ELTE
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZAKDOLGOZAT

FELADATOK TÖBBFÉLE MEGOLDÁSSAL AZ ISKOLAI GYAKORLATBAN

Témavezető:
Ambrus Gabriella
egyetemi adjunktus
Matematika tanítási és Módszertani Központ

Készítette:
Gaál Krisztina Ibolya
Matematika Bsc

Budapest, 2010

TARTALOMJEGYZÉK

1. Fejezet

BEVEZETŐ

Szakdolgozati témaválasztásnál próbáltam olyan témát választani, ami később a tanári pályán felhasználható. Egy adott feladatra, ha több megoldást adunk, azzal egyrészt ellenőrizhetjük, hogy jó eredményt kaptunk, másrészt motiválni is lehet vele a diákokat. Az ismeret elmélyítését is segítheti, hogy különböző témaköröknél a különböző részismeretek hogyan épülnek fel, illetve, hogy az aktuális tananyag és a korábban tanult tananyag hogyan függnek össze. Ezen kívül egy feladat különböző megoldásai során gyakran tapasztaljuk, hogy az adott feladatot nemcsak egy korosztálynak lehet feladni, hanem különböző évfolyamokon is meg lehet próbálni a megoldást.

Ha egy adott feladatra több megoldást is adunk, azzal fejleszteni lehet a logikus gondolkodást és mivel a diákok különböző képességgel rendelkeznek az sem elhanyagolható ebben az esetben, hogy az egyik az egyik megoldást érti meg először könnyebben, míg egy másik diák egy másik fajta megoldást.

Ha egy feladatra minél többféle megoldást adunk, azaz minél több szempontból közelítjük meg, azzal jól lehet fejleszteni a különböző matematikai kompetenciákat[1] is, aminek fontosságáról ma gyakran hallunk.

Ha különböző megoldásokat adunk egy feladatra, azzal segíthetjük azt is, hogy a különböző részismereteket jól összehangoltan tudják alkalmazni.

---

[1] A matematikai kompetencia a *„matematikai tantárgyi ismeretek, a matematika-specifikus készségek és képességek, általános készségek és képességek, valamint motívumok és attitűdök együttese" (Vidákovich Tibor, 2004).*

A DOLGOZAT SZERKEZETE

A dolgozatban a feladatokat, témakörönként rendeztem. A feladatokat különböző középiskolás tankönyvekből válogattam össze, figyelve arra, hogy mindenféle témakörből legyenek köztük. Ezek főként középszinten használhatóak a középiskolában de vannak közöttük emelt szintűek is. Ilyen feladatok például, amelyeknél különféle bizonyítási módszereket alkalmaztam.

Ebben a témában készült már olyan szakdolgozat (Tóth Enikő, 2009) amelyben főleg emelt szintű csoportok illetve szakköri feldolgozás számára vannak feladatok. Úgy gondoltam, hogy meg lehetne mutatni, hogy a középszintű középiskolai feladatok között is vannak olyanok, amelyeket többféle képpen is meg lehet oldani, ezért főleg ilyen szintűeket tettem dolgozatomba.

Arra törekedtem, hogy feladataimmal minél jobban meg lehessen mutatni a matematika sokszínűségét és azt, hogy a különböző matematikai területek hogyan kapcsolódnak össze.

A feladatok között vannak „klasszikusok" is, amelyek különösen alkalmasak arra, hogy bemutassam egy feladat több oldalról is megközelíthető. Mindegyik feladat mellett jelöltem, hogy melyik irodalomban találtam meg, illetve honnan vettem.

A feladatok megoldásánál jelöltem azokat a megoldásokat, amelyek megtalálhatók a könyvekhez tartozó megoldókulcsban. Az Egységes Érettségi Feladatgyűjteménynek van olyan megoldókötete, amelyben megtalálhatók az egyes feladatok megoldásai. A Matematikai Feladatgyűjteményhez, illetve a 2000 feladat az elemi matematika köréből című könyvekben csak eredmények találhatóak, illetve ötlet a megoldáshoz. A Sokszínű Matematika című tankönyvekhez található megoldási útmutató, de azokhoz a feladatokhoz, amelyek a dolgozatba szerepelnek, csak eredményeket írtak..

2. Fejezet

FELADATOK TÖBBFÉLE MEGOLDÁSSAL

KOMBINATORIKAI FELADATOK

1. feladat

Hány olyan különböző számjegyekből álló négyjegyű szám van, melyben két páros és két páratlan számjegy szerepel. (Matematika Feladatgyűjtemény 1999, 355/183)

1. megoldás

Nézzük meg, milyen esetek vannak akkor, hogy egy négyjegyű számban, amelyben 2 páros és 2 páratlan szám legyen. Zárójelbe jelöljük, hogy az adott helyre hányféle számot tehetünk.

páratlan (5)	páros (5)	páratlan (4)	páros (4)	$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 400$
páratlan (5)	páros (5)	páros (4)	páratlan (4)	$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 400$
páratlan (5)	páratlan (4)	páros (5)	páros (4)	$5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 400$
páros (4)	páros (4)	páratlan (5)	páratlan (4)	$4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 320$
páros (4)	páratlan (5)	páros (4)	páratlan (4)	$4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 320$
páros (4)	páratlan (5)	páratlan (4)	páros (4)	$4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 320$
				Összesen: 2160

Ha összeadjuk az összes lehetséges esetnek a számát, akkor megkapjuk, hány olyan négyjegyű szám van, amelyben 2 páros és 2 páratlan szám szerepel.

2. megoldás

Először kiszámoljuk az összes esetet, azokat is amelyek 0-val kezdődnek. A két darab páratlan számot $\binom{5}{2}$-féle képpen tudunk kiválasztani, és a két darab páros számot is $\binom{5}{2}$féle képpen tudjuk kiválasztani. Az így kapott 4 jegyet 4!-féle képpen tudjuk sorba tenni. Az összes eset száma $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4!$.

Ezután számoljuk ki hány olyan lehetőség van, ami 0-val kezdődik. A páratlan számokat $\binom{5}{2}$ -féle képpen tudjuk kiválasztani. Mivel az első helyen 0 áll így a másik páros szám 4-féle lehet és a kapott számokat 3! képpen tudjuk sorba állítani, úgy hogy az első helyen a 0 áll. Tehát az összes olyan lehetőségek száma amelyik 0-val kezdődik $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot 3!$

Így az összesen $\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 4! - \binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot 3! = 2160$ olyan 4 jegyű szám van, amelyben 2 páros és 2 páratlan szám van.

3. *megoldás*

Mivel a feladatban a nehézséget az adja, hogy 0-val kezdődő szám nincsen, ezért nézzük meg mennyi azoknak az eseteknek a száma, amelyben szerepel a 0, és mennyi azon lehetőségeknek a száma melyben nem szerepel a 0.

Először számoljuk össze azokat a lehetőségeket, amelyekben szerepel a 0. A két darab páratlan számot $\binom{5}{2}$-féle képpen tudjuk kiválasztani. A 0 mellé 4-féle páros szám jöhet. Az első helyre 3 számot tehetünk, mert 0-val nem kezdődhet szám. A maradék 3 helyre 3!-féle képpen tehetjük a számokat. Így az összes olyan lehetőség száma, amely tartalmaz 0-t $\binom{5}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 3!$.

Most számoljuk ki azokat az eseteket, amelyekben nem szerepel a 0. A páratlan számok kiválasztásának lehetősége $\binom{5}{2}$, a páros számok kiválasztásának a lehetősége $\binom{4}{2}$, hiszen a 0-t nem számoljuk. Ezeket összesen 4! –féle képpen tudjuk rendezni. Így összesen $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 4!$ darab olyan lehetőség van, amelyikben nem szerepel a 0.

A megoldást megkapjuk ha a két részeredményt összeadjuk, $\binom{5}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot 3! + \binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 4! = 2160$.

4. <u>megoldás</u>

Kiszámoljuk az összes négyjegyű számot, amelyek csupa különböző számjegyekből állnak. Ezeknek a lehetőségeknek a száma $\binom{9}{1}\cdot\binom{9}{3}\cdot 3! = 9\cdot\frac{9!}{3!(9-3)!} = 4536$. Számítsuk ki azoknak a lehetőségeknek a számát, amelyekben nem két páros és két páratlan számjegy szerepel.

Rossz lehetőségek

3 páratlan és 1 páros szám

- első helyen páratlan szám áll: $\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}\cdot 3! = 900$
- első helyen páros szám áll: $\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot 3! = 240$

3 páros és 1 páratlan szám:

- első helyen páratlan szám áll: $\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot 3! = 300$
- első helyen páros szám áll: $\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot 3! = 720$

Mindegyik számjegy páros: $\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot 3! = 96$

Mindegyik számjegy páratlan: $\binom{5}{4}\cdot 4! = 120$

A megoldások számát megkapjuk, ha az összes lehetőségből kivonjuk a rossz lehetőségeknek a számát. Az összes lehetőséget már kiszámoltuk, 4536. A rossz lehetőségek száma pedig 2376. Tehát az olyan négyjegyű számok száma, amelyekben két páros és két páratlan szám áll 4536-2376=2160.

2. feladat

Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a BUDAPEST szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk, és az egyes lépeseket csak jobba vagy lefelé tehetjük? (Matematika Feladatgyűjtemény 1999, 345/90)

B	U	D	A	P
U	D	A	P	E
D	A	P	E	S
A	P	E	S	T

1. Táblázat

1. megoldás

Ahhoz, hogy a BUDAPEST szót ki tudjuk olvasni, összesen 7 lépést kell megtenni, ebből 3 lépés lefelé, 4 lépés pedig jobbra. Az összes megoldást úgy kapjuk meg, hogy a jobbra és a lefelé történő lépések összes lehetséges sorrendjeit megadjuk.

Megadhatjuk például, hogy 7 lépés közül mely esetekben volt lefelé lépés. Ezeknek a száma: $\binom{7}{3} = 35$

Tehát 56 különböző módón tudjuk kiolvasni a BUDAPEST szót.

2. megoldás

Minden mezőnek megfeleltetünk egy számot, ami azt jelenti, hogy az adott mezőbe hányféle módon tudunk eljutni

2. Táblázat

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35

Egy adott mezőbe balról és felülről érkezhetünk, azaz a mező „értékét” úgy számítjuk ki, hogy összeadjuk a tőle balra levő értéket, és a mező feletti értétét. Ha így kitöltjük a táblázatot, akkor megkapjuk, hogy a bal felső sarokból a jobb alsó sarokig összesen 35 lehetséges úton tudunk eljutni.

3. feladat

Egy dobozban 15 különböző tárgy van. Találomra kiveszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy mindet, lehet, hogy egyet sem). Hány különböző eset jöhet létre?

(Matematika Feladatgyűjtemény 1999, 359/208)

1. megoldás

Nézzük meg külön-külön, milyen lehetőségek lehetnek, majd adjuk őket össze. Ha 0 darabot választunk ki azt $\binom{15}{0}$-féle képpen tehetjük meg. Ha egy tárgyat választunk ki azt $\binom{15}{1}$-féle képpen tehetjük meg. Ha 2 tárgyat választunk, akkor a lehetőségek száma: $\binom{15}{2}$.

Ha mind a 15 tárgyat kivesszük a dobozból, akkor azt $\binom{15}{15}$-féle képpen tehetjük meg. Ha összeadjuk az összes esetet, akkor megkapjuk, hány különböző eredmény van.

Kiszámoljuk tehát külön-külön, hogy mennyi a $\binom{15}{0}$, $\binom{15}{1}$,$\binom{15}{2}$, …, $\binom{15}{15}$ és ezek eredményét összeadjuk. Tehát összeadjuk az 1, 15, 105, 455, 1365, 3003, 5005, 6435, 6435, 5005, 3003, 1365, 455, 105, 15, 1.

Ezeknek a számoknak az összege 32768, tehát ennyiféle eset lehetséges.

Megjegyzés

Azt is megtehetjük, hogy az előző megoldáshoz hasonlóan, kezdjük el megoldani a feladatot, csak a sok számolás helyett felhasználjuk, hogy
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Ennél a feladatnál: $\binom{15}{0}+\binom{15}{1}+\binom{15}{2}+\ldots+\binom{15}{14}+\binom{15}{15}=2^{15}=32768$.

Tehát a 15 különböző tárgyat 32768-féleképpen vehetjük ki a dobozból.

2. *megoldás*

Mivel a 15 tárgyból néhányat választunk ki, így nézzük meg külön-külön, hogy az adott tárgyat kivesszük-e a dobozból vagy nem.

1. tárgy	kivesszük	nem vesszük ki	2 lehetőség
2. tárgy	kivesszük	nem vesszük ki	2 lehetőség
3. tárgy	kivesszük	nem vesszük ki	2 lehetőség
⋮	⋮	⋮	⋮
14. tárgy	kivesszük	nem vesszük ki	2 lehetőség
15. tárgy	kivesszük	nem vesszük ki	2 lehetőség

Mivel 15 tárgy van, és mindegyik tárgynál két lehetőségünk van, ez alapján az összes lehetőség 2^{15}, ami 32768.

ALGEBRAI FELADATOK

4. feladat

Öt szög együtt teljes szöget alkot. Tudjuk továbbá, hogy mindegyik szög az előzőnél 15°-kal nagyobb. Mekkorák a szögek?

(Sokszínű Matematika 2005, 236/3)

1. <u>*megoldás*</u>

A teljes szög 360°. A legkisebb szöget jelölje α.

A szögek: $\alpha, \alpha+15^\circ, \alpha+30^\circ\ \alpha+45^\circ\ \alpha+60^\circ\ \alpha+15^\circ$.

Egyenlettel felírva, megkapjuk mennyi a α.

$\alpha+\alpha+15^\circ+\alpha+30^\circ+\alpha+45^\circ+\alpha+60^\circ=360^\circ$

$\alpha=45^\circ$

A keresett szögek: 42°, 57°, 72°, 87°, 102°.

Megjegyzés:

Ennek a megoldásnak egy változata, ha a középső szög lesz α, ekkor a szögek: $\alpha-30, \alpha-15, \alpha, \alpha+15, \alpha+30.$ Ekkor $\alpha-30+\alpha-15+\alpha+\alpha+15+\alpha+30=360^\circ$.

Innen megkapjuk, hogy $5\alpha=360^\circ$,azaz $5\alpha=72$. Azaz a keresett szögek: : 42°, 57°, 72°, 87°, 102°.

2. <u>*megoldás*</u>

Számtani sorozatként is felírhatjuk a feladatot. Ekkor tudjuk, hogy a sorozat első tagja λ, és a különbség 15°. Tudjuk még azt is, hogy a teljes szög 360°, azaz az első öt tag összege 360°

$a_1=\lambda$, d = 15°, S_5 = 360°

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

$$360°=\frac{(2\lambda+4\cdot 15°)\cdot 5}{2}$$

$$360°=(\lambda+30°)\cdot 5$$

$$42°=\lambda$$

5. feladat

Határozzuk meg az m-et $(m \in R)$ úgy, hogy a $2x^2 - 11x + m = 0$ egyenlet gyökei között a következő összefüggés álljon fenn: $2x_1 - x_2 = 2$.

(Matematika feladatgyűjtemény 1999, 202/549)

1. megoldás

Kezdjük el megoldani a másodfokú egyenletet x_1-re és x_2-re.

$x_{1/2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121-8m}}{4}$. Innen megkapjuk, hogy $x_1 = \dfrac{11-\sqrt{121-8m}}{4}$ és $x_2 = \dfrac{11+\sqrt{121-8m}}{4}$. Azt tudjuk, hogy $2x_1 - x_2 = 2$, ebbe behelyettesítve x_1-t és x_2-t megkapjuk mennyi az m.

$$2 \cdot \left(\frac{11-\sqrt{121-8m}}{4} \right) - \left(\frac{11+\sqrt{121-8m}}{4} \right) = 2$$

$$\left(\frac{22-2\cdot\sqrt{121-8m}}{4} \right) - \left(\frac{11+\sqrt{121-8m}}{4} \right) = 2 \qquad /\cdot 4$$

$$22 - 2\cdot\sqrt{121-8m} - 11 - \sqrt{121-8m} = 8$$
$$11 - 3\cdot\sqrt{121-8m} = 8$$
$$-3\cdot\sqrt{121-8m} = -3$$

$$\sqrt{121-8m} = 1$$
$$120 = 8m$$
$$15 = m$$

Tehát m-nek 15-nek kell lennie, hogy a megadott feltétel igaz legyen a gyökökre.

Megjegyzés: ha $x_1 = \dfrac{11+\sqrt{121-8m}}{4}$, ebben az esetben a behelyettesítés után a minimális különbség is nagyobb lenne mint 2, mert ha a diszkrimináns egyenlő nullával, akkor a $2\cdot\dfrac{11}{4} - \dfrac{11}{4} = \dfrac{11}{4}$, ami nagyobb mint 2. Ellenőrzés: $2x^2 - 11x + 15 = 0$ a másodfokú egyenletet megoldva megkapjuk, hogy a két gyök: 3 és $\dfrac{5}{2}$, és $2\cdot\dfrac{5}{2} - 3 = 2$.

2. megoldás

Írjuk fel az egyenletet gyöktényezős alakban. $2(x-x_1)(x-x_2)=0$. A zárójeleket felbontva ezt kapjuk:

$$2(x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2)=0$$
$$2x^2-2x_1\cdot x-2x_2\cdot x+2x_1\cdot x_2=0$$

Írjuk át a kapott egyenletet ilyen alakban: $2x^2+(-2x_1-2x_2)x+2x_1\cdot x_2=0$. Ebből látszik, hogy a $-2x_1-2x_2=-11$ és a $2x_1\cdot x_2=m$.

Tudjuk, hogy $2x_1-x_2=2$ és $-2x_1-2x_2=-11$. Ezek segítségével fel tudunk írni egy két egyenletből álló két ismeretlenes egyenletrendszert, melyből megkapjuk x_1-t és x_2-t.

$$\left.\begin{array}{l}-2x_1-2x_2=-11\\ 2x_1-x_2=2\end{array}\right\}$$ Az egyenletrendszert megoldva megkapjuk, hogy $x_1=\frac{5}{2}$ és $x_2=3$.

Tudjuk, hogy $m=2\cdot x_1\cdot x_2=2\cdot\frac{5}{2}\cdot 3=15$. Tehát $m=15$.

Ellenőrzés: $2\cdot\frac{5}{2}-3=2$

3. megoldás

Használjuk fel a gyökös és együtthatók közötti összefüggéseket. Ez alapján $x_1+x_2=\frac{11}{2}$ és $x_1\cdot x_2=\frac{m}{2}$. Ha megoldjuk az $x_1+x_2=\frac{11}{2}$ és $2x_1-x_2=2$ egyenletrendszert, akkor megkapjuk a két gyököt, ami a 3 és $\frac{5}{2}$. Innen fel tudjuk írni, hogy $x_1\cdot x_2=\frac{m}{2}$, azaz $3\cdot\frac{5}{2}=\frac{m}{2}$, tehát $m=15$.

Ellenőrzés: hasonlóan, mint az első megoldásnál.

6. feladat

Bizonyítsuk be, hogy $5 \mid 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ pontosan akkor, ha 4 nem osztja n-et, $n \in N$

(2000 feladat az elemi matematika köréből 2003, 40/430)

(a felhasznált irodalomban nem ezek a megoldások szerepelnek)

1. *megoldás*

Érdemes a feltétel alapján kiindulni: n=2k+1 vagy n=2k ahol k egész, és eszerint rendezni a megoldást.

Párosítsuk tagokat a következő módon: $5 \mid (1^n + 4^n) + (2^n + 3^n)$. Használjuk fel a következő azonosságot: $a + b \mid a^n + b^n$, ha $n = 2k + 1$. Ebből következik, hogy $5 \mid 1^n + 4^n$ és $5 \mid 2^n + 3^n$, ha $n = 2k + 1$.

Nézzük meg azt az esetet, amikor n páros. Ekkor az $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ kifejezésben az n átírható 2k alakra, $1^{2k} + 2^{2k} + 3^{2k} + 4^{2k}$ ezt átalakítva $(1^2)^k + (2^2)^k + (3^2)^k + (4^2)^k = 1^k + 4^k + 9^k + 16^k$. Nézzük meg, hogy a $1^k + 4^k + 9^k + 16^k$ milyen maradékokat ad 5-tel osztva.

Hasonlóan felhasználható, hogy ha k páratlan $a + b \mid a^k + b^k$, ekkor $5 \mid 1^k + 9^k$ és $5 \mid 4^k + 16^k$.

Tehát már csak azt az esetet kell megnézni, amikor k páros (ilyenkor $n = 2 \cdot 2 \cdot k = 4 \cdot k$ alakú) . Az eredeti kifejezésbe írjuk be, hogy $n = 4 \cdot k$, azaz $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} = 1^k + 16^k + 81^k + 256^k$. Ez a kifejezés 5-tel osztva mindig 4 maradékot fog adni, hiszen az 1 bármelyik hatványának az utolsó számjegye 1, hasonlóan a 81-nek is. A16-nak és 256-nak az utolsó számjegye hatványozáskor 6, azaz 5-tel osztva 1 maradékot adnak.

Azaz 5-tel osztva mind a 4 kifejezés 1 maradékot ad, tehát az összegük a maradékoknak 4 lesz, ami nem osztható 5-tel. Tehát ha n $4 \cdot k$ alakú, akkor az $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ nem osztható 5-tel.

2. *megoldás*

Nézzük meg milyen maradékokat ad az $1^n+2^n+3^n+4^n$ 5-tel osztva. A táblázat legfelső sorában a lehetséges n értékek szerepelnek.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1^k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2^k	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3
3^k	3	4	2	1	3	4	2	1	3	4	2	1	3	4	2
4^k	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
$\sum$	**0**	**0**	**0**	**4**	**0**	**0**	**0**	**4**	**0**	**0**	**0**	**4**	**0**	**0**	**0**

3. Táblázat

Látszik a táblázatból, hogy az 5-tel való osztási maradékok periódikusak. A táblázat alapján megfigyelhető, hogy a $5 | 1^n+2^n+3^n+4^n$, minden n-re, kivétel, ha az $n=2\cdot 2\cdot k=4\cdot k$ alakú.

3. *megoldás*

(A könyvben teljes indukcióval ajánlják a feladat megoldását, de nem vezetik le)

Teljes indukcióval látjuk be, hogy $5 | 1^n+2^n+3^n+4^n$, ha n nem 4k alakú. Három esetre bontjuk a feladat megoldását, n = 2k+1 alakú, vagy n=4k+2, vagy n=4k ahol k egész szám.

1. *eset*: n=4k+2

Ekkor $5 | 1^{4k+2}+2^{4k+2}+3^{4k+2}+4^{4k+2}$ a bizonyítandó állítás.

Az állítás k=1-re igaz, mert $5 | 1+64+729+4096=4890$.

Tegyük fel, hogy k=t-re igaz az állítás.

Azaz:

Lássuk be a feladatot t+1-re, azaz $5 | 1^{4(t+1)+2}+2^{4(t+1)+2}+3^{4(t+1)+2}+4^{4(t+1)+2}$. Átalakítva: $5 | 1^{4t+6}+2^{4t+6}+3^{4t+6}+4^{4t+6}$. Továbbalakítva megkapjuk, hogy $\left(1^{4t+2}+2^{4t+2}+3^{4t+2}+4^{4t+2}\right)+15\cdot 2^{4t+2}+80\cdot 3^{4t+2}+255\cdot 4^{4t+2}$. A zárójelben lévő kifejezés az indukciós feltevés miatt osztható 5-tel, be kell még látni, hogy $5 | 15\cdot 2^{4t+2}+80\cdot 3^{4t+2}+255\cdot 4^{4t+2}$, ez viszont igaz hiszen

$5|5\cdot\left(3\cdot 2^{4t+2}+16\cdot 3^{4t+2}+51\cdot 4^{4t+2}\right)$. Tehát t+1-re igaz az állítás, ezért $5|1^n+2^n+3^n+4^n$ igaz, ha n=4k+2

2.eset: ha n=2k+1 alakú

Ekkor $5|1^n+2^n+3^n+4^n=1^{2k+1}+2^{2k+1}+3^{2k+1}+4^{2k+1}$ a bizonyítandó állítás.

Nézzük meg k=1-re, $1^3+2^3+3^3+4^3=100$, azaz k=1-re osztható a kifejezés 5-tel.

Tegyük fel, hogy k=t-re-re igaz, bizonyítsuk be t+1-re. $5|1^{2(t+1)+1}+2^{2(t+1)+1}+3^{2(t+1)+1}+4^{2(t+1)+1}$. Ezt tovább tudjuk alakítani: $1^{2t+1}\cdot 1^2+2^{2t+1}\cdot 2^2+3^{2t+1}\cdot 3^2+4^{2t+1}\cdot 4^2=1^{2t+1}+2^{2t+1}\cdot 4+3^{2t+1}\cdot 9+4^{2t+1}\cdot 16$.

Írjuk át ilyen alakra: $\left(1^{2t+1}+2^{2t+1}+3^{2t+1}+4^{2t+1}\right)+3\cdot 2^{2t+1}+8\cdot 3^{2t+1}+15\cdot 4^{2t+1}$. Ekkor az indukciós feltevés szerint a zárójelben lévő kifejezés osztható 5-tel. Meg kell még mutatni, hogy $5|3\cdot 2^{2t+1}+8\cdot 3^{2t+1}+15\cdot 4^{2t+1}$.

Ebben az összegben az utolsó tag osztható 5-tel, bizonyítandó, hogy az első két tag összege is osztható 5-tel.

Alkalmazzuk a következő átalakítást:

$3\cdot 2^{2t+1}+8\cdot 3^{2t+1}=8\cdot(3^{2t+1}+2^{2t+1})-5\cdot 2^{2t+1}$ mivel a zárójelben levő kifejezés osztható 5-tel (azonos, páratlan kitevőjű hatványok összege osztható az alapok összegével), és a kivonandó is osztható 5-tel, a különbség is osztható 5-tel. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Tehát $5|1^{2(t+1)+1}+2^{2(t+1)+1}+3^{2(t+1)+1}+4^{2(t+1)+1}$, ezért $5|1^n+2^n+3^n+4^n$. Ha n=2k+1 alakú.

3. eset: n=4k

Ekkor az $1^n+2^n+3^n+4^n=1^{4k}+2^{4k}+3^{4k}+4^{4k}=1^k+16^k+81^k+256^k$. Mindegyik tag 1 maradékot ad 5-tel osztva. Tehát az egész kifejezés 5-tel osztva 4 maradékot ad, azaz ha n=4k, akkor az 5 nem osztja az $1^n+2^n+3^n+4^n$.

7. feladat

Bizonyítsuk be, hogy $6 \mid n^3 - n$

(Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény 51/269)

1. *megoldás*

Az n^3-n kifejezést átalakítva kapjuk, hogy $6 \mid n(n + 1)(n - 1)$. Ennek kell teljesülnie. Mivel, $n, (n+1), (n-1)$ három egymást követő szám, ekkor van közöttük, ami osztható hárommal és van olyan is, ami osztható 2-vel. Tehát az állítás igaz. (ez a megoldás szerepel a megoldáskötetben)

2. *megoldás*

Nézzük az n hattal való osztás során keletkezett maradékait. Ez 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ha ezeket behelyettesítjük a $n^3 - n$ - be, és az eredmény minden esetben osztható hattal, akkor az állítást bebizonyítottuk.

n	n^3-n	
0	$0^3 - 0 = 0$	$6 \mid 0$
1	$1^3 - 1 = 0$	$6 \mid 0$
2	$2^3 - 2 = 6$	$6 \mid 6$
3	$3^3 - 3 = 24$	$6 \mid 24$
4	$4^3 - 4 = 60$	$6 \mid 60$
5	$5^3 - 5 = 120$	$6 \mid 120$

3. *megoldás*

Teljes indukcióval.

$n = 1$ esetén az állítás igaz

$n = 2$ esetén is igaz az állítás

Tegyük fel, hogy $6 \mid n^3 - n$ igaz. Nézzük meg $n + 1$-re.

$6 \mid (n+1)^3 - (n+1)$

$6 \mid n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$

$6 \mid (n^3 - n) + 3n^2 + 3n$

Az indukciós feltevés szerint $6 \mid (n^3 - n)$, azt kell belátni, hogy $6 \mid 3(n^2 + n)$, $3(n^2 + n)$ kifejezés láthatóan osztható hárommal, $n^2 + n = n(n+1)$, két egymás utáni szám szorzata. Így osztható az $n^3 + n$ 6-tal.

8. feladat

Igazoljuk a következő állítást $6 | 17^8 - 11^8$

(Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény 71/444)

1. *megoldás*

A megoldás során a $17^8 - 11^8$-t felbontjuk szorzattényezőkre.

$6 \mid (17^2 - 11^2) \cdot (17^2 + 11^2) \cdot (17^4 + 11^4)$

Ezután a kapott kifejezésben az első, azaz a $(17^2 - 11^2)$ zárójelet tovább bontjuk. Ekkor azt kapjuk, hogy $(17-11)(17+11)(17^2+11^2)(17^4+11^4)$, és ebből tudjuk, hogy a 17-11 egyenlő 6-tal, azaz $6 \mid 6(17+11)(17^2+11^2)(17^4+11^4)$.

(ehhez a megoldáshoz hasonló megoldás szerepel a feladathoz tartozó megoldáskötetben)

2. megoldás

Felhasználhatjuk azt az összefüggést, hogy $a - b \mid a^n - b^n$ tetszőleges n természetes szám esetén.

Ez alapján: $\begin{array}{l} 17-11 \mid 17^8 - 11^8 \\ 6 \mid 17^8 - 11^8 \end{array}$

9. feladat

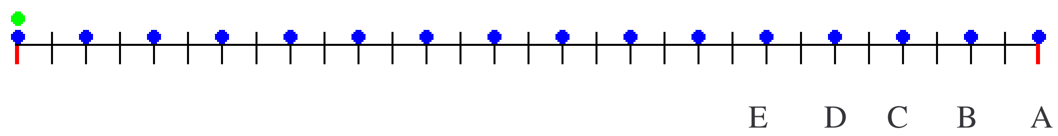
Egy autóbusz 30 perc alatt teszi meg az utat a kiinduló állomástól a végállomásig. A kiinduló állomásról 2 percenként indítják az autóbuszokat. Egyik autóbusszal egy időben indul a kiinduló állomásról egy autó, amelynek sebessége négyszer akkora, mint az autóbuszé. Hány autóbuszt előz meg az autó a végállomásig?

(Matematikai Feladatgyűjtemény 1999, 174/171)

Megjegyzés: A feladat kimondatlanul feltételezi, hogy mindkét jármű egyenletes sebességgel halad, ezért dolgozhatunk a következő modellekkel.

1. megoldás

A kiinduló állomás és a végállomás közti utat az autóbuszok 30 perc alatt teszik meg. Tudjuk, hogy 2 percenként indítanak autóbuszokat a kiinduló állomásról. Abban a pillanatban mikor egy busszal együtt elindul egy autó is összesen 16 darab busz található az úton. Tudjuk hogy az autó négyszer olyan gyorsan megy, mint a buszok, így ő a kiinduló állomástól a végállomásig tartó utat 7,5 perc alatt teszi meg. Tehát elég megnézni, hogy abban a 7,5 percben hány busz ér be a végállomásra.

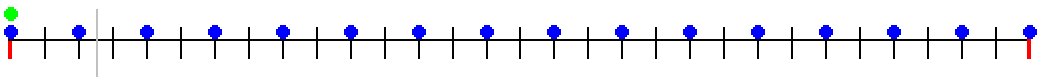


1. ábra

Az autó indulásának időpontjában az A busz már bent van a végállomáson, a következő 2 percben érkezik a B jelű busz, újabb 2 perc múlva C jelű busz és utána 2 percre a D jelű busz, így 6 perc alatt bent van a végállomáson 4 busz. Az E jelű busz már a 8. percben érkezne be, így azt már meg fogja előzni az autó.

Azaz a 16 buszból 4-et nem fog megelőzni az autó, így megkapjuk, hogy összesen 12 buszt fog megelőzni.

2. *megoldás*



2. ábra

Az 2. buszt, amikor utolért az autó akkor megtette a teljes út kétharmincadát plusz még valamennyit (amennyit ezalatt a busz ment). Ebből fel tudjuk írni, hogy

$$\frac{2}{30} + t \cdot v = 0 + 4 \cdot t \cdot v$$

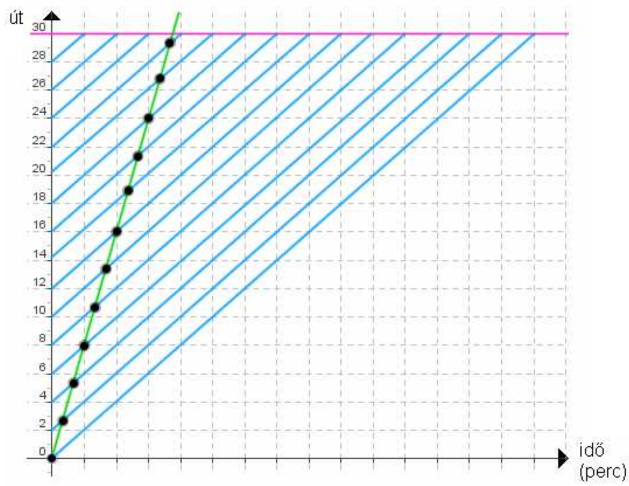
$$\frac{2}{30} = 3 \cdot t \cdot v$$ ahol, a t idő alatt éri utol a 2. buszt és v sebessége van az autónak.

$$\frac{2}{90} = t \cdot v = \frac{1}{45}$$

A 0+4· t ·v az autó útjának a hossza.

Ebből tudjuk, hogy az első buszt a teljes út $\frac{4}{45}$ részénél $\left(\frac{2}{30} + \frac{2}{90} = \frac{6+2}{90} = \frac{4}{45}\right)$ éri utol. A második buszt az út $\frac{8}{45}$ részénél, a harmadik buszt az út $\frac{12}{45}$ részénél éri utol. Így folytatva a 11. buszt a teljes út $\frac{44}{45}$ részénél éri utol. Így összesen 11+1 buszt előz meg, hiszen az elsőt már a kiinduló állomásnál megelőzte. Így összesen 12 buszt előz meg.

3. megoldás



3. ábra

Oldjuk meg a feladatot grafikusan. Az autó és a buszok sebességét ábrázoltuk az idő és az út segítségével. A kék egyenesek mutatják a buszoknak a sebességét, ezek egymással párhuzamosak, mert ugyanakkora a sebességük, és látszik az ábráról, hogy 2 perc különbséggel indultak el. A zöld egyenes pedig az autó sebességét ábrázolja. Látszik, hogy míg a buszok egy x sebességgel haladnak, addig az autó 4x sebességgel, azaz a zöld egyenes négyszer meredekebb, mint a kék egyenes. Az ábráról látszik, hogy a kék és a zöld egyenes metszéspontja mutatja meg hol történt előzés. Az ábráról leolvasható, hogy összesen 12 előzés történt.

10. feladat

Oldja meg az egész számok körében: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$. (Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény 146/1029)

(Nem ezek a megoldások szerepelnek a feladathoz tartozó megoldáskötetben.)

1. *megoldás*

A megadott egyenletet át tudjuk írni, $7x+7y=xy$ alakban. Ezt át tudjuk alakítani szorzattá: $(x-7)(y-7)=7^2$. Nézzük meg a 7^2 osztóit, a 7^2 osztói: $1, 7, 49$, -1, -7, -49. Tehát az $x-7$ lehetséges értékei: 1, 7, 49, -1, -7, -49. Ekkor az $y-7$ értékei: $49, 7, 1$, -49, -7, -1. Tehát x lehetséges értékei a 8, 14, 56, 6, -42, az ezekhez tartozó y lehetségesértékek rendre: 56, 14, 8, -42, 6. (megoldásnak megkapjuk azt is, hogy x=0 és y=0, de ez nem lehet, hiszen x és y nem lehet 0 a feladat alapján.)

2. *megoldás*

A megadott egyenletet átrendezzük: $\frac{1}{x}=\frac{1}{7}-\frac{1}{y}$. Közös nevezőre hozva megkapjuk, hogy $\frac{1}{x}=\frac{y}{7y}-\frac{7}{7y}$. Összevonva megkapjuk, hogy $\frac{1}{x}=\frac{y-7}{7y}$. Ezt az egyenlőséget tovább alakítva megkapjuk, hogy $x=\frac{7y}{y-7}$. Ha átalakítjuk a jobboldalt a $\frac{7(y-7)+49}{y-7}$ alakra, akkor megkapjuk, hogy $x=7+\frac{49}{y-7}$. Mivel x és y is egész szám, ezért a $\frac{49}{y-7}$-nek is egész számnak kell lennie. A 49 osztói $1, 7, 49$, -1, -7, -49. Azaz $y-7$ lehetséges értékei 1, 7, 49, -1, -7, -49. Tehát a jó x és y párok: (8 ; 56) (56 ; 8) (14 ; 14) (6 ; -42) (-42 ; 6)

11. feladat

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet: $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + 4$

(Matematikai Feladatgyűjtemény 1999, 225/868/a)

1. *megoldás*

A négyzetgyök miatt $x \geq 0$.

Rendezve az egyenletet, a következőt kapjuk: $2 \cdot (x-1) = (\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1) + 8 \cdot (\sqrt{x}+1)$.

A zárójeleket felbontjuk és rendezzük az egyenletet, akkor $-x + 8 \cdot \sqrt{x} + 9 = 0$ kapjuk,. Ez egy másodfokú egyenlet $\sqrt{x}$ -re nézve. Másodfokú egyenlet megoldó képletével megkapjuk a keresett értékeket.

$\sqrt{x}_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{-2} = \frac{-8 \pm 10}{-2}$. Az egyik lehetséges megoldás: $\sqrt{x}_1 = 9$, azaz $x_1 = 81$. Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe, ez jó megoldás. A másik lehetséges megoldás: $\sqrt{x}_2 = -1$ lenne, de ez $\sqrt{x} \geq 0$ miatt nem jön szóba. Tehát az egyenlet megoldása az $x = 81$

Ellenőrzés: $\frac{81-1}{9+1} = \frac{9-1}{2} + 4$, azaz 8 =8.

2. *megoldás*

Kikötés: $x \geq 0$.

Írjuk át az $(x-1)$ -et $(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)$ alakra. Ekkor az egyenlet: $\frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)}{2} + 4$. Egyszerűsítve a baloldali kifejezést: $(\sqrt{x}-1) = \frac{(\sqrt{x}-1)}{2} + 4$, 2-vel szorozzuk, és rendezzük az egyenletet, ami után a következőt kapjuk: $\sqrt{x} - 1 = 8$, azaz $x = 81$.

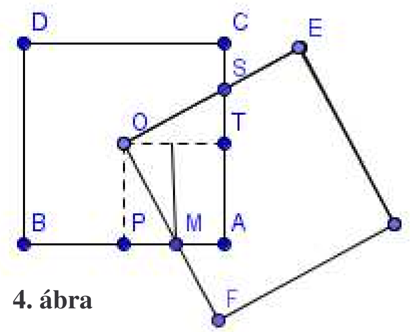
Ellenőrzés: $\frac{81-1}{9+1} = \frac{9-1}{2} + 4$, azaz 8 =8

GEOMETRIAI FELADATOK

12. feladat

Egy négyzet középpontja egy másik négyzet csúcsa. Mekkora a két négyzet közös részének területe, ha mindkét négyzet oldala 2 egységnyi? (Varga Tamás Matematika Verseny, 1991/92, 7.o. 2. forduló)

1. *megoldás*



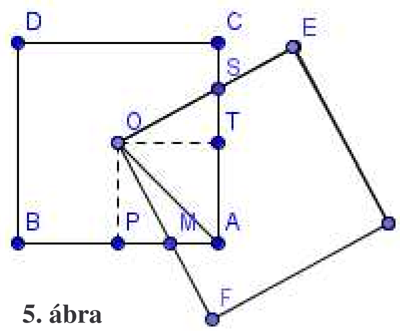
4. ábra

Az OTAM négyszöget tartalmazza az OTAP négyszög, és az OSAM négyszög is. Be kell látni, hogy az OTS háromszög egybevágó az OPM háromszöggel, ugyanis akkor a jelzett terület egyenlő az OTPA négyzettel, ami éppen a negyede az eredeti négyzetnek. Tudjuk, hogy $|OT| = |OP| = 1$, és, hogy az OPM $\angle$ megegyezik az OTS szöggel, mindkettő $90°$. Meg kell mutatni, hogy SOT $\angle$ egyenlő POM $\angle$.

SOP $\angle$ = SOT $\angle$ + TOP $\angle$ = POM $\angle$ +MOS $\angle$

Az MOS szög egyenlő a TOP szöggel, mindkettő 90˚, tehát az SOT szög egyenlő a POM szöggel. Ezért a POM háromszög egybevágó a TOS háromszöggel. Tehát az állítás igaz.

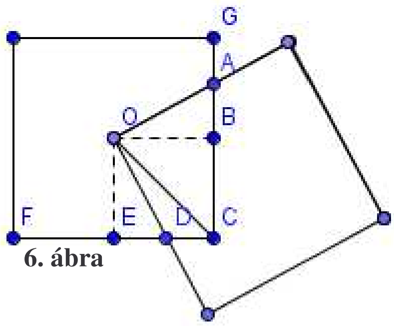
2. *megoldás*



5. ábra

Ennél a megoldásnál azt mutatjuk meg, hogy az OSAM négyszög átdarabolható az OCA háromszögbe. Ezt azért érdemes megtenni, mert ez utóbbi területe éppen az eredeti négyzet negyede. Az OMAS négyszög területe egyenlő az OMA háromszög területével plusz az OAS háromszög területével. Az OAC háromszög területe pedig egyenlő az AOS háromszög plusz az OSC háromszög területével. Elég azt megmutatni, hogy az OAM háromszög területe egyenlő az OSC háromszög területével. Az OCS $\angle$ egyenlő az OAM

$\angle$- gel, hiszen mindkettő $45°$. Tudjuk, hogy az $|OA| = |OC|$, és hogy az OSC $\angle$ egyenlő az OMA $\angle$- gel, mert ezek merőleges szárú szögek.. Következik, hogy a COS$\angle$is egyenlő az AOM $\angle$ is fennáll. Így a jelzett háromszögekben 1-1 oldal és a rajta fekvő két-két szög egyenlő. Tehát az állítás igaz.



6. ábra

3. *megoldás*

Az ACDO négyszöget két háromszögre tudjuk felbontani, ACOΔ és OCDΔ-re. Ennek a két háromszögnek a terület együtt megadja a keresett területet. Tudjuk, hogy mindkét háromszög magassága 1, mivel OB = OE =1. A keresett terület így alakul:

A keresett közös rész területe:

$$T_{OAC\Delta} + T_{ODC\Delta} = \frac{AC \cdot 1}{2} + \frac{CD \cdot 1}{2}$$
$$T_{OAC\Delta} + T_{ODC\Delta} = \frac{1}{2}(AC + CD)$$

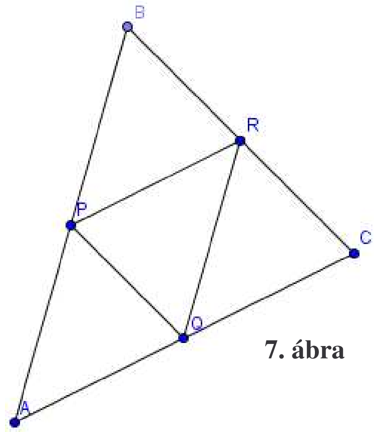
Az AC és CD szakasz összege 2, mivel CD=GA (ez következik például a négyzet negyedrendű forgásszimmetriájából) és GA+AC=GC=2 , így $\frac{1}{2}(AC + CD) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Megjegyzések:

A jelzett irodalomban nem ezek a megoldások szerepelnek.

Ez a feladat 9. osztályban egy jól használható feladat, hiszen jól „gyakorolható” rajta a geometriai bizonyítás. A közös rész nagyságának vizsgálatához jól használhatók különféle dinamikus geometriai programok is. Pl.: Cabri geometria. Szakköri illetve emelt szintű feladatként jól vizsgálható a négyzetek egymáshoz viszonyított méretének változtatása a feladatban.

13. feladat



7. ábra

Egy háromszög oldalainak felezőpontjai P(-2 ; 3), Q(2 ; -1), R(4 ; 6). Számítsuk ki a háromszög magasságainak hosszát, a háromszög területét és belső szögeinek nagyságát. (Sokszínű Matematika 2004, 224/10)

1. <u>*megoldás.*</u>

Először az oldalfelező pontokból meghatározzuk a háromszög csúcsait.

A $(a_1;a_2)$, B$(b_1;b_2)$, C$(c_1;c_2)$

$$\frac{a_1+b_1}{2}=-2 \qquad \frac{a_2+b_2}{2}=3$$

$$\frac{a_1+c_1}{2}=2 \qquad \frac{a_2+c_2}{2}=-1$$

$$\frac{b_1+c_1}{2}=4 \qquad \frac{b_2+c_2}{2}=6$$

$a_1 + b_1 = -4$ $\qquad a_2 + b_2 = 6$

$a_1 + c_1 = 4$ $\qquad a_2 + c_2 = -2$

$b_1 + c_1 = 8$ $\qquad b_2 + c_2 = 12$

Innen:

$a_1 = -4$ $\qquad a_2 = -4$

$b_1 = 0$ $\qquad b_2 = 10$

$c_1 = 8$ $\qquad c_2 = 2$

Azaz: A(-4;-4), B(0;10), C(8;2)

Mivel ismerjük az A, B, C pontokat meg tudjuk határozni a pontok közti távolságot.

$|AB| = \sqrt{16+196} \approx 14{,}56$

$|BC| = \sqrt{64+64} \approx 11{,}31$

$|AC| = \sqrt{144+36} \approx 13{,}41$

Ebből Heron képlettel megkapjuk az A, B, C pontok által meghatározott háromszög területét.

K = 14,56 + 11,31 + 13,41 = 39,28

$s = \frac{K}{2} = 19,64$

$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$T = \sqrt{19,64 \cdot 5,08 \cdot 8,33 \cdot 6,23} \approx 71,95$

A területképletet máshogy is fel lehet írni, így megkapjuk a háromszög belső szögeit.

$$71,95 = \frac{|AC| \cdot |AB| \cdot \sin\alpha}{2}$$

Kiszámolva, megkapjuk, hogy $\alpha = 47,4^\circ$, vagy $\alpha = 132,6^\circ$

Hasonlóan

$$71,95 = \frac{|BC| \cdot |AB| \cdot \sin\beta}{2}$$

Ebből tudjuk, hogy $\beta = 60,91^\circ$, vagy $\beta = 119,09^\circ$

$$71,95 = \frac{|BC| \cdot |AC| \cdot \sin\gamma}{2}$$

Innen $\gamma = 71,56^\circ$, vagy $\gamma = 108,44^\circ$

Megjegyzés: a γ szöget számíthatjuk $180^\circ - (\alpha + \beta)$ segítségével is.

A háromszög szögei: 71,56°, 47,4°, 60,91°. (A kapott 6 különböző érték esetén csak ennél a három szögnél kapjuk meg, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°.)

A háromszög magasságának a hosszait szintén a területképletből tudjuk megadni.

$$71,95 = \frac{|AC| \cdot m_b}{2} \qquad m_b = 10,7$$

$$71,95 = \frac{|BC| \cdot m_a}{2} \qquad m_a = 12,72$$

$$71,95 = \frac{|AC| \cdot m_c}{2} \qquad m_c = 9,88$$

Tehát a háromszög magasságainak a hossza: 9,88 12,72 és 10,7. A háromszög területe 71,95, a belső szögei pedig: 60,91° , 71,56°, és 47,4°.

2. *megoldás*

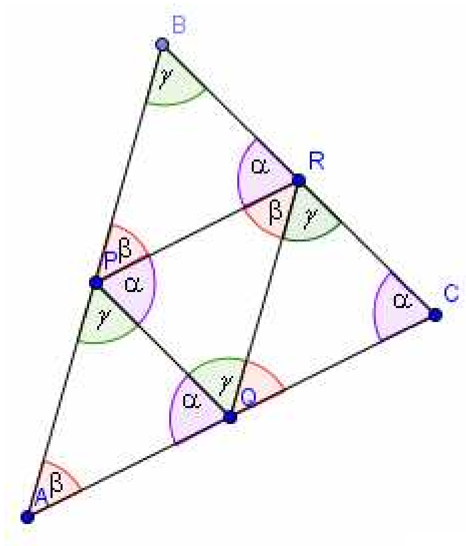
A P, Q, R felezőpontok is meghatároznak egy háromszöget. Az a háromszög hasonló az ABC háromszöggel, hiszen a PQ, QR, PR egyenesek középvonalak az ABC háromszögben. Tudjuk azt is, hogy

$$2\cdot|PR| = |AC|$$

$$2\cdot|QR| = |AB|$$

$$2\cdot|QP| = |CB|$$

8. ábra



Mivel a $|QP|, |PR|, |RQ|$ szakaszok hosszát ki tudjuk számolni, így ezzel meg tudjuk határozni az ABC háromszög oldalainak a hosszát.

$$\left.\begin{aligned} |QP| &= \sqrt{16+16} \approx \sqrt{32} \\ |PR| &= \sqrt{36+9} \approx \sqrt{45} \\ |QR| &= \sqrt{4+49} \approx \sqrt{53} \end{aligned}\right\} \text{ innen tudjuk, hogy } \begin{aligned} |BC| &= 2\cdot\sqrt{32} \approx 11{,}31 \\ |AC| &= 2\cdot\sqrt{45} \approx 13{,}41 \\ |AB| &= 2\cdot\sqrt{53} \approx 14{,}56 \end{aligned}$$

Mivel az ABC háromszög hasonló, a PQR háromszöggel, így ha meghatározzuk a PQR háromszög szögeit, akkor tudni fogjuk az ABC háromszög szögeit is . A keresett szögeket skaláris szorzattal kapjuk meg. Az A csúcsnál lévő szög α . A C csúcsnál lévő szög pedig γ .

QPR szög (α) meghatározása, a (6 ; 3) és (4 ; -4) vektorokból skaláris szorzat segítségével

$$\sqrt{45}\cdot\sqrt{32}\cdot\cos\alpha = 12$$
$$37{,}94\cdot\cos\alpha = 12$$
$$\cos\alpha = 0{,}3162$$
$$\alpha = 71{,}56°$$

Hasonlóan PQR szögre (γ) , csak itt a (-4 ; -4) és (2 ; -7) vektorokkal kell meghatározni.

$$\sqrt{32}\cdot\sqrt{53}\cdot\cos\gamma = 20$$
$$\gamma = 60{,}94°$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$71{,}56° + \beta + 60{,}94° = 180°$$
$$\beta = 47{,}5°$$

PRQ szög 47,5°

A PQR háromszögben a magasságvonalak fele akkorák, mint az ABC háromszögben. A számítás végezhető oly módon, mint az ABC háromszögben. Most egy másik módszert használunk.

P (-2 ; 3)

R (4 ; 6)

Először határozzuk meg a P, R ponton áthaladó egyenes egyenletét. Az egyenes egy irány és egy normálvektora:

v (6 ; 3)

n (3 ; -6)

P (-2 ; 3)

Tehát az egyenes egyenlete: 3x – 6y = -24, azaz x - 2y= -8.

Vegyük azt az egyenest, ami merőleges a P, R pont által meghatározott egyenesre, úgy hogy az áthaladjon a Q ponton. Ez az egyenes lesz a PRQ háromszögben a P, R oldalhoz tartozó magasságvonal.

A magasságvonal egyenlete: 2x + y = 3

A két egyenes metszetével megkapjuk Q' pontot, amiből majd ki tudjuk számítani a magasságvonal hosszát. Ehhez meg kell oldani a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -8 \end{array}\right\}$$

Az egyenletrendszert megoldva, megkapjuk Q' koordinátáit. Q'=(-0,4 ; 3,8),

Felhasználva, hogy Q(2 ; -1)

$$|QQ'| = \sqrt{(-0{,}4-2)^2 + (3{,}8+1)^2} = \sqrt{5{,}76+23{,}04} = \sqrt{28{,}8} = 5{,}366$$

Tehát az ABC háromszögben az AC oldalhoz tartozó magasság $m_b = 2|QQ'| = 10{,}73$

P (-2 ; 3), Q (2 ; -1), v (4 ; -4), n (4 ; 4)

A P, Q ponton áthaladó egyenes egyenlete 4x + 4y = 4, azaz x + y = 1.

Erre az egyenesre merőleges egyenlete, ami áthalad R ponton: x – y = -2

R' pontot megkapjuk a $\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = -2 \end{array}\right\}$ egyenletrendszerből. R'(-0,5; 1,5)

A PRQ háromszögben a P, Q oldalhoz tartozó magasságvonal hossza a R és R' pont távolsága. $|RR'| = \sqrt{(-0{,}5-4)^2 + (1{,}5-6)^2} = \sqrt{20{,}25+20{,}25} = 6{,}36$

Tehát a BC oldalhoz tartozó magasság: $m_a = 2\left|PP'\right| = 2 \cdot 6{,}36 = 12{,}72$

Ugyanígy meg lehet határozni Az R, Q oldalhoz tartozó magasságvonal hosszát.

R (4 ; 6), Q (2 ; -1), v(-2 ; -7), n(-7 ; 2)

Az R Q ponton áthaladó egyenes egyenlete: -7x + 2y = -12

Erre az egyenesre merőleges a 2x+7y=17, ami áthalad a P ponton. Itt is a két egyenes egyenletének a metszetéből lehet ki számolni P' pontot, ami (2,75 ; 1,64).

Az RQ oldalhoz tartozó magasságvonal hossza:

$$\left|PP'\right| = \sqrt{(2{,}75+2)^2 + (1{,}64-3)^2} = \sqrt{22{,}56+1{,}84} = \sqrt{24{,}4} = 4{,}93$$

Azaz a AB oldalhoz tartozó magasságvonal hossza $m_c = 2\left|PP'\right| = 9{,}87$

Az ABC területének a meghatározásához is elég meghatározni a PRQ háromszög területét, mivel a PR, RQ, QP középvonalak, így a $4 \cdot T_{PQR} = T_{ABC}$

Mivel megvannak a PQR háromszög szögeinek és oldalainak a nagysága így a területet ki tudjuk belőle számolni, például a $T = \dfrac{\left|PR\right| \cdot \left|QR\right| \cdot \sin\beta}{2}$ képlet segítségével.

$\left|PR\right| = \sqrt{45}$

$\left|QR\right| = \sqrt{53}$

PRQ szög (β) =47,5°

$$T_{PRQ} = \frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{53} \cdot \sin 47{,}5°}{2} \approx 18{,}002$$

Tehát az ABC háromszög területe 4·18,002 = 72,008

Természetesen mivel ismerjük a magasságait is a PRQ háromszögnek, azok segítségével is ki lehet számolni a területet.

$$T_{PRQ} = \frac{\left|RQ\right| \cdot \left|PP'\right|}{2} = \frac{\sqrt{53} \cdot \sqrt{24{,}4}}{2} = 17{,}98$$

$T_{ABC} = 17{,}98 \cdot 4$

14. feladat

Bizonyítsuk be, hogy egy paralelogrammában $e^2 + f^2 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2$.

Fitos, 1984, 9/T12)

1. *megoldás*

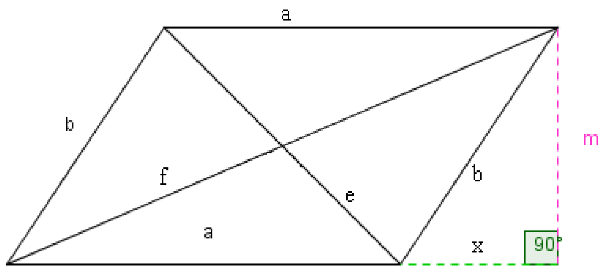
Pitagorasz tétel segítségével oldjuk meg a feladatot. Húzzuk be a paralelogramma magasság vonalát (m). Ekkor a két átlót átfogóként tartalmazó megfelelő derékszögű háromszögekben alkalmazhatjuk a Pitagorasz tételt.

$$e^2 = (a - x)^2 + m^2$$
$$f^2 = (a + x)^2 + m^2$$

Az m-t is fel tudjuk írni hasonlóan: $m^2 + x^2 = b^2$. Azaz $m^2 = b^2 - x^2$.

Visszahelyettesítve:

$$e^2 + f^2 = (a + x)^2 + (b^2 - x^2) + (a - x)^2 + (b^2 - x^2)$$



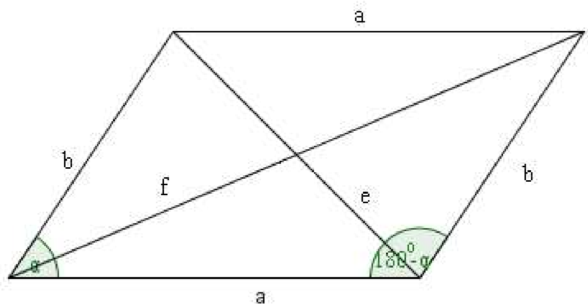
9. ábra

Rendezve megkapjuk, hogy $e^2 + f^2 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2$, azaz az állítás igaz.

2. *megoldás*

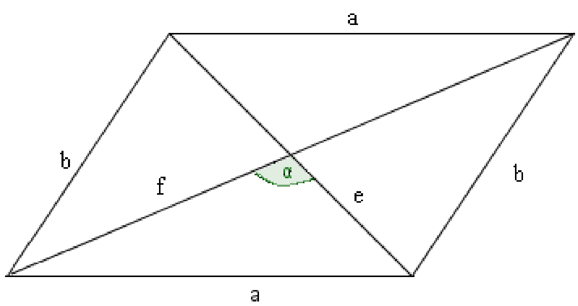
A feladat megoldásához alkalmazzunk koszinusz tételt. Írjuk fel a két átlót a következőképpen:.

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha$$
$$f^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$
$$f^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha$$



10. ábra

Összeadva megkapjuk, hogy $e^2 + f^2 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2$. (Ez szerepel a megadott irodalomban)



11. ábra

Megjegyzés:

Máshogy is meg tudjuk oldani koszinusz tétel segítségével. Ha az α szöget a két átló metszéspontjához tesszük. Ezen kívül még felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást. Ekkor felírható, hogy

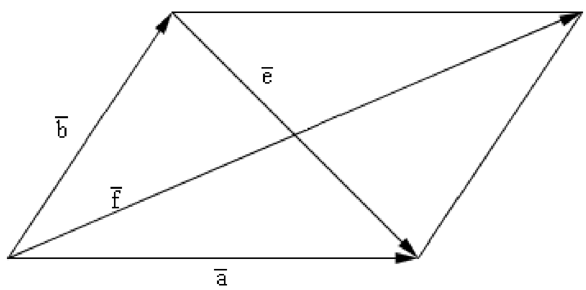
$$a^2=\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{e}{2}\right)\cdot\left(\frac{f}{2}\right)\cdot\cos\alpha$$

$$b^2=\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{e}{2}\right)\cdot\left(\frac{f}{2}\right)\cdot\cos\left(180^\circ-\alpha\right)$$

$$b^2=\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{e}{2}\right)\cdot\left(\frac{f}{2}\right)\cdot\cos\alpha$$

A kettőt összeadva megkapjuk, hogy $a^2+b^2=2\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{f}{2}\right)^2$, ami rendezve $2\cdot a^2+2\cdot b^2=e^2+f^2$.

3. *megoldás*



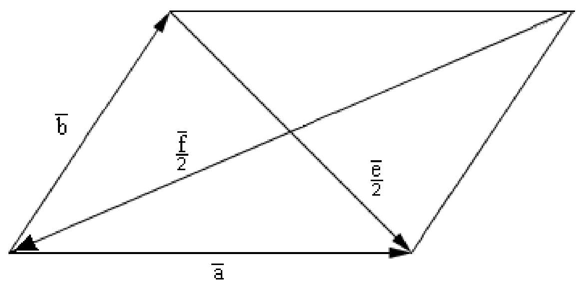
12. ábra

Vektorokkal oldjuk meg a feladatot. Vezessük be a következő vektorokat az ábra alapján: az a oldalhoz tartozzon az $\bar{a}$ vektor a b oldalhoz a $\bar{b}$ vektor. Ezek felhasználásával írjuk fel az e és f átlókhoz tartozó vektorokat, ami az ábrán az $\bar{e}$ és az $\bar{f}$ vektor. $\bar{e}=\bar{a}-\bar{b}$ és $\bar{f}=\bar{a}+\bar{b}$. Négyzetre emelve megkapjuk, hogy $e^2+f^2=2\cdot a^2+2\cdot b^2$

(Ez szerepel a megadott irodalomban).

Megjegyzés:

Vektorok segítségével másképpen is megoldhatjukna feladatot. Most az átlók metszéspontjából induljanak ki az $\frac{\bar{e}}{2}$ és az $\frac{\bar{f}}{2}$ hosszúságú vektorok. Ezek segítségével írjuk fel az a oldalhoz



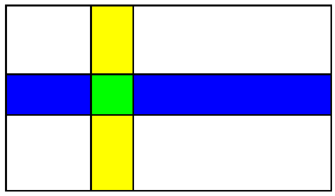
13. ábra

tartozó $\bar{a}$ vektort és a b oldalhoz a $\bar{b}$ vektort. Ekkor: $\bar{a}=\frac{\bar{e}}{2}-\frac{\bar{f}}{2}$ és $\bar{b}=\frac{\bar{e}}{2}+\frac{\bar{f}}{2}$.

Négyzetre emelve: $(\bar{a})^2=\left(\frac{\bar{e}}{2}\right)^2+\left(\frac{\bar{f}}{2}\right)^2+2\cdot\frac{\bar{e}}{2}\cdot\frac{\bar{f}}{2}$ és $(\bar{b})^2=\left(\frac{\bar{e}}{2}\right)^2\left(\frac{\bar{f}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\bar{e}}{2}\cdot\frac{\bar{f}}{2}$. Összeadva, és rendezve megkapjuk, hogy $e^2+f^2=2\cdot a^2+2\cdot b^2$.

15. feladat

A nagy téglalap területe 1200cm^2. A vízszintes sáv 240cm^2, a függőleges sáv 120cm^2 területű. Mekkora a középső kis (zöld) téglalap területe? (Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény 295/1789)



14. ábra

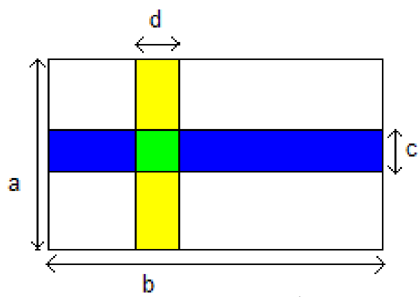
1. megoldás

A függőleges (sárga) sáv területe120cm^2, az egész téglalapé pedig 1200cm^2. Így összesen 10db 120cm^2 területű függőleges sávra tudjuk osztani.

Hasonlóan a vízszintes sáv pedig 5ször fér bele a nagy téglalapba. Így összesen 50db zöld területre tudjuk osztani a nagy téglalapot. Tehát a megoldás: $\frac{1200\text{cm}^2}{50}$, ami 24cm^2. (Ez a megoldás szerepel a feladathoz tartozó megoldáskötetben)

2. megoldás

A feladatot meg lehet oldani úgy is, hogy egyenletekkel felírjuk az ismert területeket, és ezek segítségével ki tudjuk fejezni a keresett területet.



15. ábra

$ab = 1200\ \text{cm}^2$

$cb = 240\ \text{cm}^2$

$ad = 120\ \text{cm}^2$

$dc = ?$

$d=\frac{120\text{cm}^2}{a}$ $\quad c=\frac{240\text{cm}^2}{b}$ $\quad b=\frac{1200\text{cm}^2}{a}$

Azaz: $dc=\frac{120\text{cm}^2}{a}\cdot\frac{240\text{cm}^2}{b}=24\text{cm}^2$

3. megoldás

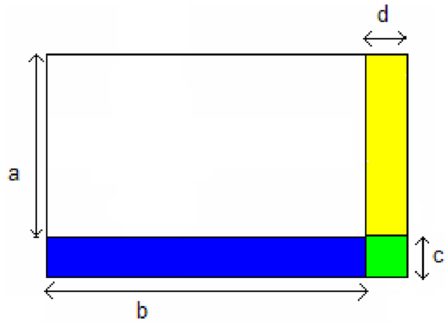
Itt felhasználjuk a megadott területeket, és hogy a szorzás asszociatív

(dc) (ab) = (cb) (ad)

Innen megkapjuk a keresett terület $(dc)=\frac{(cd)(ad)}{(ab)}=\frac{240\cdot 120}{1200}=24\ \text{cm}^2$

4. megoldás

A sárga és kék sávot eltoljuk az ábrán látható módon a nagy téglalap mellé, ekkor egyenletrendszerrel megtudjuk határozni a zöld terület nagyságát. Tudjuk, hogy a fehér terület 1200cm^2, a kék terület 240cm^2, a sárga terület pedig 120cm^2.



16. ábra

A sárga és fehér terület összegét fel tudjuk írni, $a(d+b)=1320\text{cm}^2$ hasonlóan a kék és fehér terület összegét is fel tudjuk írni, $b(a+c)=1440\text{cm}^2$. A keresett zöld terület nagyságát jelöljük x-szel. Az kék és sárga sáv eltolása során kapott nagy téglalap területét.

$$(c+a)\cdot(d+b)=ab+ad+cb+cd=1200\text{cm}^2+120\text{cm}^2+240\text{cm}^2+x$$

$$\left(\frac{1440\text{cm}^2}{b}\right)\cdot\left(\frac{1320\text{cm}^2}{a}\right)=1560\text{cm}^2+x$$

$$\frac{1900800\text{cm}^2}{a\cdot b}=1560\text{cm}^2+x$$

Tudjuk, hogy $a\cdot b=1200\text{cm}^2$

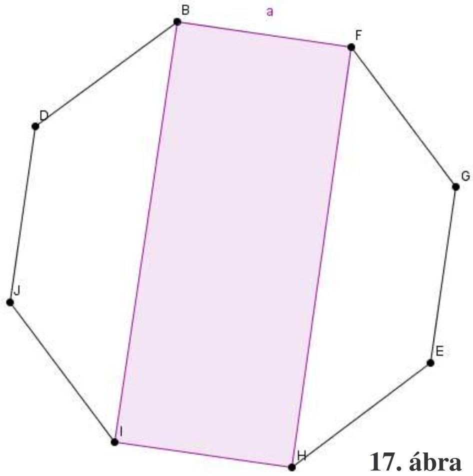
$$1584=1560+x$$

$$x=24\text{cm}^2$$

Tehát a keresett terület $24\,\text{cm}^2$.

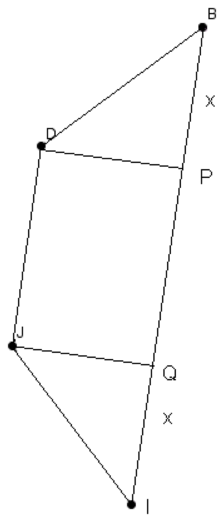
16. feladat

Mutassuk meg, hogy a színezett rész területe egyenlő a jelöletlen részek területével.(2000 feladat az elemi matematika köréből 2003, 103/1291)



17. ábra

1. megoldás

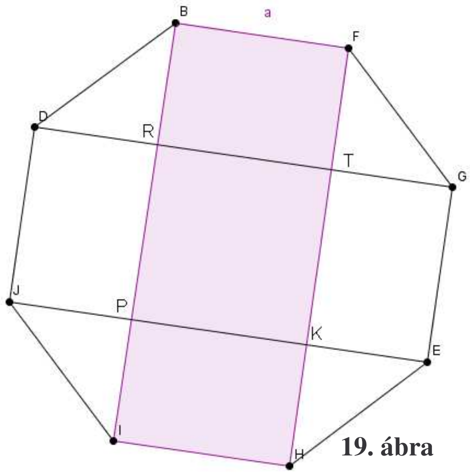


18. ábra

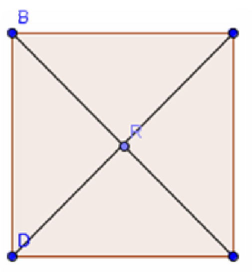
Ki lehet számítani a megadott területeket például a következő módon:. Mivel szabályos nyolcszög van megadva így ki tudjuk számítani a BFHI téglalapot. Ehhez meg kell határozni a $|BI|$ szakasz hosszát. Tudjuk, hogy a BIJD négyszög egy szimmetrikus trapéz, ennek segítségével határozzuk meg a keresett $|BI|$ szakasz hosszát. Tudjuk, hogy a DBP $\angle\ 45^\circ$-os, a BDJ$\angle\ 135^\circ$-os, tehát a BDP$\angle\ 45^\circ$-os, a BPD$\angle\ 90^\circ$-os. Tehát a BPD háromszög egy derékszögű egyenlőszárú háromszög. Legyen a $|BD|$ szakasz (a sokszög oldala) hossza *a*, $|BD| = \frac{x}{\sin 45^\circ}$. Innen megkapjuk, hogy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. A DPQJ négyszög egy téglalap, ezért a $|PQ| = a$. Tehát a $|BI|$ szakasz hossza, $2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\right) + a = \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot a$. Tehát a BFHI téglalap területe $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot a^2$. A nem színezett terület egyenlő a BIJD trapéz területének kétszeresével. A BIJD trapéz területe: $\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot a + a}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\right) = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot a^2}{2}$. Tehát a nem színezett terület:. $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot a^2$. Azaz a két terület megegyezik

2. megoldás

Húzzuk be a DG és JE szakaszokat, ekkor látjuk azt, hogy a BFHI téglalap és a GEJD téglalap egybevágóak, tehát területük megegyezik. Mivel szabályos a nyolcszög, ezért a DGJE téglalap a BFHI téglalapnak a 90°-os elforgatása a nyolcszög középpontja körül. Közös részük a RTKP négyzet. A BFTR téglalap egybevágó a DRPJ téglalappal, és hasonlóan a PKHI téglalap a TGEK téglalappal Tehát azt kell még megmutatni, hogy a BRD,



19. ábra



20. ábra

FGT, KEH, ás a JPI háromszögek „beledarabolhatóak” az RTKP négyzetbe. Ez viszont következik abból, hogy ezek olyan egyenlőszárú derékszögű háromszögek (a nyolcszög belső szögei 135° fokosak és 135°-$90^\circ = 45^\circ$ lesz bármely kis háromszög derékszögtől különböző két szöge), amelyeknek átfogója a hosszúságú.

Tehát a színezett és nem színezetett területek egyenlők.

ANALÍZIS FELADATOK

17. feladat

Adott kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe?

(Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény 92/611)

1. <u>*megoldás*</u>

Adott a téglalap kerülete, ez alapján felírható a két oldal. Az egyik oldal legyen x, akkor a másik oldal $\frac{K}{2} - x$.

A területet fel tudjuk írni a két oldal segítségével. $T = x\left(\frac{K}{2} - x\right)$, és $0 < x < \frac{K}{2}$.

Keressük a $T(x) = x \cdot \left(\frac{K}{2} - x\right)$ függvény maximumát. A függvény egy lefelé nyitott parabola, amelynek a maximumát keressük. A parabola szélsőérték helye így $x=\frac{K}{4}$. Mivel lefelé nyitott a parabola, ezért a maximuma van itt.

Ha $x=\frac{K}{4}$ a másik oldal is ennyi lesz. Azaz a keresett téglalap egy $\frac{K}{4}$ oldalú négyzet.

2. <u>*megoldás*</u>

Az egyik oldal legyen x, a másik oldal pedig $\frac{K}{2} - x$. A téglalap területe $T = \left(\frac{K}{2} - x\right) \cdot x$.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti összefüggést az x és $\frac{K}{2} - x$ értékekre. . Ez alkalmazható, mert a x, és a $\frac{K}{2} - x$ pozitív számok. Ekkor:

$$\sqrt{x\left(\frac{K}{2} - x\right)} \le \frac{x + \frac{K}{2} - x}{2}$$

$$\sqrt{x\left(\frac{K}{2} - x\right)} \le \frac{K}{4}$$

Vagyis $\sqrt{T} \leq \frac{K}{4}$. Mivel mindkét oldalon pozitív mennyiségek állnak a relációjel iránya négyzetre emelés után sem változik, $T \leq \frac{K^2}{16}$. A jobboldali konstans értékhez képest a T akkor maximális, ha az egyenlőség teljesül. Ekkor $x = \frac{K}{2} - x$, vagyis $x = \frac{K}{4}$. Azaz a maximális területű téglalap a $\frac{K}{4}$ oldalú négyzet.

(Ez a megoldás szerepel a feladathoz tartozó megoldáskötetben)

3. *megoldás*

Az előző megoldásokhoz hasonlóan a területet fel tudjuk írni $T = \left(\frac{K}{2} - x\right) \cdot x$ alakban. Vizsgáljuk a $f(x) = \frac{K}{2}x - x^2$-t. Az $f(x)$ függvénynek keressük a maximumát. Deriválás segítségével meg tudjuk adni a szélsőértéket. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) < 0$, akkor az f függvénynek a helyen maximuma van.

$f(x) = \frac{K}{2}x - x^2 \qquad f'(x) = \frac{K}{2} - 2x$

Szélsőérték ott lehet, ahol $f'(a) = 0$, azaz $0 = \frac{K}{2} - 2x$, $\quad x = \frac{K}{4}$.

$f''(x) = -2 \qquad f''\left(\frac{K}{4}\right) = -2$

Tehát $f''\left(\frac{K}{4}\right) < 0$. Azaz a függvénynek az $x = \frac{K}{4}$ helyen maximuma van, és a maximum $\left(\frac{K}{4}\right)^2$. Azaz adott kerület mellett a legnagyobb téglalapot akkor kapjuk, ha a téglalap négyzet.

18. feladat

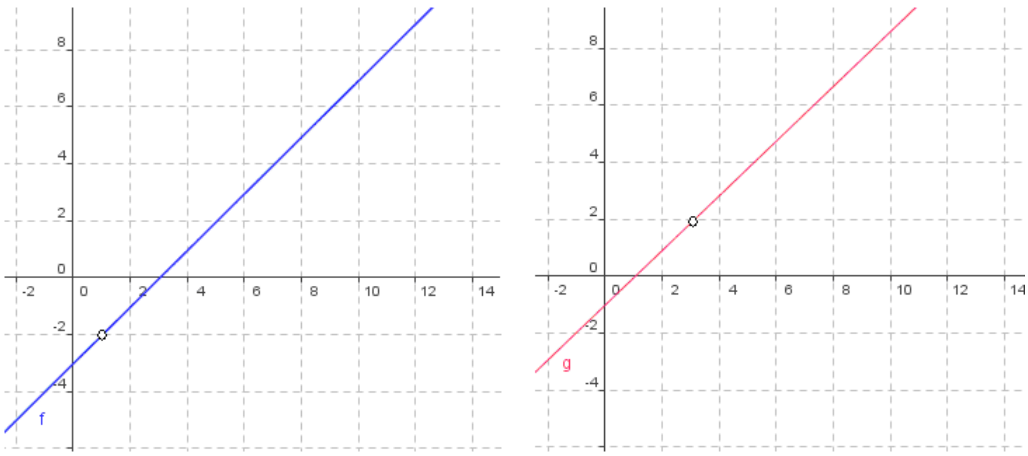
Tekintse az $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-a}$ függvényt $(x, a \in R, \quad x \neq a)$. Az *a* paraméter mely értékei esetén illeszkednek egy egyenesre a függvény grafikonjának pontjai?

(Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény 160/1104)

1. *megoldás*

Mivel olyan *a*-t keresünk, hogy egyenest kapjunk, ezért az $f(x)$ függvénynek $mx+b$ alakúnak kell lennie,. Tehát $\dfrac{x^2-4x+3}{x-a}=mx+b$. Átalakítva az egyenletet azt kapjuk, hogy $x^2-4x+3=(x-a)\cdot(mx+b)$. A zárójeleket felbontva ezt kapjuk: $x^2-4x+3=mx^2+(b-am)x-ab$. Az egyenlőség két oldalán álló polinomok akkor egyenlők, ha $m=1$, ezenkívül, ha $b-am=-4$, azaz $a-b=4$, és $-ab=3$. Így kapunk egy kétismeretlenes két egyenletből álló egyenletrendszert. $\left.\begin{aligned} a-b&=4 \\ ab&=-3 \end{aligned}\right\}$, ebből meg tudjuk határozni az a értékét. $b=a-4$, behelyettesítve a második egyenletbe, $a(a-4)+3=0$. Zárójel felbontása után egy másodfokú egyenletet kapunk *a*-ra. $a^2-4a+3=0$. A másodfokú egyenletet megoldva megkapjuk az *a* értékeit. $a_{1/2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{4\pm 2}{2}$.

Tehát $a=3$ vagy $a=1$. Az első ábra mutatja azt az esetet, amikor az a=1, ekkor az f függvény az y= $x-3$ egyenes kivéve az (1;-2) pont.. A második ábra, az a=3 eset, ekkor az f függvény az y=x-1 egyenes, kivéve a (3;2) pont. A említett pontok az eredeti függvény értelmezési tartománya miatt nem tartoznak a függvényhez .



21. ábra

2. megoldás

Adott az $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-a}$ függvény. Alakítsuk át szorzattá az x^2-4x+3-at. Ehhez keressük meg a gyökeit, $x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}$, ez alapján a két gyök a 3 és az 1. A két gyök segítségével át tudjuk írni a függvényt $\frac{(x-3)\cdot(x-1)}{x-a}$ alakban. Tehát a függvény grafikonja akkor lesz egyenes ha *a*=3 (ekkor az $f(x)=x-1$ függvényt kell ábrázolni $x\neq 3$ értelmezési tartománnyal) vagy *a*=1 (ekkor pedig az $f(x)=x-3$ függvényt kell ábrázolni $x\neq 1$ értelmezési tartománnyal). (Ez a megoldás van a feladathoz tartozó megoldáskötetben.)

19. feladat

Az „Örökzöld" faiskolában 7000 fenyőfa van. Évente kivágják a meglevő állomány 12%-át, de ugyanakkor 600 új fenyőt is ültetnek. A főkertész úgy látja, hogy ez egy jó gondolat, és így soha nem fogy el a készletük. A kertészet könyvelője viszont aggódik, szerinte ebből előbb-utóbb probléma lesz, és elfogynak a fenyők. Kinek van igaza?
(Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten, 2005)

1. megoldás

A kezdeti évben (0. év) a fenyők száma 7000.

Az 1. évben a fák száma: 700 – 0,12 · 7000 + 600= 7000 · (1 - 0,12) + 600

A 2. évben a fák száma: [7000 · (1 - 0,12) + 600] - 0,12 · [700 · (1 - 0,12) + 600] + 600 =

$= 7000 \cdot (1 - 012)^2 + 600 \cdot (1 - 0,12) + 600$

A 3. évben a fák száma: $7000 \cdot (1 - 0,12)^3 + 600 \cdot (1 - 0,12)^2 + 600 \cdot (1 - 0,12) + 600$

Az *n*. évben a fák száma: $7000 \cdot (1 - 0,12)^n + 600 \cdot (1 - 0,12)^{n-1} +\ldots+ 600 \cdot (1 - 0,12) + 600$

Azaz az *n*. évben sem lehet 0 a fák száma, hiszen bármely *n*-re a $7000 \cdot (1 - 0,12)^n + 600 \cdot (1 - 0,12)^{n-1} +\ldots+ 600 \cdot (1 - 0,12) + 600$ pozitív lesz. Tehát a főkertésznek van igaza.
(Részben ez van az irodalomban.)

2. *megoldás*

Számolás nélkül is meg lehet oldani, hiszen volt eredetileg 7000 fánk és minden évben ott marad legalább 600 fának a 88%-a Tehát nem fognak elfogyni.

Megjegyzés:

Az más kérdés, hogy milyen idős fát érdemes kivágni, de ezt a feladat nem vizsgálja.

Ha a fák száma eléri az 5000 darabot, akkor a faállomány stabilizálódni fog, hiszen az 5000-nek a 12%-a pont 600, tehát 600 fát vágunk ki és annyit ültetünk hozzá. Tehát a faállomány 5000db fánál fog stabilizálódni.

Ha az n. évben a_n darab fa van. Ekkor a_n felírható: $a_n = 0{,}88 \cdot a_{n-1} + 600$. Ez a sorozat soha nem meg 5000 alá, tehát a fák nem fognak elfogyni.

3. *megoldás*

Azt állítjuk, hogy nem fogynak el a fák.

Bizonyítás: indirekt módon.

Indirekt, tegyük fel, hogy az n. évben fogynak el először a fák. Jelöljük t-vel az (n-1). évben a fák számát. Ekkor fel tudjuk írni, hogy a következő évben a feltétel szerint a faállomány 0,88 · t + 600 = 0, azaz a t = -528, ami azt jelenti, hogy az (n-1). évben a fák száma -528. Mivel elsőévben pozitív számról indult a fák száma, és az (n-1). évben -528 a fák száma, ezért a közte levő időben, valahol el kellett, hogy fogyjanak a fák. De ez ellentmond annak, miszerint az n. évben fogynak el először a fák. Mivel ellentmondásra juttottunk, ezért az állítás igaz.

Megjegyzés: Ha figyelembevesszük, hogy t csak nem negatív lehet, akkor a t=-528 érték eleve ellentmondást jelent.

20. feladat

Egy kábeltelevíziós társaság jelenleg 3500 előfizető van, az évi előfizetési díj 25000 Ft. A legutóbbi felmérésük szerinte minden egyes 1000 Ft-os díjcsökkentés háromszáz új előfizetést hozhat. Mennyi legyen az új előfizetési díj, hogy a társaság bevétele maximális legyen? (Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten, 2005)

Megjegyzés: feltételezzük a feladat megoldása során, hogy 1000 Ft-os előfizetési díj csökkenése esetén 300 új előfizető lesz.

1. *megoldás*

Határozzuk meg mennyi a bevétel, ha változik az előfizetési díj. A bevételi függvényt megkapjuk, ha a fogyasztók számát szorozzuk az előfizetési díjjal, azaz $(3500+300\cdot x)\cdot(25000-1000\cdot x)$. A zárójeleket felbontva egy másodfokú függvényt kapunk, $-300000\cdot x^2+4000000\cdot x+87500000$. Deriválással megkapjuk mennyi a maximuma ennek a függvénynek. $f'(x)=-600000\cdot x\ +4000000$. Szélsőérték ott lehet, ahol az $f'(x)=0$. Azaz $x\approx 6{,}7$, és mivel $f''(x)=-600000\ <0$, tehát a függvénynek a maximuma 6,7-nél van. Mivel x=6 esetén a bevétel $19000\cdot 5300=100700000$, x=7 esetén a bevétel $18000\cdot 5600=100800000$, az új előfizetési díj 18 000 Ft legyen.

2. *megoldás*

Hasonlóan mint az előző megoldás során felírjuk a bevételi függvényt. Ekkor a $-300000\cdot x^2+4000000\cdot x+87500000$ egy parabolának az egyenlete. Tudjuk, hogy a parabolának a szélsőérték helyét megkapjuk a parabola egyenletéből. Ha a parabola egyenlete $a\cdot x^2+b\cdot x+c$, ennek alapján szélsőérték helye a $-\frac{b}{2a}$ helyen van. Ebben az esetben a szélsőérték hely a $-\frac{4000000}{(-600000)}$. Ez egy lefelé nyitott parabola, tehát a szélsőérték ekkor a maximum, ami körülbelül 6,7.

Az 1. megoldásnál leírt meggondolások miatt az új előfizetési díj 18 000 Ft legyen.

3. Fejezet

NÉHÁNY FELADAT ÁLTALÁNOSÍTÁSA

Az alábbi feladatok közül egyes feladatokat könnyen lehet általánosítani. Nézzük meg néhány példát erre.

A *3. feladatot* könnyen lehet általánosítani, ekkor a feladat során *n* darab tárgy közül választunk találomra *k* darab tárgyat. Általánosítva is meg lehet oldani a feladatot kétféle módszerrel. Egyik megoldásnak felhasználhatjuk, hogy $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$, vagy pedig, hogy külön-külön megnézzük a tárgyaknál, hogy vagy kivesszük, vagy nem. Ezekre mindegyikre 2 lehetőség van, így az *n* darab tárgyra könnyen kijön, hogy 2^n lehetőség van, hogy találomra kiválasszunk *k* darabot.

A *8. feladat* általánosítása lehet például a következő: bizonyítsuk be, hogy $6 \mid 17^n - 11^n$. Ezt a bizonyítást könnyű bizonyítani. Annyit kell hozzá felhasználni, hogy $a-b \mid a^n - b^n$. Innen gyorsan kijön, hogy $17-11 \mid 17^n - 11^n$, azaz $6 \mid 17^n - 11^n$.

Ez az általánosított feladat a binomiális tétel felhasználásával is bizonyítható.

Alakítsuk át a kifejezést a következő képpen $6 \mid (18-1)^n - (12-1)^n$. Mindkét tagot fejezzük ki a binomiális tétel segítségével, azaz $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$.

Tehát a $(18-1)^n = \binom{n}{0}\cdot 18^n - \binom{n}{1}\cdot 18^{n-1}\cdot 1+\ldots+(-1)^n\cdot 1^n$. Ebből látszik, hogy az utolsó tagon kívül minden tag osztható 6-tal. Hasonlóan $(12-1)^n = \binom{n}{0}\cdot 12^n - \binom{n}{1}\cdot 12^{n-1}\cdot 1+\ldots+(-1)^n\cdot 1^n$, itt is az utolsó tagon kívül minden tag osztható hattal. Tehát azt kell még megmutatni, hogy $6 \mid (-1)^n \cdot 1^n - (-1)^n \cdot 1^n$, ami pedig igaz, hiszen $6 \mid 0$.

A *10. feladatot* is lehet általánosítani, például, lehet a feladat az, hogy mely x és y egész számra teljesül, hogy $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$.

A kifejezés átalakítható: $(x-n)\cdot(y-n) = n^2$ alakra. Innen látszik, hogy az n^2-et osztja az $(x-n)$ és a $(y-n)$. Az n^2 osztói lehetnek egyenlők az $(x-n)$-nel. Innen meg tudjuk határozni a keresett x-et és y-t

Például:

- n = 1, ekkor $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. Az 1 osztói a ± 1, hozzáadva mindkettőhöz 1-et, megkapjuk hogy a lehetséges x érték, a 2. Tehát az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$-nek egy jó megoldása van, ez az $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, azaz x = y = 2
- n = 3, ekkor $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$, hasonlóan a 3 osztói a ± 3 és a ± 1.

x lehetséges értékei:	6	4	2
y lehetséges értékei:	6	12	-6

A jó megoldások: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{(-6)} = \frac{1}{3}$

Nagyobb számokra is ki tudjuk így számolni a jó megoldásokat, de ahhoz sokat kell számolni, illetve az összes osztót nehéz meghatározni nagyobb számoknál.

Megjegyzés

A feladathoz további általánosítások is készíthetők:

Például: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{k} = 1$ stb. Milyen x, y, z, ... egész számokra teljesül.

A *18. feladatot* is lehet általánosítani. Lehet például a következő:: egy faiskolában *n* darab fa van, minden évben kivágják a *d* százalékát és ültetnek még *t* darab fát. Elfogynak-e a fák?

Ekkor is látható, hogy a fák soha nem fognak elfogyni, hiszen minimum *t* darab fa mindig lesz. Ha a k. évben a_k. Ekkor $a_k = (1-k)a_{k-1} + t$, mivel minden tag pozitív, ezért a fák nem fognak elfogyni.

Meggondolható az is, hogy hány százalékát kell kivágni a fáknak, hogy ha még hozzáültetünk *t* darab fák, akkor elfogyjanak. Tetszőleges lehet így a *d* értéke, hiszen ha az összes fát kivágjuk, akkor is megmarad az, amit utólag ültetünk *t* darab fa.

4. Fejezet

ÖSSZEGZÉS

Szakdolgozatomban különböző témájú feladatokat oldottam meg többféleképpen. Szerettem volna bemutatni, hogy a matematikában mennyi féle különböző eszközt lehet használni. A különféle feladatok szerintem jól mutatják, hogy egy feladatnak nagyon sokféle képpen hozzá lehet állni. Úgy gondolom elég sok eszközt sikerült bemutatni, egy-egy feladat megoldásainál. Látszott az is, hogy egy feladot nem csak azokkal az eszközökkel lehet megoldani, amelyeket éppen akkor tanulnak a diákok, hanem lehet, hogy egyszerűbb megoldása is létezik egy feladatnak.

A szakdolgozat írása során akadtak kedvenc feladataim is. Az egyik a *10. feladat,* ennél a feladatnál egy megoldásra viszonylag gyorsan rájöttem, a másik megoldáson viszont napokig gondolkoztam. A másik kedvenc feladatom a 19. feladat. Ez a feladat azért tetszett meg nagyon, mert napjaink egyik fontos témájával kapcsolatos, mobiltelefon és a nyereség maximalizálás, ami szerintem érdekes dolog. Az ilyen feladatokkal lehet jól megmutatni, hogy miért jó matematikát tanulni.

FELHASZNÁLT IRODALOM

Róka Sándor – 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex, 2003

Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön – Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény 1-2, Konsept-H Könyvkiadó, 2003

Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön – Nagyné Pálmay Piroska – Windisch Klára – Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Megoldások, Konsept-H Könyvkiadó, 2003

Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István – Sokszínű Matematika 11. – 12. Mozaik kiadó, 2004, 2005

Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – Csúri József – Duró Lajosné dr. – dr. Gyapjas Ferencné – dr. Kántor Sándorné – dr. Pintér Lajosné – Matematika feladatgyűjtemény, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999

Fitos László: Analóg tételek és feladatok a sík és térgeometriában, Tankönyvkiadó, 1984

Pogáts Ferenc: Varga Tamás Matematikai Versenyek, Typotex, 1995

Bárd-Frigyesi-Lukács-Maior-Székely-Vancsó: Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten, Műszaki könyvkiadó, 2005

Matematikai kompetenciaterület:
http://www.sulinovaadatbank.hu/index.php?akt_menu=248 letöltés: 2010. május

Tóth Enikő – Feladatok többféle megoldással (szakdolgozat, ELTE TTK, 2009)