Eötvös Loránd Tudományegyetem

Matematikatanítási és Módszertani Központ

FELADATVARIÁCIÓK KÉSZÍTÉSE

Témavezető:
Ambrus Gabriella
Egyetemi adjunktus

Készítette:
Zádor Adrienn Eszter
Matematika BSc

Budapest, 2009.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A matematikatanításban jelenleg nagy gond, hogy a tanulók tudása nem elég kiforrott a gyakorlati alkalmazásban és más tantárgyakéhoz képest sem. Nehezükre esik a matematika különböző területein megszerzett tudásukat összekapcsolni, illetve az életben és más tantárgyakban alkalmazni. Ezt valamennyire a kompetencia-felmérések eredményei is mutatják. Az előbbiek véleményem szerint kiemelik a kompetenciaalapú oktatás fontosságát.

A kompetencia latin eredetű szó, eredetileg illetékességet, jogosultságot, illetve szakértelmet jelent.[1] Az oktatásban leginkább ez utóbbi értelemben használjuk: a Pedagógiai lexikon szerint „alapvetően értelmi (kognitív) alapú tulajdonság, de fontos szerepet játszanak benne motivációs elemek, képességek, egyéb emocionális tényezők”[2]. A kompetenciát hozzáértésként, tájékozottságként is értelmezzük. Mindebből látszik, hogy nagyon összetett fogalomról van szó.

Vidákovich Tibor szerint[3] a kompetenciaterületek a következők:

- Szövegértési-szövegalkotási kompetencia
- Matematikai kompetencia
- Szociális, életviteli és környezeti kompetencia
- Életpálya-építési kompetencia
- Idegen nyelvi kompetencia

A Nemzeti Alaptanterv kulcskompetenciákban gondolkodik. A hatályos jogszabályok a következő kulcskompetenciák fejlesztését írják elő: Anyanyelvi kommunikáció; Idegen nyelvi kommunikáció; Matematikai kompetencia; Természettudományos kompetencia; Digitális kompetencia; A hatékony, önálló tanulás; Szociális és állampolgári kompetencia; Kezdeményezőképesség és vállalkozói kompetencia; Esztétikai-művészeti tudatosság és kifejezőképesség.

---

[1] Bakos Ferenc szerk.: Idegen szavak és kifejezések szótára. Akadémiai Kiadó, Budapest 1989

[2] Pedagógiai lexikon (főszerkesztő: Báthory Zoltán és Falus Iván), Keraban Kiadó, Budapest, 1997. II. kötet 266. (a szócikk szerzője Vajda Zsuzsa)

[3] www.sulinovaadatbank.hu/letoltes.php?d_id=14256

„A legalapvetőbb szinten a matematikai kompetencia az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, a százalékok és a törtek használatának képességét foglalja magában fejben és írásban végzett számítások során, különféle mindennapi problémák megoldása céljából.

Egy magasabb fejlettségi szinten a matematikai kompetencia a matematikai gondolkodásmód (logikus és térbeli gondolkodás) és a valóság magyarázatára és leírására egyetemesen használt matematikai kifejezésmód (képletek, modellek, geometriai ábrák, görbék, grafikonok) használatára való képesség és készség az adott kontextusnak megfelelően."[9]

A tudatos cselekvés az élet minden területén szaktudást, stratégiai és metakognitív tudást is igényel. A metakogníció a tudásról való tudás, azaz a gondolkodásunk tervezése. „A metakogníció tesz bennünket sikeres tanulókká, ilyen módon összefügg az intelligenciával. A metakogníció magasabb szintű gondolkodást jelent, amellyel tanulás közben is aktívan tudjuk befolyásolni szellemi tevékenységünket. A feladatmegoldás tervezése, a megértés ellenőrzése, a végrehajtás értékelése természetes metakognitív eljárások. Mivel a metakogníció kulcsszerepet játszik a sikeres tanulásban, érdemes tanulmányozni, és eszerint is fejleszteni a tanulók gondolkodását."[9]

A kompetenciaprogramokban – mint például a DeSeCo (Defining and Selecting Key Competencies) program (1997–2002) – kitüntetett szerepet kap a problémamegoldó kompetencia. Ez az első olyan kognitív kereszttantervi kompetencia, amelynek felmérésére 2003-ban a PISA-vizsgálat keretében sor került.

A problémamegoldó kompetencia fejlesztésében az az izgalmas, hogy nem begyakorolt eljárások, megoldások egyszerű alkalmazásáról van szó. A probléma megoldásánál éppen azért, mert nem rutinfeladatról van szó, több váratlan, megoldandó kérdés is adódhat.

Az előbbiek miatt nem véletlen, hogy az érettségi vizsga jelenlegi rendszere is új, másféle szemléletet, felkészülést, órai munkát követel tanártól, diáktól egyaránt. A kétszintű érettségi vizsga közép- és emelt szintű követelményrendszere is elmozdult a kompetenciák irányába.

A kompetenciafejlesztés – beleértve a matematikai kompetencia fejlesztését is – nem létezik önmagában. Ennek egyik eszköze lehet a matematika feladatok variálása. Szakdolgozatom témájául ezt választottam.

A feladatvariációk során nemcsak matematikai kompetenciát, hanem egyéb kompetenciákat is lehet fejleszteni, például a szövegértési-szövegalkotási kompetencián belül olvasás- és fogalmazási készséget, hiszen az órán a saját gondolatokat, ötleteket érthetően kell kifejezni, megfogalmazni. A szakdolgozatomban leírt stratégiák segítségével úgy érzem, hogy nagymértékben lehet még a problémamegoldó kompetenciát is fejleszteni.

Ebben a témakörben kimondottan ezzel foglalkozó szakirodalmat magyar nyelven nem lehet találni. A külföldi könyvek között a Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht című német könyv volt segítségemre témám kidolgozásában, ebből vettem a különböző stratégiák meghatározását. A stratégiákhoz adott példákat részben középiskolai feladatgyűjteményekből válogattam, nagy részük azonban saját ötlet és általában megoldásokat is írtam hozzájuk.

Szakdolgozatomban először a változtatások különféle fő stratégiáit és ezek változatait ismertetem az egyes stratégiákat leginkább jellemző, egyszerű példákkal. Ebben a részben törekedtem arra, hogy a példák könnyen megérthetők legyenek, és a bemutatott stratégiára jellemzők legyenek. Fontosnak tartottam azt is, hogy kiemeljem azokat a stratégiákat, amelyek a jelenlegi oktatásban elég gyakorinak mondhatók. Ezt követően két alapfeladat különböző stratégiák szerint készült variációit mutatom be. A feladatok konkrét helyzetben való alkalmazásaira is utalok a megfelelő helyeken.

Feladatvariációk készítésének stratégiái

A matematika tanításának egyik legfontosabb célja és feladata a középiskolában, hogy biztosítsa a tanulók önálló, rendszerezett gondolkodásának fejlesztését, a matematika alkalmazásának képességét. Ennek eléréséhez nagy szükség lehet arra, hogy egy-egy feladatot többféle szempontból megvizsgáljunk, sokféle stratégia szerint változtassunk.

A módszer lényege, hogy egy adott feladatot minél többféleképpen változtatva a diákok jobban megértsék az adott feladatot, illetve tananyagot, önálló gondolatokat ébresszen bennük, könnyebben felismerjék a különböző anyagrészek közötti kapcsolatokat. Ezeket a változtatásokat sokféleképpen megvalósíthatjuk. Sokszor magától is adódik egy feladat variálása, továbbgondolása, de a következő stratégiák nagy segítséget nyújtanak a tudatos feladatvariáláshoz. Ezeknek a stratégiáknak a tartalma feladattól függően némileg változhat, és kombinálhatjuk is őket. Természetesen ezektől eltérő módon is lehet változtatni egy – egy feladaton, attól függően, mennyire teszi ezt lehetővé a feladat, és persze a kreativitásunk.

1. Csekély változtatás

A feladatokat kis mértékben változtatjuk. Ezt a stratégiát alkalmazzák például a tanárok gyakorlófeladatok készítésénél.

- 1. példa: Oldja meg a $3x - 2 < 11$ egyenlőtlenséget a $\mathbf{Z}$ halmazon! → együtthatók és konstansok változtatása: 3, -2, 11 helyett például -5, 4, -13
- 2. példa: $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldóképletének gyakorlása, a,b,c értékek változtatásával.
- 3. példa: Egy háromszög csúcsai a köré írt kört három olyan ívre osztják, amelyek hosszának aránya:

  1:2:3

  További lehetőségek például:

  a) 3:5:10

  b) 3:4:5

  Számítsuk ki a háromszög belső szögeinek nagyságát!

2. Analogizálás

Ennek a stratégiának sokféle megjelenési formája van. Egyes feladatokból, állításokból kiindulva analóg, hasonló kijelentésekhez jutunk pl. a feltételek megváltoztatásával, helyettesítésével. A következő példák ezt jól érzékeltetik:

- 1. példa: Oldja meg a $3x - 2 < 11$ egyenlőtlenséget a $\mathbf{Z}$ halmazon!
  Míg az előző pontban az együtthatókat változtattuk, itt pl. a ’<’ helyett ’>’ jelet írva, az x-et x^2-re cserélve jutunk analóg példákhoz.
- 2. példa: $2x + y = 3$ és $3x - 6y = 5$ egyenletekből álló egyenletrendszer helyett például a $(2x) \cdot y = 3$ és $(3x) \cdot (6y) = 5$ egyenletrendszer megoldása különböző eljáráshoz vezet. Illetve az ’=’-t ’<’-re vagy ’>’-ra cserélve egyenlőtlenségeket kapunk. Ennek a változtatásnak köszönhetően akár a tantervnek megfelelő irányba is vihetjük az óra menetét, a tanulók pedig összekapcsolják az egyenlőtlenségeknél alkalmazott megoldásokkal.
- 3. példa, csak fakultáción:
  Az összegfüggvény deriválási szabálya helyett az összeadást szorzásra, illetve a deriválást integrálásra „cserélve” megvizsgáljuk, hogy milyen szabályszerűségeket lehet megfigyelni, pl.: az összeadáshoz hasonlóan kell-e a függvények szorzatát is deriválni. Erre a válasz - mint tudjuk – a nem, hiszen míg $(f + g)' = f' + g'$, addig $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
  Ilyen esetekben akár helytelen kijelentésekhez is juthatunk, de ezt a stratégiát ez teszi érdekessé.
- 4. példa: A Pitagorasz-tétel kimondja, hogy derékszögű háromszögben a szokásos jelölésekkel az oldalak között a következő összefüggés áll fenn: $a^2 + b^2 = c^2$. Vizsgáljuk az egyenlőség helyett az $a^2 + b^2 > c^2$ egyenlőtlenséget. Ekkor a és b közrezárt szöge nem derékszög, hanem hegyesszög, illetve $a^2 + b^2 < c^2$ esetben tompaszög.
- 5. példa: Hányszorosára kell növelnünk a négyzet oldalait ahhoz, hogy kerülete négyszeresére növekedjen? → Mi történik, ha a kerület helyett területet írunk? Ekkor hányszorosára kell növelni a négyzet oldalát?
- 6. példa: háromszög → négyszög
  Kössük össze egy egyenlő oldalú háromszög oldalainak felezőpontjait. Milyen háromszöget kapunk? (Szintén egyenlő oldalú háromszöget.)

→ Ha a kiinduló alakzat egy négyszög, pl. parallelogramma, akkor milyen négyszöget kapunk az oldalfelező pontok összekötésével? (Parallelogrammát.)

→ És ha a kiinduló négyszög trapéz? Ebben az esetben is parallelogrammát kapunk. Ha szimmetrikus trapézból indultunk ki, akkor az oldalfelező pontok speciális parallelogrammát, rombuszt határoznak meg. (Érdemes megemlíteni a diákoknak, hogy tetszőleges négyszög esetén is parallelogrammát kapunk!)

- **Dimenzióváltoztatás**

Gyakran az analogizálás során a dimenziót változtatjuk meg. Így a tanulók a megfelelő feladatot a térben gyakran jobban el tudják képzelni, hiszen hasonló volt a feladat síkban is. Ezzel fejlődik a térlátásuk, a tananyagba több térgeometriát vihetünk, érdekesebbé válhat a feladat.

Ez utóbbi esetében gondoljuk csak meg például, hogy rengeteg feladat szól a háromszögekről, de hány feladatot old meg egy átlagos diák tetraéderrel kapcsolatban?

- 1. példa: Mi azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy ponttól adott távolságra vannak? Egy megfelelő sugarú kör. → És a térben? Így a kör definíciójából a gömb definícióját kapjuk.

  2. példa: Kössük össze egy négyzet oldalainak felezőpontjait. Milyen négyszöget kapunk? (négyzetet)

  Ha a feladatot „átvisszük” térbe: a négyzet helyett kockát, az oldalfelező pontok helyett lapközéppontokat véve milyen alakzatot kapunk? (oktaéder)

  Ez a példa mutatja, hogy egy analóg feladat megoldása teljesen új ismeretekhez is vezethet. Érdekességképpen itt meg lehet említeni a diákoknak, hogy ha a kapott oktaéder lapközéppontjait kötöm össze, akkor éppen kockát kapunk. Azt is mondhatjuk, hogy a kocka és az oktaéder egymás duálisa.

- 3. példa: Egy négyzet oldalaegyenesei hány részre osztják a síkot?

  Egy a négyzet belseje, 4 síkrész van, aminek a határoló oldala a négyzet oldala, és 4 olyan síkrész van, ami a négyzet csúcsaira illeszkedik, tehát összesen 9.

  → És egy kocka lapsíkjai hány részre osztják a teret?

Az előző feladat mintáját követve rendszerezzük a térbeli tartományokat a kockához való viszonylagos helyzetük szerint:

- 1 térrész a kocka belsejében
- 6 térrész, melyekben határoló lapként a kocka egyes lapjait találhatjuk meg
- 12 térrész kapcsolódik a kocka éleihez
- 8 olyan térrész van, ami a kocka éleire illeszkedik

Tehát összesen 1+6+12+8=27 térrészt kapunk.

- **Cél változtatása**

Egy adott feladatot úgy is variálhatunk, hogy a célunkat változtatjuk, így az eredetihez hasonló, de mégis más típusú feladatot kapunk.

- 1. példa: Adott kerület mellett határozd meg a *legnagyobb* területű téglalapot! → Adott kerület mellett határozd meg a *legkisebb* területű téglalapot!

Megoldás: Legyenek a téglalap oldalai: a és b. Ekkor $K = 2a + 2b$ és $T = a \cdot b$. Ha az első egyenletből kifejezzük a-t és beírjuk a második egyenletbe, akkor $T = \frac{K-2b}{2} \cdot b$ egyenletet kapjuk. Így a feladat szövege alapján a $b \to -b^2 + \frac{K}{2} \cdot b$ függvény maximumát keressük. Ezt teljes négyzetté alakítva $-(b - \frac{K}{4})^2 + \frac{K^2}{16}$ -ot kapunk, amiből látszik, hogy a függvénynek a $b = \frac{K}{4}$ -ben van maximuma. Ekkor $a = \frac{K-2b}{2} = \frac{K-2\frac{K}{4}}{2} = \frac{K}{4}$, tehát akkor maximális a területe a téglalapnak, ha $a = b = \frac{K}{4}$, azaz egy négyzet.

→ Ha a legkisebb területű téglalapot szeretném meghatározni, akkor a $b \to -b^2 + \frac{K}{2} \cdot b$ függvénynek keresem a minimumát. Azonban ennek a másodfokú függvénynek csak maximuma van, ezért a feladatnak nincs megoldása.

- 2. példa: Az f: **R**→**R**; $x \to -x^2 + bx + c$ függvénynek maximuma van az x=3 helyen, és a maximum értéke -5. Mekkora a b és a c értéke?

→ Az f: **R**→**R**; $x \to -x^2 + 6x - 14$ függvény adott. Keressük meg, hogy hol van a maximum helye és maximum értéke?

- 3. példa: Oldd meg az $\begin{cases} x+3y=-4 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$ egyenletrendszert!

  Ennek megoldása: $x = 5$ és $y = -3$.→Keress olyan egész számokból álló számpárokat, amik kielégítik

  - az első egyenletet: például (-1; -1), (2; -2), (5; -3)…
    Általánosan: ha (m; n) kielégíti az egyenletet, akkor (m+3; n-1) számpár is.
  - a második egyenletet: például (3; 0), (1; 3), (-1; 6)…
    Általánosan: ha (m; n) kielégíti az egyenletet, akkor (m-2; n+3) számpár is.

- **Nézőpont-változtatás**

  Fontos lehet - például versenyeken való felkészülés során -, hogy ha egy diák ránéz egy matematikai feladatra, akkor ne csak egy gondolata támadjon, hanem egy feladatot több szemszögből is megvizsgáljon. Ehhez szükség van arra, hogy megváltoztassa a nézőpontját.

  - 1. példa: Hogyan lehet egy háromszög területét növelni? → A $T = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2}$ (ahol a, b a háromszög két oldala, γ a közbezárt szög) képletet vizsgálva milyen ötletünk támadhat?

    A háromszög területét növelhetjük az oldalak, a magasság, a beírt, illetve a hozzáírt kör sugarának nagyobbításával, attól függően, hogy melyik területképletet vizsgálom. De a $T = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2}$ képlet esetén a „nézőpontunk megváltoztatásával” – azaz nemcsak az oldalakat figyelve, hanem a szögek vizsgálatával – rájöhetünk, hogy a $sin\gamma$-t növelve is növelhető a háromszög területe. Ez esetben állandó a, b mellett viszont maximum is van, ha $sin\gamma$ =1, azaz ha a háromszög derékszögű.

3. Általánosítás ↔ specializálás

Ezek szerintem a leggyakrabban használt stratégiák a matematikatanításban.

- **Általánosítás**

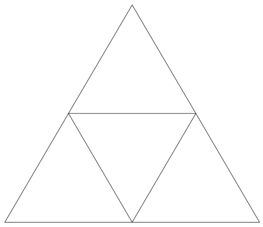
  Egy feladat általánosítása nagy segítséget nyújt a diákoknak, az általánosítások után nyert új ismeretet beépítik a korábban tanult ismeretek rendszerébe. Azonban lehetőséget kell adni a diákoknak arra, hogy a tapasztalatból kiindulva maguk alkossák meg egy feladat általánosítását. Matematikai ismereteik felépítése szempontjából sokkal hasznosabb, nyilvánvalóan sokkal jobban megmarad az emlékezetükben is, ha maguktól jönnek rá, és amikor eljön az ideje, könnyebben tudják alkalmazni.

- 1. példa: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ általánosítása: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{n}a^0 b^n$

  Ezt az általánosítást több lépésben végezzük el, először $(a+b)^3$, majd $(a+b)^4$ következik, és végül például a Pascal-háromszög felírása után jöhet az $(a+b)^n$.

- 2. példa: Egy szabályos háromszöget bontsunk fel 4 kisebb szabályos háromszögre!

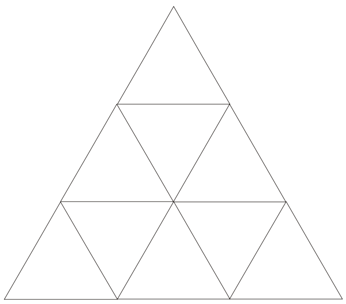
  Megoldás: A három középvonal segítségével (lásd 1. ábra).

  1. ábra

  Ennek a feladatnak egy <u>általánosítása:</u> Hány darab kisebb szabályos háromszögre lehet felbontani egy szabályos háromszöget?

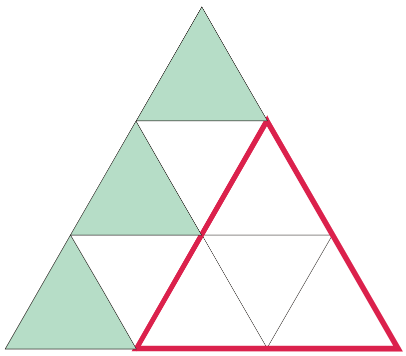
  n²-re: ha az oldalakat n egyenlő részre bontjuk és párhuzamosokat húzunk az oldalakkal, akkor $1 + 3 + \cdots (2n-1) = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n^2$ szabályos háromszöget kapok.

  2. ábra

  2n-re *(n>1):* egy oldal mentén n darab háromszög van (3. ábrán kékkel színezve), közöttük n-1darab háromszög, és van még egy nagyobb háromszög (3. ábrán: piros körvonallal), azaz összesen n+(n-1)+1=2n darab háromszög.

  2n+3-ra *(n>1):* ha a 3. ábrán látható piros háromszöget 4 kisebb háromszögre bontjuk tovább, akkor 2n-1+4=2n+3 háromszöget kapunk.

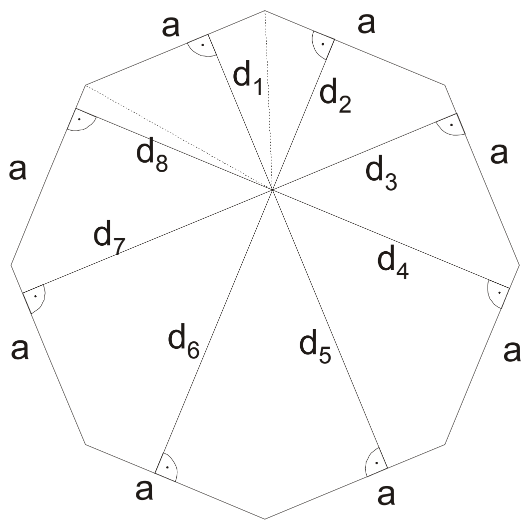
  3. ábra

  Összefoglalva: a felbontás minden n^2, 2n, 2n+3 (n>1) esetén lehetséges, így az összes, 2-nél nagyobb páros és az összes 5-nél nagyobb páratlan számra. Tehát minden n-re, kivéve a 2, 3 és 5, ezekre pedig könnyen belátható, hogy nem lehetséges.

- 3. példa: Egy szabályos háromszög belsejében vegyünk fel találomra egy pontot és tekintsük az oldalegyenesektől mért távolságainak az összegét. Bizonyítsuk be, hogy ez az összeg nem függ a pont választásától.

  → Bizonyítsuk be szabályos n-szög esetén!

  Az n-szög területét kiszámolhatjuk n db háromszög területének összegeként: $T = \frac{a \cdot d_1}{2} + \frac{a \cdot d_2}{2} + \cdots + \frac{a \cdot d_n}{2} = \frac{a}{2}(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)$. Mivel T és a állandók, ezért $(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)$ is állandó.



4. ábra

- 4. példa: Hány 2 elemű részhalmaza van egy 3 elemű halmaznak? $\binom{3}{2}$

  És hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak? $\binom{n}{k}$
- 5. példa: 3 ismeretlenes, 3 egyenletből álló egyenletrendszer megoldásának egy eljárása → n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszer általános megoldása
- 6. példa: ha egy feladatban sokszög szerepel, akkor a feladat végiggondolása n-szög esetén is. Például: Mennyi az ötszög belső szögeinek összege? → Mennyi egy n-szög belső szögeinek összege?

Specializálás

A tanulási folyamat jellemzője a fokozatos absztrahálás mellett a gyakori konkretizálás, az általánosítás mellett a specializálás.

- 1. példa: $(a+b)^2$ → $(a+a)^2$
- 2. példa: A koszinusz-tétel a szokásos jelölésekkel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$. Mi van ha $\gamma = 90°$? Egy speciális eset a Pitagorasz-tétel, hiszen ha $\gamma = 90°$, akkor a $c^2 = a^2 + b^2$ egyenlőséget kapjuk.
- 3. példa: Thalész-tétel speciális esete a középponti és kerületi szögek tételének, miszerint egy körben bármely középponti szög kétszer akkora, mint az azonos ívhez tartozó kerületi szög. Emiatt a Thalész-tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy:

  A félkörívhez tartozó minden kerületi szög derékszög.

- 4. példa: A koordinátageometriában az y=mx+b egyenes egyenletének speciális esete, ha m=0, azaz a vízszintes egyenesek; illetve, ha b=0, azaz az origón átmenő egyenesek egyenletét kapjuk.
- 5. példa: A parallelogramma területképlete a szokásos jelölésekkel: $a \cdot b \cdot sin\gamma$. Speciális esetekben:
  - rombusz: $a^2 \cdot sin\gamma$
  - téglalap: $a \cdot b$
  - négyzet: $a \cdot a$

4. Határesetek megfigyelése

- 1. példa: A számtani, illetve mértani sorozat határesetei, ha d=0; illetve ha q=1.
  Ekkor is érvényben marad az összegképlet?
  A számtani sorozat esetén igen ($S_n = \frac{(a_1+a_1)\cdot n}{2} = a_1 \cdot n$), azonban a mértani sorozat összegképlete nem értelmezhető, hiszen akkor a nevezőben 0 lenne. Viszont ilyen esetben az összeg könnyen kiszámítható az $S_n = a_1 \cdot n$ képlettel, ami épp a számtani sorozat összegképlete is d=0 esetén.
- 2. példa: A trapéz területképlete a szokásos jelölésekkel: $\frac{(a+c)\cdot m}{2}$. Speciálisan a parallelogramma, így a téglalap is trapézok. Mutassuk meg, hogy az előbbi képletből előállnak az ismert területképletek!
  Valóban, hiszen $\frac{(a+a)\cdot m}{2} = a \cdot m$, ami a parallelogramma területképlete; illetve a szokásos jelölésekkel (m=b) a téglalapé: $\frac{(a+a)\cdot b}{2} = a \cdot b$.
  Egy határhelyzet áll fenn, ha például a trapéz c-vel jelölt oldala nulla. Ilyenkor egy háromszöget kapunk, amire felírva a trapéz területképletét $\frac{a\cdot m}{2}$-t, azaz a háromszögre vonatkozó egyik ismert területképletet kapjuk, ahol m az a oldalhoz tartozó magasság.
  A tanulóknak sokszor gondot okoz a különböző matematikai képletek megjegyzése. A figyelmüket is jobban le lehet kötni, ha nemcsak felírjuk a képletet, hanem tovább is gondoljuk azt, összekötve előző ismereteikkel.

- 3. példa: A másodfokú egyenlet általános alakja: $ax^2+bx+c=0$. Speciális esetei, ha a,b,c közül valamelyik 0, vagy bármely kettő 0, illetve mindhárom 0. Ha b=0 vagy c=0 vagy mindkettő 0, akkor még másodfokú a kifejezés, azonban ha a=0, akkor nem másodfokú egyenletet kapunk. Ha pedig mindegyik 0, akkor egy azonossághoz jutunk.

5. Megfordítás

A tételek, állítások megfordításai éppolyan fontosak, mint maguk a tételek. Gyakran csak a következtető nyíl irányát kell megfordítani, de sok esetben ez csak bizonyos plusz feltételek mellett tehető meg.

- 1. példa: Ha egy szám osztható 24-gyel, akkor osztható 4-gyel és 6-tal is. Ennek az állításnak a megfordítása nem igaz, azaz ha egy szám osztható 4-gyel és 6-tal, akkor még nem biztos, hogy osztható 24-gyel. Ez igaz lenne, ha a 4 és a 6 relatív prímek lennének.
- 2. példa: A párhuzamos szelők tétele kimondja, hogy ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok hosszának aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok hosszának arányával.
  →Ha egy szög szárait úgy metsszük egyenesekkel, hogy az egyik száron keletkezett AB és CD szakaszok hosszának aránya megegyezik a másik száron keletkezett megfelelő A'B' és C'D' szakaszok hosszának arányával, akkor a metsző egyenesek párhuzamosak? Ez csak akkor lesz igaz, ha a szakaszok hosszát mindkét szögszáron a szög csúcsától, O-tól számítjuk, azaz például $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$.

6. Kontextus, szövegkörnyezet megváltoztatása

A legtöbb diáknak nagy gondot okoz a szöveges feladatok átültetése a matematika nyelvére, illetve a matematika alkalmazása gyakorlati problémák megoldásához. Leginkább az egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel foglalkozó témakörök tanítása során a diákokban felmerül az a kérdés is: Mindez mire jó? Mire lehet használni? Hétköznapi életünkben a problémák általában szöveges feladatok formájában kerülnek elő. Ezért is nagyon fontos, hogy minél több, koruknak megfelelő ilyen jellegű feladatot oldjanak meg a diákok középiskolában.

- 1. példa: $2y=x-8$

  $\underline{3y=x+7}$

  Ehelyett az egyenletrendszer helyett adhatjuk például a következő feladatot: A matematikaterembe padokat állítanak be. Ha minden padba két tanulót ültetnek, akkor 8 tanulónak nem jut hely. Ha viszont minden padba 3 tanuló ül, akkor 7 hely üresen marad. Hány padot állítsanak a terembe? Hány tanuló van az osztályban?

  Ebben az esetben a tanulóknak kell felírni az egyenletet is, tehát az egyenletfelírást is gyakorolják. A feladat próbálgatással is megoldható.

- 2. példa:
  - Egy társaságban öt ember van, érkezéskor mindenki kezet fog mindenkivel. Hány kézfogás történik?
  - Öt barát elmegy biliárdozni a hétvégén. Mindenki mindenkivel akar játszani. Összesen hány meccset játszanak?
  - Hány átlója és oldala van összesen egy ötszögnek?
  - Öt pont a síkban hány egyenest határoz meg, ha semelyik három nincs egy egyenesen?

  Ezek a feladatok első látásra különbözőnek tűnnek a diákok szemében, mégis mindnek ugyanaz a matematikai tartalmuk: $\frac{5\cdot(5-1)}{2}=10$.

- 3. példa: Péter egy folyón evez a víz folyásával szemben. Egy híd alatt kiesik a kalapja a csónakból. Fél óra múlva észreveszi, megfordul és ugyanolyan erővel evezve, mint eddig, a kalap után ered. A hídtól 4 km-re éri utol a kalapot. Mennyi ideig evez Péter visszafelé? Mekkora a folyó sebessége?

  <u>Megoldás</u>: Legyen a folyó sebessége v, Péter sebessége w állóvízben, t pedig az időtartam, amíg Péter a kalap után evezett. Ekkor

  a kalap útja: $0.5v+tv=4$

  Péter útja az észrevétel pillanatától a kalap megtalálásáig: $t(v+w)=4+0.5(w-v)$

  Ezekből megkapjuk, hogy $t=0.5$. Tehát fél órába telik, amíg észreveszi a kalap hiányát, majd fél órát kell Péternek visszafelé eveznie is. Így a folyó sebessége 4 km/h, hiszen 1 óra alatt 4 km-t tett meg a kalap.

A feladat megoldása után rávezethetjük a diákokat a szövegkörnyezet megváltoztatásával, hogy a megoldásra számolás nélkül is rá lehet jönni.

Ha folyó helyett vonatot veszünk, Péter nem evez, hanem sétál, akkor a feladat átfogalmazhatjuk a következőképpen:

Péter egy gyorsvonaton sétál menetiránnyal szemben. A büfé kocsiban elveszti a pénztárcáját, épp amikor egy megálló mellett halad el a vonat. 5 perc múlva észreveszi, megfordul és visszasétál ugyanolyan tempóban, mint eddig. A pénztárca a megállótól ekkor már 8 km-re van. Mennyi ideig sétál visszafelé Péter? Milyen gyorsan megy a vonat?

A feladat átfogalmazása segít a diákoknak könnyebben elképzelni, érzékelteti, hogy a pénztárca (ill. kalap) elvesztésétől az észrevételig eltelt idő ugyanannyi, mint az észrevételtől a megtalálásig eltelt idő, hiszen ugyanannyit kell visszafelé sétálni (ill. evezni) a vonaton (ill. folyón), mint amennyit menetiránnyal szemben. Ez a vonat (ill. folyó) sebességétől független. Természetesen az adatokon egy kicsit módosítani kell, hogy élethű legyen, azonban ez a lényegen nem változtat.

- 4. példa: A szövegkörnyezet megváltoztatásával eljuthatunk a matematika különböző tudományokban való alkalmazásaihoz is, például az építészetben, fizikában, kémiában, biológiában, közgazdaságtanban…stb.
  - Fizikai alkalmazás:

    Manapság egyre gyakrabban használnak információátvitelre üvegszálból készült kábeleket a korábbi drótkábel és árammal történő információátvitel helyett. A fény intenzitása az üvegszálon történő haladás közben exponenciálisan csökken. Egy különlegesen tiszta üvegszálon 100 m haladás alatt a fény intenzitása 0,2%-kal csökken.

    a) Adja meg a forrástól d távolságra az üvegszálban a fényintenzitást, ha d-t km-ben mérjük.

    b) 12 km hosszan hány százalékára csökken az intenzitás?

    c) Mekkora távolságra kell fényerősítőket beépíteni az üvegszálas kábelbe, ha a besugárzott fényintenzitásának legalább 20%-a el kell hogy érje az erősítőt, ahhoz, hogy a hibákat elkerüljük?

- Mezőgazdasági alkalmazás, ami például egy mezőgazdasági szakközépiskolában jó gyakorlás lehet:

  Egy sertéstelepen 41 ólba egyenletesen helyezzük el az állatokat úgy, hogy minden ólban ugyanannyi disznó legyen. Meszelés alkalmával 14 ólat fel kellett szabadítni, s közben egy állatot le is kellett vágni. Így az újraosztásnál több, de minden ólba ugyanannyi sertés jutott. Hány állat volt eredetileg egy ólban, ha a telepen legfeljebb ezer disznó tartását engedélyezi az ÁNTSZ?

  Megoldás: Legyen kezdetben egy ólban x sertés, y pedig a meszelés után az egy ólban lévő állatok száma. Ekkor 41x-27y=1, ahol x, y természetes számok.

  Ebből $y = \frac{41x-1}{27} = x + \frac{14x-1}{27}$. Mivel x és y természetes számok, ezért 27 osztója a 14x-1-nek, azaz 27k=14x-1. Ebből következik, hogy k páratlan.

  27(2m+1)=14x-1

  54m=14x-28

  27m=7(x-2), tehát 27|x-2 → x=27z+2.

  z=0 esetén x=2, y=3 (ekkor 82 disznó van);

  z=1 esetén x=29, de ezt nem engedi meg a feladat feltétele, tehát nincs megoldás.

- Biológiai alkalmazás:

  Tinea Pellionella egy igen elterjedt molyfajta. A nőstények egy alkalommal körülbelül 150 petét raknak. Egy év alatt 5 generáció jön létre. Mindegyik lárva kb. 20 mg milligramm gyapjút eszik. A peték 2/3-a elpusztul idő előtt és az életben maradtak fele nőstény.

  a) Készítsen vázlatot a növekedésről, az első szülőpárt tekintse első generációnak.

  b) Mennyi gyapjút falnak föl az anyamoly utódai?

  c) Tudna-e olyan képletet megadni, amely (a folyamatot tartósnak véve) a generációk száma és a megevett gyapjú mennyisége közötti viszonyt fejezi ki.

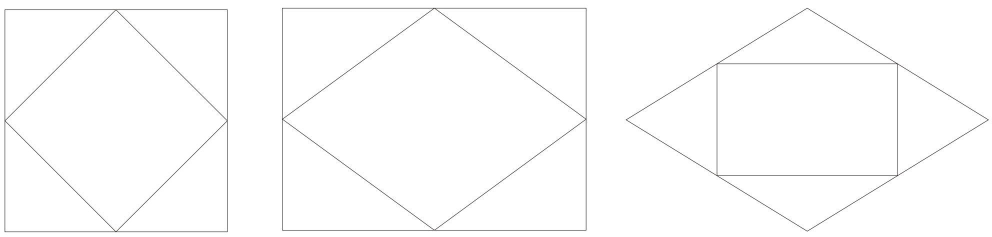
7. Szétválasztás

Egyes feladatokban nagy szerepe lehet a különböző komponensek szétválasztásának.

- 1. példa: A hatványok tanításánál az a^n-t komponenseire szétválasztva vizsgáljuk. Ha a hatványalapot változtatjuk, akkor csak apróbb változtatásokhoz jutunk, például: $2^3 \rightarrow (-3)^3$ vagy $2^3 \rightarrow (\frac{4}{5})^3$ nem jelent lényegét tekintve nagy változtatást. Azonban ha a kitevőt változtatjuk, akkor teljesen különböző eredményeket kapunk: $2^3 \rightarrow 2^{-3}=\frac{1}{2^3}$ vagy $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.
- 2. példa: Egy szabályos n-szög-ről szóló geometriai feladatban hasznos lehet, ha megvizsgáljuk azt az esetet, amikor az n-szög csak egyenlő oldalú, illetve ha az n-szögnek a szögei egyenlők, de az oldalainak a hossza különbözik.

  Például: Egy négyzet felezőpontjai milyen alakzatot határoznak meg? Ha a négyzet helyett olyan négyszöget vizsgálunk, aminek csak a szögei azonosak, azaz a téglalapot, akkor a felezőpontjai egy rombuszt határoznak meg. Ha pedig a rombuszt vizsgáljuk, aminek az oldalai egyenlők, akkor téglalapot kapunk, hiszen ennek csak az a feltétele, hogy az eredeti négyszög átlói merőlegesek legyenek egymásra.

  Ezekből következik, hogy mivel a négyzet egyben téglalap és rombusz is, ezért a felezőpontok által meghatározott négyszögnek rombusznak és téglalapnak is kell lennie, ami csak a négyzet lehet.



5. ábra

8. Iteráció

Ahogy a szótár[4] meghatározza, az iteráció: fokozatos közelítés; ugyanolyan eljárásnak egyre pontosabb értéket adó megismétlése.

- 1. példa: A matematikában az iteráció jelentheti például azt, hogy egy konkrét számolás után annak az eredményével számolunk tovább.
- 2. példa: Mi az első n természetes szám összege? → Mi az első n négyzetszám, köbszám, ... stb. összege?
- 3. példa: Ennek a stratégiának a szempontjából nagy jelentőségű a számítógépek megjelenése, hiszen az iteráció, vagyis más néven ciklus, vagy ismétlési szerkezet a programozás egyik alapelve. Ennek során valamilyen feltételtől függően ismétlünk meg egy tevékenységet, vagy tevékenységsorozatot. Így már könnyebb például a lg(x) → lg(lg(x)) → lg(lg(lg(x))) függvények vizsgálata.

9. Hiánypótlás

Fontos a matematikában a logikai strukturáltság egy témán belül vagy akár egy feladat megoldásánál is. Ha különböző eseteket vizsgálunk, akkor törekedni kell arra, hogy lehetőleg egy eset se maradjon ki.

- 1. példa: Egy geometriai példa esetén, ami hegyesszögű háromszögekről szól, érdemes megnézni tompa- illetve hegyesszögű háromszögekre is.
- 2. példa: Ha egy feladatban csak a körív egy része szerepel, akkor az egész körre megvizsgálni:

  Adott átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek maximális a területe?

  Mivel az átfogó adott, ezért csak a magasságuk különbözteti meg őket, így ezek közül a legnagyobb területű az egyenlő szárú háromszög, hiszen ennek a legnagyobb a magassága.

  → Mi következik ebből a teljes körre?

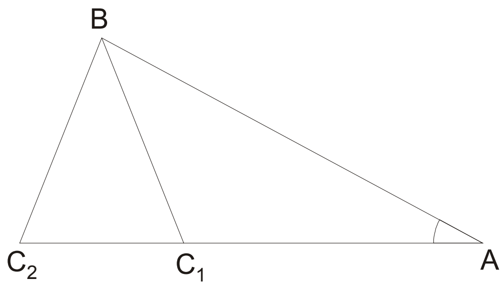
  Ha tükrözzük a háromszögeket az átfogóra, akkor a derékszögű deltoidok közül a négyzetnek lesz a legnagyobb a területe.

[4] BAKOS Ferenc *Idegen szavak és kifejezések szótára,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983

- 3. példa: Hagyományos tanítás során is használjuk a hiánypótlás stratégiáját, pl. háromszögek egybevágóságánál.

  Egy háromszöget 3 adata meghatározza. A teljességre törekedve vizsgáljuk meg az összes esetet:

  - ha adott 3 oldala, akkor a háromszög egyértelműen megszerkeszthető
  - ha adott 2 oldala és az általuk közrezárt szöge, akkor is egyértelmű a szerkesztés
  - ha adott 2 oldala (AB és BC_1) és a rövidebbikkel szemközti szöge, akkor két különböző háromszög is szerkeszthető: ABC_1 és ABC_2 háromszögek, ha $BC_1 = BC_2$



6. ábra

  - ha adott 2 oldala és a hosszabbikkal szemközti szöge, akkor csak egy háromszög szerkeszthető
  - ha adott az egyik oldala és az azon lévő két szöge, akkor is egyértelmű a szerkesztés
  - ha adott az egyik oldala, a rajta fekvő szög és a vele szemközti szög, akkor a harmadik szöge is adottnak tekinthető, így az előző esetet kapjuk
  - ha 3 szöge adott, akkor végtelen sok hasonló háromszög szerkeszthető.

  Tehát azok az esetek, amik egyértelműen határozzák meg a háromszöget, lesznek a háromszög egybevágóságának alapesetei, amelyek a következők: Két háromszög egybevágó,

  - ha oldalaik páronként egyenlők
  - ha 2 oldaluk és az általuk közrezárt szög egyenlő
  - ha 2 oldaluk és a hosszabbikkal szemközti szögük egyenlő
  - ha az egyik oldaluk és az azon lévő két szögük egyenlő

10. Továbbkérdezés

Egy tanár esetén nagyon fontos az állandó kérdésfelvetés, ezzel sarkallja a diákokat saját gondolatokra, felkelti figyelmüket és ezzel viszi tovább az óra menetét. Éppen ezért ez egy nagyon fontos stratégia a tanítás során.

- 1. példa:
  - A feladat: Előállítható-e egy törzstört[5] két különböző törzstört összegeként?
  - A válasz: Igen, hiszen például $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$
  - A kérdés: Egyértelmű ez az előállítás? Nem, hiszen például $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$
- 2. példa: Egy szabályos dobókockával egyszer dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy a dobott szám 3-mal osztható? $\frac{1}{3}$ → Kérdés: És mekkora annak a valószínűsége, hogy 3-al nem osztható? $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Ekkor a komplementer eseményre kérdezünk rá.
- 3. példa: Ez a stratégia gyakran megjelenik a geometriai szerkesztésekben, diszkusszió formájában. Ennek során részletesen megbeszéljük, hogy a megoldás mely esetekben és milyen körülmények között alkalmazható.

11. Érdekesebbé tétel, aktualizálás, javítás

Ezek a stratégiák fontosak, hiszen minden tanárnak arra kell törekednie, hogy a diákok érdekes, matematikailag és nyelvtanilag helyes feladatokat kapjanak az órákon.

- **Érdekesebbé tétel**

  Fontos, hogy felkeltsük a diákok érdeklődését matematika órán, ehhez viszont érdekességekre, hozzájuk közel álló feladatokra van szükség. Ezt sokféleképpen meg lehet tenni. Például a 6. pontban már említett szövegkörnyezet megváltoztatásával, a való életben vett alkalmazásokkal; illetve kisebb matematikai, esetleg vicces történetekkel. De jó lehetőséget adnak a matematikai paradoxonok is, hiszen ezek gyakran igen meghökkentők.

[5] törzstört: az 1 számlálójú törtek

Egy feladatot egy jó képességű osztályban úgy is érdekesebbé lehet tenni, ha nehezítjük, a feltételeket megváltoztatjuk, esetleg analóg feladatot találunk ki, pl. a térben (analogizáljuk).

- **Aktualizálás, javítás**

  Ha egy feladat már elavult, nem aktuális, azaz nem illik bele az adott élethelyzetbe, akkor frissíteni, aktualizálni lehet az adatokat.

  Így a tanulók is könnyebben megértik azokat és hitelesebbek, valósághűbbek lesznek a feladatok általában. Az iskolai tankönyvek példái gyakran nemcsak tárgyi, hanem matematikai, nyelvi hiányosságokat is mutatnak, ezekre minden tanárnak oda kell figyelni és kijavítani azokat.

  - 1. példa: Ha egy feladatban még osztrák schilling szerepel, vagy német márka, akkor mivel ma már euro a hivatalos pénznem, ezért érdemes átírni a feladatot, vagy jelezni kell valamilyen formában, hogy ma már nem ez a hivatalos fizetőeszköz.
  - 2. példa: Javítás alatt nem csak elírások, rossz adatok javítását értem, hanem ha egy feladat kétértelmű, akkor annak átfogalmazását. Azonban a leghasznosabb, ha megbeszéljük a diákokkal, hogy a szöveg alapján milyen megoldások jöhetnek számításba. Ilyen például a következő:

    Adottak az 1,2,3,4 számjegyek. Hány különböző háromjegyű szám készíthető ezek felhasználásával?

    A feladat megfogalmazásából nem derül ki egyértelműen, hogy egy számjegyet csak egyszer vagy akár többször is fel lehet-e használni.

    Egyértelmű megfogalmazások például a következők lehetnek:

    - Adottak az 1,1,2,2,2,3,3,4 számjegyek. Hány különböző háromjegyű szám készíthető ezek felhasználásával?
    - Adottak az 1,2,3 és 4 számjegyeket ábrázoló számkártyák. Hány különböző háromjegyű szám készíthető ezek felhasználásával? Ebben az esetben adódik, hogy a számkártyák mindegyikéből csak egy van.
    - Adottak az 1,2,3,4 számjegyek. Hány különböző háromjegyű szám készíthető ezek felhasználásával, ha mindegyiket többször is felhasználhatom?

12. Nehezítés vagy könnyítés

Egy feladat nehézségének megváltoztatását sokféleképpen megtehetjük. Sokszor egy tétel, feladat specializálása könnyítést jelent, míg az általánosítás, az absztrakt gondolkodás nehezítésnek számít.

- 1. példa: Egy kerítés lefestése Péternek 4 órájába telne. Ugyanezt a munkát András 6 óra alatt végezné el. Mennyi idő alatt fejezik be együtt a kerítés lefestését?

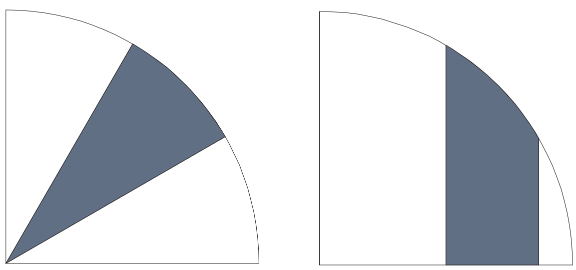
  Péter 1 óra alatt a kerítés $\frac{1}{4}$ részét festi le, míg András 1 óra alatt az $\frac{1}{6}$ résszel végez. Legyen t a közös munkaidő órában mérve. t óra alatt Péter $\frac{t}{4}$ részt, András pedig $\frac{t}{6}$ részt fest be, és e két rész összege adja a teljes munkát. Így a felírható egyenlet: $\frac{t}{4}+\frac{t}{6}=1$, azaz $3t+2t=12$, amiből $t=2{,}4$. Tehát a munkát 2,4 óra alatt fejezik be együtt.

  Könnyítés: Péter és András ugyanolyan gyorsan, 4 óra alatt festenének le egy kerítést. Mennyi idő alatt fejezik be együtt a kerítés lefestését?

  Ez az előző feladatnak egy speciális esete, így az előző megoldás itt is eredményre vezet: $\frac{t}{4}+\frac{t}{4}=1$, azaz $2t=4$, amiből $t=2$.

  Azonban ezt a feladatot könnyen meg lehet oldani egy kis gondolkodással is: mivel András és Péter is ugyanolyan gyorsan dolgoznak, ezért együtt kétszer olyan gyorsak, tehát fele annyi idő szükséges a kerítés lefestéséhez, mint külön-külön.

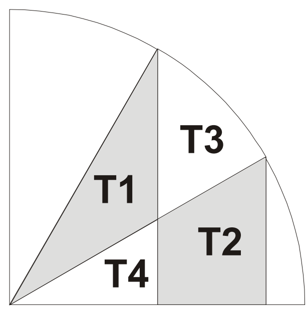
- 2. példa: Mindkét ábrán egy negyed körívet harmadoltunk el. Mutassuk meg, hogy a két jelölt terület egyenlő!



7. ábra

  Ha a sugarat 1 egységnek vesszük, akkor a jelölt területeket kiszámolva mindkettőre könnyen adódik a $\frac{\pi}{12}$ területegység.

Nehezítés: Találj „számolásmentes” (átdarabolásos) megoldást!
Ahhoz, hogy belássuk, hogy T1+T3=T2+T3, elég belátni, hogy T1=T2. Ehhez viszont elég azt belátni, hogy T2+T4=T1+T4, azaz a két derékszögű háromszög területe egyenlő. Ez igaz, hiszen egybevágóak (átfogójuk egyenlő a sugárral és szögeik megegyeznek).



8. ábra

13. Kombinálás

A korábbi pontokban felsorolt stratégiákat természetesen lehet kombinálni, több változtatást egy lépésben végrehajtani; illetve egyszerre több stratégia szerint variálni a feladatot.

- 1. példa: „Oldja meg a $3x - 2 < 11$ egyenlőtlenséget a **Z** halmazon!” feladat az 1. és 2. pontban említett stratégiák kombinálásával átfogalmazva: „Oldja meg a $4x^2 + 5 > 9$ egyenlőtlenséget az **R** halmazon!”
- 2. példa: Bizonyítsuk be, hogy egy hegyesszögű háromszög magasságpontját tükrözve a háromszög oldalaira, a tükörkép rajta van a háromszög körülírt körén!
  - általánosítás: Bizonyítsuk be tetszőleges háromszögre is!
  - analogizálás: Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög magasságpontját tükrözve a háromszög oldalfelező pontjaira, a tükörkép rajta van a háromszög körülírt körén!
  - továbbkérdezés: milyen pontok vannak ezek szerint a háromszög körülírt körén?
    (magasságpont tükörképei az oldalakra és az oldalfelező pontokra, és a háromszög csúcsai, tehát 9 pont)
  - továbbkérdezés: milyen, már említett körrel hozható kapcsolatba az előző következtetés? És hogyan?
    Természetesen a Feuerbach-körrel, amit a körülírt kör $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítésével kapunk.
    Az előbbi stratégiáknak egy kombinálása: Bizonyítsd be, hogy a háromszög oldalfelező pontjai, a háromszög magasságainak talppontjai,

és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak! Ebben a bizonyításban ötvöződnek az előbb felsorolt feladatok.

- 3. példa: Mit lehet mondani 3, egymást követő természetes szám összegéről? Osztható 3-mal, hiszen (n-1)+n+(n+1)=3n.
  - csekély változtatás: Mit lehet mondani 3, egymást követő *páros* szám összegéről?

    Osztható 6-tal, hiszen (2n-2)+2n+(2n-2)=6n.
  - analogizálás: Mit lehet mondani 3, egymást követő természetes szám szorzatáról?

    Osztható 6-tal, hiszen a három szám közül egy biztosan páros, és egy pedig osztható 3-mal, így a szorzat biztosan osztható legalább 6-tal.

  Az előző stratégiák kombinálása:

  Mit lehet mondani 3, egymást követő páros szám szorzatáról? Osztható 48-cal, mert $(2n-2)\cdot 2n\cdot(2n+2)=2^3\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$, azaz 8-cal biztosan osztható, és előbb beláttuk, hogy 3, egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal, így $8\cdot 6=48$.

- 4. példa: 2000.02.20 egy olyan dátum, ami csak páros számjegyekből áll. Mikor volt *utoljára* egy hasonló dátum? (Minden hónap és nap sorszáma 2 számjegyből kell, hogy álljon.)

  Ennek megoldása persze függ az aktuális dátumtól, de a jelenlegi megoldás: 2008.12.28.
  - csekély változtatás: Melyik a *következő* ilyen dátum?
  - analogizálás: Mikor volt utoljára olyan dátum, ami csak páratlan számjegyekből áll? Jelenlegi megoldás: 1999.11.19.

  Az előző stratégiák kombinálása: Melyik a következő olyan dátum, ami csak páratlan számjegyekből áll?

  Megoldás: 3111.11.11.

Az előzőekben ismertetett stratégiák közül általában nem mindet alkalmazzuk egy-egy feladat kapcsán. A következő két feladatlapban bemutatom, hogyan variálható egy feladat, témakör minél többféleképpen.

Példák feladatok variálására

A háromszög területe

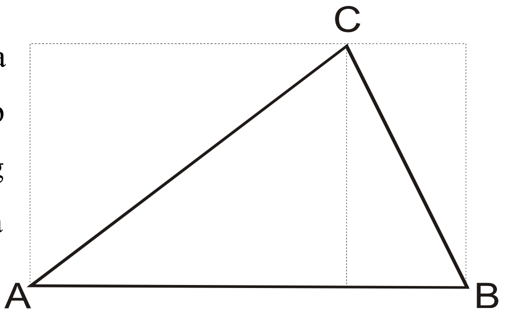
Ez a feladatlap egy összefoglaló órán a legalkalmasabb, akár érettségire való felkészüléskor, akár már 10. osztályban, a geometria témakör végén.

Alapfeladat:

Hogyan lehet kiszámolni egy háromszög területét, ha adva van egy oldala és a hozzá tartozó magassága?

Megoldás:

Az ábra átdarabolással azt mutatja be, hogy a háromszög területe a felrajzolt téglalap területének éppen a fele, azaz a háromszög területe kifejezhető a következő képlettel, a szokásos jelölésekkel: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$.



9. ábra

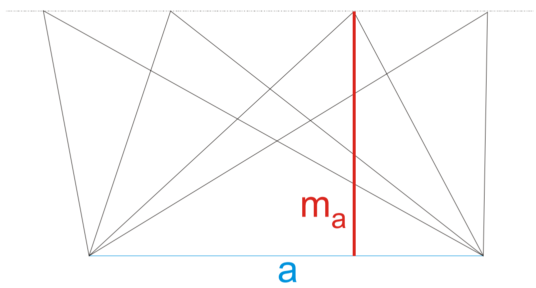
A megoldás során sok diáknak gyakran csak a $T = \frac{a \cdot m_a}{2}$ képlet jut eszébe, ezt érdemes pontosítani.

Lehetséges variációk:

Továbbkérdezés

Ha két háromszögben egy oldal és a hozzátartozó magasság páronként megegyezik, akkor a területük is egyenlő?

A képletből adódóan a válasz igen. Azonban sok diák számára ez azt jelenti, hogy a háromszögek egybevágók is, ezért jó tudatosítani bennük, hogy ez nem szükséges. A háromszög alakjától függetlenül az előbbi esetben területük egyenlő. Ennek megértését a következő rajzzal (ld. 10. ábra) segíthetjük:



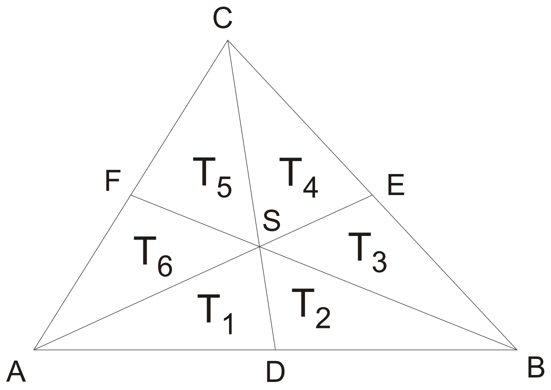
10. ábra

- *Stratégia: alkalmazás*

  Bizonyítsd be, hogy a háromszöget a súlyvonalai 6 egyenlő területű részre bontják!

  Ebben a feladatban kitűnően lehet alkalmazni az előző észrevételt, miszerint ha két háromszögben egy oldal és a hozzátartozó magasság páronként megegyezik, akkor a területük is egyenlő.

  T1=T2, mert CD súlyvonal, ezért AD=DB, és az ADS és DBS háromszög magassága is megegyezik. Hasonlóan T3=T4, illetve T5=T6. Azonban ABF és ABE háromszög területe is megegyezik, mert alapjuk AB, magasságuk pedig AB és EF (a középvonal) távolsága.



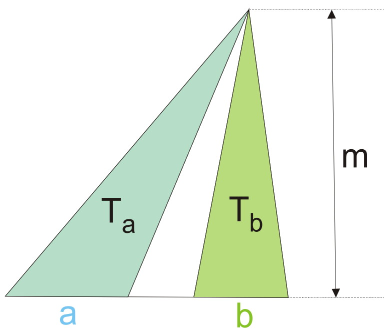
11. ábra

  Ebből következik, hogy T6=T3. Hasonlóan indokolható, hogy T2=T5, illetve T1=T4. Ezekből látható, hogy mind a 6 háromszög területe megegyezik.

<u>*Nézőpont megváltoztatása*</u>

a) Most nem egy háromszög területe a kérdés, hanem két háromszög területének az aránya. Mekkora a 12. ábrán látható T_a és T_b háromszögek aránya, ha adott a és b?

   Mivel a két háromszög magassága megegyezik, ezért $T_a : T_b = \frac{a \cdot m}{2} : \frac{b \cdot m}{2} = a : b$. Ezt tovább vizsgálhatjuk:

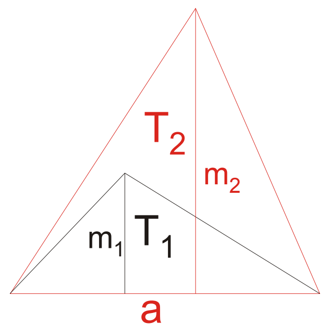


12. ábra

   - *Stratégia: analogizálás*

     Ha nem a két háromszög magassága egyezik mag, hanem az alapjuk, akkor hogyan számítható ki a két háromszög területének aránya? (m_1, m_2 adott)

     $T_a : T_b = \frac{a \cdot m_1}{2} : \frac{a \cdot m_2}{2} = m_1 : m_2.$



13. ábra

b) Hogyan változik a terület, ha a háromszög oldalait kétszeresére növeljük?

Ebben az esetben hasonló háromszöget kapunk, hiszen az oldalak aránya páronként megegyezik. Ezért a magasság is a kétszeresére nő, így $T = \frac{2a \cdot 2m_a}{2} = 4\frac{a \cdot m_a}{2}$, tehát a terület négyszeresére változik.

- *Stratégia: általánosítás*

  Ha az oldalak λ-szorosára változnak, akkor a terület hogyan változik?

  Hasonlóan az előzőhöz a terület λ^2-szersére nő.

<u>*Specializálás*</u>

a) Ha derékszögű a háromszög, akkor mennyiben változik a képlet?

Derékszögű háromszög esetén: $T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$, ahol a, b a befogókat jelöli és c az átfogót.

b) Ha szabályos a háromszög, akkor hogyan számoljuk ki a területét? Az oldal legyen a hosszúságú.

$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, mert Pitagorasz tétele alapján: $(\frac{a}{2})^2 + {m_a}^2 = a^2$, amiből m_a-t kifejezve és behelyettesítve a fenti képletet kapjuk.

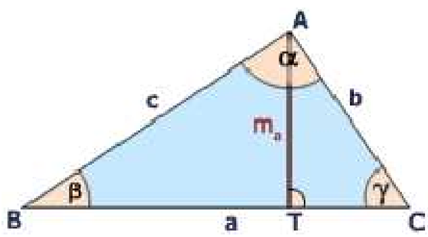
<u>*Hiánypótlás*</u>

A felsorolásban ez a 9. stratégia, ennek során logikai stuktúráltságra törekszünk a feladathoz kapcsolódóan. Ebben az esetben ez a következőt jelentheti például:

Ha egy háromszögnek különböző adatai vannak megadva, akkor hogyan tudjuk kiszámítani a területét? Ezeket az eseteket vizsgáljuk, és próbálunk minél jobban a „teljesség”-re törekedni.

a) Hogyan lehet kiszámolni a háromszög területét, ha adott két oldala és a közbezárt szög nagysága? Ez legyen most a, b és γ.

$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2}$, hiszen a magasságot ki lehet fejezni a szögfüggvények segítségével: $m_a = b \cdot sin\gamma$.



14. ábra

Az új képletünket tovább is vizsgálhatjuk a stratégiák segítségével:

- *Stratégia: cél megváltoztatása*

  Az előző feladat összefoglaló órán alkalmas, hiszen már ismerik a tanulók a képletet, csak a megfelelő összefüggést kellett megkeresni. Azonban ezt fordítva is fel lehet vetni:

  Ha a $T = \frac{a \cdot m_a}{2}$ képletből indulunk ki, akkor ez hogyan alakítható úgy, hogy a szögek is szerepeljenek benne?

  Például a 14. ábra alapján: $m_a = b \cdot sin\gamma$ vagy $m_a = c \cdot sin\beta$. Ezt beírva a képletbe azt kapjuk, hogy $T = \frac{a \cdot c \cdot sin\beta}{2} = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2}$, azaz a háromszög területét két oldal és a közbezárt szög ismeretében kifejezhetjük.

- *Stratégia: specializálás*

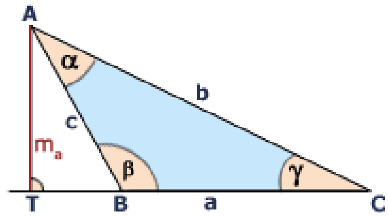
  Ha a háromszög derékszögű (γ=90°), akkor mennyiben változik a képlet?

  $T = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2} = \frac{a \cdot b \cdot 1}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$ képletet kapjuk, amint a b) pontban is.

- *Stratégia: továbbkérdezés*

  Érvényes-e a képlet tompaszögű háromszögekre is, hiszen az előző ábra hegyesszögű volt?

  Igen: az m_a most az adott γ tompaszög külső szögének segítségével fejezhető ki, így $m_a = b \cdot \sin(180° - \gamma))$, de $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$, ezért a képlet ebben az esetben is érvényes.



15. ábra

b) Hogyan lehet kiszámolni egy háromszög területét, ha adva van a három oldala a, b, c?

   Ezt az úgynevezett Héron-képlet adja meg: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol $s = \frac{a+b+c}{2}$.

   A trigonometriai jellegű bizonyításhoz induljunk ki a koszinusztételből a szokásos jelölések mellett, amelyet rendezve a következőt kapjuk: $cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Használjuk fel még azt az előbbi képletet, amely a háromszög területét két oldal és a közrezárt szög segítségével fejezi ki, illetve az ismert összefüggést: $sin\gamma = \sqrt{1 - cos^2\gamma}$. Ezek, illetve algebrai átalakítások alapján:

$T = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot sin\gamma = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sqrt{1 - cos^2\gamma} = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sqrt{(1 - cos\gamma)(1 + cos\gamma)} =$

$\frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)} =$

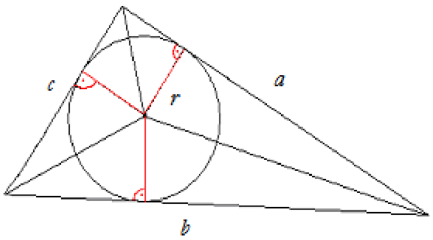
$\frac{1}{4}\sqrt{((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2)} =$

$\frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a - b + c)}.$

Ha a fenti képletbe behelyettesítjük $a = 2s - b - c$-t, akkor éppen a Héron-képletet kapjuk.

c) Hogyan lehet kiszámolni egy háromszög területét, ha adva van a három oldala a, b, c és a *beírt* kör sugara, r?

A beírt kör középpontját összekötve a háromszög csúcsaival a háromszöget három kisebb háromszögre bonthatjuk. Ezek területeinek összege adja az eredeti háromszög területét:



16. ábra

$T = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{(a+b+c) \cdot r}{2} = \frac{k \cdot r}{2} = s \cdot r,$

ahol $s = \frac{a+b+c}{2}$.

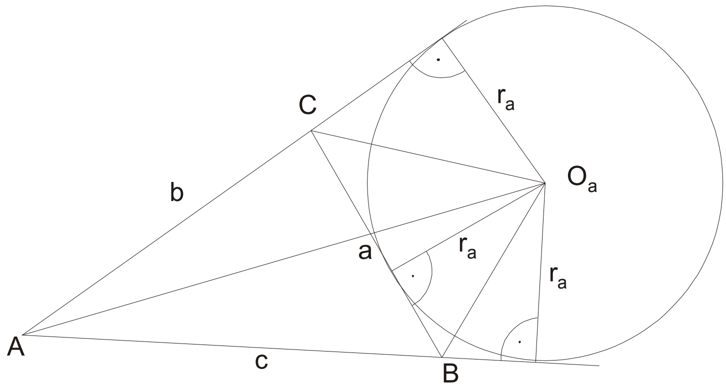
- *Stratégia: továbbkérdezés*

  Érvényes az előbbi $T = \frac{k \cdot r}{2}$ képlet érintőnégyszög esetén is, ha r a négyszögbe írt kör sugara?

  Igen, a bizonyítás hasonló, mint háromszög esetén.

d) Hogyan lehet kiszámolni egy háromszög területét, ha adva van egy oldala, a és a *hozzáírt* kör sugara, r_a?

Az *ABC* háromszög területe megegyezik az O_aAB és O_aCA háromszögek területei összegének és az O_aBC háromszög területének különbségével (ld. ábra), azaz



17. ábra

$T = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2} = \frac{(c+b-a) \cdot r_a}{2} = r_a \cdot (s - a)$, ahol $s = \frac{a+b+c}{2}$.

e) Hogyan lehet kiszámolni egy háromszög területét, ha adva van a három oldala a, b, c és a *körülírt* kör sugara, R?

Ekkor a területet a $T = \frac{abc}{4R}$ képlettel lehet kiszámolni. Ezt középiskolában nem szokás bizonyítani, de fakultáción nem nehéz belátni. A bizonyítás megtalálható a Sokszínű Matematika 10. című tankönyv 225. oldalán.

Dimenzióváltás

Hogyan lehet kiszámolni egy tetraéder térfogatát, ha adva van a magassága, m és egy alaplapjának területe, T?

$V = \frac{T \cdot m}{3}$, azaz annak a háromszög alapú hasáb térfogatának a harmada, ahol a tetraéder egyik lapja megegyezik a hasáb alapjával és a hozzá tartozó magasságuk is egyenlő.

Ez a feladatsor összefoglalja, rendszerezi a háromszög területéről tanultakat és egyben önálló gondolkodásra, összefüggések keresésére késztet.

Halmazok

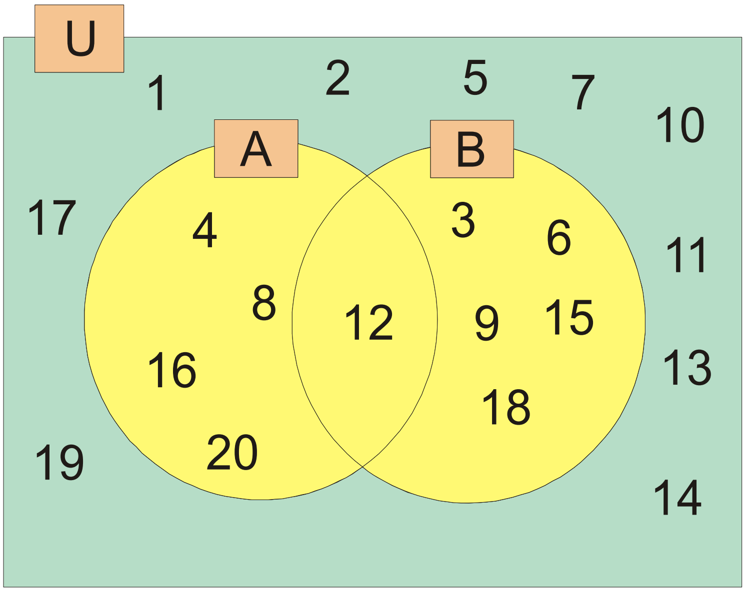
A halmazok és halmazműveletek témakörhöz például a következőképpen alkalmazható a feladatvariálás módszere. Ez a feladatlap 9. osztályban alkalmas gyakorlásra, ismétlésre. Hasonló feladatlapot gyakorlatilag a tanulók is összeállíthatnak összefoglalásképpen.

Alapfeladat:

Adjuk meg A∪B-t, ha A={4; 8; 12; 16; 20}, B={3; 6; 9; 12; 15; 18} és az alaphalmaz: U={1,2,…,20}. Készítsünk Venn-diagramot a feladathoz!

Megoldás:

A∪B={3; 4; 6; 8; 9; 12; 15; 16; 18; 20}.



18. ábra

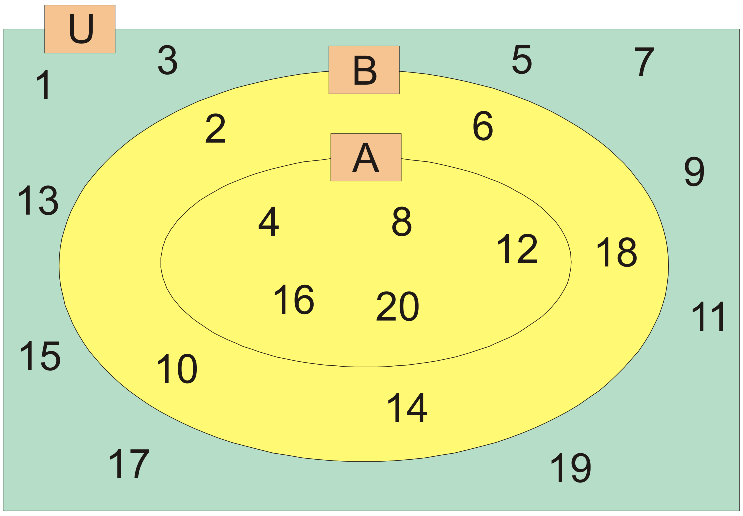
Lehetséges variációk:

Csekély változtatás

a) A és B halmazt változtatjuk: Adjuk meg A∪B-t, ha A={4; 7; 9; 12; 17}, B={3; 5; 9; 12; 17; 18} és az alaphalmaz: U={1,2,…,20}. Készítsünk Venn-diagramot a feladathoz!
b) Az alaphalmazt változtatjuk: Adjuk meg A∪B-t, ha A={4; 8; 12; 16; 20}, B={3; 6; 9; 12; 15; 18} és az alaphalmaz: U={1,2,…,25}. Készítsünk Venn-diagramot a feladathoz!

Nehezítés

a) Ha a halmazokat matematikai jelekkel adjuk meg: A={4k | k$\epsilon$$\mathbf{Z}^{+}$}; B={3k | k$\epsilon$$\mathbf{Z}^{+}$}.
b) Nehezíteni lehet például úgy is, hogy ha az A (ill. B) halmaz a prímszámok, négyzetszámok,…stb. halmaza az adott alaphalmazon vagy egy egyenlőtlenség pozitív egész megoldásai, hiszen ehhez szükség van ezeknek az ismereteknek a felelevenítésére.
c) Legyen A={4; 8; 12; 16}, B={pozitív, páros számok}, ha U={1,2,…,20}. Ekkor a feladat nehézsége a Venn-diagramban rejlik, hiszen ekkor A részhalmaza B-nek, azaz az ábra a következőképpen módosul:



19. ábra

Analogizálás

Legyen A={4; 8; 12; 16; 20}, B={3; 6; 9; 12; 15; 18} és az alaphalmaz: U={1,2,…,20}. Határozzuk meg

- A∩B-t
- $\overline{A}$-t, illetve $\overline{B}$-t

Kombinálás

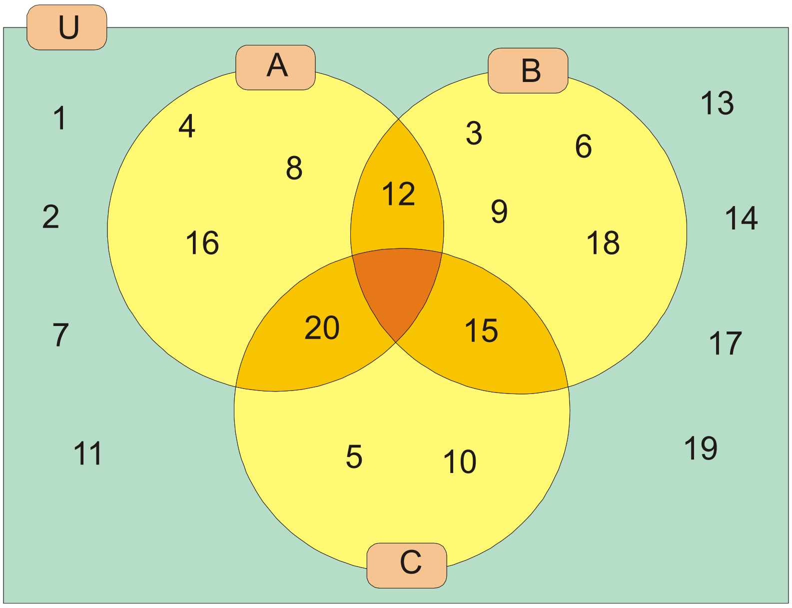
Legyen A={4; 8; 12; 16; 20}, B={3; 6; 9; 12; 15; 18} és az alaphalmaz: U={1,2,…,20}. Adjuk meg:

- $\overline{A} \cup \overline{B}$-t, illetve $\overline{A \cup B}$-t
- $\overline{A} \cap B$-t
- $(A \cap B) \cup \overline{A}$-t

Iterálás

Adjuk meg A∪B∪C-t, ha A={4; 8; 12; 16; 20}, B={3; 6; 9; 12; 15; 18}, C={5;10;15;20} és az alaphalmaz: U={1,2,…,20}. Készítsünk Venn-diagramot is a feladathoz!

Megoldás: A∪B∪C={3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 16; 18; 20}



20. ábra

Ennek mintájára nemcsak 3, hanem akár 4 halmazra is megfogalmazhatunk hasonló feladatot.

Szövegkörnyezet megváltoztatása

Egy 20 fős osztályban kiválasztanak 2 csoportot. Az A csoportba a névsorból minden negyedik tanulót, a B csoportba pedig minden harmadik tanulót válogatnak be. Kik azok a tanulók, akiket kiválogattak? Van-e olyan tanuló, aki mindkét csoportba beletartozik? (Ebben az esetben a tanuló választhat, hogy melyik csoportba szeretne tartozni.) A tanulókat a névsorban elfoglalt sorszámuk szerint add meg!

Nézőpont megváltoztatása

Ha nem az elemek nézőpontjából nézzük a feladatot, hanem csak az elemek száma szerint, akkor ezzel rátérhetünk az elemszám fogalmára. Ekkor átfogalmazható a feladat például így:

$|U| = 20, |A| = 5, |B| = 6$ *és* $|A \cap B| = 1$. Ekkor mennyi A∪B elemszáma, azaz |A ∪ B| =?

<u>Megoldás:</u> $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 6 - 1 = 10$.

Ez a feladat tökéletesen alkalmas a logikai szita átismétlésére, gyakorlására és tovább variálható a stratégiák segítségével:

- *Stratégia: szövegkörnyezet megváltoztatása*

  20 fős csoportban 5-en hegedülnek, 6-an zongoráznak, egy tanuló pedig mindkét hangszeren játszik. Hány diák van, aki legalább az egyik hangszeren játszik?
- *Stratégia: nehezítés*

  Nehezítésnek számít, ha az egyik halmaz helyett a komplementerének elemszámát adjuk meg, ez gyakran megzavarja a diákokat a megoldás során. Például:

  20 fős csoportban 5-en hegedülnek, 14-en nem zongoráznak, egy tanuló azonban hegedülni és zongorázni is tanul. Hány diák van, aki legalább az egyik hangszeren játszik?
- *Stratégia: cél megváltoztatása*

  Az adatokból kiindulva a diákok találjanak ki szöveges feladatokat, például:

  Egy lépcsőház lakóiból 5 család a Blikk-re fizetett elő, 6 család a Nők Lapjára, 1 család pedig mindkét újságra. Hány család fizetett elő legalább az egyik újságra?
- *Stratégia: analogizálás*
  a) Most unió helyett vizsgáljuk a metszet elemszámát: $|U| = 20, |A| = 5, |B| = 6$ *és* $|A \cup B| = 10$. Ekkor mennyi A∩B elemszáma, azaz |A ∩ B| =?

     A megoldás során már felhasználhatjuk az unióra tanult képletet, a logikai szitát, azaz: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Átrendezve kapjuk: $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 5 + 6 - 10 = 1$.
  b) És mennyi $|\overline{A \cup B}|$, ha $|U| = 20, |A| = 5, |B| = 6$ *és* $|A \cap B| = 1$?

     $|\overline{A \cup B}| = |U| - |A \cup B| = 20 - (5 + 6 - 1) = 20 - 10 = 1$.
- *Stratégia: iteráció*

  Nézzük meg a logikai szitát 3 halmaz esetén: $|U| = 20, |A| = 5, |B| = 6, |C| = 4, |A \cap B| = 1, |B \cap C| = 1, |A \cap C| = 1$ *és* $|A \cap B \cap C| = 0$. Ekkor mennyi A∪B∪C elemszáma, azaz |A ∪ B ∪ C| =?

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 5 + 6 + 4 - 1 - 1 - 1 + 0 = 12.$

- *Nehezítés:* Ezt a feladatot úgy is meg lehet fogalmazni, hogy:

  Adjuk meg $|A \cup B \cup C|$-t, ha A={4; 8; 12; 16; 20}, B={3; 6; 9; 12; 15; 18}, C={5;10;15;20} és az alaphalmaz: U={1,2,…,20}. Készítsünk Venn-diagramot a feladathoz!

- *Stratégia: általánosítás*

  A logikai szita formulát hogy lehet felírni n halmaz esetén, azaz $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| =$? (Ezt csak fakultáción vagy szakkörön mondjuk el.)

  Megoldás:

  Röviden ilyen formában írható fel:

  $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i,j:i<j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k:i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \pm |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$

Összefoglalás

Szakdolgozatomban matematikai feladatok különböző szempontok alapján történő variálásával foglalkoztam.

Munkám során sok érdekes feladattal, összefüggéssel találkoztam, azonban - közvetlen magyar irodalom híján - a német könyv egyes részeinek fordítása, értelmezése sokszor nehézséget okozott. Ennek ellenére kihívást jelentett számomra egy új szemlélet megértése és ezekhez kapcsolódó feladatok, feladatlapok kitalálása. Észrevettem, hogy egy-egy feladatra már más szemmel nézek, keresem a variálhatósági lehetőségeket bennük.

Érdemes a diákokat is megismertetni a szakdolgozatban ismertetett stratégiákkal, hiszen így nemcsak a tanárok, hanem a diákok is készíthetnek feladatvariációkat. Ez fontos lehet számukra is, hiszen ezzel jelentősen lehet fejleszteni a kreativitásukat, problémamegoldó és szövegalkotási kompetenciájukat.

A bemutatott stratégiák többsége felbukkan a hagyományos (hazai) oktatásban is – mint ahogy a példák között is láthattuk –, de nem fektetnek elég nagy súlyt egy-egy feladat variálására, illetve nem ennyire tudatos, felépített egy átlagos feladatlap. Ez a munka nagyon időigényes, és kevés a szakirodalom ebben a témában. A nyugati országokhoz képest hazánkban mások a hagyományok, így ritkábban fordul elő, hogy a tanárok egy feladattal többféle szemszögből foglalkoznak. Probléma, hogy a módszer alkalmazása – például egy 30 fős osztályban – nagyon nehéz, és csoportbontásra nem mindenütt van lehetőség. Ez a módszer nagyon tudatos felkészülést és tervezést is követel, valamint sok előkészítési munkát és kreativitást, ahogy én is tapasztaltam

Remélem, hogy ez a dolgozat is hozzájárul az említett nehézségek leküzdéséhez. A későbbiekben, tanítási gyakorlatom során szeretném kipróbálni a szakdolgozatomban leírt módszereket, feladatlapokat.

Irodalomjegyzék

[1] Hans Schupp: Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, *Franzbecker Verlag, Berlin* (2002)

[2] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű Matematika 9, *MOZAIK Kiadó, Szeged* (2003)

[3] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű Matematika 10, *MOZAIK Kiadó, Szeged* (2003)

[4] Bartha Gábor, Bogdán Zoltán, Csúri József, Duró Lajosné dr., dr. Gyapjas Ferencné, dr. Kántor Sándorné, dr. Pintér Lajosné: Matematika feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára, *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest* (1995)

[5] Lukács Judit, Vancsó Ödön, Székely Péter, Bárd Ágnes, Frigyesi Miklós, Major Éva: Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest* (2005)

[6] Moussong Gábor honlapja: http://www.cs.elte.hu/~mg/ (2008.december)

[7] Matematikatanítási és Módszertani Központ honlapja: http://mathdid.elte.hu/pic/bsc_em_3.pdf (2009.március)

[8] Vidákovich Tibor, mérés-értékelés: http://www.sulinovaadatbank.hu/letoltes.php?d_id=14256 (2009. március)

[9] Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet honlapja: http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=kompetencia-02_kulcskompetenciak (2009. március)

http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=matrix-4-Metakognitiv (2009. április)

[10] http://hu.wikipedia.org/wiki