (\sqrt{2} - 1).$

Ebben az esetben, mint azt majd a (9)-ben látjuk, a = b, azaz a derékszögű háromszög egyenlőszárú.

6. megoldás

A szokásos jelölés mellett alkalmazzuk a ás b pozitív számokra a számtani és négyzetes középre vonatkozó egyenlőtlenséget, amely szerint:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (5)$$

Mivel $a + b + c = 2s$ és a háromszög derékszögű, $a + b \leq \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot 2} = c \cdot \sqrt{2}$

Így $2s - c \leq c \cdot \sqrt{2}$

$2s \leq (\sqrt{2 + 1} \cdot c)$

azaz $2s \cdot (\sqrt{2} - 1) \leq c$ (5) írható.

Mivel 2s állandó, így c nyilvánvalóan akkor minimális, ha $c = 2s \cdot (\sqrt{2} - 1).$ Ebben az esetben viszont az (5) egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn, így a = b, azaz a derékszögű háromszög egyenlőszárú.

7. megoldás

A szokásos jelölés mellett alkalmazzuk az a2, b2 pozitív mennyiségekre a számtani – mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget. Ennek alapján $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ (6) írható.

A feltételekből az is következik, hogy: $(a+b)^2 = (2s-c)^2$.

Felhasználva ez utóbbit és azt, hogy a háromszög derékszögű, b $2ab = (2s)^2 - 4sc$ (7) írható.

Így viszont a (6) egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $c^2 + 4sc - (2s)^2 \geq 0$ (8) mindig teljesül.

Vizsgáljuk meg, hogy ez esetben mikor lesz a c minimális!

A $c^2 + 4sc - (2s)^2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei:

$$c_{1,2} = \frac{-4s \pm 2s \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2s \cdot (-1 \pm \sqrt{2}).$$

A (8) feltételt figyelembe véve, valamint, hogy c>0 kell legyen, a $c \geq (\sqrt{2}-1) \cdot 2s$ adódik.

Azaz c akkor minimális, ha az előbbi kifejezésben egyenlőség áll fenn.

Így $a + b + (\sqrt{2}-1) \cdot 2s = 2s$

$a + b + = (2-\sqrt{2}) \cdot 2s,$ illetve (7) alaján: $ab = \frac{(2s)^2 - 2 \cdot (2s)^2 \cdot (\sqrt{2}-1)}{2}$ (9)

Tehát a és b az $A^2 - (2-\sqrt{2}) \cdot 2s \cdot A + \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \cdot (2s)^2 = 0$ egyenlet gyökei. Ennek diszkriminánsa 0, így a = b, azaz a háromszög egyenlőszárú.

Megjegyzés 1: (7) miatt $T = ((2s)^2 - 2 \cdot 2s \cdot c) \cdot \frac{1}{4}$. Ebből látható, hogy az állandó kerületű, derékszögű háromszög pontosan akkor maximális területű, ha az átfogója minimális.

Megjegyzés 2: a 2., 3., 4. megoldások alapján az eredeti feladatnál általánosa bb állítás is igaz:

> Az olyan ABC háromszögek közül, amelyeknek kerülete egyenlő, és egyenlő a γ szögük is, a = b esetén lesz a γ -val szemközti oldal a legkisebb. (10)

Az adott feltételek mellett a második megoldás esetében, 6. ábra, segítségével látható, hogy $D'OC'\angle = 90° - \frac{\gamma}{2}$, azaz állandó, s a bizonyítás során csak $D'OC'\angle$ állandó voltát használtuk ki. A harmadik és negyedik esetén is hasonló gondolatmenet alkalmazható.
A második, harmadik és negyedik megoldások esetén megtehettük volna tehát, hogy rögtön az általános esetet bizonyítjuk.

8. megoldás

Alkalmazzuk a szokásos jelöléseket ABC háromszögekben. Legyen 2s és γ rögzített. Fejezzük ki a kerületet c oldal segítségével, a sinustétel felhasználásával:

$$2s = a + b + c = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} + c = \frac{c}{\sin\gamma} \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) =$$

$$= \frac{c}{2\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2)}\left(2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2 \cdot \sin(\gamma/2) \cdot \cos(\gamma/2)\right) =$$

$$= \frac{c}{\sin(\gamma/2)} \cdot \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\gamma/2)\right).$$

Innen $c = \dfrac{2s \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}$.

A jobb oldalon a nevező első tagjának kivételével állandó mennyiségek szerepelnek. A c akkor minimális, ha ez a tag maximális, azaz ha α = β.
A feladatnak természetesen analitikus geometriai megoldása is létezik, s gyakorlásképpen bárki végiggondolhatja.

9. megoldás

A szokásos jelölések mellett, $2s = a + b + c$ és $a^2 + b^2 = c^2$ írható.

Így $(2s - b - c)^2 + b^2 = c^2$. (11)

Tehát $c = f(b) = \dfrac{2 \cdot 2sb - (2s)^2 - 2b^2}{2 \cdot (b - 2s)}$ ebből $f'(b) = \dfrac{-(2s)^2 - 2b^2 + 4b \cdot 2s}{2 \cdot (b - 2s)^2}$.

Látható, hogy $b = \frac{2s(2+\sqrt{2})}{2} = s \cdot (2+\sqrt{2})$ esetén f(b)-nek helyi maximuma, míg $b = \frac{2s(2-\sqrt{2})}{2} = s(2-\sqrt{2})$ (12) esetén pedig helyi minimuma van.

Ha $b = 2s \cdot (2-\sqrt{2})$, akkor $a = s \cdot (2-\sqrt{2})$, hiszen (11)-ben a helyett b is írható. Akkor egy f(b)-vel megegyező alakú c = f(a) függvény minimumát kell keresni, ami a (12)-vel megegyező eredményt ad a-ra. Így tehát a = b, azaz a feltételnek az egyenlőszárú derékszögű háromszög tesz eleget.

Az eddigiekből természetesen nem következik, hogy nincsen több megoldása a feladatnak. S valóban a negyedikben további elemi geometriai megoldást is találhatunk. A megoldásokhoz használható eszközök sokféleségét azonban az eddigiek is jól bemutatják, ki-ki kedve szerint válogathat közöttük.