# Szemléltetési lehetőségek az algebra tanításában

Szakdolgozat

Készítette: Barta Anita

Matematika BSc, tanári szakirány

Témavezető: Szeredi Éva

Főiskolai docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Budapest

2010

# Tartalomjegyzék

# Bevezető

Mindig is foglalkoztatott, hogy hogyan lehet a matematikát hatékonyan tanítani, érthetővé és szerethetővé tenni a diákok számára. Úgy gondolom a szemléltetésnek kulcsfontosságú szerepe van e célok elérésében. Hiszen egy jó eszköz, módszer segítségével a magasabb szintű matematikát is közérthetőbbé, a gyerekek számára izgalmasabbá tehetjük. Más tantárgyaknál a szemléltetési eszköz sokszor automatikusan adódik, mint például földrajz tanításakor a földgömb, térkép, kőzet, vagy a biológia esetén egy-egy élő növény, preparátum, fotó. A matematika tanításakor azonban sokszor olyan elvont fogalmakat kell kiépítenünk, amelyek szemléltetése nem ilyen kézenfekvő. Így például az irracionális számok létezésének, ekvivalencia osztályok kapcsolatainak illusztrálásakor kreatívnak kell lennünk. A matematikán belül az algebra témakörét választottam, mert úgy gondolom az általános és középiskolában ezen a területen van a legtöbb olyan fogalom, melynek szemléltetése nem természetesen adódó.

Jerome S. Bruner azt mondja, a tanulás során a tanuló értelmében a fogalmak többféle módon képeződhetnek le. Ezeket a belső reprezentációkat megfelelő külső reprezentációkkal segíthetjük. Ezen probléma-leképezéseket pedig három nagy csoportba sorolja. Az enaktív leképezések közé a mozgásos, cselekvéssel kapcsolatos reprezentációk tartoznak. Ikonikusnak nevezi a képekhez, vázlatokhoz, ábrákhoz köthető leképezéseket, és szimbolikusnak az írott vagy beszélt szimbólumrendszer által történő reprezentációkat. Mivel a matematika tanítása során is folyamatosan egy-egy fogalmat, problémát próbálunk közvetíteni, így az ott használatos szemléltetési eszközöket is csoportosíthatjuk a fentiek szerint. Minél többféle módszerrel mutatunk be egy-egy témakört, annál nagyobb valószínűséggel jut el a tanulóhoz az eszközök által képviselt magas szintű matematika. Ezt szem előtt tartva próbáltam minél különbözőbb szemléltetési lehetőséget bemutatni, s a fent említett három szemléltetési mód mindegyikét képviseltetni a dolgozatomban.

A matematika tanításában egy-egy szemléltetési módszer többféle szerepet is betölthet. Egyesek például az összefüggések megértését könnyítik, mások bizonyításként szolgálnak, vagy segítenek a tanult algebrai rész begyakorlásában, elmélyítésében. Dolgozatomban elsősorban az új fogalmak kiépülését, elmélyítését segítő módszereket mutatok be. Ezeket pedig két általam kiválasztott algebrai témakör feldolgozása során teszem. Az első fejezet a műveletek fogalmának kiépítéséről, a második pedig a számkörbővítésről szól. E két téma elválaszthatatlan kapcsolatban áll egymással, hiszen a műveletek tanulása során folyamatosan találkozunk olyan helyzetekkel, amikor az eredmény kivezet az addig tanult számok halmazából. Például a természetes számok halmazából kilépünk az egész számok körébe, ha a kivonásnál megengedjük, hogy a kivonandó nagyobb legyen a kisebbítendőnél. S van, hogy a számkörbővítést nem a művelet elvégzése generálja, hanem mi terjesztjük ki az egyes műveletek értelmezési tartományát egy bővebb számhalmazra. Ilyen például, mikor a hatványozás esetében már nem csak egész, hanem racionális kitevőket is megengedünk, értelmezünk. Mindkét téma során a bemutatott eszközöket vizsgálom a mögöttük rejlő magasabb szintű matematika szempontjából is.

# Szemléltetés a műveletek fogalmának kiépítésében

A matematika tanulása során a diákok folyamatosan találkoznak új fogalmakkal. Időről-időre előkerül egy-egy újabb művelet, tulajdonság, viszony. Nagyon fontos, hogy az új ismeretek jól rögzüljenek, hiszen így lesznek képesek ezeket helyesen alkalmazni, és később ezekre építkezve bővíteni a tudásukat. A szemléltetésnek kiemelt szerepe van a fogalmak kiépítésében, hiszen az új tananyagot akkor tudja jól megérteni, és elsajátítani a tanuló, ha azt ki is próbálhatta, meg is tapasztalhatta.

Ebben a fejezetben az új műveletek tanításakor felhasználható szemléltetési módszerekről, szemléltető eszközökről, azok céljáról, előnyéről írok.

Először tisztázzuk mi is az a művelet.
„Tetszőleges $A$ nemüres halmaz és $n \geq 0$ egész szám esetén bármely $f\colon A^n \to A$ függvényt az $A$-n értelmezett $n$-változós műveleteknek nevezzük."[1] A műveletek tehát a függvények egy olyan speciális csoportját alkotják, amikor a halmaz, amelyre leképezünk, megegyezik az értelmezési tartománnyal, azaz azzal a halmazzal, amelyből a leképezendő elemeket, elempárokat, elem n-eseket vesszük.

Dolgozatomban egyváltozós, unér és kétváltozós, binér műveletekkel fogok foglalkozni. Igaz, legtöbbször művelet alatt csak a kétváltozós műveleteket értik, az egyváltozósokat pedig függvényeknek nevezik, de mivel a tanításban ez nem válik szét ilyen élesen, így én sem teszek szóhasználatbeli különbséget.

E fejezetben a következő műveletek fogalmának kiépítésével foglalkozom: összeadás, hozzáadás, kivonás, elvétel, szorzás, megszorzás, osztás, elosztás, hatványozás, gyökvonás, trigonometrikus műveletek.

A fenti pontos definíciónak ellentmond az, hogy már akkor műveletnek nevezünk egy-egy függvényt, amikor még csak olyan halmazon értelmezzük, amely szűkebb az értékkészleténél. Hiszen, ha végiggondoljuk, míg az összeadást és szorzást már a természetes számok halmazán, addig a kivonást az egészeken, az osztást pedig a racionális számok halmazán nevezhetnénk csak műveleteknek. A hatványozás természetes kitevő mellett a természetes számok halmazára nézve zárt, így ezen a

---

[1] Fried Ervin: Általános algebra, 23. oldal

halmazon értelmezve valóban művelet. A hatvány alapjának és kitevőjének fokozatos kiterjesztése mellett azonban egyre bővebb számhalmazra képez (ezzel a következő fejezetben részletesen foglalkozom). A gyökvonást páratlan gyökkitevő esetén csak a valós számok halmazán, páros gyökkitevő esetén pedig csak a pozitív valós számok halmazán nevezhetnénk műveletnek. A trigonometrikus függvények szintén a valós számokra való kiterjesztés után válnak ″igazi″ műveletté. Ennek ellenére a dolgozatomban a tanításban megszokott módon, műveleteknek nevezem azokat a szűkebb halmazon értelmezett leképezéseket is, melyek csak egy bővebb számhalmazon való értelmezés során fognak eleget tenni a művelet pontos definíciójának.

Ebben a fejezetben a műveleteket elsősorban azon a halmazon értelmezem, amelyen a tanulók is értelmezik az új művelet bevezetésekor. Ez az alapműveleteknél a természetes számok halmazát jelenti. C. Neményi Eszter így fogalmazott a természetes számok tanításáról: „A témával való foglalkozással célunk, hogy szemléletben és matematikai tartalmában gazdag tényanyagot juttassunk a gyerekek birtokába, amely aktuálisan könnyen felidézhető egy-egy probléma megoldásához, és amely igaz, pontos és nyitott számfogalmat képvisel, ezáltal alkalmas a továbbépítésre, kibővítésre. … Igaz, pontos és nyitott az alakuló fogalom, ha továbbépítése során sincs szükség a módosítására, kiterjesztése során sértetlenül része maradhat a kibővített fogalomnak."[2] Ezeket szem előtt tartva a műveletek értelmezési tartományának kiterjesztése gördülékenyen fog menni.

## Összeadás, kivonás

Mikor ismerkedik meg a gyermek a matematikai műveletekkel? A matematika alapjait már az óvodában kezdi elsajátítani, algebrai témájú feladatokkal már itt is találkozik, hiszen a számokkal való alapszintű megismerkedésről, összeadásról és kivonásról már ekkor szó van. Persze magát a műveletet már korábban, akár otthon is alkalmazza azzal, hogy felvesz a kezébe tárgyakat, majd azokhoz még hozzávesz, vagy éppen letesz. Ezeket, a játékkal, cselekvéssel szemléltetett műveleteket gyakorolják, tudatosítják az óvodában a pedagógusok.

[2] C. Neményi Eszter: A természetes szám fogalmának alakítása

Az alapműveletek tanulása folytatódik, mélyül az alsó tagozatban. Első osztályban még csak az összeadás és kivonás műveletekkel foglalkoznak, és ezeket is csak a húszas számkörben használják. A szemléltetés itt is nagy hangsúlyt kap. A szemléltető eszköz lehet bármilyen kisebb, könnyen mozdítható tárgy, mint például gombok, babszemek vagy a lapra, táblára rajzolt egyszerűbb alakzatok. Így próbálgathatják a műveletek végrehajtását, észlelhetik a tulajdonságaikat. Fontos észrevenni azonban, hogy:

„A különféle szituációkhoz nem azonos összeadás vagy kivonás értelmezések tartoznak. Ezért nem is képes eleinte az ember ezeket egységes műveletként tekinteni. Több év kell ahhoz, hogy ezekből az egyes értelmezésekből egységes műveletfogalom alakuljon ki.
Az egységesedést általában, egy idő után segítheti az egyforma szóhasználat, jelölés. Kezdetben azonban helyes, ha nem elvontan, s így nem is egységesen fogalmazunk, hanem az adott szituáció konkrét tárgyaihoz, eseményeihez igazítjuk az éppen értelmezett műveletet.”[3]

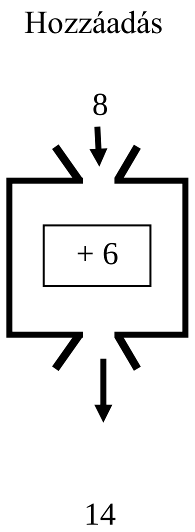
Például a gyerekek eleinte másképp értelmezik az összeadást és a hozzáadást. Hiszen gondoljuk csak meg, két különböző tevékenységet jelent az alábbi két példában végrehajtott művelet:

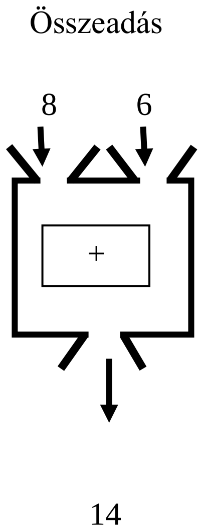
- Példa hozzáadásra: Niki és Jani szalvétákat gyűjtenek. Nikinek nyolc, Janinak hat különböző szalvétája van. Jani megunja ezt a hobbyt, és a gyűjteményét Nikinek adja. Hány szalvétája van most Nikinek?
- Példa összeadásra: Niki és Jani szalvétákat gyűjtenek. Nikinek nyolc, Janinak hat különböző szalvétája van. A két gyerek elhatározza, hogy együtt gyűjtenek tovább, így az eddig megszerzetteket is közösnek tekintik. Hány szalvéta van a közös gyűjteményükben?

Persze mindkét feladat megoldásakor a $8 + 6 = 14$ eredményt kapják, de az első esetben a két szám szerepe nem szimmetrikus, hiszen az egyikhez hozzátesszük a másikat. Ilyenkor az eredményt kicsi korban továbbszámlálással kapják a gyerekek. Az összeadásnál azonban a két szám egyenrangú, az összeadás két halmaz uniójának számosságát jelenti, itt az eredményt a kicsik az együttes halmaz elemeinek leszámlálásával kapják. Az ezekhez hasonló hozzáadási és összeadási példákat

[3] C. Neményi Eszter–Dr. R. Szendrei Julianna: A számolás tanítása. Szöveges feladatok, 11. oldal

szemléltethetjük rajzokkal, vagy akár el is játszhatjuk a konkrét szituációkat a gyerekekkel. Van azonban egy olyan szemléltetési eszköz, amely nagyon jól hangsúlyozza a változók számát, így a különbséget is a hozzáadás és az összeadás között. Ez a műveletgép, mely Varga Tamás nevéhez köthető. (Lásd a következő ábrát!)




Később ezt a különbség már nem hangsúlyozzuk, és csak azt vesszük figyelembe, hogy a végeredmény mind két esetben ugyanannyi.

Az összeadáshoz hasonlóan a kivonásnál is megkülönböztethetünk konkrét cselekvéseket, így fordulhat elő, hogy az általunk később csak kivonásnak nevezett műveletre a gyerekek alkalmazzák az elvétel, kibővítés vagy különbség kifejezést.

- <u>Példa elvételre:</u> Balázs húsvétra kapott öt tábla csokit, de ebből 2 táblával már meg is evett. Hány tábla csokija maradt?
- <u>Példa kibővítésre:</u> Sára szeretné összegyűjteni mind az öt különböző kutyás matricát. Eddig sikerült megszereznie kettőt. Mennyit kell még összegyűjtenie, hogy meglegyen a sorozat?
- <u>Példa különbségre:</u> Istinek öt hűtőmágnese van, Aninak kettő. Melyik gyereknek van több hűtőmágnese és mennyivel?

Bár a későbbiekben mind a három esetben ugyanúgy fogunk számolni (5 - 2 = 3), ezt az azonosítást nem kell siettetni. Hagyni kell, hogy a tanuló sok gyakorlás után megtapasztalja a hasonló kimenetelt. Így, egy darabig a különböző típusú feladatokat más megközelítésből fogja megoldani:

1. elvétel: 5 – 2 = □ □ = ?

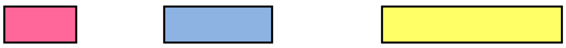
2. kibővítés: 2 + □ = 5 □ = ?

3. különbség: 5 – 2 = □ □ = ?

Célszerű ezeket a különböző szituációkat először a mindennapi életből vett tárgyakkal, vagy azok rajzával szemléltetni. Így a gyermek könnyebben el tudja képzelni az adott problémát. Később ezeket a konkrét tárgyakat helyettesíthetjük egyszerűbb alakzatokkal, mint például korongokkal, pálcikákkal. Így már nem az lesz a fontos, hogy a korong csokit, lufit vagy virágot jelentett, hanem az, hogy mennyi volt és mennyi maradt belőle. Ezek után előkerülhet az alsóban gyakran használt színes rúdkészlet, amely alkalmas valamennyi szituáció szemléltetésére.

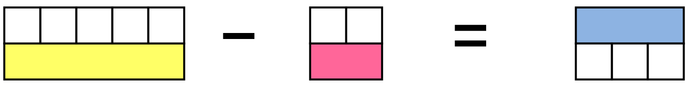
Vegyük most egységnek a kis fehér kockát:

A 2, 3, 5 egységnyi hosszú rudak pedig a következők:



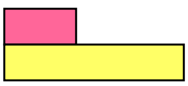
A fenti példák szemléltetése a színes rudak segítségével:

1. példa, elvétel:

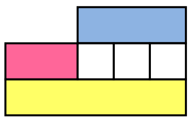


5 – 2 = □ 5 – 2 = 3

2. példa, kibővítés:

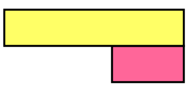


2 + □ = 5

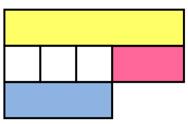


2 + 3 = 5

3. példa, különbség:



5 – 2 = □



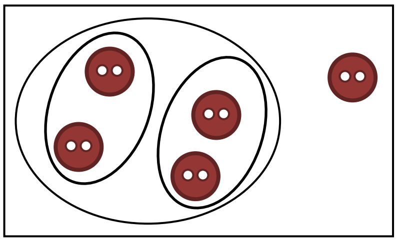
5 – 2 = 3

Ez a szemléltető eszköz is segíti a gyermeket abban, hogy észrevegye a hasonlóságot a különböző típusúnak hitt feladatokban. Hiszen mind a 3 esetben ugyanazokat a rudakat használtuk fel.

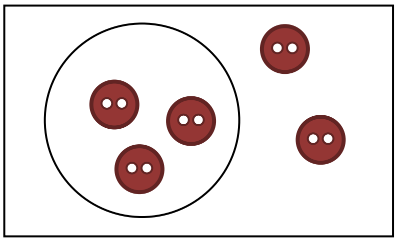
A készlet előnye még, hogy mi választhatjuk meg az egységnyi hosszúságot. Tehát lehet, hogy most a fehér kis kockát jelöljük ki, egy másik feladatnál, vagy esetleg ugyanezen feladatok újra játszásánál azonban másik rudat választunk egységnek. Persze ekkor a többi számot jelképező rudakat is újra meg kell keresnünk. Ez azért nagyon fontos előny, mert így a számok mellé mennyiség is társul, és ez a mennyiség változhat az egység megválasztásától függően. Így a rudak segítségével a fenti példán a 2, 3 és 5, mint mennyiségek viszonyát tudjuk érzékeltetni. Ez a viszony pedig ugyanannyi marad, akármilyen egységet is választunk meg. A mennyiségfogalom építése azért nagyon fontos a számfogalom építése során, mert a műveletek tanulása közben a gyerekek hamar megfeledkeznek arról, hogy a számjegyek igazából számosságot takarnak. Az írott számot társítják a szám nevéhez, azaz például ötöt mondok, 5-öt írok, de ezekre úgy tekinthetnek, mint a matematika világában használatos jelekre. A műveleteket is hamar kötik a szám írott képéhez és megfeledkeznek a számjegyek mögött lévő mennyiségi tartalomról.

A szám- és mennyiségfogalom építését segíti a különböző számrendszerek használata is. Ezek segítségével megmutathatjuk, hogy a kettes számrendszerben az 101, a hármasban az 12 az ötösben az 10 ugyanazt a mennyiséget, az öt mögötti tartalmat fejezi ki. Tehát ugyanarról a számosságról beszélünk, csak más-más szimbolikus jelet társítunk hozzá. Ennél a folyamatnál találkozik a reprezentáció három típusa. A fenti példánál enaktív leképezés az, ha megfogunk öt gombot és kirakjuk az asztalra. Tehát valósághű módon, cselekvés útján szemléltetjük a mennyiséget. Ha ezután a kirakott öt gombot a különböző számrendszerek alapszámainak megfelelően csoportosítjuk, majd ezt a csoportosítást lerajzoljuk, illetve a csoportosítást „számjegyekkel kódoljuk”, akkor ezek a változatos szemléltetési módok segíthetnek abban, hogy a szám fogalma és írott alakja szétváljon.

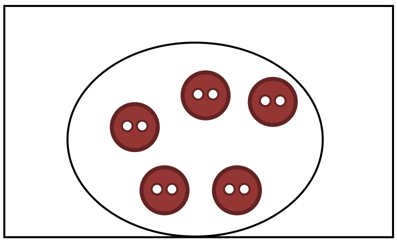
Ikonikus reprezentáció Szimbolikus reprezentáció



a kettes számrendszerben 101



a hármas számrendszerben 12



az ötös számrendszerben 10

Ha a különböző számrendszerekben összeadunk és kivonunk, akkor azzal is oldhatjuk a műveleteknek a számok írott képéhez történő kötöttségét.

## Szorzás, osztás

A szorzással és az osztással második osztályban ismerkednek meg a gyerekek. Úgy, mint az előző esetekben, most is adott helyzetekhez kapcsoljuk a műveleteket. Így a tanulóban eleinte fel sem merül a szorzás kommutativitása, hiszen ekkor még a szorzás ismételt összeadásként jelenik meg, és egész más szerepe van a szorzónak és szorzandónak. A szorzandó az, amit ismételten összeadunk, a szorzó pedig az, ahány szorzandót összeadunk.

Példa: Van öt vázánk. Minden vázába teszünk 4 szál tulipánt. Összesen hány szál tulipánt helyeztünk el? (Lásd a következő ábrán!)

Ezt a példát először úgy oldjuk meg, hogy vázánként összeadjuk a virágokat. Azaz $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$. Majd bevezetjük a rövidebb leírás érdekében a $4 \cdot 5$ jelölést. Itt fontos hangsúlyozni, hogy a négy tulipánt vesszük ötször, nem pedig az öt vázát vesszük négyszer, hiszen az előbbi értelmezést követeli meg a feladat leírása. „ Később (kb. 3. osztálytól), amikor már megtapasztalták a gyerekek, hogy a 3 négyszerese és a 4 háromszorosa ugyanannyi, hogy a 6 kétszerese és a 2 hatszorosa ugyanannyi, … és a többi esetben is mindig azonos szorzatot kapnak a tényezők felcserélésével képezett szorzásokban, akkor feloldhatjuk a jelölés szigorú következetességét. Amíg azonban a kisgyereknek képet kell alakítania magában (vagy maga előtt) egy szorzásról, addig nem cserélgethetjük kedvünkre (vagy figyelmetlenségből) a jeleket.”[4]

A szorzás fogalomkiépítése során azért fontos a szemléletes ábra használata, mert azon látja a diák, hogy hogyan alakulnak a csoportok. Azaz segíti a szorzó és szorzandó fogalmak különválasztását, ez pedig nélkülözhetetlen magának a szorzás műveletének a megértéséhez.

[4] C. Neményi Eszter–Dr. R. Szendrei Julianna: A számolás tanítása. Szöveges feladatok, 40. oldal

A második osztályosok, a szorzás tanulása után megismerkednek annak inverz műveletével[5], az osztással is. „A valóságból kiolvasható osztás kétféle tevékenységről szól, ezért értelmezése is ezzel a két tevékenységgel történik. Az egyik az ún. bennfoglalás, amikor azt kérdezzük, hogy adott számú tárgyból hány adott elemszámú csoport alkotható (hányszor van meg benne …). A másik az egyenlő részekre osztás, amelyben adott számú tárgyat 2, 3, …, adott számú egyenlő részre osztunk, s azt kérdezzük, hogy egy részbe mennyi jut.”[6] A kétféle értelmezéshez kétféle jelölést is használunk a megkülönböztethetőség érdekében. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy 10 darab lufit kettesével osztogatva hány gyerek kaphat lufikat, azaz, ha bennfoglalásról van szó, akkor azt így jelöljük: 10:2=? . Ha pedig azt szeretnénk megtudni, hogy hány lufit kap egy gyerek, ha 10 darab lufit igazságosan elosztunk 5 gyerek között, azaz részekre osztunk, akkor ezt a jelölést használjuk: 10/5=? .

A bennfoglalás tanításakor kézenfekvő a ″kupacos″ szemléltetés, amikor is (a fenti példát követve) először a kezdő állapotot, vagyis a 10 lufit egy halmazban ábrázoljuk, majd megmutatjuk a cselekvés utáni helyzetet, azaz, hogy mi lett a kettesével való szétosztás eredménye. Ha van rá lehetőségünk, ezt a bennfoglalást el is játszhatjuk a gyerekekkel, mágnes táblára helyezett papírból kivágott lufikat. Ez a módszer az enaktív leképezéseket képviseli. A játék amellett, hogy megmozgatja a gyerekeket, jól szemlélteti, hogy hogyan is zajlik a bennfoglalás. Hiszen ugye az történik, hogy tízből elvesznek kettőt, marad a nyolc. Megnézik, hogy nyolcban meg van-e a kettő, azaz eltudnak-e venni még egyszer kettőt, és így tovább. Tehát, míg a szorzásnál ismételt összeadást, addig a bennfoglalásnál ismételt kivonást végzünk. Végeredményképpen a táblán öt kupacot látnak, és mindegyikben két-két lufi van. Ez a kép nagyon hasonlít a fenti ábrára, amikor is öt vázában vannak a virágok. Erre a hasonlóságra fel is kell hívni a figyelmet, hogy meglássák a kapcsolatot a szorzás és bennfoglalás között. Innentől kezdve úgy ellenőrizhetünk, hogy tízben a kettő megvan ötször, hiszen tíz egyenlő ötször kettő.

[5] Kétváltozós művelet inverzét az absztrakt algebrában a következőképpen definiáljuk: „Legyen adott a $H$ halmazon egy (szorzásként jelölt) művelet. Tegyük fel, hogy az $xb = a$ egyenlet minden $a, b \in H$-ra egyértelműen megoldható, azaz pontosan egy olyan $c \in H$ létezik, amelyre $cb=a$. Ekkor a $B(a, b) = c$ hozzárendelést a művelet bal oldali inverz műveletének nevezzük. Hasonlóan, ha minden $a, b \in H$-ra pontosan egy olyan $d \in H$ létezik, amelyre $bd = a$, akkor a $J(a, b) = d$ hozzárendelés a művelet jobb oldali inverz művelete. … Ha a(z eredeti) művelet kommutatív, akkor nyilván mindig $B = J$.”

A fenti idézet Freud Róbert Lineáris Algebra című könyvének 314. oldaláról való

[6] C. Neményi Eszter–Dr. R. Szendrei Julianna: A számolás tanítása. Szöveges feladatok, 46. oldal

Ezek után feladhatjuk a fenti feladat módosított verzióját, amikor 11 lufit kell kettesével kiosztani. Most is öt gyerek kap két-két lufit, de marad egy, amit senkinek sem adunk. Ezt maradékos osztásnak nevezzük.

Az osztás másik típusa az egyenlő részekre osztás. Ennél az a feladat, hogy adott számú elemet adott számú egyenlő részre osszunk. A kérdés, hogy egy csoportba hány elem jut. Ezt a problémát is megoldhatjuk mágneses táblánál. Most is először a tíz lufit egy kupacba tesszük. Majd eljátszuk a részekre osztás folyamatát. A végeredmény most is öt kupac, és minden kupacban két lufi.

Ezek után rajzoljunk a táblára három kört és mindegyikbe tegyünk négy-négy lufit. Legyen az a feladat, hogy az ábra alapján írjanak le minél több tanult műveletet. Ezután közösen beszéljük meg, hogy ki milyen megoldást talált, s állapítsuk meg, hogy a $12:4=3$, $12/3 = 4$, $4 \cdot 3 = 12$ műveletek mind helyesen leolvashatóak a rajzról. Ezzel a módszerrel érzékeltetni tudjuk a bennfoglalás, részekre osztás és szorzás kapcsolatát. A $12:4 = \square$ bennfoglalás inverz művelete a $4 \cdot \square = 12$ szorzásnak, a$12/3 = \square$ részekre osztás pedig a $\square \cdot 3 = 12$ szorzásnak. Ezután játsszuk el a 20:4 és 20/4 tevékenységeket. Bár számszerűen ugyanazt az eredményt kapjuk, hiszen $20:4 = 5$ és $20/4 = 5$, a példák végeredménye mégis más, mert első esetben öt gyerek kap négy-négy lufit, második esetben pedig négy gyerek kap öt-öt lufit. Így szemléltethető a különbség az osztás két típusa között.

Az egyenlő részekre osztás lényegének megértése után adhatunk csak olyan feladatot, ahol nem egész az eredmény. Például: Nagymama vett egy 30cm hosszú cukorka rudat, ezt szeretné elosztani négy unokája között. Hány centiméteres darabokra vágja szét a cukrot? Fontos, hogy az ilyen típusú feladatokat olyan példával szemléltessük, ahol tényleg van értelme a törtrésznek. Egy hasonló lufis feladat például értelmét vesztené. Most a cukros feladatnál azonban átléphetünk a törtek világába, hiszen a cukrot nem csak egész centiméternél lehet elvágni. Így az eredmény: $30/4=7{,}5$. Hasonló példákkal beláttatható a számkörbővítés szükségessége, hiszen a mindennapokban is rengetegszer találkozunk tört számmal.

## Hatványozás és gyökvonás

A hatványozással hetedik osztályban kezdenek megismerkedni a diákok. Bár az általános alakját, és azonosságait csak a felsőbb évfolyamokban ismerik meg, konkrét természetes számokból alkotott számpárokon keresztül már ekkor elkezdik tanulmányozni a műveletet. Néhány példa után ők is láthatják, hogy az ismételt szorzás hosszas leírása miatt célszerű bevezetni ezt az új műveletet. Ehhez hasonló eljárást már láttak, hiszen annak idején a szorzást is az ismételt összeadás hosszúsága miatt vezettük be. Fontos, hogy az elején a hatványalak mellett mindig írjuk ki a tényleges szorzásokat is, hogy jól rögzüljön mi a szerepe a hatványalapnak és mi a hatványkitevőnek.

Bizonyos hatványok szemléltetése természetesen adódik. Úgy, mint például a számok második hatványait bemutathatjuk négyzetekkel. Először rajzolunk egy egységnyi oldalhosszú négyzetet. Majd két-, három-… egységnyi oldalhosszú négyzeteket, úgy hogy mindig berajzoljuk a segéd négyzetrácsot is. Az ábrák alá pedig odaírjuk, hogy az egyes alakzatok hány kis egységnégyzetből állnak. Hasonlóan lehet a számok köbeit is szemléltetni kockákkal, amikor is adott egységnyi élű kiskockákból kell kirakni az egy két-, három-… egységnyi élű kockákat. Itt is lejegyezzük, hogy melyik kocka hány kis egységből áll. Mindkét esetben jól összehasonlíthatóak az egyre növekvő mennyiségek. Ám ha nem csak különböző számok ugyanolyan hatványait, hanem azonos számok különböző hatványait is össze akarjuk hasonlítani, akkor más eszközre van szükségünk. Erre alkalmas például az alábbi táblázat.

| Kitevő/Alap | **2** | **3** | **4** | **6** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 3 | 4 | 6 | 10 |
| **2** | 4 | 9 | 16 | 36 | 100 |
| **3** | 8 | 27 | 64 | 216 | 1000 |
| **4** | 16 | 81 | 256 | 1296 | 10000 |
| **5** | 32 | 243 | 1024 | 7776 | 100000 |
| **6** | 64 | 729 | 4096 | 46656 | 1000000 |
| **7** | 128 | 2187 | 16384 | 279936 | 10000000 |
| **8** | 256 | 6561 | 65536 | 1679616 | 100000000 |
| **9** | 512 | 19683 | 262144 | 10077696 | 1000000000 |
| **10** | 1024 | 59049 | 1048576 | 60466176 | 10000000000 |

A táblázatból könnyen felfedeztethető, hogy kettőnek bármelyik két hatványát összeszorozva is kettő hatványt kapunk. Például:

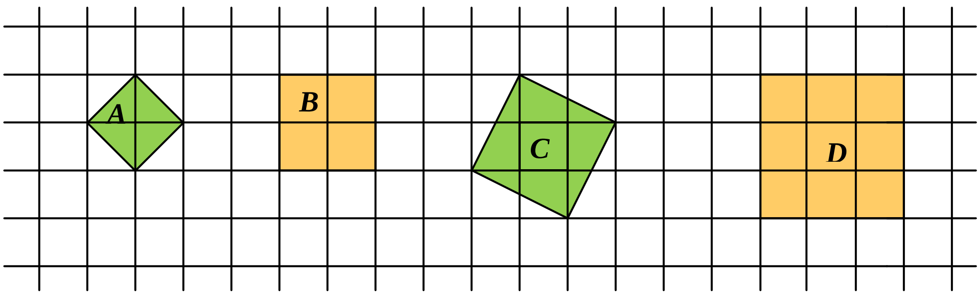
$$32 \cdot 8 = 2^5 \cdot 2^3 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{5\text{ db 2-es}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3\text{ db 2-es}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{8\text{ db 2-es}} = 2^8 = 256$$

Ugyanígy bármely szám hatványainak szorzata az adott szám hatványa lesz.[7] Szintén kiolvasható, hogy a négy hatványai szerepelnek a kettő hatványai között. Ez persze azzal magyarázható, hogy a négyes is kettő hatvány, tehát mivel $4=2\cdot2$, ezért a négy hatványai is mind felírhatóak csupa kettes szorzattal.

Előzőekből is látszik, hogy nem csak mindig színes, érdekes ábrákkal szemléltethetünk, egy táblázat is épp olyan jó lehet az összefüggések felismertetéséhez. Ez a módszer az ikonikus leképezések listáját bővíti.

A hatványozás ismeretének megalapozása után, nyolcadik osztályban tanítják a négyzetgyökvonást. Érdemes ezt az új műveletet egy probléma felvetésével bevezetni, amely során a gyermek is megtapasztalja a művelet szükségességét. Az alábbi példát az Apáczai kiadó nyolcadik osztályosoknak szánt matematika könyvében olvashatjuk.

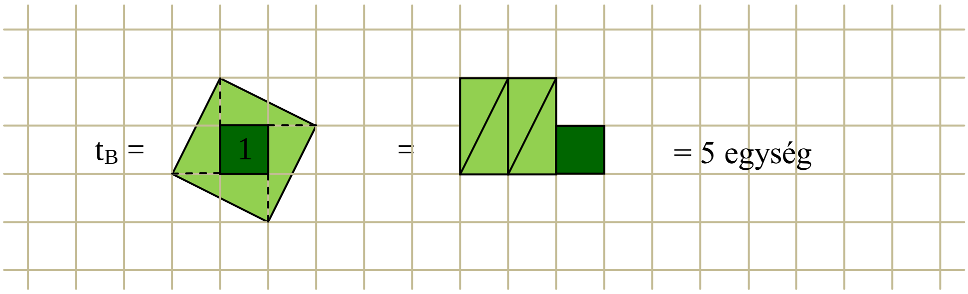
„Példa: Határozd meg a négyzetek területét! A területmérés egysége: $\boxed{1}$. A területekből 1 tizedesjegy pontossággal határozd meg a négyzetek oldalának hosszát!




A narancssárga négyzetek területei egész számok négyzetei, azaz négyzetszámok, ezért könnyű az oldalaikat meghatározni: $t_B = 4$, az oldal hossza 2 egység. $t_D = 9$, az oldal hossza: 3 egység. A zöld négyzetek területe ugyan egész szám, de az oldal hossza nem az. Így méréssel vagy becsléssel tudjuk csak megadni azokat. $t_A = 2$, az oldal hossza körülbelül 1,4 egység, mert $1{,}4^2 = 1{,}96$. A 2 egység területű négyzet oldalának a hosszát négyzetgyök 2-nek nevezzük és így jelöljük: $\sqrt{2}$ .

[7]Apáczai: Matematika 7. osztály,11. oldal alapján

A $c$ négyzet területét ügyes átdarabolással tudjuk meghatározni:




Az oldal hossza körülbelül 2,2 egység, mert $2{,}2^2 = 4{,}884$. Az 5 egység területű négyzet oldalának hosszát négyzetgyök 5-nek nevezzük, és így jelöljük: $\sqrt{5}$."[8]

Egy ilyen szemléltetés után egyszerűbb a diákoknak megérteni a négyzetgyök bevezetésének hasznosságát, és a definícióját. Hiszen a szemléltetés alapján jól látható, hogy a négyzetgyökvonás a négyzetre emelés inverz művelete, így definíció szerint $\sqrt{a}$ azt a nem negatív számot jelenti, amelynek a négyzete $a$. Később, a magasabb fokú gyökvonás tanításakor, már nehezebb a dolgunk a szemléltetés terén. Igaz, a köbgyököt az előzőek mintájára, kockák segítségével még tudjuk modellezni, de az N-edik gyökvonást már nehéz lenne effajta hétköznapi példán keresztül bemutatni. Hiszen nem beszélhetünk N dimenziós ″test″ élének hosszáról a középiskolában. Ennek ellenére nem szabadna, hogy túl nagy gondot okozzon a diákoknak az N-edik gyökvonás, hiszen itt már nem is történik új művelet-fogalom kiépítés. Inkább csak az eddig tanultak általánosítása, kibővítése. Tehát az N-edik gyökvonás az N-edik hatványra emelés inverz művelete. A két művelet inverz viszonyának az alábbi módon való szemléltetése, pedig segíti az N-edik gyökvonás beépülését az ismert műveleteink sorába. Példa:

$\sqrt[5]{32} = \square$, $\square = ?$

$\square^5 = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = 32$, $\square = ?$

Most mindkét sorban ugyanazt jelenti a kis téglalap, csak egyik esetben ötödik gyököt vonunk, a másik esetben pedig hatványozás útján találjuk meg a keresett számot.

[8] Apáczai: Matematika 8. osztály, I. kötet, 70. oldal

## Exponenciális függvény és a logaritmálás

Ahogy már korábban írtam, a hatványozással hetedik osztályban találkoznak először a diákok. Ekkor még csak nem negatív egész kitevőről tanulnak. Később azonban, ahogy azt a következő fejezetben részletesen leírom, szépen fokozatosan kiterjesztjük a kitevőt az egész számok, racionális számok és az irracionális számok körére is. Ezután vezethetjük be az exponenciális függvényt, amely $a^x$ értékeit adja vissza, ahol $a$ egy rögzített pozitív hatványalap, $x$ pedig a valós számok halmazán értelmezett kitevő A függvény egy–egy adott értékének kiszámításához nem kell új, ismeretlen műveletet elvégezni, hiszen minden egyes esetben az adott alapot az $x$ helyére behelyettesített értékre emeljük. A kitevő értelmezésének kibővítése után már folytonos görbét rajzolhatunk a függvény ábrázolásakor. Így már nem csak táblázatból tudjuk kiolvasni az adott alap hatványainak növekedési ütemét, ezt már a grafikon is jól szemlélteti. Bár az exponenciális és a hatvány függvény esetében is egy-egy érték egy-egy hatványozással számítható ki, a két függvény mégsem ugyanazt jelenti, hiszen míg a hatvány függvény során a kitevő rögzített és az alap helyére helyettesítünk be, addig az exponenciális függvénynél az alap fix és a kitevő vehet fel különböző értékeket. Így, ha visszagondolunk a hatványozásról írtaknál bemutatott táblázatomra, akkor a hatvány függvény a táblázat egy-egy sorát szemlélteti, míg az exponenciális függvény grafikonjáról az oszlopok egyes értékei olvashatók le.

Bizonyos esetekben azonban nem arra vagyunk kíváncsiak, hogy az adott alapot az adott kitevőre emelve mennyit kapunk, hanem azt keressük, hogy az adott alapot mennyire emeljük, hogy a kívánt számot kapjuk.

- Példa: Egy sejt sejtosztódással szaporodik. 10 óránként kettéosztódik, azaz egy sejt két ugyanolyan sejtre bomlik szét. Ha csak egy sejtünk volt a vizsgálat kezdetén, akkor hány óra múlva lesz 256 ugyanolyan sejtünk?

Azaz arra vagyunk kíváncsiak, hogy $1\cdot 2\cdot 2\ldots\cdot 2$ mikor éri el a 256-ot? Itt már nem szimpla hatványozásról van szó, hiszen nem ismerjük a kitevőt, nem is gyökvonásról, hiszen nem tudjuk, hányadik gyökét kellene venni a 256-nak. Itt egy új leképezésre, a logaritmálásra van szükségünk, mégpedig a $\log_2 256$-ra, amely megadja azt a kitevőt, amelyre a 2-t emelve 256-ot kapunk. A logaritmálás szoros rokonságban áll a hatványozással, és a gyökvonással, hiszen mindegyiknél az alap a kitevő, és a végeredmény közül kettő adat van meg, csak éppen mindig másik kettő.

Hatványozás: $2^8 = \square$, $\square = ?$

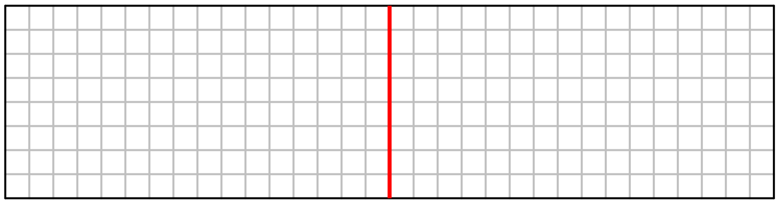
Gyökvonás: $\sqrt[8]{256} = \square$, $\square = ?$

Logaritmus: $\log_2 256 = \square$, $\square = ?$

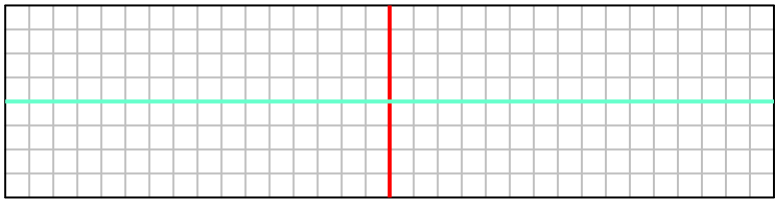
A példához hasonló feladatok mutatják, hogy miért is van szükségünk erre az új függvényre, a fenti összefoglalás pedig segíti megértetni a tanulókkal az új leképezés lényegét, és beépítését az eddig ismert műveletek körébe. A logaritmus függvény nem nevezhető műveletnek, hiszen a legbővebb számhalmaz, amelyre kiterjesztjük, a pozitív valós számok halmaza, erről viszont a teljes valós számok halmazára képez. Tehát nem teljesül a fejezet elején leírt pontos definícióban szereplő megkötés. Ennek ellenére fontosnak tartottam a hatványozás és gyökvonás mellett megemlíteni, hiszen, mint ahogy fent is mutatom, nagyon szoros kapcsolatban állnak.

A logaritmus szemléltetése nem egyszerű. Nehéz, olyan kézenfekvő eszközt találni, mellyel általánosan lehetne szemléltetni a logaritmálást. Egy-egy konkrét feladatnál azonban nem lehetetlen. A fenti példánkat az alábbi módon tudjuk modellezni a diákok számára: Veszünk egy 256 területű, egész él hosszúságú téglalapot a négyzetrácsos lapon. A téglalap területét egy színes vonal segítségével kettéosztjuk a négyzetrács mentén. Majd a keletkezett két területrészt ismét kettéosztjuk egy másik színnel. Ezután a négy egyforma területrész mindegyikét osztjuk ketté egy harmadik színnel. Ezt a műveletsort addig folytatjuk, míg minden területrész egy kis egység négyzet nem lesz. A végén összeszámoljuk, hogy hány különböző színt kellett használnunk. Ez elárulja, hogy 2-nek hányadik hatványa a 256. (Lásd a következő ábrasort!)

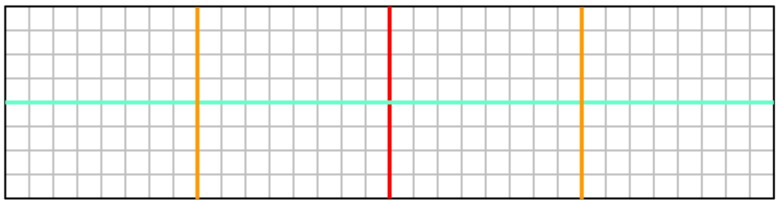
1. lépés



2. lépés



3. lépés

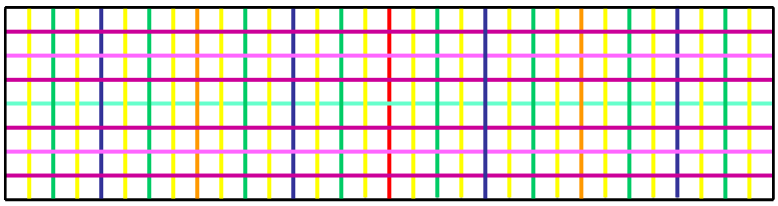


.

.

.

8. lépés



Három hatvány esetén harmadolunk, négy esetén negyedelünk, stb. Persze ezt csak nem túl nagy számok esetén lehet kivitelezhető keretek között végrehajtani.

Bár bizonyos esetekben találunk a fentihez hasonló szemléltetést, a logaritmus függvényt leggyakrabban mégis grafikonjával ábrázoljuk. A logaritmus függvényt $f(x)=log_a x$-szel jelöljük, ahol $x$ a pozitív valós számok halmazán értelmezett. Az exponenciális függvény a logaritmus függvény inverze, hiszen mindkettő kölcsönösen egyértelmű, és bármely pozitív valós $x$-re $a^{(\log_a x)} = x$. A két függvénygrafikont egy koordináta rendszerben ábrázolva jól szemléltethető az inverz kapcsolat.

## Trigonometrikus műveletek

Tízedik osztályban a diákok megismerkednek a trigonometriával. Igaz, ez inkább a geometria témaköre kapcsán merül fel, ám mivel minden szög mérhető valós számmal is így tekinthetjük egy szög szinuszának, koszinuszának, tangensének és kotangensének vételét egyváltozós, valós számok részhalmazán értelmezett algebrai műveleteknek is. A hegyesszögek szögfüggvényeit a tankönyvek általában életszerű feladatokkal, például toronnyal, gyárkéménnyel, felvonóval kapcsolatos szituációk által vezetik be, ahol a magasságokat és távolságokat egy adott hegyesszögű derékszögű háromszögben kell kiszámítani. Ekkor persze elkerülhetetlen az effajta feladatok derékszögű háromszögekkel való szemléltetése, hiszen így tudja a gyermek igazán elképzelni, hogy melyik adatok vannak meg, hol helyezkedik el a megadott szög. Ezen bevezető feladatokkal az a célunk, hogy a tanulóval felfedeztessük, adott szög esetén a megfelelő ″távolságok″ arányai nem változnak. Majd több ilyen bevezető példa után összefoglalhatjuk a lényeget: „Mivel két derékszögű háromszög pontosan akkor hasonló, ha egy-egy hegyesszögük egyenlő, ezért egy derékszögű háromszög oldalainak arányát egyértelműen meghatározza valamely hegyesszög nagysága. Célszerű az ezen szögtől függő arányokra külön elnevezéseket bevezetni. Így kapjuk a hegyesszögek szögfüggvényeit."[9] A szinusz, koszinusz, tangens, kotangens definiálása után konkrét értékekre is megnézhetjük a szögfüggvényeket. Ilyenkor előkerülnek az értékeket összefoglaló táblázatok. Ezek a táblázatok is alkalmasak több fontos tulajdonság szemléltetésére, így szerepük lehet a fogalomkiépítésben is. Láthatjuk például, hogy milyen ütemben változnak az egyes függvények értékei, s leellenőrizhetjük a hegyesszögek szögfüggvényei közötti kapcsolatokat is, mint például azt, hogy $\sin\alpha = cos\,(90°\text{-}\alpha)$, vagy, hogy $tg\ \alpha = \dfrac{1}{ctg\ \alpha}$.

Miután értelmeztük, elmélyítettük, és gyakoroltuk a szögfüggvények hegyesszögekre vonatkozó definícióit és tulajdonságait, rátérhetünk a szögfüggvények általános értelmezésére. Amikor is az α szög már nem csak 0° és 90° között mozoghat, hanem felvehet tetszőleges forgásszöget.

[9] Sokszínű Matematika - Matematika tankönyv 10, 156. oldal

# A számkörök bővítése, a műveletek értelmezési tartományának kiterjesztése

Az előző fejezetben, a műveleteket az alapértelmezett halmazaikon vezettem be. Ez azért hasznos, mert így a tanuló jobban meg tudja érteni a művelet célját, működését, és egyébként sem lenne ajánlott már első osztályban tanítani például a valós számokat, hiszen a számfogalom fokozatos kiépítése, az értelemmel való együtt haladás a cél. Ha az alapok letisztázódása utána bővíteni szeretnénk a műveletek értelmezési tartományát, akkor követnünk kell a permanencia-elvet, mely szerint a cél, hogy a műveletek általánosításakor az összefüggések, azonosságok, érvényben maradjanak.

A műveletek tanulása, tanítása során a hangsúlyt a művelet eredményére, a konkrét hozzárendelésre helyezzük. Később azonban már a műveleti tulajdonságok, az általános műveletfogalom lesz a vizsgálódás tárgya. Az effajta absztrakt vizsgálat a tanítás során ugyan rejtve, de nagyon sok módon jelen van. Ebben a fejezetben mutatok néhány olyan szemléltetési módszert, mely látszólag primitívnek tűnhet, azonban szoros analógiában van az absztrakt algebrával.

A következőkben beszélni fogok algebrai struktúrákról, ezért először definiálom is ezt a fogalmat:

> „Algebrai struktúrának nevezzük az olyan legalább kéttagú $(S;\ f,\ g,\ldots)$ rendszert, amelynek első eleme egy $S(\neq\emptyset)$ halmaz, a többi pedig $S$-en értelmezett valamilyen ($n$ változós($n\geq 0$)) algebrai művelet.”[10]

A dolgozatomban megemlített algebrai struktúrák definíciói pedig a következők:

- Félcsoport: $(S;\cdot)$ struktúrát félcsoportnak nevezzük, ha $S$ nemüres halmaz, $\cdot$ pedig az S halmazon értelmezett asszociatív művelet.
- Csoport: $(S;\cdot)$ struktúrát csoportnak nevezzük, ha $S$ nemüres halmaz, $\cdot$ az $S$ halmazon értelmezett asszociatív művelet, létezik neutrális elem, és minden elemnek van inverze.

[10] Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet, 102. oldal

- Gyűrű: $(S; +, \cdot)$ struktúrát gyűrűnek nevezzük, ha $S$ nemüres halmaz (, + műveletet összeadásnak, · műveletet pedig szorzásnak nevezzük).
  Az összeadás kommutatív, asszociatív, létezik neutrális elem (nullelem), minden elemnek létezik e műveletre nézve az inverze (ellentettje).
  A szorzás asszociatív, és az összeadásra nézve mindkét oldalról disztributív.

- Test: $(S; +, \cdot)$ struktúrát testnek nevezzük, ha $S$ nemüres, legalább kételemű halmaz (, + műveletet összeadásnak, · műveletet pedig szorzásnak nevezzük).
  Az összeadás kommutatív, asszociatív, létezik neutrális elem (nullelem), minden elemnek létezik e műveletre nézve az inverze (ellentettje).
  A szorzás kommutatív, asszociatív, létezik neutrális elem (egységelem), a nullelemen kívüli összes elemnek létezik inverze (multiplikatív inverze), és az összeadásra nézve disztributív.

## Természetes számok

Alsóban a diákok a természetes számok halmazán dolgoznak, fokozatosan bővülő tízes, százas, ezres, tízezres, milliós számkörben számolnak. Ha csak az összeadás műveletét nézzük, akkor a természetes számok halmazánál meg is állhatnánk. Hiszen bármely két természetes szám összege is halmazbeli. Mivel az összeadás asszociatív, így a természetes számok az összeadás műveletére nézve félcsoportot alkotnak. A csoport léthez kellene még a halmazba egy neutrális elem, és a művelet invertálható tulajdonsága. Épp ezek az igények merülnek fel a természetes számok körében a kivonás kapcsán.

## Egész számok

A kivonást, e művelet bevezetésekor csak olyan számpárokon végezzük el, ahol a kisebbítendő nagyobb, mint a kivonandó. Egy idő után azonban már beszélhetünk a nulla és a negatív számok létezéséről. Bevezetésük talán nem is olyan nehéz, hiszen számtalan példát találunk a mindennapokban, ahol használjuk a negatív számokat, és ezek kapcsán a céljukat is szemléltetni tudjuk. Például, a negatív magasság azt jelenti, hogy a tengerszint alatti dologról van szó, és azért beszélünk mínusz 10°C-ról, mert ezzel érzékeltetjük, hogy fagypontnál is alacsonyabb, kisebb a hőmérséklet.

A negatív számok bevezetésénél a kivonás elvégezhetőségét algebrailag is megfogalmazhatjuk: azt szeretnénk ha a $b + x = a$ típusú egyenleteknek mindig lenne megoldása adott $a, b$ természetes számok esetén. A cél eléréséhez szükséges új típusú, $(p - q)$ alakú számokat bevezetni, ahol p és q is természetes szám, és az egyértelműség kedvéért megállapodni, hogy $(p - q)$ akkor egyenlő $(r - s)$-sel, ha $p + s = q + r$.[11] Mivel $p, q, r, s$ természetes számok, így az utóbbi egyenlőséget könnyen ellenőrizhetjük a megszokott módon.

A gyerekek már harmadik osztályban ismerkedni kezdenek az egész számokkal. Ekkor a fenti képlet szó szerinti tanítása még korai lenne. A lényegét azonban az ő nyelvükön is könnyen elmagyarázhatjuk.

- <u>Példa:</u> Oldd meg a következő nyitott mondatot: 7 + □ = 13! Írj még olyan nyitott mondatokat, amelyeknek ugyanez a megoldása.

A tanulók ilyenkor úgy számolják ki a □ értékét, hogy 13-ból elvesznek 7-t. Majd további olyan számpárokat keresnek, ahol 6 a különbség. Például (5,11), (14,20), (1,7). Ekkor elmondhatjuk, hogy minden számnak sok neve van, hiszen a 6-ot hívhatjuk úgy is, hogy (13-7), (11-5), (20-14), (7-1).

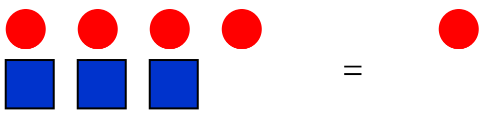
Ezek után írjuk fel például a 9 alakjait:
9 = (10-1) = (11-2) = (12-3) = (13-4) = (14-5) = (15-6) = (16-7).
Észrevehetik, hogy minden szomszédos számpárnál a kisebbítendő és a kivonandó is 1-gyel változik. Ha a sorban 3-at ugrunk előre, akkor a számpár mindkét tagja 3-mal nő.

[11] D.E.Mansfield, D.Thompson: Matematika új felfogásban, Második kötet, 24. oldal alapján

Ebből már maguk is rájöhetnek, és kipróbálhatják, hogy ha a kivonandóhoz és a kisebbítendőhöz ugyanazt a számot adjuk (bővítünk), vagy ugyanazt vonjuk le (egyszerűsítünk), akkor is az eredeti szám egy másik alakját kapjuk. Azaz két *(a - b)* alakú szám akkor egyenlő, ha egyszerűsítéssel vagy bővítéssel az egyikből a másikba eljuthatunk.

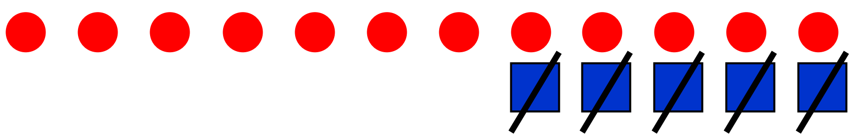
A fentiek folytatásaként elmondható, hogy bármely $x$ természetes szám felírható a $b + x = a$ egyenlőségnek eleget tevő $a$-k és $b$-k segítségével $(a - b)$ alakban. Ha azonban $a < b$, akkor minden $(a,b)$ számpárra van egy olyan $x$ pozitív egész szám, amelyet elvéve $b$-ből megkapjuk $a$-t. Észrevehetjük, hogy rögzített x esetén az $a = b - x$ egyenletet kielégítő $a$, $b$ párokra az $(a - b)$ alakú számok most is ugyanazt a számot jelentik. Ezt nevezzük el $-x$-nek. Ez már nem egy pozitív egész szám. Ezeket negatív egészeknek, $a = b$ esetén pedig nullának nevezzük.

Az adósság-vagyon modell az előbbi matematikai konstrukcióval szoros analógiában áll, de a gyerek számára is jól érthetően, játékosan szemlélteti a negatív számokat. A modellel kapcsolatos feladatokat többek között az Apáczai kiadó ötödikeseknek szánt tankönyvében is találunk. Itt 1 Ft készpénzt, azaz +1-et szimbolizáló piros korongokkal és 1 forintnyi adósságnak, azaz -1-nek megfelelő kék cédulákkal dolgozunk. Tisztázni kell, hogy egy korong és egy cédula kiüti egymást, azaz 1+(-1) =0. Ez lesz a csoportban a neutrális elemünk. Az eszközök segítségével a 4 + (-3)-at a következő módon tudjuk szemléltetni:




Ekkor látszik az is, hogy 4 + (-3) = 4 – 3 = 1.

Gondoljuk csak meg, hogy a 7 – (-5) hogyan ábrázolható! Ha felveszünk 7 piros korongot, akkor abból nem tudunk elvenni 5 darab adóság cédulát. Ezért úgy kell eljárnunk, hogy a 7 piros korong mellé teszünk még 5 cédulát és 5 korongot, hiszen így nem növeljük az értéket, de már el tudunk venni 5 adóság cédulát. Így marad 12 piros korongunk, ahogy azt a következő ábra is mutatja:



Ezen módszer segít szemléltetni az egész számok körében végzett összeadás kommutatív és asszociatív tulajdonságát is valamint segíti a negatív számok beépítését az ismert számhalmazba és a használt műveletek közé.

Most már kényelemesen mozoghatunk az egész számok körében mind az összeadás, mind a kivonás tekintetében. Ezen ismeretek mellett már elmondhatjuk, hogy az egész számok csoportot alkotnak az összeadásra nézve, hiszen az összeadás asszociatív, van neutrális elem, a nulla, és minden egész számnak van egész inverze, melyekre igaz, hogy őket összeadva a nullát kapjuk. Ha figyelembe vesszük, hogy az összeadás most kommutatív, akkor azt is elmondhatjuk, hogy ez egy Abel-csoportot alkot.

Lépjünk eggyel tovább a műveletek listájában. A szorzás asszociatív tulajdonságú az egész számok körében, és az is igaz, hogy bármely két egész szám szorzata is egész, azaz a halmaz zárt e műveletre nézve. Ezen kívül mindkét oldali disztributivitás is teljesül, hiszen $a\ (b + c) = ab + ac$ és $(b + c)\ a = ba + ca$ bármely $a,b,c$ egész számra. Így, minden axióma megvizsgálása és teljesülése mellett kimondhatjuk, hogy az egész számok az összeadásra és a szorzásra nézve gyűrűt alkotnak.

## Racionális számok

Ahhoz, hogy még a gyűrűnél is komplexebb algebrai struktúrát, testet kapjunk, szükség lenne az egységelem meglétére, és arra, hogy minden nullelemen kívüli elemnek legyen multiplikatív inverze a halmazban. Az előzőekben a kivonás volt az a művelet, amely segítségével eljutottunk a számok ellentettjéhez, most ennek analógiájára az osztás műveletével, kaphatjuk meg a számok multiplikatív inverzét. Azt szeretnénk, ha $bx = a$ egyenletnek lenne megoldása minden $a,\ b \in \mathbf{Z}$ esetén. Ha $a = 1$, akkor a szorzás asszociatív tulajdonsága miatt $x$ éppen a $b$ inverze lesz. Ahhoz, hogy az egyenletnek minden esetben legyen megoldása, be kell vezetnünk új, ($\frac{p}{q}$) alakú számokat, ahol $p$ és $q$ tetszőleges egész számok, azzal az egy kikötéssel, hogy $q$ nem veheti fel a 0 értéket, hiszen a nullával való osztást nem értelmezzük. Most is meg kell említeni, hogy mely törtalakú számokat tekintjük egyenlőknek. $(\frac{p}{q}) = (\frac{r}{s})$ abban az esetben, ha $ps = qr$, ahol $p,q,r,s \in \mathbf{Z}$, de $q$ és $s$ nem nulla.[12]

A tört számokat a negatív számokhoz hasonlóan vezethetjük be az iskolában, csak most a számpárok tagjainak nem a különbségét, hanem a hányadosát kell vennünk.

- <u>Példa:</u> Oldd meg a következő nyitott mondatot: □*5 = 20! Írj még olyan nyitott mondatokat, amelyeknek ugyanez a megoldása.

A tanuló ilyenkor úgy gondolkodik, hogy mit vegyünk ötször ahhoz, hogy húszat kapjunk. Azt, amit úgy kapunk, hogy a húszat öt egyenlő részre osztjuk. Azaz $\square = \frac{20}{5}$. Ezek után olyan számpárokat keres, ahol a hányados értéke szintén 4. Így találja például a (6,24), (10,40) párokat. Elmondható, hogy a 4 egy másik alakja a $\frac{24}{6}$ vagy a $\frac{40}{10}$. A szemléltetésben most is segít, ha egy konkrét számnak például a 12-nek felírjuk néhány hányados alakját: $12 = \frac{12}{1} = \frac{24}{2} = \frac{36}{3} = \frac{48}{4} = \frac{60}{5}$.

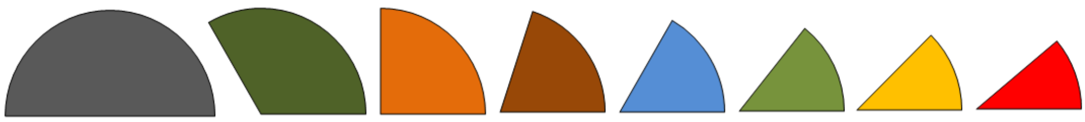
A szemléltetésből jól látszik, hogy ha az osztandót és az osztót ugyanazzal a számmal szorozzuk (bővítünk) vagy ugyanazzal a számmal osztjuk őket (egyszerűsítünk), akkor az eredeti szám egy-egy másik alakját, nevét kapjuk meg. Ezek alapján észrevehető az, hogy most is akkor lesz egyenlő két $(\frac{a}{b})$ alakú szám, ha az egyiket a másikból egyszerűsítés, vagy bővítés útján megkapjuk.

Ezek alapján bármely egész $x$ szám felírható a $bx = a$ egyenlőségnek eleget tevő $a$ és $b$ $(\neq 0)$ egész számok segítségével $(\frac{a}{b})$ alakban. Az osztás tanításakor eleinte csak olyan számpárokon végezzük az osztást, ahol $a$ többszöröse a $b$-nek, és így egész eredményhez jutunk. Hamar rá kell jönni azonban, hogy rengeteg olyan szituáció van, amikor az osztandónk nem többszöröse az osztónknak. Ilyen esetekben az $(\frac{a}{b})$ alakú

[12] D.E.Mansfield, D.Thompson: Matematika új felfogásban, Második kötet, 19-20 oldal alapján

számunk nem egész számot takar. Az összes ($\frac{a}{b}$) alakban felírható számunk tehát az egész számoknál egy bővebb halmazt jelent, és ezt a racionális számok halmazának nevezzük. Ebben az új számhalmazban továbbra is fenn állnak a következő, gyűrűléthez szükséges tulajdonságok: az összeadás asszociatív, kommutatív, létezik a nullelem és minden elem ellentettje halmazbeli, valamint a szorzás asszociatív tulajdonságú. Ezek mellett a halmazban most már megtalálható minden nem nulla elem multiplikatív inverze, és a szorzás egységeleme, az 1 is halmazbeli, amelyre igaz, hogy minden racionális *a* számra 1*a = a*1 = a. Tehát elmondhatjuk, hogy a racionális számok testet alkotnak.

A racionális számokkal való ismerkedést segíti a ″torta-modell″(Apáczai kiadó ötödikeseknek szánt tankönyvéhez kiegészítő eszköz). Itt teljes körrel és különböző nagyságú körcikkekkel szemléltetjük a törteket, a név is egy egész torta felszeletelésére utal. (Lásd az alábbi ábrát!)

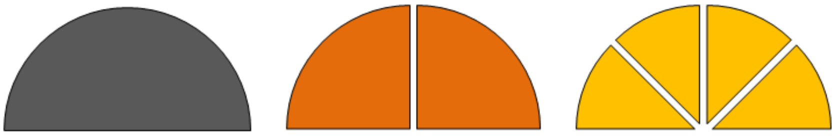


$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$

A kivágott szeletekre ráírhatjuk az értékeket, így az egyes körcikkek összeillesztésekor le tudjuk olvasni a mennyiségek törtértékét, és algebrailag is le tudjuk jegyezni a műveletet.

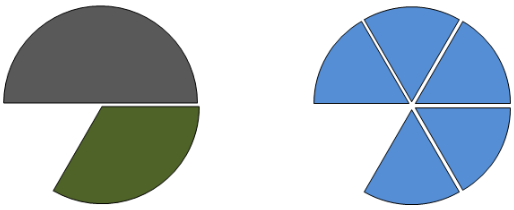
A készlet előnye többek között, hogy segítségével a tanulók könnyen összehasonlíthatják az egységtörteket. Most az $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} * a$ szemlélet kerül előtérbe, és így a tört alak vegyes törtté való átváltása is gyakorolható, hiszen ha vesz *a* db $\frac{1}{b}$ értékű törtet, akkor meg tudja vizsgálni, hogy hány egész kört tud belőlük kitenni, és mennyi $\frac{1}{b}$ értékű tört maradt hátra.

Az eszközzel szemléltethető a bővítés és egyszerűsítés kérdése is. (Példa az alábbi ábrán.)



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

A különböző nevezőjű törtek összeadása is megoldható, és így bevezethetjük a közös nevezőre hozást. Hiszen ha például egymás mellé illesztünk egy $\frac{1}{2}$ és egy $\frac{1}{3}$ értékű körcikket, akkor a kapott terület megfelel 5 darab $\frac{1}{6}$ értékű szeletnek. (Lásd a következő ábrán!)



A törtek tanításakor egy másik nagyon jó szemléltető eszköz az előző fejezetben már említett színes rúdkészlet. Ennek előnye most is, hogy mi választhatjuk meg az egységet. Így ha például a 12-es rudat tekintjük az egy egésznek, akkor könnyen tudjuk szemléltetni az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ részét. Valamint ez az eszköz is alkalmas a fent említett törtekkel végzett műveletek gyakorlására.

# Valós számok

## Hatványozás természetes és egész kitevőre

A négy alapművelet segítségével a természetes számoktól eljutottunk a racionális számokig. Ha azonban tovább haladunk a műveletek listájában, akkor hamar rádöbbenünk, hogy még mindig vannak olyan számok, amelyekre szükségünk lehet, ám a racionális számok halmazában nem szerepel. A fenti felsorolásomban soron következő művelet a hatványozás. $a^n$ eredeti értelemben, azaz természetes alap és kitevő mellett egy n tényezős szorzatot jelent, ahol a hatvány is természetes szám, mivel a halmaz zárt a szorzásra nézve. Ha megengedjük, hogy az alap egész szám legyen, akkor természetes kitevő mellett egész eredményt kapunk, hiszen itt még mindig ismételt szorzásról van szó. Ekkor könnyen bizonyíthatóak a következő azonosságok:

$$\left.\begin{array}{ll} 1, & a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ 2, & \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ m > n,\ a \neq 0 \\ 3, & (a^n)^m = a^{m \cdot n} \end{array}\right\} \text{ ahol } a \text{ egész szám, } m, n \text{ természetes számok}$$

De mi a helyzet, ha a kitevő is egész? 0 kitevő esetén a 2, azonosság érvényben maradása miatt $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$ esetről beszélhetünk, ahol a baloldal egyenlő 1-gyel, így $a^0$-t is 1-nek definiáljuk, persze a tört miatt továbbra is fel kell tennünk, hogy $a \neq 0$. Negatív kitevő esetén pedig: $\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$, és mivel $\frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$, így $a^{-n}$-t $\frac{1}{a^n}$-nek definiáljuk. Így 0 kitevő mellett egész eredményt kapunk, negatív egész kitevő mellett azonban már nem csak szorzást, hanem osztást is kell végeznünk, így az eredmény kivezet az egészek köréből a racionális számok halmazába.

## Hatványozás racionális kitevőre

Nézzük, mi történik tört kitevő esetén. Természetesen a hatvány kiterjesztését most is a permanencia-elvnek megfelelően tehetjük csak, azaz úgy, hogy az eddigi egész kitevőre érvényes azonosságok továbbra is fenn álljanak. Így pozitív alap és racionális kitevő mellett így gondolkodhatunk: a 3, azonosság érvényben maradása érdekében $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$ $=a^m$. Definíció szerint pedig $\sqrt[n]{a^m}$ az a szám, amelynek az *n*. hatványa egyenlő $a^m$-nel. Ezért racionális kitevő esetén a hatványt úgy definiáljuk, hogy $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ , ahol $a$ ( > 0), $m$ egész számok, $n$ pedig 1-nél nagyobb természetes szám. Erről a kiterjesztésről be lehet látni, hogy valóban megőrzi a korábbi műveletei tulajdonságokat.

Az alap pozitivitását azért kell kikötnünk, hogy minden racionális kitevő esetén érvényben maradjon a definíció, azaz ne állhasson fenn például a $(-4)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{(-4)^3} = \sqrt[2]{-64}$ vagy a $0^{\frac{-7}{5}} = \sqrt[5]{0^{-7}} = \sqrt[5]{\frac{1}{0^7}} = \sqrt[5]{\frac{1}{0}}$ eset, amelyeket eddig sem értelmeztünk. Most nézzük, hogy megengedett racionális alap és racionális kitevő mellett milyen értékeket kapunk. Vannak olyan esetek, amelyeknél az eredmény racionális, például $4^{\frac{3}{2}}$, $27^{\frac{-1}{3}}$. De ott van például a $2^{\frac{1}{2}}$, ez ugye a definíció szerint egyenlő $\sqrt{2}$ -vel, amely nem racionális szám, hiszen nem írható fel két egész szám hányadosaként. Valószínűleg a tanulóknak ez nem lesz olyan egyértelmű, és nem látják rögtön, hogy egy ″új típusú″ számról van most szó. Ezt azonban könnyen bebizonyíthatjuk a számukra indirekt módon. „Tegyük fel, hogy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol $p,q \in \mathbf{Z}^+$ és relatív prímek: (p;q) = 1.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

$$2q^2 = p^2.$$

$$\Downarrow$$

$$2|p^2 \Longrightarrow 2|p \Longrightarrow 4|p^2,$$

ha $4|p^2$ $\quad 2|q^2$ $\quad 2|q$.

Azt kaptuk, hogy p és q is páros. Ez ellentmond annak, hogy relatív prímek.”[13] Az indirekt bizonyítás végén ellentmondásra jutottunk, azaz sikerült belátnunk, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

Az irracionális számok ″létezését″ más módon, szemléletesebben is bizonyíthatjuk. Két szakaszt összemérhetőnek nevezünk, ha létezik egy olyan egység, amely mindkét szakaszon egész számszor felmérhető. Megmutatható, hogy két racionális hosszúságú szakasz mindig összemérhető, az egység megkeresését pedig az euklideszi algoritmus mintájára végezhetjük. Nézzünk is erre egy példát:

Keressük az $\frac{5}{24}$ és a $\frac{9}{16}$ racionális számok esetén azt az egységet, amely mindkét törtben egésszer van meg. Kihasználjuk, hogy ha a törteknek osztója ez az egység, akkor a különbségüknek is osztója lesz. Hozzuk a törteket közös nevezőre, $\frac{5}{24}=\frac{10}{48}$, $\frac{9}{16}=\frac{27}{48}$, majd kezdjük el az algoritmust:

$$\frac{27}{48}=2\cdot\frac{10}{48}+\frac{7}{48}$$

$$\frac{10}{48}=\frac{7}{48}+\frac{3}{48}$$

$$\frac{7}{48}=2\cdot\frac{3}{48}+\frac{1}{48}$$

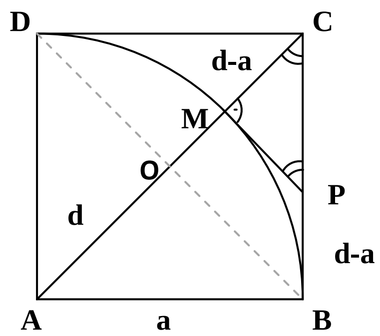
$$\frac{3}{48}=3\cdot\frac{1}{48}+0$$

Így a keresett egység az $\frac{1}{48}$. Észrevehetjük, hogy az az egységtört, amelynek nevezője a törtek nevezőinek legkisebb közös többszöröse, mindig megfelelő egység lesz. Így valóban bármely két racionális szám összemérhető.

[13] Sokszínű Matematika - Matematika tankönyv 10, 36. oldal

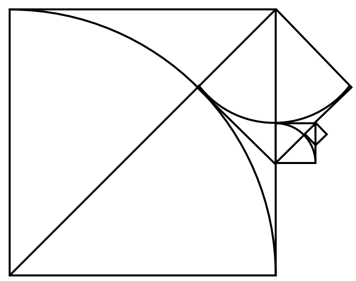
Szakaszok összemérhetőségének vizsgálatakor hasonlóan járunk el. A hosszabbik szakaszból visszamérjük a rövidebb szakaszt, ahányszor csak tudjuk. Majd megvizsgáljuk, hogy az így keletkezett különbség (*l*) egésszer mérhető-e fel az eredeti szakaszokra, ha igen akkor a rövidebbik szakaszból visszamérve *l* egész számszorosát, nullát kapunk. Ha nem akkor folytatjuk az egység keresését úgy, hogy most a hosszabbik szakasznak az eredeti rövidebb szakaszt vesszük, rövidebbnek pedig az *l* hosszúságú szakaszt. A fentiek alapján racionális szám hosszúságú szakaszok esetén előbb-utóbb megtaláljuk ez egységet.

Most pedig nézzük, összemérhető-e egy négyzet oldala és átlója. A fenti módon vizsgáljuk e szakaszok viszonyát.




A négyzet oldala rövidebb az átlónál, ez látszik a fenti **ABC** derékszögű háromszögben is, hiszen az átfogó mindig hosszabb, mint a befogók. Ezért mérjük rá a **d** átfogóra az **a** oldalt. Csak egyszer tudjuk felmérni az **a**-t, hiszen az **AOB** derékszögű háromszögben jól látszik, hogy **d** fele kisebb az **a**-nál, így **d** kisebb **2a**-nál. Ezt megtehetjük úgy, hogy **A** középpontból **a** sugarú kört szerkesztünk. Ekkor az átfogó és a körív metszéspontja lesz az az **M** pont, amely a négyzet átlóját **a** és **d-a** részekre osztja. Húzzunk az **A** középpontú, **a** sugarú körhöz érintőt az **M** pontba, az érintő és a **BC** oldal metszéspontja legyen **P**. Ekkor **MP** = **PB**, egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt. Mivel a négyzet átlója szögfelező, így a **C**-nél lévő $\measuredangle$ szög 45°-os. A **BMC** szög pedig 90°-os, hiszen a körhöz húzott sugár merőleges az érintőre. Így a **P**-nél lévő $\measuredangle$ szög is 45°-os, azaz **PMC** egyenlőszárú háromszög, tehát **MC** = **MP** = **PB**.

A szakaszok összemérhetőségének vizsgálatakor mindig a nagyobból vontuk le a kisebbet, majd a kisebből vontuk le a különbséget, és így tovább, míg nullához nem jutottunk. Most ezek alapján a **d**-ből vontuk le az **a**-t, majd az **a**-ból voltuk le a **(d-a)**-t. Ez utóbbi különbség a **PC** szakasz. Most a (**d-a**) és az (**a-(d-a**)) szakaszok összemérhetőségének vizsgálata következik. Észrevehetjük, hogy **CMP** háromszög egy (**d-a**) oldalú négyzet fele, ahol az átló és az oldal, azaz az (**a-(d-a**)) és a (**d-a**) hosszúságú szakaszok viszonyát az **ABCD** négyzetben végzett vizsgálat mintájára folytathatjuk. Így folyamatosan új négyzetek keletkeznek (lásd az alsó ábrát), amelyekben ugyan az összehasonlított szakaszok távolsága egyre kisebb, de sosem egyenlők, azaz sosem jutunk el a nullához. Tehát nem lesz olyan egység mely az eredeti szakaszainkra egész számszor rámérhető lenne. Ha pedig az oldalt racionális számnak választjuk, és az átló is racionális lenne, akkor összemérhető lenne a két szakasz. De a fentiek alapján ez sosem fog bekövetkezni. Tehát racionális oldalú négyzet átlója nem racionális, azaz nem írható fel két egész szám hányadosaként.



Így egy szemléletes geometriai bizonyítás segítségével is beláttuk, hogy vannak nem racionális számok is. Azokat a számokat, amelyek nem írhatóak fel két egész szám hányadosaként irracionális számoknak, a racionális és irracionális számok halmazainak unióját pedig valós számoknak nevezzük.

## Hatványozás irracionális kitevőre

A teljesség kedvéért vizsgáljuk meg, mi történik irracionális kitevő esetén. Azt szeretnénk, ha irracionális kitevő mellett is érvényben maradnának a racionális kitevőre érvényes monotonitási szabályok. Legyen most a >1, x és y irracionális számok. „Ha megköveteljük, hogy $x \le y$ esetén $a^x \le a^y$ teljesüljön, akkor $a^x$-nek ki kell elégítenie az $a^r \le a^x \le a^s$ egyenlőtlenséget, valahányszor $s$ és $r$ olyan racionális számok, melyekre $r \le x \le s$. ”[14] A következő tételből kiderül, hogy ilyen feltételek mellett $a^x$ értéke egyértelmű.

[14] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis I., 55. oldal

„Ha $a > 1$, akkor tetszőleges $x$ valós számra $\sup\{a^r : r \in \mathbf{Q},\ r < x\} = \inf\{a^s : s \in \mathbf{Q},$ $s$[15]$> x\}$. Ha $0 < a < 1$, akkor tetszőleges $x$ valós számra $\inf\{a^r : r \in \mathbf{Q},\ r < x\} =$ $\sup\{a^s : s \in \mathbf{Q},$ $s$[15] $> x\}$."[16]

Ezen ismeretek mellett már definiálhatjuk az irracionális kitevőjű hatványokat:

„Legyen a > 1. Tetszőleges $x$ valós számra $a^x$-szel jelöljük a $\sup\{a^r : r \in \mathbf{Q},\ r < x\} =$ $\inf\{a^s : s \in \mathbf{Q},$ $s$[15] $> x\}$ mennyiséget. Ha $0 < a < 1$, akkor $a^x$ értéke $\inf\{a^r : r \in \mathbf{Q},\ r < x\}$ $= \sup\{a^s : s \in \mathbf{Q},$ $s$[15] $> x\}$. Az $1^x$ hatványt 1-nek definiáljuk minden x-re."[17]

Természetesen bebizonyítható, hogy az eddigi hatványozási azonosságok pozitív valós alap, és irracionális kitevőre is érvényben maradnak. Ezek tisztázása után szoktuk bevezetni az exponenciális függvényt, hiszen a hatványozás most már minden valós számra értelmezve van.

## Valós számok teste

Mivel a racionális számok halmazát úgy bővítjük ki az irracionális számokkal, hogy az ismert műveleti tulajdonságok továbbra is megmaradjanak, így a valós számok halmaza is kommutatív testest fog alkotni. Tehát elmondható, hogy testbővítést végeztünk, a valós számok testét a racionális számok bővítésének nevezzük. Így eljutottunk a természetes számoktól a valós számokig. A középiskolákban legtöbbször ez a legbővebb számhalmaz, amelyben számolnak a diákok. Ennek ellenére, még ha csak érdekesség szintjén is, de érdemes mesélni a komplex számokról, hogy tudják, a valós számoknál nem áll meg a matematika világa.

[15] Javítás: *s* helyett *r* szerepelt.

[16] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis I., 55. oldal

[17] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis I., 56. oldal

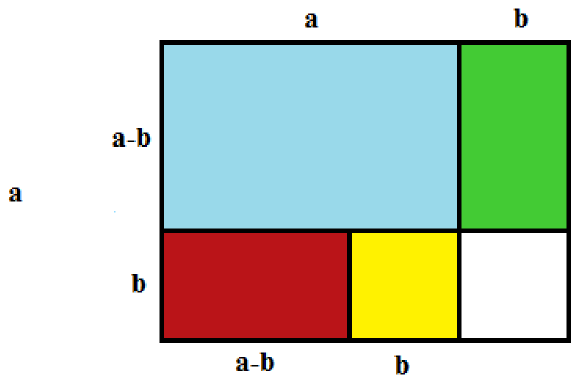
# Néhány egyéb példa szemléltetésre

Már az előző két fejezetben is sok szemléltetési módszerről írtam. Most azonban azzal a céllal mutatnék be még néhány szemléltetést, hogy hangsúlyozzam, az algebra tanításában milyen különböző célokat szolgálhat egy-egy látványos ábra. Mutatok egy példát az algebrai azonosságok illusztrálására, az értelmezési tartomány kiterjesztésének ábrázolására, egyenlet és egyenlőtlenség grafikus megoldására, törtszámok egy ekvivalens osztályozásának jellemzésére.

## Azonosság bizonyítása

- <u>Példa:</u> Bizonyítsuk be, hogy $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 – b^2$!

Az azonosságot algebrailag könnyű belátni, hiszen ha a baloldalon beszorzunk és összevonunk, akkor valóban a jobboldalt kapjuk. Az ilyen típusú azonosságok tanításakor azonban a bizonyítást gyakran geometriai úton is szemléltetjük, hiszen téglalapok, négyzetek segítségével az egyenlőség jól érzékeltethető, igazolható.




Az ábráról leolvasható, hogy (**a** - **b**) · (**a** + **b**) = a kék és a zöld téglalapok területeinek összege. Az is jól látható, hogy a zöld és a bordó téglalapok területei egyenlők, hiszen mind a kettő **a** és **a-b** oldalúak. Az ábráról leolvasható az is, hogy a kék és a bordó téglalapok összegét úgy kapjuk meg, ha az **a** oldalú négyzetből elvesszük a sárga, **b** oldalú négyzetet. Tehát összefoglalva:

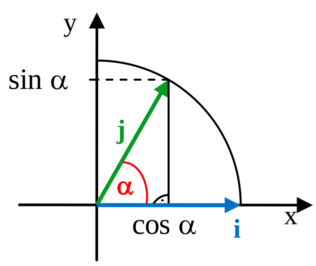
$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T_{kék} + T_{zöld} = T_{kék} + T_{bordó} = (T_{kék} + T_{bordó} + T_{sárga}) – T_{sárga} = \mathbf{a^2 – b^2}$

Az effajta bizonyításoknál kihasználjuk, hogy a téglalap területe az oldalhosszainak szorzata. Így az $a \cdot b$-t az $a$, $b$ oldalú téglalap területével azonosítjuk. Ennek köszönhetően az azonosság ″lerajzolható″. Persze tisztázni kell, hogy a és b nem csak pozitív szám lehet, illetve azt is, hogy a-nak nem feltétlenül kell nagyobbnak lennie b-nél. Vagyis az azonosság bármely valós számpárra teljesül.

## Értelmezési tartomány kiterjesztése

A szögfüggvényeket először csak hegyesszögekre értelmeztük, és a feladatnak megfelelő oldalhosszúságú derékszögű háromszög segítségével ábrázoltuk a problémát. Később, amikor a szögfüggvények értelmezési tartományát a hegyesszögekről a tetszőleges forgásszögekre akarjuk terjeszteni, akkor már más szemléltetést kell találnunk, mert egy derékszögű háromszögnek nem lehet például tompaszöge, vagy negatív szöge. Ezen problémák is kiküszöbölhetőek az egységnyi sugarú körön való ábrázolással.

E szemléltetés alapja, hogy a derékszögű koordinátarendszer origójából az x tengely pozitív irányába rögzítünk egy **i** egységvektort, ha tetszőleges pozitív vagy negatív szöggel elforgatjuk az **i** vektort az origó körül, akkor az elforgatott **j** egységvektor végpontja éppen az origó körüli egységnyi sugarú körön fog mozogni. Az **i** és **j** vektorok által bezárt szög fogja mutatni az elforgatásnál felhasznált forgásszöget, az **i** és **j** vektorok végpontjait összekötő körív előjeles hossza pedig a forgásszög radiánját, azaz az ívmértékét. A koordinátarendszer I. síknegyedében könnyű szemléltetni a szögek szinuszát és koszinuszát, hiszen itt $\alpha$ hegyesszög lesz, így berajzolhatjuk az $\alpha$ szögű derékszögű háromszöget is. Ennek a háromszögnek a befogói éppen a **j** vektor koordinátái lesznek. (Lásd az alábbi ábrán!)

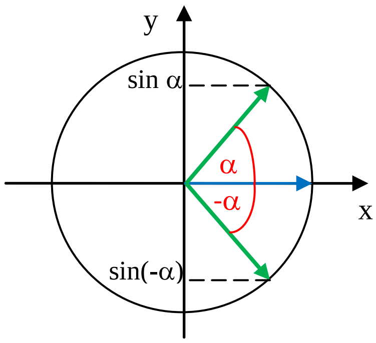


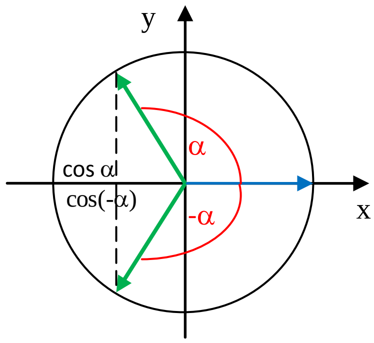
Mivel most a derékszögű háromszögünk átfogója 1, így az $\alpha$ szög szinusza a szöggel szemközti oldal hossza, koszinusza pedig a szög melletti oldal hossza lesz, tehát sin $\alpha$ a **j** vektor végpontjának *y* koordinátája, cos $\alpha$ pedig az *x* koordinátája lesz.

Ezen észrevételek alapján a szinusz, koszinusz fogalmakat tetszőleges forgásszögre általánosíthatjuk: sin $\alpha$ illetve cos $\alpha$ annak a forgásszögnek az *y* illetve *x* koordinátája, mely az **i** vektorral $\alpha$ forgásszöget zár be.

Ez az ábrázolás a kiterjesztés után is nagyon praktikus eszköz, hiszen segítségével könnyen szemléltethetőek az összefüggések, kapcsolatok. Jól látszik például a szinusz és koszinusz függvény $2\pi$ szerinti periodikussága, hiszen ha lerajzoljuk az $\alpha$-val és az $\alpha+2\pi$-vel elforgatott vektorokat akkor éppen ugyanazt az ábrát kapjuk. Ez nyilvánvaló, hiszen $\alpha$ és $\alpha+2\pi$ között éppen egy teljes, 360°-os kört teszünk meg.

E szemléltetési lehetőséggel könnyű ábrázolni negatív forgásszöget is. Ilyen esetben megegyezés szerint az adott szög abszolút értékét az x tengelyhez képest az eddigiektől eltérően, az óramutató járásával megegyező irányban mérjük fel. Ezek után már könnyen ábrázolhatjuk azt az összefüggést is, hogy $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, valamint hogy $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. (Lásd az alábbi ábrákon!) Eszerint a szinusz függvény páratlan, a koszinusz függvény pedig páros.



## Egyenletek, egyenlőtlenségek algebrai és grafikus megoldása

Grafikusan sok algebrai művelet, kapcsolat, tulajdonság ábrázolható. Bár a függvények rajzolásával, és elemzésével főként az analízis foglalkozik, de ezek az ismeretek az algebra tanulása során is hasznosak lehetnek. Gyakran ugyanis, az egyes egyenleteket, egyenlőtlenségeket grafikusan is megoldjuk, amellyel nem csak ellenőrizni tudjuk az algebrai megoldásunk helyességét, de azt is szemléltetheti, hogy egyes álgyökök, miért esnek ki a jó megoldások közül.

- Példa: Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$3\sqrt{x-1} = \sqrt{x+2}+1$$

Ha az egyenletet algebra úton szeretnénk megoldani, akkor a legtöbben valószínűleg ezen az úton haladnának:

Kikötés:

a) a gyökvonások miatt:

$x - 1 \geq 0 \longrightarrow x \geq 1$

és $x + 2 \geq 0 \longrightarrow x \geq -2$

b) az egyenlet globális vizsgálata miatt:

$\sqrt{x+2}+1 \geq 0 \longrightarrow \sqrt{x+2} \geq -1$ Ez teljesül minden x-re.

és $3\sqrt{x-1} - 1 \geq 0$ / +1

$3\sqrt{x-1} \geq 1$ /()$^2$ (mindkét oldal pozitivitása miatt ekvivalens átalakítás)

$9x - 9 \geq 1$ /+9

$9x \geq 10 \longrightarrow x \geq \frac{10}{9} = 1{,}1\dot{1}$

Összegezve: $(x \geq 1)$ és $(x \geq -2)$ és $(x \geq \frac{10}{9}) \longrightarrow$ Az alaphalmaz: $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq \frac{10}{9}\}$

A megoldás folytatása:

$$3\sqrt{x-1} = \sqrt{x+2}+1 \qquad /()^2$$

$$9x - 9 = x + 2 + 2\sqrt{x+2}+1 \qquad /-(x + 3)$$

$$8x - 12 = 2\sqrt{x+2} \qquad /()^2$$

$$64x^2 - 192x + 144 = 4x + 8 \qquad /-(4x + 8)$$

$$64x^2 - 196x + 136 = 0 \qquad /:4$$

$$16x^2 - 49x + 34 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4\cdot 16\cdot 34}}{2\cdot 16} = \frac{49 \pm 15}{32}$$

$$x_1 = \frac{64}{32} = 2 \in \text{alaphalmaz}$$

$$x_2 = \frac{34}{32} = 1{,}0625 \notin \text{alaphalmaz}$$

Mivel x = 1,0625 nem eleme az alaphalmaznak, így az egyenletnek csak az x = 2 a megoldása. Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

Az egyenletek grafikus megoldásakor az egyenlet két oldalán álló kifejezést függvényként ábrázoljuk, és azok viszonyát vizsgáljuk. Most egy olyan példát mutattam be, ahol ez a diákok számára könnyen kivitelezhető. (Lásd a következő ábrán!) Ezek után azt kell megnéznünk, hogy a két grafikon hol metszi egymást, a metszéspontok ugyanis azt jelentik, hogy ezeken az x helyeken a függvények ugyanazon y értéket veszik fel, azaz teljesül ez egyenlőség.


Gyakori hiba a tanulóknál, hogy megfeledkeznek a kikötésről, és az eredmény leellenőrzéséről, így számolási hiba nélkül is hamis gyökhöz juthatnak. Ha azonban grafikusan is szemléltetik az egyenletet, akkor hamar rájönnek, hogy jelen esetben csak egy megoldás létezik. Az is látható, hogy a függvények az x = $\frac{34}{32}$ helyen nem metszik egymást, így ha a kikötésből ki is felejtettük volna az egyenlet globális vizsgálatát, most gyanút foghatunk, hogy keletkezett egy hamis gyökünk.

A grafikonok rajzolásához ma már nagyon sok függvényábrázoló program áll rendelkezésünkre. Ezeknek előnye a pontos és gyors rajz mellett, hogy olyan összetett függvényeket is képesek ábrázolni, melyeket egy középiskolás gyerek transzformációk útján nem tudna. Nézzünk egy feladatot, melynél ez a szituáció áll fenn.

- Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:[18]

$$1 > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{2-x}(x^2-4x+3)}$$

Kikötés: $\log_a b$ esetén a > 0; a ≠ 1; b > 0 feltételeket ellenőriznünk kell.

- a > 0 miatt:

$$2 - x > 0 \quad \longrightarrow \quad 2 > x$$

- a ≠ 1 miatt:

$$2 - x \neq 1 \quad \longrightarrow \quad x \neq 1$$

[18] Sokszínű matematika - Matematika tankönyv 11, 114. oldal (feladat kitűzés)

- b > 0 miatt:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad \text{/ keressük a gyököket /}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \\ x_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{b>0 miatt} \\ \text{x>3 vagy x<1} \end{array}$$

Összegezve: $(x < 2)$ és $(x \neq 1)$ és $(x > 3$ vagy $x < 1) \longrightarrow$ Az alaphalmaz: $\{x \in \mathbf{R} | \ x < 1\}$

A megoldás folytatása:

$$1 > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{2-x}(x^2-4x+3)} \qquad \text{/ az } \left(\frac{1}{2}\right) \text{ nulladik hatványa 1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{2-x}(x^2-4x+3)}$$

/ 0 és 1 közötti alap esetén az exponenciális függvény szigorú monoton csökkenése miatt elég a kitevőket összehasonlítani, a reláció megfordul

$$0 < \log_{2-x}(x^2 - 4x + 3) \qquad \text{/ } \log_a 1 = 0 \text{ minden } a > 0,\ a \neq 1 \text{ esetén}$$

$$\log_{2-x} 1 < \log_{2-x}(x^2 - 4x + 3)$$

/ logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt elég az 1 és az $(x^2 - 4x + 3)$ összehasonlítása

I. eset: 0 < alap <1 esetén a logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő

$0 < 2-x$ és $2-x < 1 \longrightarrow 1 < x < 2$

Ez nem eleme az alaphalmaznak, így nem is kell tovább vizsgálni ezt az ágat.

II. eset: 1 < alap esetén a logaritmus függvény szigorúan monoton növekvő

$1 < 2-x \longrightarrow x < 1$

Ez megfelel a korábbi kikötéseinknek.

Ezt az esetet tovább kell vizsgálnunk:

$\log_{2-x} 1 < \log_{2-x}(x^2 - 4x + 3)$ / a szigorú monoton növekedés miatt nem fordul meg a reláció

$1 < x^2 - 4x + 3$ /-1

$0 < x^2 - 4x + 2$ / keressük meg a gyököket

$0 = x^2 - 4x + 2$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

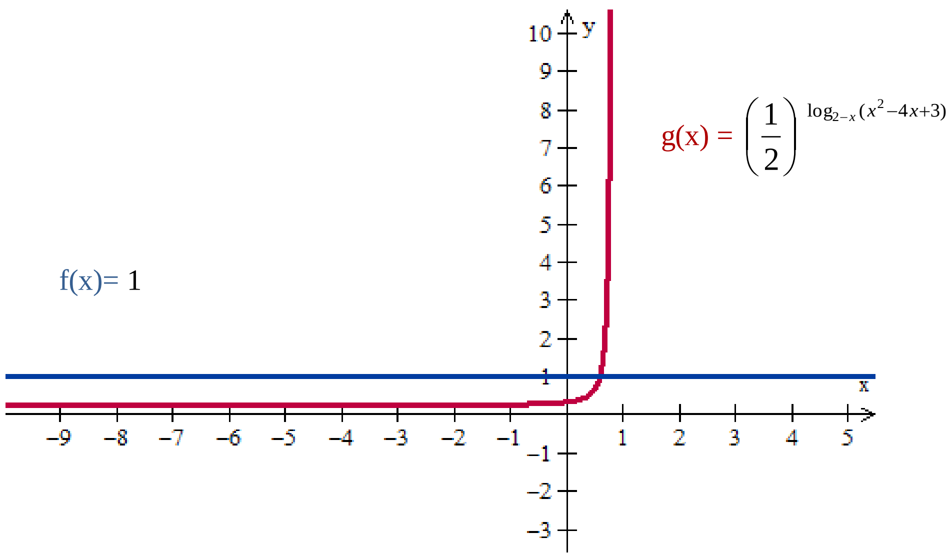
$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 3{,}41$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = 0{,}59$$

$0 < x^2 - 4x + 2$ miatt: $x < \frac{4 - \sqrt{8}}{2}$ vagy $\frac{4 + \sqrt{8}}{2} < x$

Ezt összevetve a II. eset feltételével, és az alaphalmazzal azt a megoldást kapjuk, hogy az egyenlőtlenség teljesül minden olyan valós x-re, amelyre $x < \frac{4 - \sqrt{8}}{2}$.

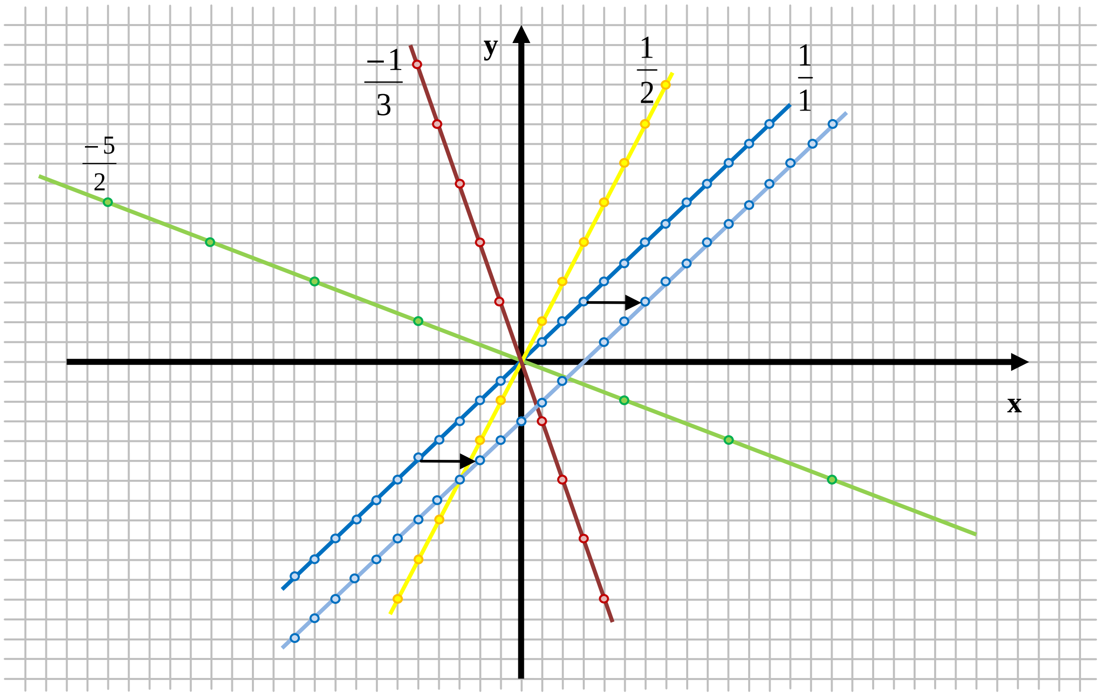
Az algebrai úton kiszámolt megoldásunkat ellenőrizni tudjuk a számítógép által megrajzolt grafikonokon.(Lásd az alábbi ábrát!) Persze ne felejtsük el, hogy a gép is, és mi is a koordináta rendszer csak bizonyos kiragadott tartományát tudjuk ábrázolni. Így mindig figyelembe kell vennünk a függvények monotonitási, folytonossági és egyéb tulajdonságait.



## A racionális számok ekvivalencia osztályainak ábrázolása

Az előző fejezetben volt arról szó, hogy egy-egy racionális számnak több neve is van. Azokat a racionális számokat, melyeket egymásból megkaphatunk egyszerűsítés vagy bővítés útján, azaz egy racionális szám különböző alakjait egy ekvivalencia osztályba soroljuk. Ezzel kapcsolatos következő feladatomat Dr. Szendrei János könyve [19] ihlette.

- <u>Feladat:</u> Ábrázoljuk koordinátarendszerben az egyes ekvivalencia osztályba tartozó racionális számok törtalakját, úgy hogy az *x* tengely értékei a számlálót, *y* tengely értékei pedig a nevezőt jelentsék. Milyen összefüggést veszel észre az ekvivalencia osztályok között? Tegyél fel még néhány kérdést az ábrával kapcsolatban, és próbáld is azokat megválaszolni.




A tanulók könnyen észrevehetik az összefüggést az ekvivalencia osztályok ábrázolása között: az azonos értékű törteket összekötve mindig egy origón átmenő egyenest kapunk. (Lásd a fenti ábrán!) Ennek oka, hogy ha az egy ekvivalencia osztályba tartozó törtek esetén függvényként írjuk fel a számláló és nevező állandó viszonyát, akkor egy racionális együtthatós, origón áthaladó, lineáris függvényt kapunk. Hiszen például a $2 = \frac{2}{1}$ különböző alakjaiban a számláló

[19] Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet, 429. oldal

mindig kétszerese a nevezőnek, azaz $x = 2y$, amiből $f(x)= \frac{1}{2}x$. Fontos, hogy az $x$ tengelyt, mint origón átmenő egyenest nem tekintjük egy ekvivalencia osztálynak, hiszen ekkor $y = 0$, és a 0-val való osztást nem értelmezzük.

A felmerülő lehetséges kérdéseknél a következőkre gondoltam például:

Kérdés 1: Leolvasható-e különböző ekvivalencia osztálybeli törtek közös nevezője?

Válasz 1: Igen, egy olyan $x$ tengellyel párhuzamos egyenest kell találnunk, amely rácspontban metszi a kérdéses törtekhez tartozó egyeneseket. Hiszen a talált $y=a$ egyenes rácspontjain az $a$ nevezőjű törtek vannak, és ha ez az egyenes rácspontokban metszi az adott törtekhez tartozó egyeneseket, az azt jelenti, hogy minden adott ekvivalencia osztálynak van $a$ nevezőjű reprezentánsa.

Kérdés 2: Mit kapunk, ha egy ekvivalencia osztályt definiáló egyenest párhuzamosan eltolunk?

Válasz 2: Nézzünk egy példát, toljuk el (3,0) vektorral az $\frac{1}{1}$ által reprezentált egyenest. (Lásd az előző ábrán!) Ekkor a pozitív $x$ értékekhez tartozó rácspontok képei a következők lesznek:

$\frac{1}{1}+3\frac{1}{1} = 4$; $\frac{2}{2}+3\frac{1}{2} = 2{,}5$; $\frac{3}{3}+3\frac{1}{3} = 2$; …; $\frac{100}{100}+3\frac{1}{100} = 1{,}03$, és így tovább.

Észrevehetjük, hogy pozitív végtelen felé tartva az $\frac{1}{1}$-hez egyre kisebb számokat adunk, az $n$. rácspont képe éppen az $\frac{n}{n}+3\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{3}{n}$ és ha n $\longrightarrow +\infty$, akkor $\frac{3}{n} \longrightarrow 0$, azaz $\frac{1}{1}+\frac{3}{n} \longrightarrow \frac{1}{1}$. Tehát így az ősegyenes által képviselt törtértékhez konvergáló sorozatot kapunk.

Nézzük meg mi a helyzet a negatív $x$ értékekhez tartozó rácspontok estén! Haladjunk a 0 felől a $-\infty$ irányába. Ekkor a negatív $x$ értékekhez tartozó rácspontok képei a következők lesznek:

$\frac{-1}{-1}+3\frac{1}{-1} = -2$; $\frac{-2}{-2}+3\frac{1}{-2} = -0{,}5$; $\frac{-3}{-3}+3\frac{1}{-3} = 0$; $\frac{-4}{-4}+3\frac{1}{-4} = 0{,}25$…;

$\frac{-100}{-100}+3\frac{1}{-100} = 0{,}97$, és így tovább.

Észrevehetjük, hogy a negatív végtelen felé tartva a $\frac{-1}{-1}$-ből egyre kisebb számokat vonunk le, az *n*. rácspont képe éppen a $\frac{-n}{-n} + 3\frac{1}{-n} = \frac{1}{1}$ - $\frac{3}{n}$ és ha n $\longrightarrow \infty$, akkor $\frac{3}{n} \longrightarrow$ 0, azaz $\frac{1}{1}$ - $\frac{3}{n} \longrightarrow \frac{1}{1}$. Tehát most is az ősegyenes által képviselt törtértékhez konvergáló sorozatot kapunk.

A fentiek általánosításaként megvizsgálhatjuk, hogy mi történik, ha tetszőleges $\frac{p}{q}$ alakban felírt racionális szám által reprezentált ekvivalencia osztályhoz tartozó egyenest eltolunk egy olyan (*A*,*B*) vektorral melynél *A* és *B* egész számok. Ekkor a (*p*,*q*) rácspont képe a (p + A, Q + B) rácspont. S bármely, az eredeti egyenesen lévő (np,nq) rácspont képe pedig az (np+A, nq+B ) rácspont lesz. Ez utóbbi az $\frac{np+A}{nq+B}$ törtet szimbolizálja. Ha a törtet n-nel egyszerűsítjük, akkor a tört alakja $\frac{p+\frac{A}{n}}{q+\frac{B}{n}}$ lesz.

Ha n-nel 1-től tartunk a $+\infty$ felé, akkor $\frac{A}{n}$ és $\frac{B}{n}$ is tart a 0-ba.

Így $\frac{p+\frac{A}{n}}{q+\frac{B}{n}} \longrightarrow \frac{p+0}{q+0} = \frac{p}{q}$. Ha n-nel -1-től a $-\infty$ felé tartunk, akkor $\frac{A}{n}$ és $\frac{B}{n}$ most is tart a 0-ba. Így $\frac{p+\frac{A}{n}}{q+\frac{B}{n}} \longrightarrow \frac{p-0}{q-0} = \frac{p}{q}$. Tehát összefoglalva, pozitív és negatív n-ekre is, n abszolútértékének növekedése szerint sorba állítva a rácspontokhoz tartozó törtértékeket, az eredeti egyenes megadott $\frac{p}{q}$ reprezentánsákoz konvergáló sorozatot kapunk.

Ez a feladat nagyon látványos, és segít megérteni a racionális számok viszonyát. Ezen felül fontos előnye, hogy továbbkérdezni tanítja a gyerekeket, ez pedig nélkülözhetetlen képesség a folyamatos fejlődéshez.

# Összefoglalás

Szakdolgozatomban olyan szemléltetési lehetőségekről, módszerekről írok, melyek az algebra tanítása során segítségünkre lehetnek. Az eszközöket két általam kiválasztott algebrai témakör feldolgozása kapcsán mutatom be. Először a műveletek fogalmának kiépülését segítő szemléltetési módszerekről írok, melyeket az egyes műveletek bevezetése során alkalmazhatunk. Így láthatunk példákat az alapműveletek, a trigonometrikus műveletek, a hatványozás és gyökvonás szemléltetésének lehetőségeire. Eközben folyamatosan szem előtt tartom a műveletek egymásra épülésének, kapcsolatainak hangsúlyozását.

Ezután a számkörbővítés problémájával foglalkozom, hiszen ez az előző témakörrel nagyon szoros kapcsolatban áll. Itt a természetes számok halmazát az előző fejezetben szereplő műveletek segítségével fokozatosan bővítem, egészen a valós számok halmazáig, úgy, hogy közben folyamatosan vizsgálom, hogy az egyes számhalmazok a rajtuk értelmezett műveletekkel milyen algebrai struktúrát alkotnak. Valamint külön kitérek a hatványkitevő kiterjesztésének problémájára is. Ebben a fejezetben szintén különböző ábrákkal, módszerekkel illusztrálom az egyes, új számkörökben való jártasság elősegítését, valamint kétféle módszert is mutatok az irracionális számok létezésének bizonyítására.

A harmadik fejezetben összegyűjtöttem még néhány olyan szemléltetési példát, melyek az algebra tanításának más-más területeit szolgálják.

A dolgozatom során próbáltam folyamatosan figyelni arra, hogy minél többféle eszközt bemutassak, így szerepel enaktív (játékos), ikonikus (táblázatos, rajzos, grafikus) és szimbolikus módszer is.

A szakdolgozatommal kapcsolatos kutatómunkát nagyon élveztem, mert sok új ötlettel, módszerrel találkoztam, melyekről úgy gondolom, valóban nagy segítséget jelentenek a matematika tanításában. Ezek arra inspiráltak, hogy egy eszközt magam is kitaláljak (Második fejezetben a logaritmálásnál leírt osztogatós módszer). Azt hiszem ezeket a szemléltetési lehetőséget valóban alkalmazni tudom a jövőben.

Dolgozatom befejeztével szeretnék köszönetet mondani Szeredi Évának, aki sok szakirodalommal, tapasztalattal, és jótanáccsal segítette a munkámat.

# Irodalomjegyzék


- Fried Ervin: Általános algebra, Tankönyvkiadó (Budapest, 1981)
- Freud Róbert: Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó (Budapest, 2004)
- C. Neményi Eszter: A természetes szám fogalmának alakítása. Tantárgy-pedagógiai füzetek; ELTE TÓFK kiadványa (Budapest, 2006)
- C. Neményi Eszter–Dr. R. Szendrei Julianna: A számolás tanítása. Szöveges feladatok; Tantárgy-pedagógiai füzetek; ELTE TÓFK kiadványa, (Budapest, 2003)
- Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva: Matematika 5. osztály I, II kötet, Apáczai Kiadó (Celldömölk, 2000)
- Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva: Matematika 7. osztály, Apáczai Kiadó (Celldömölk, 2001)
- Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva: Matematika 8. osztály, I. kötet, Apáczai Kiadó (Celldömölk, 2003)
- Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Matematika tankönyv 9 (Sokszínű matematika), Mozaik Kiadó (Szeged, 2005)
- Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Matematika tankönyv 10 (Sokszínű matematika), Mozaik Kiadó (Szeged, 2003)
- Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Matematika tankönyv 11 (Sokszínű matematika), Mozaik Kiadó (Szeged, 2003)
- Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet, Tankönyvkiadó (Budapest, 1986)
- D.E.Mansfield, D.Thompson: Matematika új felfogásban, Második kötet, Gondolat Kiadó (Budapest, 1972)
- Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis I., Nemzeti Tankönyvkiadó (Budapest, 2005)
- Jerome S. Bruner: Új utak az oktatás elméletéhez, Gondolat kiadó (Budapest, 1974)