Szélsőérték-feladatok a középiskolában

Szakdolgozat

Készítette: **Fórizs Dorottya Csilla**
Matematika BSc Tanári szakirány

Témavezető: **Besenyei Ádám**
(egyetemi tanársegéd)
Alkalmazott Analízis és
Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2010

„Minthogy a világot a legtökéletesebb felépítésű és a legbölcsebb Alkotó hozta létre, semmi sem történik ezen a világon, amiben a maximum vagy minimum valamilyen formában meg ne jelenne.”

Leonhard Euler

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

Az emberek mindennapjaik során többször szembesülnek a szélsőérték fogalmával, szélsőértékkel kapcsolatos feladatokkal, még ha nem is tudatosul bennük, hogy ez matematika. A maximum és a minimum problémák napjainkban is jelen vannak, közel állnak hozzánk. Ezért választottam dolgozatom témájául a szélsőérték-feladatokat, ezek elemzését, megoldási formáit, módszertanát.

Életünk során megpróbálunk arra törekedni, hogy minimális energia-befektetéssel a maximumot nyújtsuk, a lehető legkevesebb idő alatt minél több dolgot végezzünk el úgy, hogy az általunk végzett munka eredménye a legjobb minőségű legyen. Mindezek mellet a kockázati faktor visszaszorítása is célunk. Ez például különféle befektetéseknél fontos, ahol a legkisebb kockázat mellett szeretnénk a maximális hasznot elérni. Ezek alapján úgy gondolom, hogy a maximum és minimum fogalma valamilyen formában mindenki életéhez kötődik. Talán a diákok számára ezért is annyira szimpatikusak a szélsőérték-feladatok. Már az egészen kis gyerekek is találkoznak a hideggel és a meleggel, az időjárás változékonyságával, a híradó végén, az időjárás-jelentésben elhangzó minimum és maximum hőmérséklettel. Ezért a diákok az ilyen típusú példákat jobban kedvelik, hiszen sokkal érdekesebbek, megfoghatóbbak, mint más, hasonló nehézségű feladatok. Ezek a feladatok gyakorlatiasabbak, többféleképpen megoldhatóak, ami színesebbé, látványosabbá varázsolja a matematika órákat is.

A szakdolgozatom négy részre tagolódik. Az első három részben bemutatom a szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszereit, az utolsóban pedig egy példán keresztül szemléltetem azt, hogy nincsenek kifejezett feladattípusok, hanem egy adott feladatra több megoldás is létezik. Minden rész elején összefoglaltam az adott egység lényegét, leírva a témakörben használt definíciókat, tételeket, majd egy-két feladaton keresztül bemutattam az aktuális megoldási módszereket. Megpróbáltam olyan feladatokat válogatni, amelyek izgalmasak, akár a mindennapi életben is találkozhatunk velük, és még a diákok érdeklődését is felkeltik.

Úgy gondolom, hogy az ilyen jellegű példák mindenféleképpen hasznosak, hiszen fejlesztik a gyerekek feladatmegoldó készségét, kíváncsivá teszik őket, valamint a gyakorlatban is hasznosíthatóak.

2. fejezet

A számtani és mértani középpel kapcsolatos feladatok

Sok olyan példa van, ahol egy-egy ötlet, észrevétel elegendő ahhoz, hogy a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséggel meg tudjuk oldani. Próbáljuk úgy átalakítani a kapott kifejezésünket, hogy ha felírjuk a tagjaira az egyenlőtlenséget, akkor az egyik oldalon a kívánt kifejezés, a másikon pedig konstans jelenjen meg, vagy éppen az ismeretlen egyszerűsödik le, megkapva így a maximumot, vagy minimumot.

2.1. Felhasznált definíciók, tételek

Definíció: A nemnegítív $a_1, \ldots, a_n$ számok számtani közepének nevezzük az

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

kifejezést.

Definíció: A nemnegatív $a_1, \ldots, a_n$ számok mértani közepének nevezzük a

$$G = \sqrt{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

kifejezést.

Tétel: Ha $a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges nemnegatív számok, akkor

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = \ldots = a_n$.

2.2. Feladatok

1. Feladat

Az a, b, c pozitív számokra $a + b + c = 18$ teljesül. Adjuk meg a számok értékét úgy, hogy az ab^2c^3 kifejezés értéke a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás:

Mivel a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget szeretnénk alkalmazni, ezért át kell alakítani az $a + b + c = 18$ összeget úgy, hogy a tagokat összeszorozva megjelenjen az ab^2c^3 kifejezés. A b^2 akkor jelenik meg, ha b-t átírjuk $\left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right)$ alakra, a c^3 pedig akkor, ha c helyett a $\left(\frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3}\right)$ kifejezést írjunk. Így azt kapjuk, hogy

$$a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = 18.$$

Erre alkalmazva a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget

$$\frac{a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3}}{6} \geq \sqrt[6]{a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{c}{3}},$$

tudva, hogy a három szám összege 18,

$$\frac{18}{6} \geq \sqrt[6]{\frac{ab^2c^3}{108}},$$

hatodik hatványra emelve és átszorozva a nevezővel kapjuk, hogy

$$3^6 \cdot 108 \geq ab^2c^3.$$

Ez a kifejezés akkor lesz a legnagyobb, ha egyenlőség van a két oldal között. Ez azt jelenti, hogy a számok, amelyekre felírtuk az egyenlőtlenséget, egyenlőek kell, hogy legyenek, vagyis

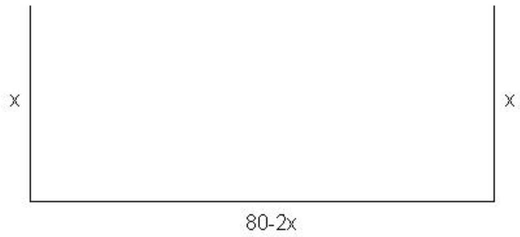
$$a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}.$$

Tudva, hogy $a+b+c = 18$, ezért $a+2a+3a = 18$, innen $a = 3$, valamint $2b+b+\frac{2}{3}c = 18$, ahonnan $b = 6$, és $\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}c + c = 18$, így $c = 9$. Eredményül azt kaptuk, hogy az $a = 3$, $b = 6$ és $c = 9$ számokra lesz az ab^2c^3 kifejezés a legnagyobb.

2. Feladat

Egy $80cm$ széles bádoglemez két szélének felhajtásával téglalap keresztmetszetű vízvezetőt készítünk úgy, hogy a víz a lehető leggyorsabban folyjon át rajta (az átfolyás sebessége arányos a keresztmetszettel). Határozzuk meg, hogy mekkora legyen a két felhajtandó rész hossza!

Megoldás:



2.1. ábra.

A két felhajtandó részt jelöljük x-szel, így az alap hossza $(80 - 2x)cm$, ahogy a 2.1. ábra is mutatja. A felhajtandó rész tehát $0 < x < 40cm$ közé esik. A keresztmetszet területe

$$T(x) = x \cdot (80 - 2x).$$

Ennek keressük a maximumát. Beszorzunk 2-vel

$$2T = 2x \cdot (80 - 2x),$$

mert ha felírjuk a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget, akkor a számtani középnél kiejti egymást a $2x$-es tag, vagyis

$$\frac{2x + 80 - 2x}{2} \geq \sqrt{2T},$$

azaz

$$\sqrt{2T} \leq 40,$$

ahonnan négyzetre emelve és leosztva 2 -vel kapjuk, hogy

$$T \leq 800.$$

A maximális keresztmetszet tehát

$$T = 800cm^2.$$

Visszahelyettesítve pedig megkapjuk x értékét

$$x = 20cm.$$

Viszont úgy is gondolkozhatunk, hogy egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$2x = 80 - 2x,$$

innen kifejezve x-et kapjuk, hogy

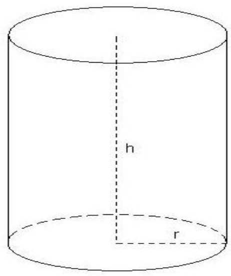
$$x = 20cm.$$

A maximális keresztmetszetű terület $800cm^2$, a feljatandó rész hossza pedig $20cm$.

3. Feladat

Adott térfogatú henger alakú fémdobozba szeretnénk pl.üdítőitalt tölteni. Milyen méretű hengert válasszunk, ha a legkevesebb fémet akarjuk felhasználni? (Környezetvédelmi okokból a lehető legkevesebb hulladékra törekszünk.)

Megoldás:



2.2. ábra.

A henger térfogata adott, vagyis $V = r^2 \cdot \pi \cdot h =$ állandó. Minél kevesebb hulladékra törekszünk, tehát a felszínét, azaz

$$A = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot h = 2r\pi(r + h)$$

kifejezést kell minimalizálnunk. A térfogatból kifejezve a magasságot

$$h = \frac{V}{r^2\pi},$$

ezt behelyettesítve a felszín képletébe kapjuk, hogy

$$A = 2r\pi(r + \frac{V}{r^2\pi}) = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}.$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget

$$\frac{2r^2\pi + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}}{3} \geq \sqrt[3]{2r^2\pi \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}},$$

vagyis

$$2r^2\pi + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2V^2\pi}.$$

Ahhoz, hogy a felszín minimális legyen, a két oldalnak meg kell egyeznie, de ez csak akkor lehetséges, ha

$$2r^2\pi = \frac{V}{r}.$$

Átrendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$2r = \frac{V}{r^2\pi} = h.$$

Arra az eredményre jutottunk, hogy a magasság akkora kell, hogy legyen, mint a sugár kétszerese, ekkor kapunk minimális felszínt adott térfogat mellett. A mindennapjainkban viszont nem fordul elő ehhez hasonló henger, amiben üdítőt árulnak. Ennek oka elég egyszerű, hiszen a gyártóknak mást is figyelembe kell venniük, pl.hogyan tudják legpraktikusabban tárolni, valamint ezekből inni szeretnénk, meg akarjuk fogni az üveget, és így már nem feltétlenül egy nagy átmérőjű és viszonylag kis magasságú henger lesz a legcélszerűbb.

3. fejezet

Geometriai úton megoldható feladatok

3.1. Elemi úton megoldható feladatok

Ebben a részben olyan feladatokat mutatunk be, ahol elegendő a megoldáshoz az általános iskola nyolcadik osztályában tanult definíciókat, tételeket használni. Nyilván itt is kellenek észrevételek, ötletek a példák megoldásához, de nem követel meg magasabb tudást, egy jobb késességű osztályban órán is feladhatjuk a feladatokat.

3.1.1. Felhasznált definíciók, tételek

Definíció: A tengelyes tükrözés olyan egybevágósági transzformáció, amelyet egy rögzített egyenessel, a tükrözés tengelyével adunk meg. A tengely pontjai a tükrözésnél helyben maradnak, fixpontok. A tengelyen kívüli tárgypont és annak képpontja olyan szakasz két végpontja, amelynek a tengely szakaszfelező merőlegese.

Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség): Egy háromszög két oldalának összege mindig nagyobb vagy egyenlő a harmadik oldalnál. Egyenlőség csak elfajult esetben lehetséges, ha a három csúcs egy egyenesen helyezkedik el.

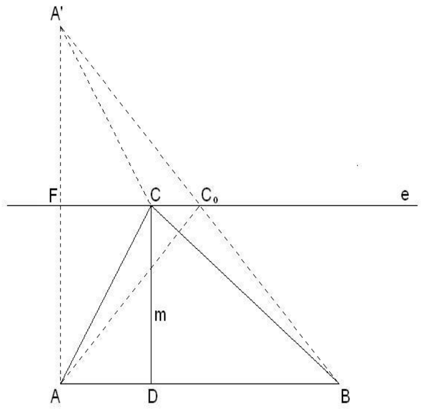
Definíció: A középpontos forgatás síkbeli egybevágósági transzformáció, amelyet a sík egy rögzített pontjával (a forgatás O középpontjával) és egy irányított szöggel (a forgatás szögével) adunk meg. A forgatás középpontja fixpont. A középponttól különböző P tárgyponthoz azt a P' képpontot rendeli, amely O-tól ugyanolyan távol van, mint a P pont ($CP = CP'$), és a PCP' irányított szög megegyezik a forgatás szögével.

3.1.2. Feladatok

1. Feladat

Adott egy háromszög alapja és magassága. Mikor legkisebb a kerülete?

Megoldás:



3.1. ábra.

Az ABC háromszög alapja AB, magassága $m = CD$. Az AB oldallal párhuzamost húzunk a C csúcson keresztül, ez legyen az e egyenes. Ezen az egyenesen mozoghat a C csúcs. Nekünk az kell, hogy a $(BC+CA)$ töröttvonal a legrövidebb legyen, mert így lesz minimális a háromszög kerülete. Az A csúcsot tükrözzük az e egyenesre, ez legyen A', így megkajuk a CA' szakaszt. Az AA' szakasz az e egyenest elmetszi az F pontban. A tengelyes tükrözés miatt $CA' = CA$, tehát

$$BC + CA = BC + CA',$$

ahol B és A' függetlenek a C pont megválasztásától. A háromszög-egyenlőtlenség miatt a BCA' törtvonal akkor lesz minimális hosszú, ha egy szakasz. Azt a pontot, ahol a BA' szakasz metszi az e egyenest jelöljük C_0-lal, ez lesz a háromszög harmadik csúcsa. Nyilván

$$A'C_0 = C_0B,$$

hiszen az $A'FC_0$ háromszög hasonló az $A'AB$ háromszöghöz, mert a megfelelő oldalak párhuzamosak, illetve a megfelelő szögek is egyenlőek. A hasonlósági arány

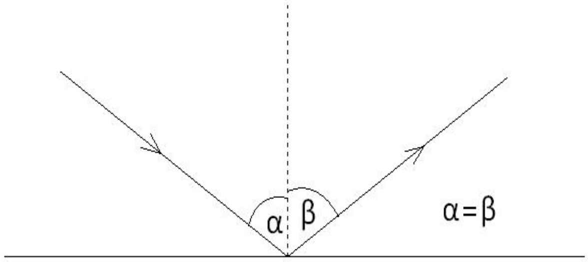
$$\lambda = \frac{A'F}{A'A} = \frac{1}{2},$$

amiből következik, hogy

$$A'C_0 = C_0B,$$

tehát az AC_0B háromszög egyenlő szárú. Eredményül azt kaptuk, hogy adott alapú és magasságú háromszögek közül annak a kerülete a legkisebb, amelyiknek a másik két oldala egyenlő, vagyis a háromszögünk egyenlő szárú.

Megjegyzés:



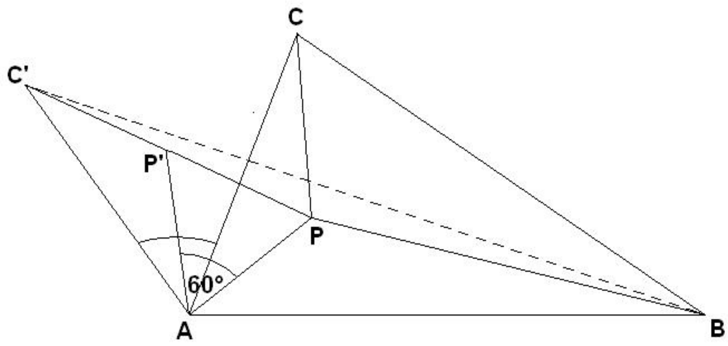
3.2. ábra.

Az optikában érdemes megfigyelnünk a fény visszaverődését. Ha fény esik egy test határfelületére, akkor a fény egy része visszaverődik (reflektálódik), más része behatol a közegbe. Párhuzamosan érkező fénysugarak érdes, egyenetlen felületről szétszórtan verődnek vissza, ilyenkor diffúz visszaverődés jön létre, sima, fényes felületről viszont párhuzamosan verődnek vissza, ekkor szabályos visszaverődésről beszélhetünk, mert a felület a rájuk eső fénysugarakat csak meghatározott irányban veri vissza. A síktükörről a szabályos visszaverődés összefüggésbe hozható a példánkkal, hiszen a *visszaverődés 1. törvénye* szerint a visszavert fénysugár a beesési síkban van (beeső fénysugár és a beesési merőleges által meghatározott sík), valamint a *visszaverődés 2. törvénye* szerint a beeső fénysugár a beesési merőlegessel bezárt szöge egyenlő a beesési merőleges és a visszavert fénysugár által meghatározott szöggel. A kép látszólagos, és ugyanazok érvényesek, mint a tükrözésnél.

2. Feladat

Adott egy ABC hegyesszögű háromszög. Határozzuk meg ennek belsejében azt a P pontot, amelyre az AP, BP és CP szakaszok hosszúságának összege a lehető legkisebb!

Megoldás:

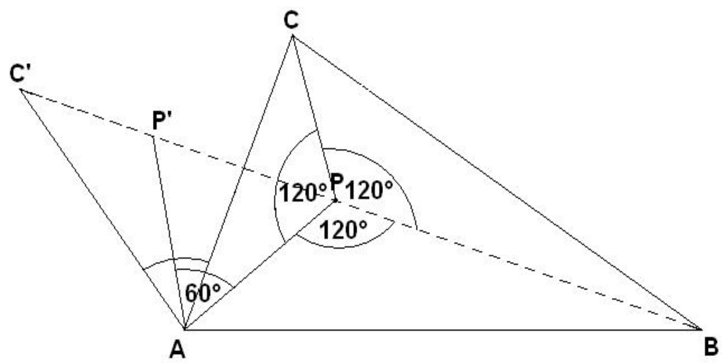


3.3. ábra.

Legyen P egy tetszőleges pont az ABC háromszög belsejében. Az $AP + BP + CP$ kifejezést kell minimalizálnunk. Forgassuk el 60°-kal az ACP háromszöget az A csúcs körül, így az $AC'P'$ háromszöget kapjuk, amely egybevágó az ACP háromszöggel. Az APP' háromszög nemcsak egyenlő szárú ($AP = AP'$), hanem az A csúcsnál lévő 60°-os szög miatt egyenlő oldalú is, tehát $AP = PP'$. Mivel $C'P' = CP$, ezért

$$BP + AP + CP = BP + PP' + P'C',$$

ahol C' független P helyzetétől. A $BPP'C'$ töröttvonal hosszát kell minimalizálnunk, amely független P megválasztásától. A háromszög-egyenlőtlenség miatt ez a töröttvonal, akkor lesz minimális, ha ez egy szakasz.



3.4. ábra.

Így viszont P helyzete meghatározott azáltal, hogy $APC'\sphericalangle = 60°$, tehát $APC'\sphericalangle = 60°$ így $APB\sphericalangle = 120°$, valamint $PP'A\sphericalangle = 60°$, ezért $AP'C'\sphericalangle = 120°$. A forgatás miatt $AP'C'\sphericalangle = APC\sphericalangle = 120\circ$, ahonnan már adódik a harmadik szög $CPB\sphericalangle = 360° - 2 \cdot 120° = 120°$. Azt kaptuk, hogy adott P pontból a háromszög csúcsaiba húzott szakaszok hosszának összege akkor minimális, ha a P pontból a háromszög mindegyik oldala 120°-os szögben látszik. Ezt a pontot a háromszög *izogonális* pontjának hívjuk.

3.2. Érintő szintvonalak módszere

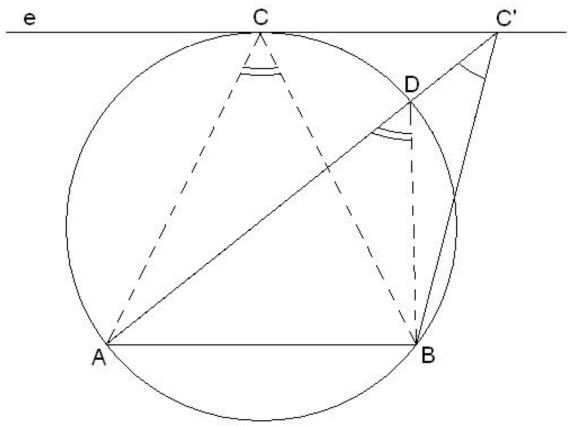
3.2.1. A módszerről

A térképen vagy a térkép ábrázolta terepen is vannak szintvonalak vagy magasságvonalak. Ezek olyan pontokat kötnek össze, amelyek azonos tengerszint felett vannak. A térképészek csak néhány szintvonalat jelölnek, például százasával, viszont mi tekinthetjük az összes ilyen görbét. Az érintő szintvonalak módszerére gondolhatunk úgy, mintha egy úton vagy ösvényen haladnánk, és ennek szeretnénk a legmagasabb vagy legalacsonyabb pontjába eljutni. Nyilván az a pont, ahol lefelé haladunk nem lehet a legalacsonyabban, ahol pedig felfelé haladunk nem lehet a legmagasabban. Mindkét esetben utunk szintvonalat keresztez. Ebből következően csak akkor lehetünk a legmagasabb vagy legalacsonyabb pontban, ha utunk éppen szintvonalat érint.

3.2.2. Feladatok

1. Feladat
Adott egy háromszög alapja és magassága. Mikor maximális az alappal szemközti szög?

Megoldás:



3.5. ábra.

A háromszög alapja legyen AB, magassága m, amelyek adottak. Az alaptól m távolságra lévő és vele párhuzamos e egyenesen mozoghat a szemközti csúcs, C. Az AB szakasz látókörívei a szintvonalak, mert ekkor a szög nem változik, hiszen *azonos körívhez* *tartozó kerületi szögek egyenlők.* Az érintő szintvonalak módszere alapján akkor kapunk maximális szöget, ha az e egyenes (amelyet most az ösvényünknek tekinthetünk) a C csúcsban szintvonalat, azaz látókörívet érint. Ekkor szimmetria okok miatt $AC = BC$, tehát az ABC háromszög egyenlő szárú. Az előbbi érvelést a következőképpen tehetjük pontossá. Tegyük fel indirekt, hogy az e egyenes C' pontjára az $AC'B$ szög nagyobb az ACB szögnél (lásd a 3.5. ábrát). Az AC' szakasz a látókörünket D-ben metszi, tehát

$$ACB\sphericalangle = ADB\sphericalangle.$$

Azt is tudjuk, hogy *egy háromszög külső szöge mindig nagyobb bármelyik nem mellette fekvő belső szögnél*, vagyis

$$ADB\sphericalangle > AC'B\sphericalangle,$$

azonban

$$ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle,$$

ebből következik, hogy

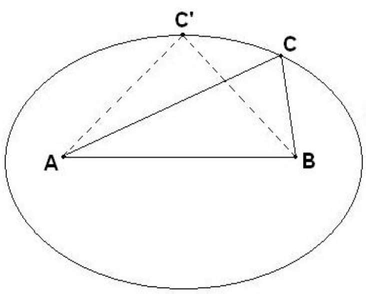
$$ACB\sphericalangle > AC'B\sphericalangle.$$

A C' csúcsot függetlenül választottuk AB-től, ezért bárhol vennénk fel C'-t az e egyenesen, az $AC'B$ szög mindig kisebb lenne az ACB szögnél. Adott alap és magasság mellett tehát akkor a legnagyobb az alappal szemközti szög, ha a szárak egyenlők, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

2. Feladat

Adott egy háromszög alapja és kerülete. Mikor maximális a területe?

Megoldás:



3.6. ábra.

A háromszög alapja AB és kerülete $K = a+b+c$ adott, mi a területét, vagyis a $T = \frac{a \cdot m_a}{2}$ kifejezést szeretnénk maximalizálni. Mivel a adott, ezért a lehető legnagyobb magasságot kell megkeresnünk, így kapunk maximális területet. Az út, amelyen haladunk az egy ellipszis, hiszen *az ellipszis azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek két adott ponttól (fókuszponttól) való távolságainak összege állandó.* A szintvonalaink az AB szakasszal párhuzamos egyenesek, mert a harmadik csúcsot ezeken választva a háromszög területe állandó marad. Olyan ellipszist kell rajzolnunk, amelynek fókuszpontjainak távolsága megegyezik a háromszög alapjával

$$F_1F_2 = AB,$$

így az ellipszisen mozoghat a harmadik csúcsunk, C. Az ellipszisen egy tetszőleges P pontot felvéve

$$PF_1 + PF_2 = 2a,$$

ahol $2a$ az ellipszis nagytengelye, ezért a nagytengely meg kell, hogy egyezzen a háromszög kerületének és alapjának a különbségével, azaz

$$2a = K - AB.$$

A háromszög magasságát megkapjuk, ha a nagytengellyel párhuzamost húzunk úgy, hogy az egyenesnek és az ellipszisnek legyen közös pontja. Arra törekszünk, hogy a nagytengelytől a metszéspontig mért távol a lehető legnagyobb legyen, hiszen a magasság így lesz a legnagyobb. Ez nyilván akkor lehetséges, ha a párhuzamos érinti az ellipszist, vagyis a legnagyobb magasság az ellipszis tető-, illetve mélypontjához (a kistengely végpontjaihoz) tartozik. Azt kaptuk, hogy adott alap és kerület mellett, akkor lesz a háromszög területe maximális, ha a szárak egyenlők, a háromszög egyenlő szárú.

3.3. Részleges változtatásokkal megoldható feladatok

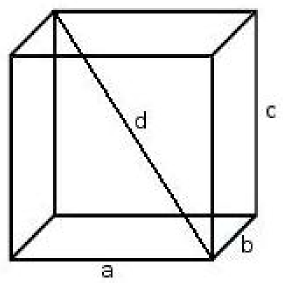
3.3.1. A módszerről

Sokszor találkozhatunk olyan példákkal, amelyekben több változótól függő szélsőértéket keresünk. Ilyenkor egyszerűbb eljárásnak bizonyul, ha egy kivételével rögzítjük a változókat, és azt az egyet változtatjuk, hiszen a teljes változást, azt amikor az összes változó egyidejűleg változik nehéz követni. Bizonyos példákban előnyösebb, ha két, három, esetleg több elemet rögzítünk, és a többit változtatjuk, ilyenkor is beszélhetünk részleges változtatásról. Az eljárás gyökere a következő elv: *egy többváltozós függvény csak úgy lehet egyszerre az összes változóra nézve maximális/minimális, ha külön minden egyes változóra nézve maximumot/minimumot ér el.*

3.3.2. Feladatok

1. Feladat
Adott térfogatú dobozok (téglatestek) közül részleges változtatással keressük meg a legkisebb felszínűt!

Megoldás:



3.7. ábra.

A doboz térfogata adott, vagyis $V = abc =$ állandó. Nekünk a felszínt kell minimalizálnunk, azaz

$$S = 2ab + 2bc + 2ca$$

minimumát keressük. Rögzítsük egy pillanatra c-t, így $ab =$ állandó. A felület képletét kicsit átalakítva kapjuk, hogy

$$S = 2ab + 2(a + b)c.$$

A felszín tehát akkor lesz minimális, ha $2(a+b)$ minimális, vagyis egy adott ab területű téglalap kerülete a legkisebb. Erre felírva a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

egyenlőség pedig akkor áll fenn, ha

$$a = b.$$

Most rögzítsük b-t, így $ac =$ állandó, és

$$S = 2ac + 2(a + c)b$$

akkor lesz minimális, ha $2(a+c)$ minimális, vagyis egy adott ac területű téglalap kerülete a legkisebb, ami akkor lehetséges, ha

$$a = c.$$

Végső soron rögzítsük a-t, így $bc =$ állandó, és

$$S = 2bc + 2(b + c)a$$

akkor lesz minimális, ha $2(b+c)$ minimális, vagyis egy adott bc területű téglalap kerülete a legkisebb. Ez akkor következik be, ha

$$b = c.$$

Azt kaptuk, hogy $a = b$, $a = c$, $b = c$, vagyis

$$a = b = c.$$

Adott térfogatú téglatestek közül tehát a kockának a legkisebb a felszíne.

2. Feladat
Adott kerületű háromszögek közül melyiknek a legnagyobb a területe?

Megoldás:
A $K = a + b + c$ kifejezés állandó, keressük a terület maximumát. Rögzítsük az egyik oldalt, pl.a-t, a másik két oldalt tudjuk változtatni, így $b+c$ adott. A 3.2.2. szakaszban a 2. feladatban már beláttuk, hogy ilyen esetben a $T = \frac{a}{2} \cdot m_a$ kifejezés akkor lesz maximális, ha a háromszög egyenlő szárú, vagyis $b = c$. Hasonlóan, ha b-t rögzítjük, akkor az $a = c$, ha pedig c-t, akkor az $a = b$ esetén lesz a terület maximális. Eredményül így azt kaptuk, hogy

$$a = b = c,$$

vagyis adott kerület mellett az egyenlő oldalú, azaz szabályos háromszögnek a legnagyobb a területe.

3.4. Koordináta geometria

Vannak olyan feladatok, ahol a koordináta geometriát célszerű használni, hiszen adott pontokra, esetleg azok távolságára kérdeznek rá. Ha ábrázoljuk a síkidomokat koordináta rendszerben, akkor egyszrűbbnek tűnik a megoldás, könnyebben észrevesszünk összefüggéseket. Sok esetben oda kell figyelnünk arra, hogy egy-egy kifejezés milyen alakzatnak az egyenlete, mik azok a pontok, amelyekre rákérdez a feladat.

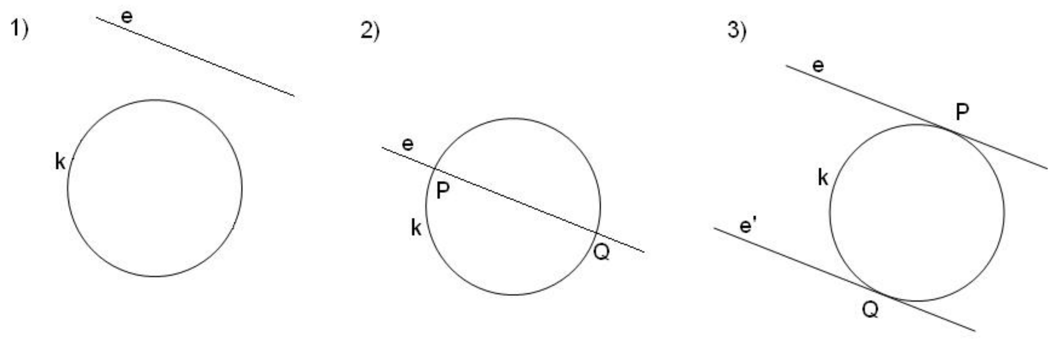
3.4.1. Feladatok

1. Feladat

Az x, y valós számok kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Határozzuk meg $2x + 3y$ lehetséges legnagyobb és legkisebb értékét!

Megoldás:

Az $x^2 + y^2 = 1$ kifejezés az egység sugarú kör egyenlete, az $2x + 3y = m$ pedig egy egyenes egyenlete, ahol az m maximumát és minimumát keressük. Az m akkor a legnagyobb, ha az egyenes a lehető „legmagasabban” van, legkisebb pedig akkor, ha a lehető „legalacsonyabban” található. A kör és egyenes helyzete három féle lehet:



3.8. ábra.

1) nem érinti a kört, és nem is megy át rajta, így nem lesz közös pontjuk

2) az egyenes átmegy a körön, így metszi két helyen

3) érinti, így csak egy pontban metszi.

A két egyenlet közös megoldásait keressük, így biztosan lesz közös pontja a körnek és az egyenesnek. A két szélső esetre vagyunk kíváncsiak, ezért azt vizsgáljuk, hogy mikor érinti az egyenes a kört, mert ekkor van a lehető „legmagasabban”, illetve „legalacsonyabban” a körhöz képest, így megkapjuk a maximumot és a minimumot is, ahogy azt a 3.8. ábra is szemlélteti. A két egyenletet, mint egyenletrendszert tekintjük, és keressük a közös megoldást

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{m}{3} &= y. \end{aligned}$$

A második egyenletből y ki is van fejezve, így behelyettesítve az elsőbe kapjuk, hogy

$$x^2 + \left(-\frac{2}{3} \cdot x + \frac{m}{3}\right)^2 = 1.$$

Bontsuk fel a zárójelet és szorozzunk be 9-cel

$$9x^2 + 4x^2 - 4x \cdot m + m^2 = 9,$$

vonjunk össze és rendezzük az egyenletünket 0-ra

$$13x^2 - (4m)x + (m^2 - 9) = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletébe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{4m \pm \sqrt{16m^2 - 4 \cdot 13 \cdot (m^2 - 9)}}{26}.$$

Nekünk az kell, hogy a diszkrimináns nulla legyen, mert akkor kapunk egy megoldást, vagyis ekkor lesz az egyenesnek és a körnek egy közös pontja. Ekkor $D = 0$ -ra kapjuk, hogy

$$16m^2 - 52m^2 + 468 = 0,$$

rendezve az egyenletet

$$-36m^2 = -468,$$

osztva -36-tal

$$m^2 = 13,$$

négyzetgyököt vonva

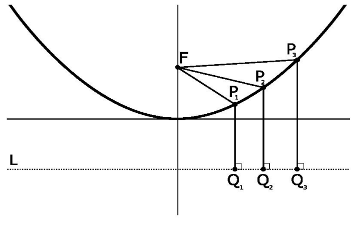
$$m = \pm\sqrt{13}.$$

Innen egyértelműen következik, hogy $\sqrt{13}$-nál lesz a kifejezés maximuma, és $-\sqrt{13}$-nál pedig a minimuma. Visszahelyettesítve m-et a második egyenletbe kapjuk, hogy $2x+3y$ minimuma $-\sqrt{13}$, maximuma pedig $\sqrt{13}$.

2. Feladat

A $10y = x^2$ egyenletű parabola melyik pontja van legközelebb az $A(0,1)$ ponthoz?

Megoldás:



3.9. ábra.

Az $y = \frac{x^2}{10}$ parabolának keressük azt a $P(x, \frac{x^2}{10})$ pontját, amely az $A(0, 1)$ ponthoz a legközelebb van. A Pitagorasz-tételből kapjuk, hogy a P és az A pont távolságának négyzete

$$d^2(x) = (x-0)^2 + \left(\frac{x^2}{10} - 1\right)^2,$$

elvégezve a négyzetreemelést

$$d^2 = x^2 + \frac{x^4}{100} - \frac{x^2}{5} + 1,$$

összevonva

$$d^2 = \frac{1}{100} \cdot x^4 + \frac{4}{5} \cdot x^2 + 1,$$

kiemelve $(\frac{1}{100})$-at

$$d^2 = \frac{1}{100}(x^4 + 80x^2 + 100),$$

teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy

$$d^2 = \frac{1}{100}[(x^2 + 40)^2 - 1500].$$

A távolság így már csak (x^2+40)-től függ, ami akkor lesz minimális, ha (x^2+40) minimális, vagyis $x = 0$. A $10y = x^2$ parabolának tehát a $P(0, 0)$ pontja van a legközelebb az $A(0, 1)$ ponthoz.

4. fejezet

Függvényekkel kapcsolatos feladatok

4.1. Teljes négyzetté alakítás

Másodfokú, vagy másodfokúra visszavezethető függvényeket célszerű teljes négyzetté alakítani, mert így könnyebben meg tudjuk határozni a maximumát, vagy minimumát. A másodfokú függvény általános alakja a következő:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$. Az a mutatja a függvény alakját, ha negatív akkor konkáv, maximuma van, ha pozitív akkor konvex, minimuma van. Leosztva a-val

$$\frac{f(x)}{a} = \left(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right),$$

majd teljes négyzetté alakítva a következőt kapjuk

$$\frac{f(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}.$$

Közös nevezőre hozva az eredmény

$$\frac{f(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

ami nyilván akkor lesz minimális, ha

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

hiszen a másik tag nem függ x-től, az csak egy konstans, az

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenség pedig mindig teljesül. Így tehát akkor kapunk minimumot, ha

$$x = -\frac{b}{2a},$$

vagyis ebben a pontban lesz az $\frac{f(x)}{a}$ függvénynek minimuma.

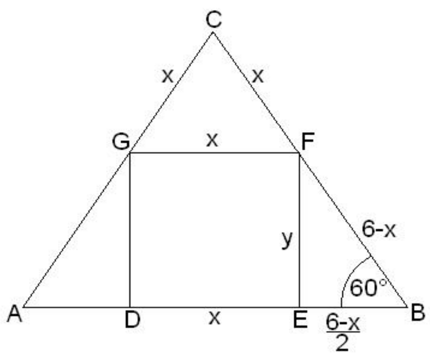
4.1.1. Feladatok

1. Feladat

Egy 6 egység oldalú szabályos háromszögbe úgy helyezünk el egy téglalapot, hogy mindegyik csúcsa a háromszög valamely oldalára illeszkedjen. Az ilyen téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe, és mekkora ez a maximális terület?

Megoldás:

A háromszög csúcsait jelöljük A, B, C-vel. Ha mindegyik csúcs egy-egy oldalon van, akkor lesz olyan oldal, amelyen két csúcs is lesz, legyen ez az oldal az AB, ahogy a 4.1. ábrán szerepel.



4.1. ábra.

A téglalapnak a háromszög AB oldalán fekvő oldala legyen $x = DE = GF$, a másik oldalt is fejezzük ki x segítségével, hogy csak egy ismeretlentől függjön a terület. Szimmetria okok miatt $x = GC = CF$, így $FB = AG = (6-x)$. Mivel $EB = AD = \frac{6-x}{2}$, így a BFE háromszög EF oldalát a Pitagorasz-tétel segítségével ki tudjuk fejezni x-el. Legyen $EF = y$, így

$$y^2 + \left(\frac{6-x}{2}\right)^2 = (6-x)^2.$$

Az egyenletet y^2-re rendezve kapjuk, hogy

$$y^2 = \frac{3\cdot(6-x)^2}{4}.$$

Mivel távolságról van szó, ami nem lehet negatív, ezért négyzetgyököt vonva csak a pozitív eredményt vesszük figyelembe, így azt kapjuk, hogy

$$y = \frac{\sqrt{3} \cdot (6 - x)}{2}.$$

Meg kell állapítanunk x értelmezési tartományát. Ez az intervallum $I = (0, 6)$, mert 0 akkor lenne, ha a C csúcsból induló magasságvonal lenne, 6 pedig akkor, ha maga az AB oldal, de így egyeneseket kapnánk, nem pedig téglalapot, ezért van a nyílt intervallum. A két szélső eset között van értelmezve x. A téglalap területét x-el kifejezve kapjuk

$$T(x) = \frac{\sqrt{3}(6 - x)}{2} \cdot x,$$

ahol $T : I \mapsto \mathbb{R}$ és $x \mapsto T(x)$. A szélsőérték megkereséhez a függvényünket teljes négyzetté alakítjuk:

$$T(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-x^2 + 6x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left[(x-3)^2 - 9\right].$$

Ebből látszik, hogy $x = 3$ a maximum helye. Ha x-et visszahelyettesítjük a függvényünkbe

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(6 - 3),$$

akkor megkapjuk a maximális értéket, ami

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Így megkaptuk a téglalap oldalait, a maximális területet most már meg tudjuk határozni, vagyis

$$T = 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

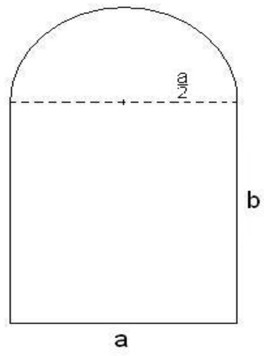
Azt kaptuk eredményül, hogy a 6 egység oldalú szabályos háromszögbe a kívánt módon elhelyezett maximális területű téglalap oldalai $x = 3$, vagyis a háromszög oldalának a fele, és $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, a területe pedig $T = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

2. Feladat

Egy ablak alakja téglalap, felette félkörrel. Milyenek legyenek az ablak méretei, hogy 8 méteres kerület mellett a lehető legtöbb fényt tudja beengedni?

Megoldás:

Adott kerület mellett az ablak maximális területét keressük, mert így tudja a lehető legtöbb fényt beengedni.



4.2. ábra.

Ha az oldalakat jelöljük a-val és b-vel a 4.2. ábrán látható módon, akkor a félkör sugara $r = \frac{a}{2}$ lesz. A kerület így

$$K = (a + 2b) + \frac{2r\pi}{2},$$

ha r helyére $\frac{a}{2}$-t írunk, akkor

$$K = a + 2b + \frac{a}{2}\pi = 8.$$

Az egyenletből az egyik ismeretlent a másikkal kifejezve kapjuk, hogy

$$b = \frac{8 - a - \frac{a}{2}\pi}{2},$$

egyszerűsítve

$$b = 4 - a \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Mivel b távolságot jelöl, ezért $b > 0$, valamint hasonló okok miatt a is pozitív, így az előbbi egyenletünkből következik, hogy

$$a \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 4,$$

ezt a-ra rendezve tudjuk a értelmezési tartományát

$$0 < a < \frac{4}{\frac{2+\pi}{4}} = \frac{16}{2 + \pi}.$$

A

$$T = ab + \frac{r^2\pi}{2} = ab + \frac{a^2\pi}{8}$$

területképletbe b-t helyettesítve

$$T = a \cdot \left[4 - a\left(\frac{2 + \pi}{4}\right)\right] + \frac{a^2\pi}{8},$$

a-val beszorozva

$$T = 4a - a^2 \cdot \frac{2 + \pi}{4} + \frac{a^2\pi}{8},$$

és $-a^2$-et kiemelve kapjuk, hogy

$$T = -a^2\left(\frac{4+\pi}{8}\right) + 4a.$$

Ez már egy másodfokú függvény

$$T(a) = -\frac{4+\pi}{8}\cdot\left(a^2 - \frac{32}{4+\pi}a\right).$$

A mínusz jelből tudjuk, hogy a függvényünknek maximum értéke van. Teljes négyzetté alakítva

$$T(a) = -\frac{4+\pi}{8}\cdot\left[\left(a-\frac{16}{4+\pi}\right)^2 - \left(\frac{16}{4+\pi}\right)^2\right]$$

megkapjuk a maximum helyét, ami

$$a = \frac{16}{4+\pi}.$$

Az eredmény, amit kaptunk jó, mert az értelmezési tartományon belül van, vagyis $0 < \frac{16}{4+\pi} < \frac{16}{2+\pi}$. Az a-ra kapott eredményt b egyenletébe beírva kapjuk, hogy

$$b = 4 - \frac{16}{4+\pi}\cdot\left(\frac{2+\pi}{4}\right),$$

rendezve az egyenletet

$$b = \frac{8}{4+\pi}.$$

Így már meghatároztuk, hogy milyen kell legyen ez az ablak, hogy a lehető legtöbb fényt tudja beengedni. A téglalap oldalai $a \approx 2,24m$, $b \approx 1,12m$.

4.2. Deriválás segítségével megoldható feladatok

A diák a deriválással kapcsolatos ismeretek birtokában, tudja, hogy mikor deriválható egy függvény, ismeri az alapderiváltakat, és a deriválási szabályokat, esetleg a fontosabb tételekkel is tisztában van, tudja őket alkalmazni. Ilyenkor sok esetben célszerűbb a deriváláshoz folyamodni. Lehetnek olyan feladatok, ahol esetleg más, elemi megoldást nem tudunk adni az adott feladatra, ilyenkor érdemes deriválnunk az adott függvényt. Előfordulhatnak olyan példák, amelyek deriválás segítségével egyszerűbben oldhatók meg.

4.2.1. Felhasznált definíciók, tételek

Definíció: Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban lokális minimuma (maximuma) van, ha van olyan V környezete a-nak, amelyben f értelmezve van, és minden $x \in V$-re $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$). Ekkor az a pontot az f függvény lokális minimumhelyének (lokális maximumhelyének) nevezzük.

Tétel: Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható minden $x \in \mathbb{R}$ pontban. Ha f -nek a-ban lokális szélsőértékhelye van, akkor $f'(a) = 0$.

Megjegyzés: Ha tudjuk, hogy létezik szélsőérték, akkor elég kiszámolni a derivált zérushelyeit, és ezekben megnézni a függvényértékeket.

4.2.2. Feladatok

1. Feladat
Adott egy derékszögű háromszög, amelyben az egyik befogó és az átfogó hosszának összege $10cm$. Mekkora lehet maximálisan a területe?

Megoldás:
A két befogó legyen a és b, az átfogó pedig c. Az átfogó kisebb kell legyen, mint $10cm$, hiszen, ha megengednénk az egyenlőséget, akkor az egyik befogó $0cm$ lenne, így pedig elfajult esetet kapnánk. Teljesülnie kell tehát a

$$c + a = 10cm$$

feltételnek, valamint a Pitagorasz-tétel miatt igaz, hogy

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Kifejezve a-t

$$a = 10 - c,$$

majd ezt behelyettesítve a Pitagorasz-tételbe

$$(10 - c)^2 + b^2 = c^2,$$

és b-re rendezve az egyenletet

$$b = \sqrt{c^2 - (10 - c)^2},$$

ezután egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$b = \sqrt{20c - 100}.$$

A $20c - 100 \geq 0$ kell legyen, mert négyzetgyököt vonva csak így kapunk valós eredményt. Ez a kifejezés akkor lesz pozitív, ha $c \geq 5$, viszont most sem engedhetjük meg az egyenlőséget, mert így ismét elfajult háromszöget kapnánk (egy szakaszt). Az értelmezési tartomány tehát $5 < c < 10$. A $T_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2}$ területképletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$T_{\Delta} = \frac{(10 - c)\sqrt{20c - 100}}{2}.$$

Ez a kifejezés már csak c-től függ, s mivel az $(5, 10)$ intervallumon a függvényünk folytonos és nemnegatív, ezért biztos, hogy lesz maximuma. Deriválva

$$T'(c) = \frac{1}{2} \cdot \Big(-1 \cdot \sqrt{20c - 100} + (10 - c) \cdot \frac{1}{2} \cdot (20c - 100)^{-\frac{1}{2}} \cdot 20 \Big),$$

és rendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$T'(c) = -\frac{\sqrt{20c - 100}}{2} + \frac{100 - 10c}{2\sqrt{20c - 100}}.$$

A deriváltat egyenlővé tesszük nullával, hogy megkapjuk c értékét a maximális területre

$$-\frac{\sqrt{20c - 100}}{2} + \frac{100 - 10c}{2\sqrt{20c - 100}} = 0,$$

egyszerűsítve, és a negatív tagot rendezve a másik oldalra

$$\frac{100 - 10c}{\sqrt{20c - 100}} = \sqrt{20c - 100},$$

beszorozva a nevezővel

$$100 - 10c = 20c - 100,$$

majd egy oldalra rendezve c-t

$$200 = 30c,$$

kapjuk, hogy

$$c \approx 6,67cm.$$

Visszahelyetettesítve megkapjuk a és b értékét

$$a \approx 3,33cm,$$

valamint

$$b \approx 5,78cm.$$

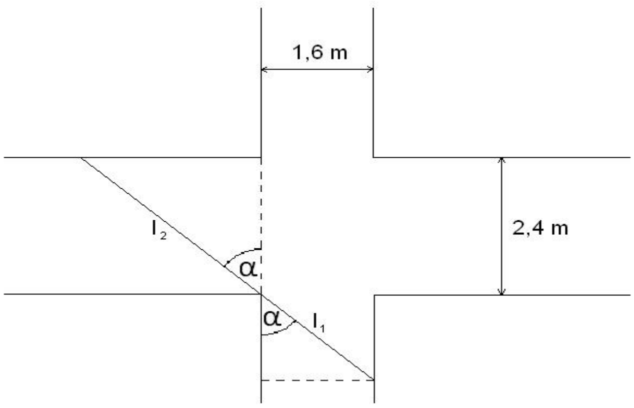
Az eredményeink jók, mert teljesül rájuk a háromszögegyenlőtlenség. A maximális terület ezekkel a feltételekkel

$$T \approx \frac{3,33 \cdot 5,78}{2} = 9,6237cm^2.$$

2. Feladat

Két folyosó merőlegesen metszi egymást, az egyik $2,4m$, a másik $1,6m$ széles. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet vízszintes helyzetben az egyik folyosóról a másikra még át lehet vinni?

Megoldás:



4.3. ábra.

Maximumot keresünk, a leghosszabb ilyen létrát, amely eleget tesz a feltételeknek. Nyilván ha a létra $1,6m$ vagy $2,4m$, akkor könnyen befordítható, ez esetben a 4.3. ábrán látható α szög 0 és 90° között változhat. Mi viszont arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen α szögnél lesz a keresztmetszet a legkisebb. Kapunk két derékszögű háromszöget, amelyek hasonlóak a megfelelő oldalak párhuzamossága miatt, így a közös csúcsnál lévő szögek (α) egyenlőek, mert csúcsszögek. Átfogójuk legyen l_1 és l_2, és tudjuk, hogy $l_1 + l_2 = l$, a létra hossza. A két háromszögben l_1-et és l_2-t kifejezzük α szögfüggvényeinek segítségével

$$\sin\alpha = \frac{1,6}{l_1},$$

ahol

$$l_1 = \frac{1,6}{\sin\alpha},$$

valamint

$$\cos\alpha = \frac{2,4}{l_2},$$

ahol

$$l_2 = \frac{2,4}{\cos\alpha}.$$

Tudjuk, hogy $l_1 + l_2 = l$, tehát a keresztmetszet az α függvényében

$$\frac{1,6}{\sin\alpha} + \frac{2,4}{\cos\alpha} = l(\alpha).$$

Ebben az egyenletben ha $\alpha \to 0$, akkor $l(\alpha) \to \infty$, valamint ha $\alpha \to 90°$ akkor szintén $l(\alpha) \to \infty$. Mivel a függvényünk az adott intervallumban folytonos és nemnegatív, a végpontokban pedig ∞-hez tart, ezért biztos, hogy van minimuma. Deriválva a függvényt

$$l'(\alpha) = 1,6 \cdot [-(\sin^{-2})] \cdot \cos\alpha + 2,4 \cdot [-(\cos\alpha)^{-2}] \cdot (-\sin\alpha)$$

egyenlővé téve nullával

$$-1,6 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + 2,4 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0,$$

a negatív tagot a másik oldalra rendezve

$$2,4 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 1,6 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

a nevezőkkel beszorozva

$$2,4 \cdot \sin^3\alpha = 1,6 \cdot \cos^3\alpha,$$

átrendezve az egyenletet

$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} = \mathrm{tg}^3\alpha = \frac{1,6}{2,4},$$

köbgyököt vonva

$$\mathrm{tg}\ \alpha \approx 0,8736,$$

kapjuk, hogy

$$\alpha \approx 41,14°.$$

Ez az a szög, amelynél még befordítható a létra egyik folyosóról a másikra. Visszahelyettesítve α-t az eredeti egyenletbe

$$l = \frac{1,6}{\sin 41,14°} + \frac{2,4}{\cos 41,14°}$$

kapjuk, hogy

$$l \approx 2,43m + 3,19m = 5,62m.$$

A maximális méretű létra, amit még egyik folyosóról a másikra át lehet vinni az $5,62m$.

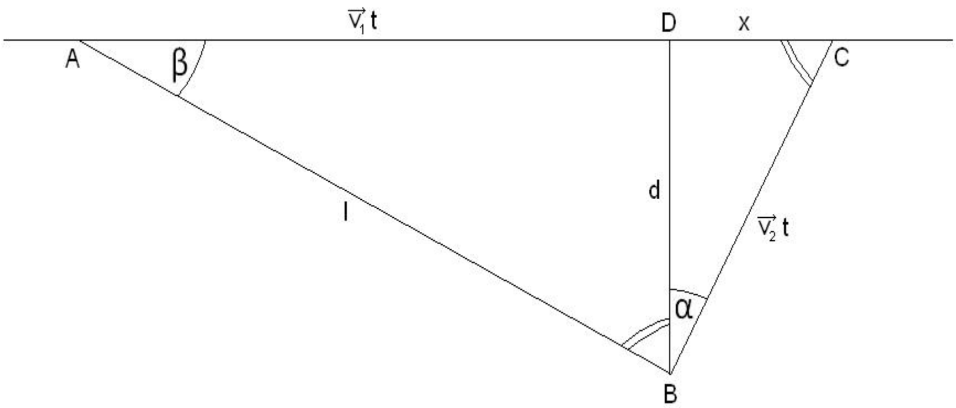
4.3. Egy fizikai feladat

Ebben a részben arra szeretném felhívni a figyelmet, hogy nemcsak a matematikában találkozhatunk szélsőérték-feladatokkal, hanem más területeken is, mint például a fizikában.

Feladat

Egyenes országúton egy kocsi v_1 sebességgel halad. Az úttól d távolságra megpillantjuk az autót, amely tőlünk l távolságra van. Milyen irányba fussunk, hogy a lehető legkisebb sebességgel még éppen utol tudjuk érni a gépkocsit?

Megoldás:



4.4. ábra.

Valamilyen α szöggel és v_2 sebességgel kell futnunk ahhoz, hogy utol tudjuk érni a kocsit. Az autó és mi is ugyanannyi idő alatt tesszük meg az utat, de nyilván a gépkocsi gyorsabb, mint mi vagyunk. Az út, amelyet t idő alatt megteszünk, hogy elérjük a kocsit $s_2 = v_2 \cdot t$, a jármű pedig ugyan ennyi idő alatt $s_1 = v_1 \cdot t$ utat tesz meg. Az 4.4. ábra szerint van két derékszögű háromszögünk, ABD $\triangle$ és BDC $\triangle$, ahol $\beta = BAD\sphericalangle$ és $\alpha = DBC\sphericalangle$. Ekkor

$$\sin\alpha = \frac{x}{v_2 t},$$

ahonnan

$$x = \sin\alpha \cdot v_2 t,$$

valamint

$$\cos\alpha = \frac{d}{v_2 t},$$

ahonnan

$$d = \cos\alpha \cdot v_2 t.$$

Elosztva egymással a kapott egyenletet x-re és d-re

$$\frac{x}{d} = \mathrm{tg}\ \alpha,$$

vagyis

$$x = \mathrm{tg}\ \alpha \cdot d.$$

Most β-ra is felírva szögfüggvényeket

$$\sin\beta = \frac{d}{l},$$

ahonnan

$$d = l \cdot \sin\beta,$$

valamint

$$\cos\beta = \frac{v_1 \tilde{t}}{l},$$

ahonnan

$$v_1 \tilde{t} = l \cdot \cos\beta.$$

A gépkocsi által megtett út

$$v_1 t = l \cdot \cos\beta + x,$$

x-re rendezve

$$x = v_1 t - l \cdot \cos\beta.$$

A $d = \cos\alpha \cdot v_2 t$ egyenletből t-t kifejezve

$$t = \frac{d}{v_2 \cos\alpha},$$

és behelyettesítve az előző egyenletbe kapjuk, hogy

$$x = \frac{v_1 d}{v_2 \cos\alpha} - l \cos\alpha.$$

Az x-re két egyenletet is kaptunk, ezeket egyenlővé téve egymással

$$\mathrm{tg}\ \alpha \cdot d = \frac{v_1 d}{v_2 \cos\alpha} - l \cos\alpha,$$

átszorozva a nevezővel

$$d v_2 \sin\alpha = v_1 d - l v_2 \cos\alpha \cos\beta,$$

a $d = l \cdot \sin\beta$-t behelyettesítve és a negatív tagot a másik oldalra rendezve

$$l \sin\beta \cdot v_2 \sin\alpha + l v_2 \cos\alpha \cos\beta = v_1 d,$$

lv_2-t kiemelve

$$l v_2 \cdot (\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta) = v_1 d.$$

Tudva azt, hogy $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$l v_2 \cdot \cos(\alpha - \beta) = v_1 d,$$

v_2-re rendezve az egyenletet

$$v_2 = \frac{v_1 d}{l \cos(\alpha - \beta)}.$$

A v_2-t kell minimalizálnunk, ehhez a $\cos(\alpha - \beta)$-t kell maximalizálnunk. Ennek a legnagyobb értéke 1, amit

$$\alpha - \beta = 0$$

esetén vesz fel, vagyis

$$\alpha = \beta.$$

Ebből az következik, hogy a $ABD \bigtriangleup$ és $BCD \bigtriangleup$ hasonló, és az $ABD\sphericalangle = BCD\sphericalangle$. Mivel $\alpha + BCD\sphericalangle = 90°$, ezért

$$ABD\sphericalangle + \alpha = 90°.$$

Ahhoz, hogy a leglassabban kelljen futnunk, de még pont elérjük a gépkocsit, az AB-re merőlegesen kell szaladnunk.

5. fejezet

Egy feladat többféle megoldása

Ebben a részben egy feladatot többféleképpen oldunk meg, ezzel is szemléltetve azt, hogy nincsenek konkrét sémák, hanem egy feladat megoldására gyakran többféle módszert is találhatunk. A különféle megoldási módszerekkel pedig fejlődik a diák megoldókészsége.

Feladat
Határozzuk meg a következő függvény minimumát $f(x) = 2x^2 + \frac{3}{x^2+1} + 5$!

1. Megoldás:
A függvényünk az egész valós számok halmazán értelmezve van. Mindhárom tag nagyobb vagy egyenlő mint nulla, vagyis $2x^2 \geq 0$, $\frac{3}{x^2+1} > 0$, valamint $5 > 0$. Ezenkívül $x \to \pm\infty$ esetén $x^2 \to \infty$, ebből következően a függvény értékkészlete az $(5, \infty)$ intervallum, így maximuma nem lehet, de a folytonosság miatt minimuma van. Deriválva azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = 4x + 3(-1)(x^2+1)^{-2} \cdot 2x = 4x - \frac{6x}{(x^2+1)^2},$$

majd közös nevezőre hozva és x-et kiemelve

$$f'(x) = \frac{x \cdot [4(x^2+1)^2 - 6]}{(x^2+1)^2}.$$

A deriváltat egyenlővé tesszük nullával, hogy megkapjuk a lehetséges szélsőértékhelyeket

$$\frac{x \cdot [4(x^2+1)^2 - 6]}{(x^2+1)^2} = 0,$$

beszorozva a nevezővel és elvégezve a négyzetreemelést

$$x\left[4x^4 + 8x^2 - 2\right] = 0.$$

Akkor lesz ez a szorzat nulla, ha valamelyik tényezője nulla, vagyis vagy

$$x_1 = 0,$$

vagy

$$4x^4 + 8x^2 - 2 = 0.$$

Az utóbbi kifejezés másodfokú egyenletre visszavezethető, ha $x^2 = y$, azaz

$$4y^2 + 8y - 2 = 0,$$

osztva 2-vel

$$2y^2 + 4y - 1 = 0$$

behelyettesítve a másodfokú egyenlet megoldóképletébe kapjuk, hogy

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{4}.$$

Az y-ra negatív érték nem lesz jó, mert négyzetgyököt vonva x értéke nem lenne valós szám, így

$$y = -1 + \frac{\sqrt{24}}{4} = x^2,$$

ahonnan x értéke

$$x_{2,3} \approx \pm 0,47.$$

Kaptunk három értéket x-re, ahol szélsőérték lehet. Ezeket a számokat visszahelyettesítve az eredeti függvényünkbe

$$f(0) = 8,$$

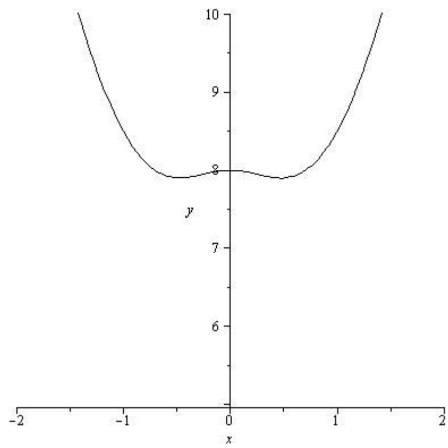
valamint

$$f(\pm 0,47) \approx 7,9$$

megkapjuk az adott pontban a függvényértéket, majd ezek közül kiválasztjuk a legkisebbet, ami a $7,9$, ez lesz a minimum. Eredményül tehát azt kaptuk, hogy szimmetria okok miatt az $x_1 = 0,47$-ben és az $x_2 = -0,47$-ben van a függvénynek minimuma, a minimum érték pedig 7,9.

2. Megoldás:

Az $f(x)$ függvényt ábrázoljuk Maple-ben, f az egész valós számok halmazán értelmezve van.



5.1. ábra.

Látható, hogy az y-tengelyre szimmetrikus az f, és két helyen is ugyanaz lesz a minimum értéke. A függvényünket eltoljuk v-vel lefelé addig, hogy érintse az x-tengelyt, így ki tudjuk számolni v értékét, ami megmutatja, hogy mennyi a minimuma a függvényünknek.

$$f(x) = 2x^2 + \frac{3}{x^2+1} + 5 - v,$$

egyenlővé téve nullával

$$2x^2 + \frac{3}{x^2+1} + 5 - v = 0,$$

beszorozva a nevezővel

$$2x^2 \cdot (x^2+1) + 3 + 5 \cdot (x^2+1) - v \cdot (x^2+1) = 0,$$

elvégezve a beszorzást

$$2x^4 + 2x^2 + 3 + 5x^2 + 5 - vx^2 - v = 0,$$

kiemelve x^2-et

$$2x^4 + (7-v)x^2 + 8 - v = 0,$$

egy másodfokú egyenletet kaptunk x^2-re. A megoldóképletbe behelyettesítve x^2-re kapunk megoldást

$$(x^2)_{1,2} = \frac{-(7-v) \pm \sqrt{(7-v)^2 - 8 \cdot (8-v)}}{4}.$$

Nekünk az kell, hogy csak egy pontban érintse a függvény az x-tengelyt, ehhez arra van szükségünk, hogy egy megoldásunk legyen, vagyis a diszkrimináns nulla legyen ($D = 0$), tehát

$$(7-v)^2 - 8(8-v) = 0.$$

A zárójelet felbontva és beszorozva

$$49 - 14v + v^2 - 64 + 8v = 0,$$

összevonva

$$v^2 - 6v - 15 = 0$$

egy másodfokú egyenletet kaptunk v-re. A megoldóképletbe behelyettesítve

$$v_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+60}}{2},$$

ahonnan a két megoldás

$$v_1 = \frac{6+\sqrt{96}}{2} \approx 7,9$$

és

$$v_2 = \frac{6-\sqrt{96}}{2} \approx -1,9,$$

viszont $v > 0$, hiszen lefelé toltuk el f-et, ezért v_2 nem megoldás. Így tehát azt kaptuk, hogy az $f(x)$ függvénynek a minimum értéke $7,9$.

3. Megoldás:

Az $f(x) = 2x^2 + \frac{3}{x^2+1} + 5$ függvénynek a minimumát számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséggel keressük meg. Szeretnénk egy olyan tagot, amelyben van (x^2+1) kifejezés, hogy a mértani középnél $\frac{3}{(x^2+1)}$-el osszeszorozva kiessen. Észrevesszük, hogy ha

$$f(x) = (2x^2+2) + \frac{3}{x^2+1} + 3$$

alakba írjuk a függvényt, majd kiemelve 2-t kapjuk, hogy

$$f(x) = 2(x^2+1) + \frac{3}{x^2+1} + 3.$$

A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget az

$$f(x) - 3 = 2(x^2+1) + \frac{3}{x^2+1}$$

kifejezésre írjuk fel. Így viszont „csaltunk” egy kicsit, a végeredményhez hosszá kell adnunk ezt a 3-ast, hogy helyes legyen a számolás, tehát

$$\frac{2(x^2+1) + \frac{3}{x^2+1}}{2} \geq \sqrt{2(x^2+1) \cdot \frac{3}{x^2+1}},$$

egyszerűsítve és átszorozva 2-vel

$$2(x^2+1) + \frac{3}{x^2+1} \geq 2\sqrt{6}.$$

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fent, ha a tagok egyenlők, vagyis

$$2(x^2+1) = \frac{3}{x^2+1}.$$

Innen ki tudjuk számolni x értékét, ahol a függvénynek minimuma van, de ez most nem volt kérdés, hanem csak a minimum érték. Az $f(x) - 3$ függvényünkre kaptunk minimum értéket, ami $2\sqrt{6}$, de ehhez hozzá kell adni még 3-at, így tehát $f(x)$ minimuma $2\sqrt{6} + 3$, ami közelítőleg 7,9.

Összefoglalás

Egy középiskolás diák tanulmányait végigkísérik a szélsőérték-feladatok. Kilencedik osztályban megtanulja a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Ezt már alkalmazzák a különböző feladatokban is, például keresik a maximális területű négyszöget. Tizedik osztályban a tanulók megismerkednek a másodfokú függvényekkel, különféle feladatokon keresztül elsajátítják a függvényelemzés minden csínját-bínját, megtanulják megkeresni és kiszámolni a függvények minimumát, illetve maximumát. A tizenegyedik évfolyam során a kötelező tananyag egy nagyobb egységét a koordináta geometria teszi ki, melyben elmélyedve a diákok megismerik a különféle alakzatok egyenleteit, azok lehetséges helyzeteit, esetleg két alakzat közös részének legbővebb és legszűkebb halmazát. A végzős évfolyam diákjai az emelt szintű érettségire való felkészítőkön elsajátítják a deriválási szabályokat, amely bármilyen magasabb rendű függvény vizsgálatát lehetővé teszi számukra, s később más jellegű feladatoknál is alkalmazni tudják.

A szélsőérték-feladatok témakörét rendkívül fontosnak tartom, hiszen a középiskolai tanulmányok során minden évben felbukkannak olyan fejezetek, ahol maximumot illetve minimumot kell számolni. A különféle megoldási módszerek közül pedig minden diák ki tudja választani a neki leginkább tetszőt és érthetőt.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Besenyei Ádámnak szakdolgozatom elkészítésében nyújtott segítségéért és útmutató tanácsaiért, valamint családomnak, akik tanulmányaim során mindig mellettem álltak, és mind anyagilag, mind lelkiekben támogattak.

Irodalomjegyzék

[1] Pólya György: Indukció és analógia, Gondolat kiadó, Budapest, 1988.

[2] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, TypoTEX kiadó, Budapest, 1994.

[3] Pósa Lajos: Összefoglalás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1999.

[4] Kovács István, Párkányi László: Fizikai példatár (Mechanika I.), Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.

[5] Hortobágyi István - Marosvári Péter - Pálmai Lóránt - Pósfai Péter -Siposs András - Vancsó Ödön: Egységes érettségi feladatgyűjtemény (Matematika I.), Konsept-H Könyvkiadó, Budapest, 2003.

[6] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Analízis I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[7] Dr. Erostyák János - Dr. Kozma László: Fénytan (Általános fizika III. kötet), Dialóg Campus Kiadó, Pécs-Budapest, 2003.

[8] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1962.