Számelmélet feladatok
a középiskolai versenyeken és a KöMaL-ban

Szakdolgozat

Készítette: Tudja Éva Ilona
Témavezető: Dr. Freud Róbert

Eötvös Loránd Tudományegyetem Temészettudományi Kar
Matematika Alapszak Tanári Szakirány
2009

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A témaválasztást a versenyfeladatok iránti érdeklődés és az egyetem során legjobban megkedvelt Számelmélet tantárgy inspirálta. Emellett szerepet játszott benne, hogy középiskolásként nem tettem szert különösebb gyakorlatra e téren, és ezt hiányosságnak érzem.

Célom volt tehát az ezen való változtatás is.

A szakdolgozat két fejezete más-más oldalról közelít középiskolai versenyfeladatokhoz. Az első rész célja, hogy az adott feladathoz kapcsolódó módszerek iskolai tanítását segítsük. Ezt főként rávezető feladatokkal szeretnénk elérni, mivel úgy gondoljuk, hogy az önállóan felfedezett ismeretek jobban hasznosíthatóak a későbbiekben.

A második fejezetben egy-egy feladatot nemcsak megoldunk, hanem tovább is gondolunk. Ekkor általánosítjuk, vagy másképpen módosítjuk a feladatot, megvizsgáljuk, hogy a különböző feltételek mennyire hangsúlyosak. Mindkét részre jellemző, hogy a feladatokra igyekszünk több megoldást is mutatni. Emellett megpróbáljuk felhívni a figyelmet arra is, hogy mikor milyen módszereket alkalmazunk.

Erre azért fektettem nagy hangsúlyt, mert úgy gondolom, hogy a dolgozatban található feladatok nem nehezek olyan értelemben, hogy különösebb matematikai többletismeretet feltételeznének. Így véleményem szerint a módszerek megfelelő ismertetése után sok középiskolás tanuló lehet képes a feladatok önálló megoldására.

A feladatok különböző nehézségűek. Ennek oka, hogy az elmúlt másfél évtized OKTV feladatainak két különböző kategóriájából válogattam őket, és KöMaL-ból is választottam B, illetve C jelű példákat. A gyűjtés egyik része igen egyszerűen megoldódott, köszönet érte a Matematikai Múzeumnak. Az OKTV feladatok begyűjtése már több nehézséget okozott. Sajnálatosnak tartom, hogy nincs olyan tárhely (vagy ha van, akkor nehezen megtalálható), ahol ezek mind elérhetőek

évtől, kategóriától függetlenül.

Köszönet a szakdolgozatomhoz kitűnő segítséget nyújtó témavezetőmnek, Freud Róbertnek, aki a szakmai részen kívül a technikai megvalósításhoz is adott ötleteket. A nehezebb technikai részek megvalósulásában nyújtott segítségért köszönet legjobb barátomnak.

1. fejezet

Rávezetés

Az oszthatóság a számelmélet egyik alappillére. A tanulók már az általános iskola alsó osztályaiban megismerkednek vele, és a megszerzett ismeret a későbbi tanulmányok során nélkülözhetetlenné válik. Emellett sok középiskolás versenyfeladat is kapcsolódik hozzá. Járjuk körül az alábbi példát!

1.1. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy $m^2 + n^2 + m + n - 1$ semmilyen m és n egész számra sem osztható 9-cel.

Aki találkozott már hasonló példával, valamilyen rutinmódszer segítségével, jó eséllyel meg tudja oldani a feladatot. Az alábbi módszer például célravezető.

1.1.1. Megoldás

Azt mondjuk, 9-cel való oszthatóság szempontjából m és n a következő alakokat veheti fel (ahol k egész szám):

$$9k, 9k \pm 1, 9k \pm 2, 9k \pm 3, 9k \pm 4.$$

Ezekben az esetekben a szám négyzetének alakja rendre:

$$9k, 9k + 1, 9k + 4, 9k, 9k - 2.$$

Ez azt jelenti, hogy $m^2 + m$ és $n^2 + n$ is a következők valamelyike:

$$9k, 9k + 2, 9k - 3, 9k + 3.$$

Semelyik két ilyen összege nem lesz $9k + 1$ alakú, vagyis $m^2 + n^2 + m + n - 1$ sosem osztható 9-cel.

Egy ilyen feladat megoldása nehézséget okozhat egy jó logikai képességgel rendelkező diáknak is, ha korábban még nem találkozott hasonlóval. A következőkben olyan rávezető feladatokat mutatunk be, melyek elvégzése reményeink szerint elvezet oda, hogy egy érdeklődő diák képes legyen az 1.1. Feladat megoldására önállóan.

Figyelembe véve, hogy a rutinszerű megoldások általában több számolással járnak, mint egy ötletes megoldás, bemutatunk egy ilyet is. A hangsúlyt azonban az algoritmusos megoldási módra helyezzük, mert ez az, ami jobban tanítható.

A mechanikus megoldás után lássuk most a feladat egy ötletes megoldását.

1.1.2. Megoldás

Alakítsuk át az eredeti kifejzést a következőképpen:

$$m^2 + n^2 + m + n - 1 = (m + 5)^2 + (n + 5)^2 - (9m + 9n + 45) - 6.$$

Ekkor $9 \mid 9m + 9n + 45$, ezért elég az $(m + 5)^2 + (n + 5)^2 - 6$ kifejezést vizsgálni. Nézzük meg, hogy két négyzetszám összege adhat-e 6-ot maradékul 9-cel osztva.

Mivel a négyzetszámok 9-cel osztva $0, 1, 4, 7$ maradékot adnak, ezért két négyzetszám 9-es maradékának az összege nem lehet 6.

Nézzünk meg egy ehhez formailag hasonlító megoldást, ami - a látszólagos hasonlóság ellenére - módszernek is tekinthető.

1.1.3. Megoldás

Alakítsuk teljes négyzetté (külön-külön) az m-es, illetve az n-es tagokat!

$$m^2 + n^2 + m + n - 1 = (m + 0,5)^2 + (n + 0,5)^2 - 1,5$$

Itt máris csak két négyzetszám szerepel, de fellépett egy másik probléma: sem a zárójelben lévő számok, sem a megmaradt tag nem egész szám, nem tudjuk őket oszthatósági szempontból vizsgálni. Segítsünk ezen úgy, hogy olyan egy számmal szorozzuk végig az egyenletet, amire ezek mindegyike egész lesz. Ezt kapjuk $4 = 2^2$-nal szorozva:

$$2^2 \cdot (m + 0,5)^2 + 2^2 \cdot (n + 0,5)^2 - 2^2 \cdot 1,5 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 - 6.$$

Felmerül a kérdés, jogos-e ez az eljárás? Változott-e a szám 9-cel való oszthatósága így?

Azt állítjuk, hogy nem. Egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, amikor a 4-szerese, hiszen a 4 és a 9 relatív prímek. Eszerint:

$$9 \mid (m + 0,5)^2 + (n + 0,5)^2 - 1,5 \Longleftrightarrow 9 \mid (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 - 6.$$

Így ismét arra jutottunk, hogy két négyzetszám összege modulo 9 milyen esetben lesz 6. Látjuk, hogy ez nem teljesülhet, az állítást beláttuk.

A tanítás során fontos az érdeklődés felkeltése és fenntartása. Ehhez szükséges, hogy a tanulók maradéktalanul megértsék, mi a probléma, a vizsgálódás tárgya. Ezért egy új rész bevezetésénél különösen fontos arra is hangsúlyt fektetni, hogy az eredmény érdekes, figyelemfelkeltő legyen. Emellett célszerű olyan feladattal kezdeni, melynek eredményére mindenki rátalálhat önállóan. Ilyesmire gondolunk:

1.2. Feladat

Vizsgáljuk meg, milyen számra végződnek a négyzetszámok (tízes számrendszerben)!

1.2.1. Megoldás

Egy a természetes számot 10-zel elosztva, kapunk valamilyen maradékot, jelölje ezt d. Ha a maradék például 6, akkor $a = 10 \cdot k + 6$ alakban írható, ahol k természetes szám. Ily módon felírtuk az összes természetes számot, ami 10-zel osztva 6-ot ad maradékul. Hasonlóan felírhatunk minden természetes számot $10k + m$ alakban, ahol m a 10-zel való osztás során kapott maradék. A maradékot kicsit más értelemben úgy tekintjük, mennyit kell változtatni a számon, hogy osztható legyen 10-zel. Például $99 = 9 \cdot 10 + 9$ helyett ezt írjuk: $10 \cdot 10 - 1$. Ennek nagy előnye, hogy ily módon összeségében kisebb számokkal dolgozhatunk. Ekkor kongruenciás jelöléssel ezt kapjuk:

$$
\begin{aligned}
(10k)^2 &\equiv 0 \pmod{10}\\
(10k \pm 1)^2 &\equiv 1 \pmod{10}\\
(10k \pm 2)^2 &\equiv 4 \pmod{10}\\
(10k \pm 3)^2 &\equiv 9 \pmod{10}\\
(10k \pm 4)^2 &\equiv 6 \pmod{10}\\
(10k + 5)^2 &\equiv 5 \pmod{10}
\end{aligned}
$$

Hogyan gondolkodhat egy középiskolás? Mit mondhatunk neki segítségként?

Érdemes felírni az első néhány természetes szám négyzetét. Nézzük most az első 20 négyzetszámot:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400.$$

Ezek végződése rendre:

$$0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0.$$

Aki számológép helyett papíron végezte a számolást, jól láthatta, hogy csak a szám utolsó jegyétől függ a szorzat végződése.

Mit figyelhetünk meg még? A sorozatban ismétlődő rész szimmetrikus: az egymást 10-zel oszthatóra kiegészítő számok négyzete azonosan végződik. Az ismétlődés és a szimmetria okát hagyjuk függőben rövid időre. Az 1.3. Feladat után visszatérünk rá.

Felmerül a kérdés, mi itt a megjegyzésre érdemes eredmény? Azt kaptuk, hogy egy négyzetszám nem végződhet tetszőlegesen, sosem lesz az utolsó számjegy a $2, 3, 7, 8$ számok valamelyike. A figyelemfelkeltést elősegítendő, feladhatjuk az eredeti helyett a következő - az előbbivel lényegében megegyező - feladatot.

Milyen számok négyzete végződik kettőre?

Mit tehetünk, ha az 1.1. Feladat túl nehéznek bizonyult a csoport számára? Például zavarta őket az első megoldásban használt $9k \pm 1$ felírás? Érdemes több olyan példát megnézni, ahol fokozatosan vezetjük be az általános felírási módot. A következő példa talán segít.

Mutassuk meg, hogy $2k+1$ egymást követő szám összege osztható $2k+1$-gyel!

Írjuk fel a számokat $m, m+1, \ldots, m+2k$ alakban. Ha ismerjük a számtani sorozat összegképletét, ezt felhasználva az összeg:

$$\frac{m+m+2k}{2} \cdot (2k+1) = (m+k)(2k+1),$$

ami nyilván osztható $2k+1$-gyel. Megoldhatjuk azonban enélkül is a feladatot. Gyakran használt trükk, hogy szomszédos számokat a középső elemhez viszonyítunk. Jelölje ezt a. Ekkor a következő számokat vehetjük:

$$a-k, a-k+1, \ldots, a-1, a, a+1, \ldots, a+k-1, a+k.$$

Így éppen $2k+1$ számunk lesz, ezek közül k db kisebb, k db nagyobb a -nál, és van maga a. Ekkor egy-egy elemet véve a sor elejéről és hátuljáról, ezek összege $2a$ lesz. Továbbhaladva is ezt tapasztaljuk, a második, harmadik stb. elemek összege is egyenlő. Ilyen párokból k darabot tudunk készíteni, ezek összege összességében $2ak$. Ehhez hozzáadva a középső elemet, majd kiemelve azt: $2ak + a = a(2k+1)$, amivel nyertünk egy másik megoldást is.

Az oszthatósághoz kapcsolódik sok helyiértékes, számrendszeres példa is, ezek is gyakran megtalálhatók versenyeken. Az alábbiakban felhasznált alapötlet, egy $\overline{ab}$ szám felírása $10a+b$ alakban, 6. osztályos tananyag.

1.3. Feladat

Az $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű számok között hány

a) 217-tel

b) 218-cal osztható szám van?

1.3.1. Megoldás

A megoldás menete ezeknél a feladatoknál a következő lehet.
Az $\overline{ababab}$ szám hatjegyű, tehát $a \neq 0$.

a) $\overline{ababab} = 101010a + 10101b = 10101(10a+b) = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (10a+b)$. Vagyis a szám minden esetben osztható 7-tel. Mivel $217 = 7 \cdot 31$, ezért pontosan $31 \mid 10a+b$ esetén teljesül az a) eset. Ez három lehetőséget jelent, hiszen $\overline{ab} \leq 99$:

$$31 \mid 10 \cdot 3 + 1 = 31;$$

$$31 \mid 10 \cdot 6 + 2 = 62;$$

$$31 \mid 10 \cdot 9 + 3 = 93.$$

A feladat feltételét kielégítő számok tehát 313131, 626262 és 939393.

b) A 218 prímtényezős felbontása $218 = 2 \cdot 109$. Az a)-ban kapottak szerint 10101 nem osztható sem 2-vel, sem 109-cel. Azt kellene tudni, hányszor osztható $\overline{ab}$ 2-vel is, és 109-cel is. Ez sosem teljesül, hiszen 109 nem lehet osztója $\overline{ab}$-nek, mert $\overline{ab} \leq 99$ (az $\overline{ab} = 0$ esetet pedig kizártuk).

Hogyan variálható tovább a feladat? A kérdést így is feltehetjük:

Mely számokkal osztható mindig $\overline{ababab}$?

Láthatjuk, hogy hasonló feladatok egyszerűen gyárthatók.

$13 \mid \overline{abcabc} = 100100a + 10010b + 1001c = 1001 \cdot (100a + 10b + c)$, és tudjuk, hogy $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Rákérdezhetünk tehát, mikor osztja $7, 77, 143$ stb. $\overline{abcabc}$-t.

$101 \mid \overline{abab} = 100\overline{ab} + \overline{ab}$

Ez a példa tipikus rávezető feladat lehet, mivel nem igényel számolást. Aki felfedezi, mit jelent a jelölés, már készen is van.

Az előbb egy általános iskolából ismert helyiértékes felírási módot használtunk. Tekintsünk most az összes d-re végződő természetes számot. Ezeket felírhatjuk a következő alakban: $10x + d$. Emeljük most négyzetre a számot!

$(10x + d)^2 = 100x^2 + 20x + d^2$. Itt az első két tag nyilvánvalóan mindig osztható 10-zel, így a szám utolsó számjegye d^2 utolsó számjegye lesz, ami valóban csak d-től függ. Sőt, itt magyarázatot kapunk a sorozaton belül megfigyelt szimmetriára is. Az egymást 10-re kiegészítő számjegyek, (a és $10 - a$) négyzetének (a^2 és $100 - 20a + a^2$) végződése egyaránt a^2 utolsó jegye.

Ez a felírási mód nem csak egy tízes számrendszerbeli szám utolsó jegyét adja meg. Ez az utolsó jegy a szám 10-zel való osztási maradéka is egyben. Ehhez hasonlóan megnézhetjük, hogy milyen maradékot adhat egy négyzetszám különböző számokkal való osztás esetén.

A magasabb kitevős hatványozás bevezetéseként köbszámokat is vizsgálhatunk, és végig felhasználhatjuk, hogy a számok felírhatók egy adott számmal való osztás esetén kapott maradék segítségével (tetszés szerint beleértve a „negatív maradékot” is). Lássunk néhány példát.

- Ha $n^2 \equiv a \pmod 3$, akkor $a \not\equiv 2 \pmod 3$.
  3-mal való osztás szerinti felírásban minden szám $3k \pm 1$ vagy $3k$ alakú. Ezek négyzete $9k^2 + 6k + 1$, illetve $9k^2$. Ezek egyike sem ad 3-mal osztva 2-t maradékul.

- Ha $n^2 \equiv a \pmod 4$, akkor $a \equiv 0$ vagy $1 \pmod 4$.
  A számok alakja ekkor $4k, 4k \pm 1, 4k + 2$ lehet, így a négyzetek alakja $16k^2$, $16k^2 + 1, 16k^2 + 4$ egyikének adódik. Ezek néggyel osztva valóban csak 0-t vagy 1-t adhatnak maradékul.

- Ha $n^2 + m^2 \equiv a \pmod 4$, akkor $a \not\equiv 3 \pmod 4$.
  Az előbb kapott eredményt felhasználva ez az állítás már nyilvánvaló: 0 és 1 számokból kettőt összeadva nem kaphatunk 3-at eredményül.

- Ha $n^2 \equiv a \pmod 8$, akkor $a \equiv 0, 1$ vagy $4 \pmod 8$.
  A $8k, 8k \pm 1, 8k \pm 2, 8k \pm 3, 8k + 4$ számokat négyzetre emelve azt kapjuk, hogy minden páratlan szám négyzete kongruens 1-gyel modulo 8. A 2 és 6 négyzete 4, a 0 és 4 négyzete 0 lesz. Megjegyzésre érdemes megállapítás, hogy csak ezt a 3 számot kaphatjuk meg.

- Ha $n^2 \equiv a \pmod 9$, akkor $a \equiv 0, 1, 4$ vagy $7 \pmod 9$.
  Ezt már korábban láttuk.

- Ha $n^3 \equiv a \pmod 7$, akkor $a \equiv 0, \pm 1$.
  A héttel osztható számok köbe nyilván osztható 7-tel, és $(\pm 1)^3 \equiv \pm 1$ sem meglepő. Érdekes azonban, hogy a többi 7-tel nem osztható szám köbe is $7k \pm 1$ alakú:

  * $(\pm 2)^3 \equiv \pm\ 8 \equiv \pm 1 \pmod 7$
  * $(\pm 3)^3 \equiv \pm 27 \equiv \mp 1 \pmod 7$

1.4. Feladat

Milyen számrendszerben lesz 123 négyzetszám? Mi a helyzet a 111-gyel?

1.4.1. Megoldás

$n^2 = t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 + 2$, vagyis $n^2 - (t+1)^2 = 2$. Erről azonban tudjuk, hogy 4-gyel való oszthatóság szerint ellentmondást ad, hiszen amint az előbb láttuk

$$\begin{aligned}(4k)^2 &\equiv 0 \pmod 4\\ (4k+1)^2 &\equiv 1 \pmod 4\\ (4k+2)^2 &\equiv 0 \pmod 4\\ (4k+3)^2 &\equiv 1 \pmod 4,\end{aligned}$$

tehát semelyik két négyzetszám különbsége nem adhat 2 maradékot. Így 123 egyetlen számrendszerben sem lehet négyzetszám.

111-re hasonló eredményt kapunk, de a módszer más. Gondoljuk meg, milyen szám a $t^2 + t + 1$! Nagyon hasonlít egy ismert azonosságra, nevezetesen $(t+1)^2 = t^2 + 2t + 1$-re. Ennél azonban mindig kisebb, és emellett tudjuk, t^2-nél mindig nagyobb. Nézzük meg ezt egyben:

$$t^2 \; < \; t^2 + t + 1 \; < \; (t+1)^2.$$

Tehát 111 két szomszédos négyzetszám közé esik. Így nem lehet négyzetszám egyetlen t-re sem.

Ezt követően akinek nem okoz nehézséget az 1.1. Feladat, próbálkozhat az alábbi példával!

1.5. Feladat

Legyen az n pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy $5^n - 8n^2 + 4n - 1$ osztható 64-gyel!

1.5.1. Megoldás

Az osztó prímtényezős felbontása: $64 = 2^6$. Az osztandó két középső tagja láthatóan osztható 4-gyel. Egymás mellé helyezve a két szélső tagot, és az $a^n - b^n$-re vonatkozó azonosságot felhasználva a következőt kapjuk:

$5^n - 1 = (5-1)(5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 1)$, amiről szintén tudjuk, hogy a 4 osztója.

$5^n - 8n^2 + 4n - 1 = 5^n - 1 - 8n^2 + 4n = 4 \cdot \Big((5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 1) - 2n^2 + n\Big)$.

Ez azt jelenti, hogy

$$64 \mid 5^n - 8n^2 + 4n - 1 \iff 16 \mid (5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 1) - 2n^2 + n.$$

Nézzük meg, milyen maradékot adnak a négyzetszámok, illetve az 5 hatványai 16-tal osztva.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n^2	1	4	−7	0	−7	4	1	0	1	4	−7	0	−7	4	1	0
5^n	5	−7	−3	1	5	−7	−3	1	5	−7	−3	1	5	−7	−3	1

Azt látjuk, hogy az 5 hatványai periodikusan változnak. Mivel a periódus hossza 4, ami osztója 16-nak, ez a későbbiekben sem okoz változást. Amire szükségünk van:

$$16 \mid \left(\sum_{i=0}^{n-1} 5^i\right) - 2n^2 + n.$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$-2n^2$	−2	8	−2	0	−2	8	−2	0	−2	8	−2	0	−2	8	−2	0
$\sum_{i=0}^{n-1} 5^i$	1	6	−1	−4	−3	2	−5	8	−7	−2	7	4	5	−6	3	0
Összeg	0	16	0	0	0	16	0	16	16	16	16	16	16	16	16	16

Az első két sorról tehát tudjuk, hogy 16-tal való oszthatóság szempontjából a táblázatban pontosan egy periódus szerepel. Mi a helyzet az alsó két sorral? Ha elmondhatjuk a harmadik sorról, hogy az is egy periódus, akkor az utolsó sor modulo 16 végig 0 lesz a későbbiekben is. Ha ez teljesül, akkor készen vagyunk.

Adjunk össze 4 szomszédos ötödik hatványt modulo 16!

$$\sum_{i=4s+1}^{4s+4} 5^i \equiv 5 - 7 - 3 + 1 \equiv -4 \pmod{16}$$

Ez lehet például az első négy összege. Az utánuk következő négyesek összege is egyenként -4. Így 16 egymást követő szám összege -16, ami osztható 16-tal, a táblázat alsó sora tényleg pontosan megfelel egy teljes periódusnak.

Megjegyzés: az indexelés 0-val kezdve intelligensebbnek tűnik, és megszokottabb az egyetemen, de középiskolában nem biztos, hogy érdemes használni. Ha mégis szeretnénk, megtehetjük úgy, hogy $i = 4(s-1)$-től $4s-1$-ig összegzünk.

1.5.2. Megoldás

Ezeknek a feladatoknak egy tipikus, legtöbbször különösebb ötlet nélkül működő módja, ha teljes indukcióval látjuk be az állítást.

Az 1. lépésben megnézzük, hogy $n = 1$-re igaz-e az állítás.
$5^n - 8n^2 + 4n - 1 = 5 - 8 + 4 - 1 = 0$, ami valóban osztható 64-gyel.
(Ha nem zavaró, itt is ügyesebb inkább $n = 0$-val kezdeni: $5^n - 8n^2 + 4n - 1 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$.)

A 2. lépésben feltesszük, hogy n-re igaz az állítás, azaz $64 \mid 5^n - 8n^2 + 4n - 1$, és belátjuk, hogy ekkor $n+1$-re is igaznak kell lennie.
Az állítás $n+1$-re:

$$64 \mid 5^{n+1} - 8(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 = 5 \cdot 5^n - 8n^2 - 16n - 8 + 4n + 4 - 1 = 5 \cdot 5^n - 8n^2 - 12n - 5$$

Az indukciós feltevés felhasználásakor célszerű a legnehezebben kezelhető tag (jelen esetben 5^n) kiküszöbölése:

$$5 \cdot 5^n - 8n^2 - 12n - 5 = 5 \cdot (5^n - 8n^2 + 4n - 1) + 32n^2 - 32n = 5 \cdot (5^n - 8n^2 + 4n - 1) + 32n(n-1).$$

Ennek valóban osztója 64, hiszen a első tagról feltettük ezt, a második tagban pedig n és $n-1$ közül az egyik biztosan páros.

Ha ügyetlenül alkalmazzuk az indukciót, akkor is eredményre juthatunk, kicsit több számolással.

$$\begin{aligned} 64 \mid 5^{n+1} - 8(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 &= 5 \cdot 5^n - 8n^2 - 16n - 8 + 4n + 4 - 1 = \\ &= 5^n - 8n^2 + 4n - 1 + 4 \cdot 5^n - 16n - 8 + 4 \end{aligned}$$

A feltevés szerint az első 4 tag összege osztható 64-gyel, így az állítás pontosan akkor igaz, ha $64 \mid 4 \cdot 5^n - 16n - 4 = 4(5^n - 4n - 1)$. Ez ekvivalens a következővel:

$$\begin{aligned} 16 \mid 5^n - 4n - 1 &= (5-1)(5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1) - 4n = \\ &= 4(5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1) - n \\ &\iff 4 \mid 5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1 - n \end{aligned}$$

Az 5 hatványait modulo 4 vizsgálva:
$5 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 5^n \equiv 1 \pmod 4$ minden n-re. Ekkor
$4 \mid 5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1 - n \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 - n = 0 \pmod 4$, mivel az 5-nek éppen n darab hatványa szerepel $n-1$-től 0-ig. Ezzel az állítást beláttuk.

1.5.3. Megoldás azonossággal

Használjuk fel a binomiális tételt!

$$5^n = (4+1)^n = 4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} \ldots + \binom{n}{n-2}4^2 + \binom{n}{n-1}4 + 1$$

Itt az utolsó három tag kivételével 64 mindennek osztója. Ezek egyszerűsítve:

$$\binom{n}{n-2}4^2 + \binom{n}{n-1}4 + 1 = 8n(n-1) + 4n + 1 = 8n^2 - 4n + 1.$$

Ez ezt beírva a feladatba:

$$5^n - 8n^2 + 4n - 1 \equiv 8n^2 - 4n + 1 - 8n^2 + 4n - 1 = 0 \pmod{64}.$$

Ezzel az ötlettel értünk leggyorsabban révbe. Ez sok helyen azonban módszer is. Például így bizonyíthatjuk az egyik legegyszerűbb módon, hogy

$$0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n.$$

Egy másik megjegyzésre érdemes átalakítás a következő:

$$1 = 2^n - \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{2}2^{n-2} - \binom{n}{3}2^{n-3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = (2-1)^n.$$

1.6. Feladat

Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ számjegyek mindegyikének a felhasználásával hétjegyű számokat készítünk. Lehet-e ezek között két olyan, hogy az egyik a másiknak osztója?

1.6.1. Megoldás

Ehhez a példához igazából nehéz olyan segítséget adni, ami csak sejtetni engedi a megoldást. Órai keretek között persze célszerű hasonló feladatok közelében elhelyezni.

A megoldás az, hogy nem lehet. Ugyanis ha a és b ilyen számok úgy, hogy $b \mid a$, akkor a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$b \cdot c = a.$$

Kiszámolva, vagy akár megbecsülve a legnagyobb és legkisebb ilyen hétjegyű szám hányadosát, azt kapjuk, hogy c értéke 2, 3, 4, 5, 6 lehet. Tudjuk, hogy a és b számjegyeinek összege egyenlő. Ebből sejthető meg, hogy az egyenletet érdemes modulo 9 vizsgálni. A számjegyek összege $28 \equiv 1 \pmod 9$, így ezt kapjuk:

$$1 \cdot c \equiv 1 \pmod 9.$$

Ez a c számok egyikére sem teljesül, nincsenek ilyen számok.

1.7. Feladat

Igazoljuk, hogy 102 darab pozitív egész szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége vagy összege osztható legyen 200-zal!

1.7.1. Megoldás

200-zal való osztási maradékot nézünk. Ha a 102 szám között akad két olyan, amelyek egyenlő maradékot adnak 200-zal osztva, azaz kongruensek, akkor ezek $200a + m$ és $200b + m$ alakban felírhatók. Így jól látszik, hogy ezek különbsége osztható 200-zal.

Ha minden szám különböző maradékot ad 200-zal osztva, akkor ezek a maradékok a $0, 1, \ldots 198, 199$ számok közül kerülnek ki. Ahhoz, hogy megcáfoljuk az állítást, innen kellene kiválsztani 102 db-ot úgy, hogy semelyik kettő összege ne legyen 200-zal osztható. Állítsuk párba a számokat úgy, hogy 200-zal oszthatóra egészítsék ki egymást!

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & 99 & 100 \\ \mathit{0} & 199 & 198 & \ldots & 101 & \mathit{100} \end{array}$$

A 0-nak és a 100-nak önmaga lenne a párja, de mivel feltettük, hogy a számok inkongruensek, ezeknek nem jut pár. (Ezt dőlt betűvel jelöltük.) A maradék 99 párból viszont egyszerre csak a pár egyik tagját választhatjuk ki. Így legfeljebb 101 szám választható ki, melyek között semelyik kettő összege nem osztható 200-zal. Ezzel az állítást beláttuk.

Párosítós megoldási módszer tanítását kezdhetjük kisebb adatokkal, kezdhetjük konkrét számokkal.

Szeretnénk a lehető legtöbb számot kiválasztani $1, 2, 3 \ldots 8, 9$ közül, hogy semelyik kettő összege ne legyen 4-gyel osztható. Hány számot választhatunk legfeljebb?

Hány számot választhatunk ki akkor, ha a különbségük nem osztható 4-gyel? És ha a kettő egyszerre teljesül, vagyis sem két szám összege, sem két szám különbsége nem lehet a 4 többszöröse?

A lehetőségeket végigpróbálva valószínűsíthető, hogy önkéntelenül is párosítják a tanulók a számokat.

A feladat megbeszélése után, mintegy ellenőrzésként, feltehetjük a kérdést, hogy igaz-e az állítás 101 szám esetén is. Emellett megjegyezzük, hogy a feladat az egész számok körében feladva pontosan ugyanez, semmilyen szerepet nem játszik a „pozitív” jelző.

2. fejezet

Feladatok általánosítása

Ebben a fejezetben néhány versenyfeladatot gondolunk tovább.

2.1. Feladat

Legyen $k(n)$ az n legnagyobb páratlan osztója, és

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} k(i).$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(2n) - f(n) = n^2$.

Számoljuk ki $n = 10$-ig $k(n)$-et és $f(n)$-et.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k(n)$	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5
$f(n)$	1	2	5	6	11	14	21	22	31	36
$f(2n) - f(n)$	1	4	9	16	25					

2.1.1. Megoldás

Próbáljuk meg bebizonyítani számolással az állítást a teljes indukció módszerével.

Az 1. lépés: $n = 1$-re igaz az állítás, hiszen

$$f(2) - f(1) = k(1) + k(2) - k(1) = k(2) = 1 = 1^2.$$

2. lépésként tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, vagyis $f(2n) - f(n) = n^2$. Belátjuk, hogy ekkor $n + 1$-re is igaz lesz.

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + k(n+1) \\ f(2(n+1)) &= f(2n+2) = f(2n) + k(2n+2) + k(2n+1) = \\ &= f(2n) + k(2(n+1)) + k(2n+1) \end{aligned}$$

Felhasználjuk emellett, hogy egy páratlan szám legnagyobb páratlan osztója önmaga, vagyis $k(2n + 1) = 2n + 1$.

$$\begin{aligned} f(2(n+1)) - f(n+1) &= f(2n) + k(2n+1) + k(2(n+1)) - f(n) - k(n+1) &= \\ &= f(2n) - f(n) + k(2n+1) + k(2(n+1)) - k(n+1) &= \\ &= n^2 + k(2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Módosítsuk a feladatot, nézzük 2 helyett más p prímszámokra a kérdést.

Legyen $k_p(n)$ az n legnagyobb p-vel nem osztható osztója, és

$$f_p(n) = \sum_{i=1}^{n} k_p(i).$$

Mennyi lesz $f_p(pn) - f_p(n)$? Jelölje a különbséget $g_p(n)$ a táblázatban.

- $p = 3$

  Egy feladatnál szinte mindig segít, ha ábrát, rajzot, bármilyen szemléltetést készítünk hozzá. Foglaljuk most is táblázatba az első néhány ilyen különbséget!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$k_3(n)$	1	2	1	4	5	2	7	8	1	10	11	4	13	14	5
$f_3(n)$	1	3	4	8	13	15	22	30	31	41	52	56	69	83	88
$g_3(n)$	3	12	27	48	75										

A táblázatból láthatjuk, hogy az eredmény $f_3(3n) - f_3(n) = 3n^2$.

- $p = 5$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k_5(n)$	1	2	3	4	1	6	7	8	9	2	11	12	13	14	3	16
$f_5(n)$	1	3	6	10	11	17	24	32	41	43	54	66	79	93	96	112
$g_5(n)$	10	40	90	160	250											

A különbség itt $f_5(5n) - f_5(n) = 10n^2$ lett.

- $p = 7$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k_7(n)$	1	2	3	4	5	6	1	8	9	10	11	12	13	2	15	16
$f_7(n)$	1	3	6	10	15	21	22	30	39	49	60	72	85	87	102	118
$g_7(n)$	21	84	189	336												

Itt azt kaptuk, hogy az eredmény $f_7(7n) - f_7(n) = 21n^2$, szintén n^2 egy számszorosa. Gondoljuk meg, mi történik. A számolás során észrevettük, hogy

- $k_p(n) = n$, ha $p \nmid n$
- $k_p(n) = \frac{n}{p}$, ha $p \mid n$, de $p^2 \nmid n$
- $k_p(n) = \frac{n}{p^2}$, ha $p^2 \mid n$, de $p^3 \nmid n$
  stb.

Meggondolva valóban mindig igaz, hogy $k_p(pn) = k(n)$.

Eszerint $f_p(n)$ minden olyan számra, amire $p \nmid n$, $k_p(n) = n$, egyébként pedig $k_p(pn) = k(n)$. Így ezt mondhatjuk:

$$f_p(pn) - f_p(n) = \sum_{i=1, p\nmid i}^{pn} i = \sum_{i=1}^{pn} i - p\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(1+pn)pn}{2} - p\frac{(1+n)n}{2} = \frac{p^2-p}{2} \cdot n^2.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$f_p(pn) - f_p(n) = \frac{p^2-p}{2}n^2.$$

Ez $p = 2$ esetén
$$f_2(pn) - f_2(n) = \frac{2^2 - 2}{2} = 1,$$
tehát megkaptuk az eredeti állítást.

2.2. Feladat

Ezer forintos bankjeggyel fizetünk. A fizetendő és a visszajáró ugyanazokból a számjegyekből áll, csak más sorrendben. Mennyi a számjegyek összege ezekben számokban? [1]

2.2.1. Megoldás

A szóban forgó számok ugyanannyi számjegyből állnak. Eszerint csak háromjegyűek lehetnek, különben az összegük biztosan kisebb lenne 1000-nél. Jelöljük a fizetendő összeget $\overline{abc}$-vel, ahol a, b, c nem feltétlenül különbözőek.
Oldjuk meg a feladat további részét mechanikusan, esetszétválasztással. Ha a fizetendő $\overline{abc}$, akkor a visszajáró lehet:

$\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$

- $\overline{abc} + \overline{acb} = 1000$

  $a = 1, 2, 3, 4$ esetén $\overline{abc} + \overline{acb} < 1000$. Ha $\overline{abc} = 500$, akkor $\overline{abc} = \overline{acb}$, ami baj. Egyébként pedig $a = 5, 6, 7, 8, 9$-re $\overline{abc} + \overline{acb} > 1000$. Ilyen tehát nincs.

- $\overline{abc} + \overline{bac} = 1000$

  $110a + 110b + 2c = 1000$
  $110(a + b) + 2c = 1000$
  Mivel $2c < 20 \implies a + b = 9$, és így $c = 5$ lehet csak. Ekkor a számjegyek összege: $a + b + c = 9 + 5 = 14$.

- $\overline{abc} + \overline{bca} = 1000$

  $101a + 110b + 11c = 1000$
  Ugyanez modulo 11 vizsgálva:

[1] A feladat kiírásakor még forgalomban voltak az 1 és 2 forintos pénzérmék.

$2a + 0 + 0 = 10$

Így $a = 5$ lehet csak, ekkor $505 + 110b + 11c = 1000 \iff 110b + 11c = 495$. Az ötre való végződés miatt $c = 5$ szintén. Ekkor $b = 4$. Egy ilyen számpár van: $545 + 455 = 1000$, és a számjegyek összege itt is 14.

- $\overline{abc} + \overline{cab} = 1000$

  $110a + 101c + 11b = 1000$. Ez megegyezik a fenti egyenlettel - csak a betűk vannak felcserélve benne - tehát ennek is ugyanaz az egy megoldása van.

- $\overline{abc} + \overline{cba} = 1000$

  $101a + 101c + 20b = 1000$. Becsléssel indulva: mivel $20b < 181$, ezért $101(a + c) > 819$, tehát $a + c = 9$ lehet csak, de ehhez nem tudunk megfelelő b-t választani. Nincsen ilyen megoldás. Ugyanerre jutunk, ha oszthatóságot vizsgálunk először. $10 \mid 1000$ és $10 \mid 20b$, tehát $10 \mid 101(a+c)$. Ez csak $a+c = 10$ esetén teljesül, de ekkor csak negatív b-re lesz az összeg 1000, ami nem jó.

Az összes esetet megvizsgálva arra jutottunk, hogy a számjegyek összege csak 14 lehet.

A megoldást megkaptuk, mégis van egy olyan érzésünk, hogy kell lennie valami szebb megoldásnak is. Gondolkodjunk el azon, mi a kérdés. A kérdés a számjegyek összegére vonatkozik - mi kapcsolódik ehhez? Például az oszthatósági szabályok 3 és 9 esetén. Az $\overline{abc}$ szám számjegyeit összekeverve ugyanannyi maradékot ad 3-mal vagy 9-cel osztva, mint az eredeti szám.

2.2.2. Megoldás

Írjuk fel a feladatot más alakban. Jelöljük x-szel a számjegyek összegét. Ekkor

$$x + x \equiv 1000 \pmod 3$$

$$x + x \equiv 1000 \pmod 9$$

Az alsó kongruenciát megoldva nyerünk több információt, ezzel dolgozzunk tovább.

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \pmod 9 \qquad && / + 9 \\ 2x &\equiv 10 \pmod 9 \qquad && / : 2 \\ x &\equiv 5 \pmod 9 \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a számjegyek összege csak $x = 5, 14, 23, 32, \ldots$ lehet.

Keressünk 1-1 példát. Ha $x = 5$, akkor vagy $a < 5$, vagy $a = 5$. Ha $a < 5$, akkor a két szám összege kisebb lesz 1000-nél; egyébként pedig $a = 5$-re $\overline{abc} = 500$ lenne, ami ellentmond annak, hogy különböző a két szám.

Hasonlóképpen járhatunk el a 23 esetén is. Felírjuk a 23-at 3 számjegy összegeként.

$$23 = 9 + 9 + 5 = 9 + 8 + 6 = 9 + 7 + 7 = 8 + 8 + 7$$

Itt minden szám nagyobb 500-nál, tehát ez sem lehetséges.

Hogyan lehet változtatni ezen a feladaton? Miben változik a megoldás menete, ha a feladat szövege így hangzik:

2.3. Feladat

Tízezer forintos bankjeggyel fizetünk. A fizetendő és a visszajáró ugyanazokból a számjegyekből áll, csak más sorrendben. Mennyi a számjegyek összege ezekben számokban?

2.3.1. Megoldás

A kongruenciás kezdés továbbra is helytálló, vagyis x a következő számok valamelyike: $5, 14, 23, 32 \ldots$, ahol x az $\overline{abcd}$ szám számjegyeinek összege.

- $x = 5$ a korábbiakhoz hasonlóan kevés: $a < 5$ esetén az összeg kevesebb lesz tízezernél, az 5000 pedig nem megoldás.
- $x = 32$ sok lesz: $32 = 9+9+9+5 = 9+9+8+6 = 9+9+7+7 = 9+8+8+7 = 8 + 8 + 8 + 8$, minden képezhető szám nagyobb 5000-nél.
- $x = 14$-re nem nehéz megoldást találni: egy előbb kapott megoldást felhasználva: $5450 + 4550 = 10000$.
- $x = 23$ maradt csak ellenőrizetlenül, nem véletlenül. Itt rengeteg eset van, és a korábbi megoldást sem tudjuk felhasználni elég nagy mértékben. Más utat kell hát választanunk.
  Próbáljunk felírni egy ilyen összeadást, jelöljük az egyik számot $\overline{abcd}$-vel.

Ezt szeretnénk kitölteni:

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & d \\ + & \square & \square & \square & \square \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ha $d = 0$, akkor az alatta lévő szám is az, és a számjegyek összege ugyanannyi, mintha csak háromjegyű számokat néznénk. Ezt az esetet már láttuk, itt nem lehet 23 a számjegyek összege.

Ha $d \neq 0$, akkor d-t az alatta lévő szám 10-re egészíti ki. Az összeadást elvégezve 1 maradék keletkezik. Így a következő két szám (c és párja) 9-re egészíti ki egymást (más nem lehet, hiszen 1-nél nagyobb, és 19-nél kisebb 10-zel osztható összeg csak egy van, a 10). Sőt, ugyanez igaz lesz a másik két számpárra is! Így a számjegyek összege a két számban:

$$10 + 9 + 9 + 9.$$

Ez nincs meg $23 \cdot 2$, tehát ilyen megoldás sincsen.
Megjegyezzük, hogy $10 + 9 + 9 + 9 = 37$ páratlan szám, ami ellentmondás, hiszen kétszer számoltuk a számjegyeket.

A végeredmény: 1000 helyett 10000 Ft-os bankjegyet véve, azonos feltétek esetén sem változik az eredmény, a számjegyek összege biztosan 14.

A feladatot (elvonatkoztatva a pénztől) további 10 hatványokra megoldva, azt látjuk, hogy a 14-es számjegyösszeg könnyedén előállítható bármekkora szám esetén. Az utolsó, $x = 23$ esetnél használt vizsgálat a továbbiakban is sokat segít. Nem tekinve azokat az eseteket, mikor az utolsó valahány jegy 0 a számokban (mivel azok mindig visszavezethetők egy korábbi esetre), a számjegyek összege egy k jegyű számban mindig

$$\frac{10 + 9(k-1)}{2}.$$

Látjuk, hogy ennek csak páratlan k esetén van értelme.

Lássunk most egy olyan feladatot, ahol szintén felhasználjuk a helyiértékes felírást, de nem egyértelmű elsőre, hogy ezt kell csinálnunk.

2.4. Feladat

Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek másfélszer akkorák, mint a számjegyeik szorzata.

2.4.1. Megoldás

Vizsgáljunk különböző eseteket aszerint, hogy hány jegyű a szám.

- Egyjegyű számra $a = 1,5a \iff 0 = 0,5a$, vagyis $a = 0$ az egyetlen ilyen egyjegyű szám. Mivel a pozitív szám, ez nem megoldás.
- Kétjegyű számok esetén $\overline{ab} = 10a + b = 1,5ab$, ahol $a \neq 0$. Átrendezve : $b = a(1,5b - 10)$, ahol $a > 0$ és $b > 0$. Mivel mindkét oldal pozitív, $b > 6$. Három eset lehetséges b-re:
  - $b = 7$-et helyettesítve: $7 = a(7 \cdot 1,5 - 10) = 0,5a$, ekkor $a = 14$, ami nem jó, mivel a egy számjegy.
  - $b = 8$-at helyettesítve: $8 = a(8 \cdot 1,5 - 10) = 2a \Rightarrow a = 4$. Ez megoldás, $48 = 1,5 \cdot 4 \cdot 8$ valóban igaz.
  - $b = 9$-et helyettesítve: $9 = a(9 \cdot 1,5 - 10) = 3,5a$. Ekkor $a \notin \mathbb{Z}$.
- Háromjegyű $\overline{abc}$ számokra néhány próbálkozás, rosszabb esetben sok esetszétválasztás után kapjuk, hogy nincs megoldás. A következő néhány becsléssel sok fáradságot takaríthatunk meg.
  Vizsgáljuk meg most is, mi a helyzet, ha $b \leq 7$. Ekkor

  $$\begin{aligned} 1,5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot a &\geq 1,5abc \\ 94,5a &\geq 100a + 10b + c > 100a, \end{aligned}$$

  ami nem lehet, mivel a pozitív.
  A megmaradt esetek: $b = 8$ illetve $b = 9$.
  - Ha $b = 8$ és $c \leq 8$, akkor

    $$\begin{aligned} 1,5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot a &\geq 12ac \\ 96a &> 100a + 80 + c \end{aligned}$$

Ha $b = 8$ és $c = 9$, akkor a nem lesz egész szám:

$$\begin{aligned} 1,5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot a &= 100a + 80 + 9 \\ 108a &= 100a + 89 \\ 8a &= 89. \end{aligned}$$

* Ha $b = 9$, akkor hasonló becsléssel megmutatható, hogy c legalább 8, azaz csak 8 vagy 9 lehet. Ezt a két esetet megnézve sem kapunk megoldást, a nem lesz egész szám.

- Ilyen számot keresünk:
$$\overline{abcd} = 1,5abcd.$$
Mivel $a, b, c, d > 0$ és mindegyik legfeljebb 9 lehet:
$$\begin{aligned} 1,5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot a &\geq 1,5abcd \\ 1093,5a &\geq 1000a + 100b + 10c + d \\ 93,5a &\geq 100b + 10c + d > 93,5b \\ a &> b. \end{aligned}$$
Emellett ez is igaz hasonló módon:
$$\begin{aligned} 1,5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot b &\geq 1,5abcd \\ 1093,5b &\geq 1000a + 100b + 10c + d \\ 993,5b &\geq 1000a + 10c + d > 993,5a \\ b &> a. \end{aligned}$$
Ez ellentmondás, nem létezik ilyen négyjegyű szám.

- Négynél többjegyű számok esetén az előző két becslés tovább erősödik, ha növeljük a számjegyek számát.

Azt kaptuk, hogy a feladat egyetlen megoldása egy kétjegyű szám, a 48.

A becslések nem könnyű témakör, sokszor nehézséget okoznak, ha nem látjuk, mi is fog eredményre vezetni. Úgy gondoljuk, nem haszontalan az összes lehetőség végignézése. (A fenti becslések egy részének ötlete ugyanis innen származik.) Akinek nincs olyan nagy gyakorlata az ilyesmiben, annak biztosan nem válik kárára.

2.5. Feladat

Péter telefonszáma körzetszám nélkül 312837, Pálé pedig 310650. Ha ugyanazzal a háromjegyű számmal osztjuk el ezeket a telefonszámokat, akkor egyenlő maradékot kapunk. Ez a maradék városuk körzetszáma. Mennyi ez a maradék?

2.5.1. Megoldás

$312837 \equiv 310650 \pmod{m}$
Ez azt jelenti, hogy a különbségüket osztja m:

$$m \mid 312837 - 310650 = 2187 = 3^7.$$

Vagyis a megoldáshoz a háromjegyű 3 hatványok visznek közelebb. Ezek a 243 és a 729.

$$312837 \equiv 310650 \equiv 96 \pmod{243}$$

$$312837 \equiv 310650 \equiv 96 \pmod{729}$$

Mindkét esetben ugyanazt a számot kaptuk, a körzetszám csak 96 lehet.

2.6. Feladat

Határozzuk meg az a és b egész számokat, ha $a^4 + (a+b)^4 + b^4$ négyzetszám.

2.6.1. Megoldás

Ebben a megoldásban felhasznált gondolatok: próbálgassunk, azonosság használata (zárójel felbontása), paritásellenőrzés.

- $b = 0$
  $2a^4 = x^2$ ez csak $a = 0$ esetén lehetséges.

- $b = 1$
  $a^4 + (a+1)^4 + 1 = x^2$
  $2a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 2 = x^2$
  $2(a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1) = x^2$

A bal oldalon lévő kifejezés páratlan a esetén osztható 2-vel, de nem osztható 4-gyel, így nem lehet négyzetszám. Ha páros, akkor is ugyanez a helyzet.

Innen ötletet nyerve végezhetünk paritásvizsgálatot az eredeti feladatnál.

- a páros és b páratlan

  Négyzetszámok esetén jó módszer, ha modulo 8 tekintjük az egyenletet. Páros és páratlan számok negyedik hatványa modulo 8:
  $(2k)^4 \equiv 0 \pmod 8$ $(2k+1)^4 \equiv 1 \pmod 8$. Így a fenti kifejezés: $0+1+1=2\equiv x^2$, ami lehetetlen, mivel egy négyzetszám modulo 8 csak 0, 1 vagy 4 lehet. Ilyen alakú megoldás nincs.

- a és b páratlan

  Modulo 8 vizsgálva a bal oldal
  $1+0+1=2$, tehát ilyen megoldás sincsen.

- a és b páros

  Ezt modulo 8 vizsgálva megállapíthatjuk, hogy
  $0 \equiv x^2 \pmod 8$, vagyis $8 \mid x^2$, amiből következik, hogy $16 \mid x^2$ szintén.

  Bontsuk fel a zárójelet.

  $$a^4+(a+b)^4+b^4 = a^4+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = 2a^4+2b^4+4a^3b+4ab^3+6a^2b^2$$

  Felhasználva, hogy

  $2 \mid a \longrightarrow 2^4 \mid a^4$
  $2 \mid b \longrightarrow 2^4 \mid b^4$, biztosan tudjuk, hogy

  $2^5 \mid 2a^4$, $2^5 \mid 2b^4$, $2^5 \mid 6a^2b^2$,
  $2^6 \mid 4a^3b$, $2^6 \mid 4ab^3$.

  Így szükséges, hogy $2^6 \mid x^2$ legyen, vagyis $8 \mid x$. Így

  $2^6 \mid 2a^4+2b^4+6a^2b^2$.

  Látszik, hogy az oszthatóság csak úgy lehetséges, ha $4 \mid a$ és $4 \mid b$.

  Itt észrevehető, hogy egy ciklusba keveredtünk. Ezen a következőképp segítünk.

Legyen $d = (a, b)$, a két szám legnagyobb közös osztója. Ha a és b megoldja az egyenletet, akkor $\frac{a}{d}$ és $\frac{b}{d}$ is, hiszen d^4-nel leosztva minden egész szám maradt a bal oldalon, így egész lesz $\left(\frac{x}{d^2}\right)^2$ is. Végezzük el a leosztást!
Most már a két változó - amiket továbbra is a és b jelöl - relatív prímek. A fenti esettel tehát nem is kell foglalkoznunk, készen vagyunk. A feladat egyetlen megoldása $a = b = 0$.

2.7. Feladat

A pozitív egész k számot a p prímszámmal osztva a maradék 6. Ugyanennyi maradékot kapunk akkor is, ha az $1000-k$ számot osztjuk p-vel; tudjuk ezenkívül, hogy $10000 - k$ osztható p-vel. Melyik ez a p prímszám?

2.7.1. Megoldás

A feladat szerint a következőket tudjuk egy p prímszámról:

$$\begin{aligned} k &\equiv 6 \pmod p \\ 1000 - k &\equiv 6 \pmod p \\ 10000 - k &\equiv 0 \pmod p \end{aligned}$$

Az első két egyenletet összeadva:

$$\begin{aligned} k + 1000 - k &\equiv 12 \pmod p \\ 1000 &\equiv 12 \pmod p \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$p \mid 1000 - 12 = 988 = 2^2 \cdot 13 \cdot 19$$

Az első és a harmadik egyenlet összeadásával:

$$k + 10000 - k \equiv 6 \pmod p$$

$$10000 \equiv 6 \pmod p \Rightarrow p \mid 10000 - 6 = 9994 = 2 \cdot 19 \cdot 263$$

Bár a 2 és a 19 is szerepel mindkét felbontásban, a feladat szövege prímszámmal való osztásról szól, vagyis a maradék nem lehet nagyobb az osztónál. Ez kizárja a 2-t, így $p = 19$ az egyetlen megoldás.

2.8. Feladat

Milyen pozitív p, q, r prímszámokra teljesül, hogy

$$(7 - p)(3q + r) + pqr = 0\ ?$$

2.8.1. Megoldás

A megoldás során két dolgot használunk fel több alkalommal. Ezek a következők: pozitivitás ellenőrzése (egy egyenlet két oldalának azonos előjelűnek kell lennie), és esetszétválasztás lehetősége. Ezen kívül még egy prímszámok esetén hasznos gondolat: érdemes paritás ellenőrzést végezni, hiszen egyetlen kivételtől eltekintve minden prímszám páratlan. Kezdjük most ezzel!

Tegyük fel, hogy az egyenletben szereplő mindhárom prímszám páratlan. Ekkor az első tag mindkét tényezője - és így ezek szorzata is - páros, a második tag pedig páratlan. Így az összeg nem lehet nulla. Vagyis a 2 biztosan szerepel a számok között.

Melyik lehet az? Elkezdhetünk próbálgatni. Ha szerencsések vagyunk, $p = 2$-vel kezdünk, és megállapítjuk, hogy ez lehetetlen. De vizsgálhatunk pozitivitást már ez előtt is!

A feltételek miatt $3q + r$ és pqr pozitív, így ahhoz, hogy nullát kaphassunk, p-nek nagyobbnak kell lennie 7-nél. Tehát így is kijött, hogy $p \neq 2$. Vizsgáljuk meg külön az $r = 2$ és a $q = 2$ eseteket!

- $r = 2$-t behelyettesítve a következőt kapjuk:

  $$(7 - p)(3q + 2) + 2pq = 0.$$

  A zárójeleket felbontva:

  $$21q - 3pq + 14 - 2p + 2pq = 21q + 14 - 2p - pq = 0.$$

  Ez így nem használható jól. Egyenletek megoldásánál gyakran használt lépés a szorzattá alakítás. Nekünk egy 4 tagú összegünk van most. Alakítsuk most úgy szorzattá, hogy az ismeretlen prímszámokat tartalmazó részek mindegyikét tartalmazza a szorzat, ezen kívül csak egy szám (c konstans) maradjon. Ennek módja a következő:

1. Az összegünk négy tagból áll, és a 4-et többtényezős szorzatalakban csak $4 = 2 \cdot 2$ alakban írhatjuk. Ezért a következő alakzatot szeretnénk kitölteni: $(\square \pm \square)(\square \pm \square) = c$.
2. Egy viszonylag egyértelműen szétbontható rész itt az utolsó tag: p-t, és q-t külön kell tennünk, csak a (-1)-gyel való szorzás helye kétes. Mivel a maradék tagokban p negatív, q pozitív szám mellett áll, tegyük most p-hez a -1-et. Itt tartunk: $(-p \pm \square)(q \pm \square) = c$.
3. Ahhoz, hogy $21q$-t, és $-2p$-t megkaphassuk, már csak ez a lehetőségünk van: $(-p + 21)(q - 2) = c$. Ekkor ki tudjuk számolni c-t. Az eredmény:

$$(-p + 21)(q + 2) = 28.$$

Miért jó ez nekünk? Ezúttal egy felső korlátot kaptunk p-re: nem lehet nagyobb 21-nél (az előjelvizsgálat alapján). Tehát tudjuk, hogy $7 < p < 21$, vagyis p a $11, 13, 17, 19$ valamelyike. Ezeket behelyettesítve a következő egyenletekhez jutunk:

* $(-11 + 21)(q + 2) = 28 \iff 10(q + 2) = 28$
* $(-13 + 21)(q + 2) = 28 \iff 8(q + 2) = 28$
* $(-17 + 21)(q + 2) = 28 \iff 4(q + 2) = 28$
* $(-19 + 21)(q + 2) = 28 \iff 2(q + 2) = 28$

Az első két esetben q nem is egész, az utolsóban $q = 12$ nem prím. Egyedül a 3. egyenlet ad megoldást: $q = 5$.

- $q = 2$-t behelyettesítve:

$$(7 - p)(6 + r) + 2pr = 0 \iff 42 + 7r - 6p - pr + 2pr = 42 + 7r - 6p + pr = 0.$$

Most is alkalmazhatnánk az előző gondoltamenetet, de más utat választunk. Vigyük át a p-t tartalmazó kifejezéseket a túloldalra:

$$42 + 7r = 6p - pr \iff 7(6 + r) = p(6 - r).$$

Mivel a bal oldal pozitív, ezért $r < 6$, tehát megnézhetjük itt az $r = 3, 5$ eseteket (az $r = 2$-t korábban már láttuk).

* $7(6+r) = p(6-r) \Longleftrightarrow 7 \cdot 9 = 3p$
* $7(6+r) = p(6-r) \Longleftrightarrow 7 \cdot 11 = p$

Ezek egyike sem ad p-re prímszámot, a $q = 2$ esetnek nincs megoldása.

Ezt egyszerűbben is megkaphatjuk, ha a $7(6+r) = p(6-r)$ egyenletet oszthatósági szempontból, a prímtulajdonság felhasználásával vizsgáljuk. Mivel 7 prímszám, biztosan osztója a túloldali szorzat valamely tényzőjének. $6-r < 7$ (és $6 - r \neq 0$), így csak $7 \mid p$ lehetséges, vagyis ha prím, akkor $p = 7$. Ezt visszahelyettesítve $6 + r = 6 - r$ lenne, ami lehetetlen.

A feladatnak egyetlen megoldása tehát az $r = 2,\ p = 17,\ q = 5$ számhármas.

2.9. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy $n!$ osztója n szomszédos szám szorzatának!

2.9.1. Megoldás

A faktoriális függyvény értelmezése szerint:

$$n! \mid 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Ha eggyel eltoljuk a sorozatot:

$$n! \mid 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1) = n!(n+1)$$

Ha a sorozat első tényezője k:

$$n! \mid k \cdot (k+1) \cdot \ldots (n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(k-1!)}$$

Felhasználva, hogy

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! \cdot n!}$$

az eredmény:

$$n! \mid k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1) = \binom{n+k-1}{k-1} \cdot n!$$

Mivel a binomiális együtthatók mindig egész számok, ezzel az állítást beláttuk.

2.10. Feladat

Magyarázzuk meg, miért igaz, hogy egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege a 3 többszöröse.

2.10.1. Megoldás

A már használt felírási móddal élve mondjuk egy négyjegyű szám esetén:

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 3 \cdot (333a + 33b + 3c) + a + b + c + d.$

Az első tag mindig osztható 3-mal, a többi pedig éppen a számjegyek összege. Ez a módszer jó, mert

$$10^k - 1 = 99\ldots99$$

ami mindig osztható 3-mal.
Nézzük végig, milyen számokra van még hasonló oszthatósági szabály!

- 9-cel való oszthatóság
  A fenti levezetésnél megkaptuk, miért igaz 9-re is, hogy egy szám annyi maradékot ad 9-cel osztva, mint a számjegyeinek összege 9-cel osztva.

- 11-gyel való oszthatóság
  Egy négyjegyű példán illusztrálva:

  $$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 11 \cdot 91 \cdot a + 11 \cdot 9 \cdot b - a + b - c + d.$$

  Itt elmondhatjuk, hogy a 11-gyel nem osztható részben a tagok éppen a számjegyek, váltakozó előjellel.

  Ez általánosan is igaz lesz, mivel azt használjuk fel, hogy egy 10 hatvány mivel kongruens modulo 11. Páratlan kitevőkre ez a szám -1, párosakra pedig $+1$ lesz.

- 7-tel való oszthatóság A 11-gyel való oszthatóság magyarázatából látszik, hogy ha a 10 hatványok egy adott modulusra nézve periodikusak, akkor kreálhatunk oszthatósági szabályt a számhoz. Nézzük meg a 10 hatványait most modulo 7.

$$
\begin{aligned}
10^0 &\equiv 1 \pmod 7\\
10^1 &\equiv 3 \pmod 7\\
10^2 &\equiv 2 \pmod 7\\
10^3 &\equiv -1 \pmod 7\\
10^4 &\equiv -3 \pmod 7\\
10^5 &\equiv -2 \pmod 7\\
10^6 &\equiv 1 \pmod 7
\end{aligned}
$$

Ez azt jelenti, hogy ha egy szám számjegyei fölé felírjuk (az egyesektől indulva) az 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, ... számokat, és a keletkezett párok szorzatát összegezzük, akkor az eredményül kapott szám kongruens lesz az eredeti számmal modulo 7.

Egy példaként nézzük meg, osztható-e héttel 671 128.

$$
\begin{array}{cccccc}
-2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1\\
6 & 7 & 1 & 1 & 2 & 8
\end{array}
$$

A párok szorzatának összege:

$$1 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 7 + (-2) \cdot 6 = -18 \equiv 3 \pmod 7,$$

vagyis ez a szám nem osztható 7-tel.

2.11. Feladat

A pozitív egész n számot osztatlannak nevezzük, ha abból, hogy $1 < k < n$ és $(k, n) = 1$, következik, hogy k prímszám.
Hány 2-nél nagyobb osztatlan szám van?

2.11.1. Megoldás

Ez a feladat egy új fogalmat vezet be. Ahhoz, hogy az osztatlanság mivoltát jól megértsük, célszerű minél több számra megnézni, hogy osztatlan-e. Ezt jelen esetben különösen fontosnak gondoljuk, és meg is vizsgáljuk.

A táblázat első két oszlopába írjuk n-et és a feltételeknek megfelelő k-kat. Ha ezek mind prímszámok, akkor beírjuk n-et az utolsó oszlopba.

n	$1 < k < n$, $(k, n) = 1$	n, ha osztatlan
3	2	3
4	3	4
5	$2, 3, 4$	
6	5	6
7	$2, 3, 4, 5$	
8	$3, 5, 7$	8
9	$4, 5, 7, 8$	
10	$3, 7, 9$	
11	$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$	
12	$5, 7, 11$	12
13	$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$	
14	$3, 5, 9, 11, 13$	
15	$2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$	

Közben ráérzünk, hogy különböző n-ekre mekkora az esélye annak, hogy n osztatlan szám. Prímszámokra például kicsi, mert a nála kisebb azámok fele páros, és ezek mindegyike relatív prím n-hez. Hasonlóképpen egy 3-mal osztható, de nem páros n számra, a feltételnek eleget tesznek a 2 hatványok n-ig. Ez $n > 3$ esetén gondot jelent. Ugyanez fellép a páros, de hárommal nem osztható számoknál is, ha $n > 8$.

Ellenben azok a számok, amelyeknek több különböző prímosztójuk van, jó eséllyel tűnnek osztatlannak a kis számok körében. Nézzük meg a fentiek tükrében, milyen számok vannak még, amik szóba jöhetnek.

Próbáljunk meg ez alapján osztatlan számokat előállítani. n akkor nem osztatlan, ha a következők valamelyike teljesül rá. Használjuk ki, hogy a négyzetszámok nem prímek.

$$\begin{aligned} n > \ & 4, \text{ de } & (n, 4) \neq 1, & \text{ azaz } 2 \mid n, \\ n > \ & 9, \text{ de } & (n, 9) \neq 1, & \text{ azaz } 3 \mid n, \\ n > \ & 25, \text{ de } & (n, 25) \neq 1, & \text{ azaz } 5 \mid n \text{ stb.} \end{aligned}$$

Tehát ha n osztatlan, akkor minden a gyökénél kisebb prímszám osztója kell, hogy legyen, mert egyébként a prím négyzete, ami összetett és n-nél kisebb, relatív prím lenne n-hez.

Tovább próbálgatva a következő számokat találjuk még osztatlannak: 18, 24, 30.

És meglepő módon itt a vége, azaz belátjuk, hogy a fentieken kívül nincs több osztatlan szám.

Ha $n > 30$ osztatlan, akkor a $\sqrt{30}$-nál kisebb prímszámok, vagyis 2, 3, 5 osztói n-nek. Legyenek $p < q$ a két legnagyobb olyan prím, melyek kisebbek $\sqrt{n}$-nél. Ha $p > 5$, akkor $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot pq \mid n$, vagyis $30pq \mid n$. De ha $30pq \mid n$, és p ill. q értéke kb. $\sqrt{n}$, akkor a szorzatuk lényegében kiadja n-et, tehát $30pq > n$ lesz, ami túl nagy ahhoz, hogy osztója legyen n-nek.

Csebisev tétele szerint minden szám és a kétszerese között van prím. Jelölje most p és q az n azon prímosztóit, melyekre

$$\frac{\sqrt{n}}{4} < p < \frac{\sqrt{n}}{2} < q < \sqrt{n}.$$

Mivel $30pq \mid n$, $30pq \leq n$. Eszerint:

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot 30 \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad 30 \leq 8$$

ami nem igaz.

Marad a $p \leq 5$ eset, ami csak akkor lehetséges, ha $\sqrt{n} \leq 11$, azaz $30 < n < 121$. Ekkor $30 \mid n$ miatt n csak 60, 90 vagy 120 lehet. Ezek nem osztatlanok, például a 7 egyiknek sem osztója, pedig nagyobb a négyzetgyöküknél.

Ezzel beláttuk, hogy valóban csak 8 darab 2-nél nagyobb osztatlan szám van.

A megoldás érdekessége lehet, hogy a felhasznált Csebisev-tétel egy komolyabb számelméleti megállapítás. Sok esetben hasznos lehet, Dirichlet nevezetes tételével egyetemben, amely azt állítja, hogy minden $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ számtani sorozatban végtelen sok prím van, feltéve, hogy a és $d > 0$ relatív prímek.

(A feltétel szükségességét könnyű látni, hiszen ha $k > 1$ osztja a sorozat első elemét és differenciáját is, akkor a sorozat minden tagjának osztója lesz.)

2.12. Feladat

Oldja meg az

$$x + y + (x - y) + x \cdot y + \frac{x}{y} = 363$$

egyenletet, ha x és y egész számok!

2.12.1. Megoldás

Az egyenletben szereplő hányados kivételével minden tagról tudjuk, hogy egész szám. Ezért x/y-nak is egésznek kell lennie, hiszen egész számok összege, különbsége is egész szám ($\mathbb{Z}$ gyűrű az összeadás és a szorzás műveletekre). Ez azt jelenti, hogy $y \mid x$. Az egyenletbe $x = ay$-t helyettesítve (ahol a egész szám):

$$ay + y + ay - y + ay \cdot y + a = 363$$

$$2ay + a \cdot y^2 + a = 3 \cdot 121$$

$$a(y^2 + 2y + 1) = a(y + 1)^2 = 3 \cdot 11^2$$

$\left|y + 1\right|$ tehát olyan szám, amelynek a négyzete osztója a jobb oldalnak. Két ilyen szám van: az 1 és a 11.

- Ha $\left|y + 1\right| = 1$, akkor $y = 0$ vagy -2. Mivel a feladat szerint y-nal osztunk, $y = 0$ nem megoldás. Ha $y = -2$, akkor $a = 363$ és $x = ay = -726$.
- $\left|y + 1\right| = 11$ esetén $a = 3$ és $y = 10$ vagy -12, a hozzájuk tartozó x értékek pedig 30 és -36.

Azt kaptuk, hogy a feladatot ez a három számpár oldja meg: $x = -726$ és $y = -2$, $x = 30$ és $y = 10$, $x = -36$ és $y = -12$.

2.13. Feladat

Okos Ottó felsorolta az n természetes szám osztóit nagyság szerinti sorrendben. Elsőként az 1-et, majd sorban egymás után, végül nyolcadikként következett az n. A hatodikként felsorolt d osztóról tudjuk, hogy $20 \leqslant d \leqslant 25$. Mi lehetett n?

2.13.1. Megoldás

A feladat megoldása közben többször is alkalmazzunk az esetszétválasztás módszerét. Előtte ismerkedjünk meg egy, a számelméletben hasznos fogalommal, egy n szám kanonikus alakjával:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r},$$

ahol minden p_i különböző (pozitív) prímszám, és minden α_j természetes szám. Ha a prímszámok kitevőit változtatjuk, például valahányat közülük csökkentünk, akkor n egy osztóját kapjuk. Ellenben bármely kitevőt növelve olyan számot kapunk, ami biztosan nem osztója n-nek (akkor sem, ha más kitevőket csökkentve n-nél kisebb számot kaptunk). Ezek szerint n bármely osztójában egy p_i prím kitevője a $0, 1, \ldots, \alpha_i$ számok egyike. Ez $\alpha_i + 1$ lehetőség minden egyes prímszámra. Így n osztóinak száma:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_r + 1) = 8.$$

Itt minden tényezőről tudjuk, hogy pozitív. Az 1-es tényezőktől eltekintve 8 háromféleképpen írható fel szorzatalakban: $8 = 8,\ 8 = 2 \cdot 4,\ 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Nézzük meg, okoz-e problémát, ha eltekintünk az 1-es szorzók felírásától. Ha a szorzat egy tényezője 1, akkor az ott szereplő α_i kitevő nulla. Vagyis a hozzátartozó p_i prímszám nulladik hatványon szerepel n felbontásában, értéke $p_i^0 = 1$. Ezt elhagyva nem kapunk más n számot, tehát nem veszthettünk ily módon megoldást.

Vizsgáljuk meg külön a kapott eseteket!

- $8 = 8 = (7 + 1)$

  Vagyis n egy p prímszám hetedik hatványa. Ekkor $d = p^5$ és tudjuk, hogy $20 \leqslant d \leqslant 25$. Mivel ilyen prímszám nincs, ez az eset nem állhat fenn.

- $8 = 4 \cdot 2 = (3 + 1)(1 + 1)$

  Ekkor n -nek pontosan 2 prímosztója van. Ha ezeket p_1 és p_2 jelöli, akkor $n = p_1^3 p_2$ osztói:

  $$1,\ p_1,\ p_2,\ p_1^2,\ p_1 p_2,\ p_1^3,\ p_1^2 p_2,\ n.$$

  Melyik lehet ezek közül d? d olyan szám, aminél pontosan két másik szám nagyobb a felsoroltak közül. Így kizárt, hogy $d = 1, p_1, p_2, p_1^2$ legyen, mert ezek mindegyikére igaz, hogy biztos van legalább 3 nála nagyobb szám a felsoroltakban. Szintén kizárt, hogy $d = n$ legyen. Vizsgáljuk ismét külön a megmaradt eseteket!

* Ha $d = p_1p_2$, akkor a prímek lehetnek 2 és 11 vagy 3 és 7 ($5 \cdot 5$ nem jó, mert a két prím különböző). Emellett szükséges, hogy $p_1^3 < p_1p_2$ legyen, mivel $p_1^2p_2$ és n biztosan nagyobb d-nél. Így a megmaradt 2, 11 pár esetén $n = 2^3 \cdot 11 = 88$.
* Ha $d = p_1^3$, akkor nincsen megoldás. Egyetlen prímre sem igaz, hogy $20 \leqslant p^3 \leqslant 25$.
* Ha $d = p_1^2p_2$, akkor $p_1^3 > p_1^2p_2$, vagyis $p_1 > p_2$. Ezeknek a feltételeknek nem tesz eleget egyetlen prímpár sem, mivel $20 \leq p_1^2p_2 \leq 25$ nem teljesül.

- $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = (1+1)(1+1)(1+1)$

  n három prímszám szorzata. Legyenek ezek $p_1 < p_2 < p_3$. Ekkor fel tudjuk írni n osztóit növekvő sorrendben:

$$1 < p_1 < p_2 < p_3 < p_1p_2 < p_1p_3 < p_2p_3 < p_1p_2p_3.$$

  Látjuk, hogy $d = p_1p_3$. Ha $p_1 = 2$ és $p_3 = 11$, akkor p_2 lehet 3, 5 vagy 7, vagyis $n = 66$, $n = 110$ és $n = 154$ is megoldás. Ha $p_1 = 3$, $p_3 = 7$, akkor $p_2 = 5$ lesz jó, és $n = 105$ megoldás.

Összesen tehát 5 olyan szám is van amire Ottó gondolhatott; ezek a 66, a 88, a 105, a 110 és a 154.

2.14. Feladat

Bizonyítsa be, hogy bármilyen pozitív egész n-re az

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

összeg nem végződhet a 2, 4, 7, 9 számjegyek egyikére sem!

2.14.1. Megoldás

Gondoljuk meg, miből következhet, hogy igaz az állítás. Az összeg utolsó jegyét figyeljük. Tudjuk, hogy ez csak a számok utolsó jegyétől függ. Vagyis olyan, mintha csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 számokat adnánk össze, többször egymás után, és ilyen sorrendben. Ha azt tapaszaljuk, hogy valahány összeadást elvégezve az összeg egy már előfordult jegyre végződik, és emellett továbbhaladáskor ugyanazt a 0-9 közti számot fogjuk hozzáadni, mint legutóbb, akkor készen vagyunk. Ugyanis ha addig a kapott sorozatban nem szerepelnek a 2, 4, 7, 9 számjegyek, akkor a későbbiekben (ahol ugyanez van leírva többször) szintén nem lehetnek ott.

De mi a helyzet, ha nincs semmiféle ötletünk, mikor meglátjuk a felaladot? Szeretnénk hangsúlyozni, hogy ilyenkor kifejezetten fontos a próbálgatás. Nyugodtan kezdjük el szépen sorban kiszámolni az összeget n-re. Az első 20 adatot táblázatban összefoglalva:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sum_{i=1}^{n} i$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sum_{i=1}^{n} i$	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210

Azt látjuk, hogy az első 20 szám összege 0-ra végződik. Aki tovább számol, előbb-utóbb biztosan észreveszi az ismétlődést, elgondolkodik rajta.

Visszatérve az első gondolatmenethez: láthatjuk, hogy ha modulo 10 tekintjük a számokat, és azt összegezzük, akkor az első 20 szám összege 0 lesz. Tudjuk, hogy a további összeadások során is ugyanezekre a számokra végződnek. Mivel a felsoroltak között nem szerepeltek az állításban lévő számjegyek, biztosan mondhatjuk, hogy a $2, 4, 7, 9$ számokra sosem végződik a fenti összeg.

2.15. Feladat

Bizonyítsa be, hogy bármely közvetlenül egymás után következő 1997 darab pozitív egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám!

2.15.1. Megoldás

Az előző feladattal gyakorlatilag megegyezően járhatunk el. Korábban láttuk, hogy a négyzetszámokat érdemes lehet modulo 8 vizsgálni, ha ellentmondást szeretnénk megmutatni. A számok négyzetei modulo 8 a következők:

$8k + \square$	0	1	2	3	4	5	6	7
$(8k + \square)^2$	0	1	4	1	0	1	4	1

Az alsó sorban szereplő számok összege 12, ami 4-et jelent modulo 8. Vagyis ha 16 szomszédos számot veszünk, akkor ezek összege kétszer ennyi, vagyis 0 lesz modulo 8. Ez azt jelenti, hogy bármely 16 szomszédos szám négyzetösszege osztható 8-cal. Nekünk

$$1997 = 16 \cdot 124 + 13 = 16 \cdot 125 - 3$$

számunk van. Az a kérdés, hogy tetszőleges helyről 3 szomszédos számot elvéve, mivel lesz kongruens modulo 8 a maradék. Jelöljük a maradékot m-mel.

Ha az elvett számok

$$\begin{aligned} &0, 1, 4, \text{ akkor } m \equiv 3 \pmod 8; \\ &1, 4, 1, \text{ akkor } m \equiv 2 \pmod 8; \\ &1, 0, 1, \text{ akkor } m \equiv 6 \pmod 8). \end{aligned}$$

Ezekről valóban tudjuk (a táblázatból is látjuk), hogy nem lehetnek négyzetszámok, hiszen négyzetszám 8-cal osztva csak 0,1 vagy 4 maradékot adhat.

2.16. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha p háromnál nagyobb prímszám, akkor bármely p darab egymást követő egész szám négyzetének az összege osztható p-vel.

2.16.1. Megoldás

Amint azt korábban többször felhasználtuk, p darab egymást követő szám, ill. ezek négyzete felírható a következő alakban:

$$(a + 1)^2 + (a + 2)^2 + (a + 3)^2 + \ldots + (a + p)^2.$$

Tudjuk, hogy az első n természetes szám négyzetösszege:

$$\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Így a fenti számok összege:

$$\begin{aligned}&(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2+\ldots+(a+p)^2=\\&=pa^2+2(1+2+\ldots+p)+(1^2+2^2+\ldots+p^2)=\\&=pa^2+\frac{1+p}{2}p+\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}\end{aligned}$$

Az első tag triviálisan osztható p-vel. p páratlan, tehát a második tagról is látjuk, hogy egész szám. 2-vel az utolsó tag számlálója is osztható, de nehezebb így okoskodni 3-mal. Azonban elmondható, hogy egész számokat adunk össze, a két tag és az eredmény is egész, így a harmadik tag is biztosan az. Mivel $p > 3$ prím, $2 \nmid p$, $3 \nmid p$, így $6 \mid (p+1)(2p+1)$.

A p darab egymást követő számot felírhattuk volna a következő alakban is:

$$a-\frac{p-1}{2}, a-\frac{p-3}{2}, \ldots, a-1,\ a,\ a+1, \ldots, a+\frac{p-3}{2}, a+\frac{p-1}{2}.$$

Ezek négyzetösszegét felírva a kétszeres szorzatok kiesnek. Ami marad:

$$pa^2+\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(\frac{p-3}{2}\right)^2+\ldots+1^2+0^2+1^2+\ldots+\left(\frac{p-3}{2}\right)^2+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right).$$

A második tagot átalakítva a következőt kapjuk:

$$pa^2+2\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} i^2 = pa^2+2\frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)p}{6}.$$

A fent leírtak itt ugyanúgy alkalmazhatók.

2.17. Feladat

Mely n egészekre lesz az

$$n^4-4n^3+14n^2-20n+10$$

kifejezés értéke négyzetszám?

2.17.1. Megoldás

A korábban látott számrendszeres feladatokhoz (1.4. Feladat) hasonlóan az lesz célravezető, ha megnézzük, mikor esik két négyzetszám közé a kifejezés. Ehhez megnézzük, hogy egy általános normált másodfokú kifejezés négyzete hogyan néz ki, mik lesznek a negyedfokú polinom együtthatói.

$$(x^2 + ax + b)^2 = x^4 + 2a \cdot x^3 + (2b + a^2) \cdot x^2 + 2ab \cdot x + b^2$$

A második tag alapján ésszerű az $a = -2$ választás. Ekkor $b = 5$ esetén csak a konstans tagot nem kapjuk meg. A $b = 4$ választásnál ellenben nem lehetünk biztosak abban, hogy kisebb értéket kaptunk.

$$(n^2 - 2n + 5)^2 = n^4 - 4n^3 + 14n^2 - 20n + 25$$

$$(n^2 - 2n + 4)^2 = n^4 - 4n^3 + 12n^2 - 16n + 16$$

Jelöljük a feladatban szereplő kifejezést $f(n)$-nel. Biztosan tudjuk, hogy $f(n) < (n^2 - 2n + 5)^2$. Nézzük meg, mikor lesz $f(n) > (n^2 - 2n + 4)^2$!

$$\begin{aligned}(n^2 - 2n + 4)^2 &< f(n)\\ &\Updownarrow\\ 0 &< 2n^2 - 4n - 6 = 2(n^2 - 2n - 3)\\ &\Updownarrow\\ 0 &< (n^2 - 2n - 3) = (n-1)^2 - 4\\ &\Updownarrow\\ 4 &< (n-1)^2 \iff 2 < |n-1|\end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy a kérdéses egyenlőtlenség szinte minden n-re igaz. Ez azt jelenti, hogy a feladatban szereplő kifejezés értéke egész számok esetén - néhány kivételtől eltekintve - két szomszédos négyzetszám közé esik, és így nem lehet négyzetszám.

Lássuk, mit kapunk a kivételekre.

$$2 \nless |n-1| \iff n = -1, 0, 1, 2, 3$$

Ezeket az n-re kapott értékeket behelyettesítjük a kifejezésbe, így ellenőrizve, hogy négyzetszámok lesznek-e.

- $n = -1$
  $f(-1) = 1 + 4 + 14 + 20 + 10 = 49$
- $n = 0$
  $f(0) = 10$

- $n = 1$
  $f(1) = 1 - 4 + 14 - 20 + 10 = 1$
- $n = 2$
  $f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 14 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 + 10 = 16 - 32 + 56 - 40 + 10 = 10$
- $n = 3$
  $f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 14 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3 + 10 = 81 - 108 + 126 - 60 + 10 = 49$

Megoldás: három esetben kapunk a kifejezés értékére négyzetszámot, ezek: $n = -1, 1, 3$.

2.18. Feladat

2000 különböző pozitív egész szám fele páros, fele pedig páratlan; összegük kisebb 3 000 000-nál. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük 3-mal osztható.

2.18.1. Megoldás

Indirekt tegyük fel, hogy nincs közöttük hárommal osztható. Vegyük a legkisebb 2000 pozitív egész számot, amelyek közül egyik sem osztható 3-mal. Ezek a számok a következők:

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots, 2998, 2999.$$

A számokra teljesül az a feltétel is, hogy a számok fele páros, fele páratlan. A számokat többféleképpen is összeadhatjuk.

Írjuk fel a számokat kétszer, egymás alá, egy növekvő illetve egy csökkenő sorozatot alkotva.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 4 & \ldots & 2996 & 2998 & 2999 \\ 2999 & 2998 & 2996 & \ldots & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

Így most az egymás alatt lévő számok összege mindig 3000, és összesen 2000 párunk van. A táblázatban szereplő számok összege ez alapján $3000 \cdot 2000 = 6\,000\,000$. Mivel minden szám pontosan kétszer szerepel a táblázatban, a számok összege ennek a fele, vagyis 3 000 000.

Vagyis ha eredetileg olyan, a feltételeket kielégítő számokat válogattunk be, melyek összege kisebb ennél, akkor biztosan volt köztük 3-mal osztható szám is.

Kicsit másféle összeadás, ha alkalmazzuk a számokra a számtani sorozat összegképletét. Ezt megtehetjük úgy, hogy a számokat két számtani sorozat összefésülésének tekintjük. Az egyik kezdő tagja az 1, a másiké, a 2 és mindkét sorozat differenciája $d = 3$. De a sorozatot vehetjük úgy is, mint egy $1 - 3000$-ig egyesével növekvő sorozat, amiből elvettünk egy részsorozatot, a hárommal osztható számokat.

Ezek az eljárások persze egyenértékűek, hiszen a számtani sorozat összegképletére éppen a fenti egymás alá írós módon jutottunk.

Irodalomjegyzék

[1] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2003-2006. évfolyamai

[2] http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/oktv

[3] http://www.apaczai.elte.hu/~petiba/szakkor/szakkor.html

[4] Freud Róbert - Gyarmati Edit: Számelmélet (Tankönyvkiadó, 2000.)

[5] KöMaL Fórum - Matek OKTV
http://www.komal.hu/forum/forum.cgi?a=to&tid=17&tc=540