Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természet Tudományi Kar

TANÁRI KÉPZÉS SZAKDOLGOZATA

Hiperbolikus szerkesztések a Geogebra segítségével

Témavezető:
Csikós Balázs
egyetemi docens

Készítette:
Gál Eszter
matematika-fizika
tanári szak

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **4**

2. A Geogebráról **5**

2.1. Mi is az a Geogebra? 5

2.2. Hogyan lehet megszerezni a programot? 6

2.3. Kinek hasznos a Geogebra? 7

2.4. Saját élményeim 10

3. Hiperbolikus geometria - elméleti háttér **12**

3.1. Axiomatikus geometria 12

3.1.1. Az axiomatikus módszerről általában 12

3.1.2. Az euklideszi tér Hilbert-féle axiómarendszere 13

3.1.3. Geometriai tértípusok 15

3.2. A hiperbolikus tér modelljei 16

3.2.1. Cayley-Klein-modell 16

3.2.2. Poincaré-modell 20

4. Szerkesztési feladatok **22**

4.1. Alapszerkesztések 22

4.1.1. Egyenes szerkesztése két ponton keresztül 22

4.1.2. Pólus, poláris szerkesztése 25

4.1.3. Áttérés a két modell között 25

4.2. Felezőmerőleges egyenes szerkesztése 26

4.2.1. Szerkesztés a Cayley-Klein-modellben 26

4.2.2. Szerkesztés a Poincaré-modellben 29
4.3. Tengelyes tükrözés 30
4.3.1. Tükrözés a Cayley-Klein-modellben 30
4.3.2. Tükrözés a Poincaré-modellben 31
4.4. Kör szerkesztése adott pont köré adott sugárral 31
4.5. Kör szerkesztése adott ponton át adott középponttal 33

5. Irodalomjegyzék **35**

1. fejezet

Bevezetés

Egyrészt azért választottam ezt a témát, mert örültem, hogy megismerkedhetek egy dinamikus geometriai programmal, a Geogebrával. Hiszen azt, gondolom a tanári pályának fontos része, hogy felkeltsük a gyerekek érdeklődését, és egy ilyen program kiválóan alkalmas erre a feladatra, főképp a matematika órákon. Másrészt az írás során fokozatosan egyre jobban elmélyültem a hiperbolikus geometria rejtelmeiben, így többet is megtanultam, mint az alapvető egyetemi tananyag ebben a témában.

A dolgozat második fejezetében röviden bemutatom a Geogebrát, és ötleteket adok, hogy mire használható a matematika órán kívül is. A középső részben beszélek az axiomatikus geometriáról, valamint részletesen bemutatom a hiperbolikus geometria Cayley-Klein-modelljét. Végül pedig a két tudást egyesítve szerkesztéseket végzek a program segítségével.

2. fejezet

A Geogebráról

2.1. Mi is az a Geogebra?

Amikor a hetedikesek tették fel ezt a kérdést, azt válaszoltam nekik, hogy ez egy olyan program, mellyel lehet rajzolni, szerkeszteni, függvényeket elemezni. Persze valójában ennél sokkal többre képes ez a számítógépes program. Tényleg lehet vele szerkesztéseket végezni, mégpedig nem csak az egyszerűbbeket (felezőpont szerkesztése, adott egyenessel párhuzamos egyenes szerkesztése adott ponton kersztül,...), hanem összetettebbeket is (középpontos nyújtás, köré írt kör szerkesztése, inverzió,...).

Nagyon sokat tud segíteni a koordinátageometriában, mivel az alakzatoknak az egyenleteit, a pontok koordinátáit is kiszámolja és megjeleníti. Sőt ezeket a paramétereket mi is tudjuk változtatni. Innen adódik a program neve is: a Geogebra a geometria és az algebra egy-egy feléből van összerakva. Ez arra utal, hogy míg az egyik ablakban geometriai ábrákat rajzolunk, addig a másikban megjelennek ezek algebrai egyenletei. Előnye, hogy egy-egy paraméter változtatása során szinte azonnal kirajzolja az új görbét, és jól látható, hogy a paraméter változtatásával, hogyan változik a görbe. Az elemi geometriai szerkesztések során fontos, hogy pontosan szerkeszt, így nem fordulhat elő az, hogy pontatlan szerkesztés miatt feltételezünk valami olyat, ami nem igaz. A diszkusszió végiggondolása is könnyebben megy vele, hiszen tudjuk mozgatni a feladatban megadott alakzatokat, és „mozognak vele a szerkesztési lépések" is. Nagy előnye még, hogy eredetileg is rengeteg szerkesztési lépés elvégzésére képes, és ezen kívül mi is

„megtaníthatunk” neki szerkesztéseket. Ezt eszközök létrehozásával tehetjük meg olyan módon, hogy elvégezzük a kívánt lépéseket, majd elmentjük eszközként, így később egy kattintással elvégezhető a lépéssorozatunk.

További előnyei, hogy, mint minden elektronikus dokumentumot, évekkel később is elő lehet szedni, használni, tovább alakítani. Ezen kívül, ha iskolában használjuk, a gyerekek nagyon lelkesek tudnak lenni, hiszen látványos dolgokat lehet művelni a programmal. Ezzel szemben hátránya a Geogebrának, hogy mint minden számítógépes programnál, a technika ördöge gyakran közbe szól. Egy rossz mozdulatra kitörlődhet az egész munkánk, amin az elmúlt 20 percben dolgoztunk, vagy hogy szeretnénk bemutatni kisebb-nagyobb közönség előtt egy témát, melyhez készítettünk ábrákat, de abban a teremben, ahol vagyunk, nincsen hozzá technikai háttér. Vagy ha van, akkor az ottani számítógépre valamilyen okból kifolyólag nem lehet átmásolni az adatokat, vagy nem indul el a program, stb. Ellenben, ha mindezek nem szólnak közbe, érdekesebbé tudjuk tenni vele előadásainkat. Másik dolog, amire figyelni kell, hogy nehezen jegyzetelhető egy olyan előadás, amiben végig a Geogebrában szerkesztünk. Hiszen rengeteg látványos dolgot be lehet mutatni, mindezt nagyon gyorsan, viszont, ha azt szeretnénk, hogy a hallgatóság ebből le is írjon valamit (főleg, ha gyerekekről van szó), akkor arra külön időt kell szánni, amíg leírják, lerajzolják a sok-sok ábrát.

2.2. Hogyan lehet megszerezni a programot?

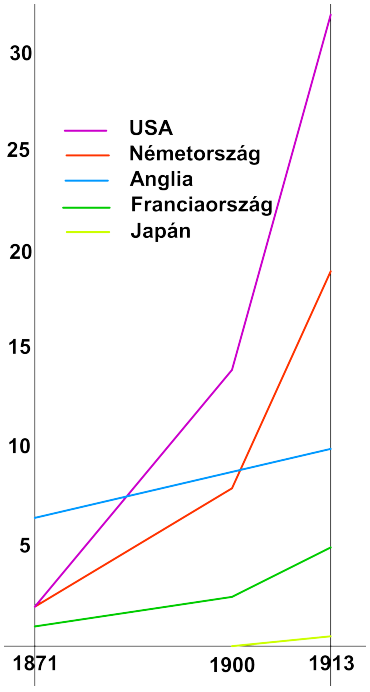
Számos dinamikus geometriai program létezik, közel azonos képességgel (Cabri, Euklides, Software for Euclidean Geometry, ...). Ezek között a Geogebra nagy előnye, hogy ingyenesen letölthető a program honlapjáról: www.geogebra.org. Az oldal 36 nyelven megtekinthető, többek között magyarul is. A Geogebra futtatásához szükség van a Java 1.4.2 vagy újabb verziójára, de ajánlott az 1.6 verzió. Ez biztosítja a Geogebra számára a platformfüggetlenséget és ezáltal böngészőn keresztül is egyszerűen futtatható. A legújabb Java Software a következő 32 és 64 bites operációs rendszerekre érhető el: Windows 7/Xp/Vista/2000/2003/2008, Mac OSX, Linux, Solaris.

Található a honlapon fórum 20 nyelven, melyen segítséget lehet kérni és kapni a Geogebra többi felhasználóitól, itt lehet hibát bejelenteni, vagy új funkciókat ajánlani.

Magyar nyelvű fórum sajnos nincs. A GeogebraWiki egy felhasználók által szerkeszthető weboldal, hasonlóan a Wikipediához, ahol többek közt már elkészült Geogebra munkalapokat oszthatnak meg egymással a Geogebrát használók. Jelenleg ez 25 nyelven érhető el, köztük magyar nyelven is (www.geogebra.org/en/wiki). Magyar súgó is van a Geogebrához, de ez viszonylag régi, 2006. május 15-ei és a Geogebra 2.5 verzióhoz írodott. Az angol nyelvű súgók jóval frissebbek.

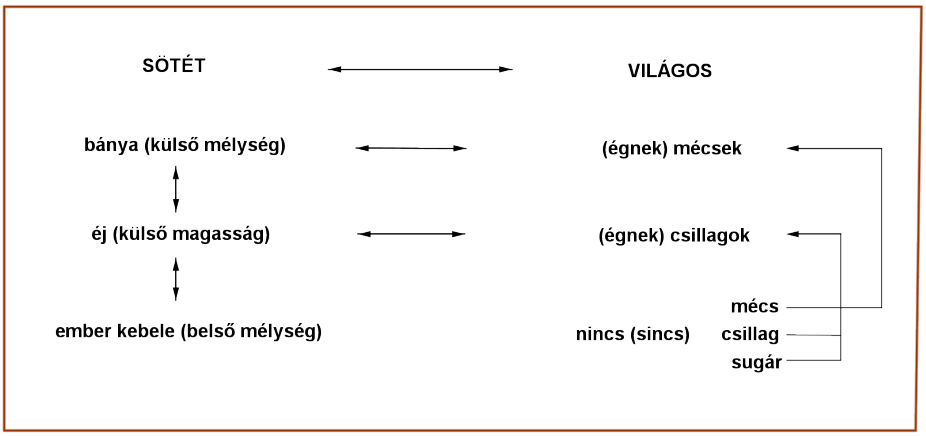
2.3. Kinek hasznos a Geogebra?

Mindenkinek ajánlhatjuk a Geogebrát, akinek szüksége van ábrák, rajzok készítésére elektronikus úton. Ezek első sorban a matematikatanárok, de a többi szak tanárainak is szüksége lehet egy-egy óra érdekesebbé tételéhez különböző rajzokra, vagy igényes dolgozatok összeállításához is hasznos lehet. Gondolok itt történelmi összefüggésekre, a társadalom rétegződéseire, népesedési-, termelési statisztikákra, diagrammokra:



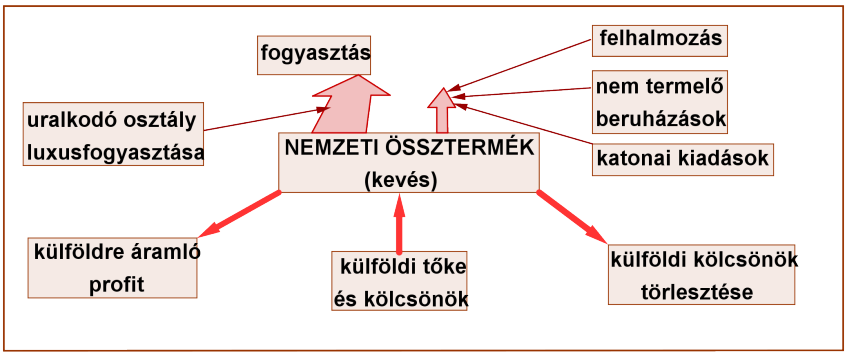
2.1. ábra. A nagyhatalmak vastermelése

irodalmi művek elemzéséhez szükséges táblázatokra:



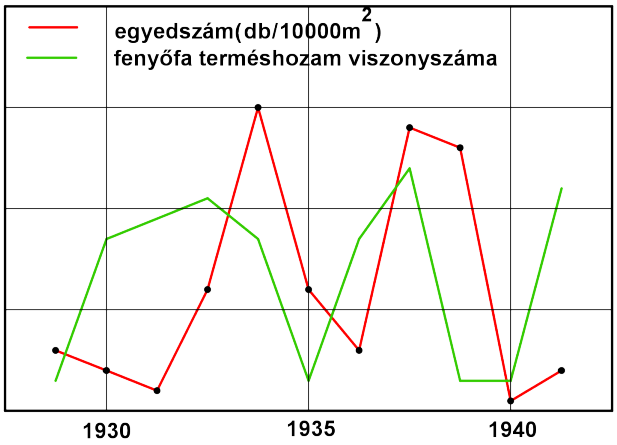
2.2. ábra. Petőfi Sándor: Világosságot! c. verséből a sötétség-világosság motívum

földrajzból a termelés, népesség, kereskedelem, nyersanyagok mennyiségi ábráira, földtörténeti korok összefoglalására:



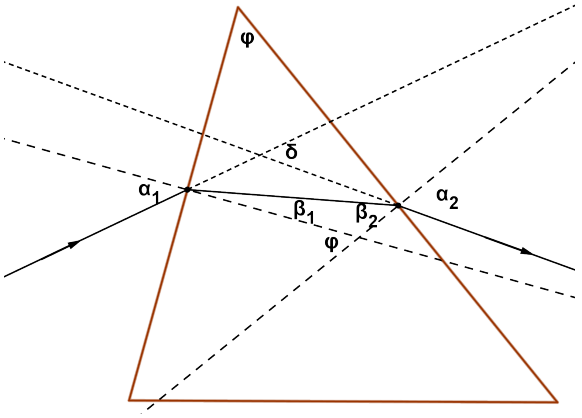
2.3. ábra. A szegénység ördögi köre

biológiai grafikonokra:



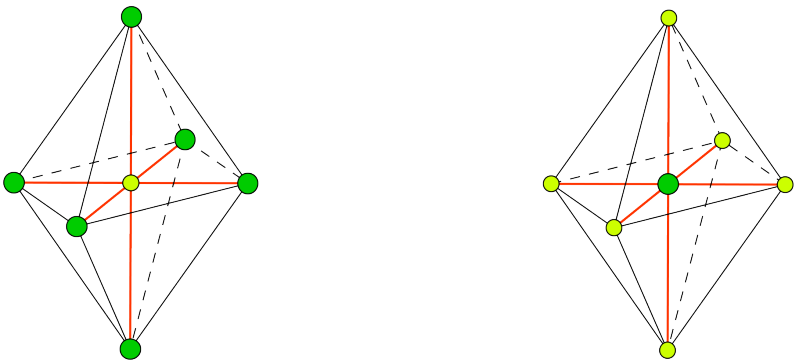
2.4. ábra. Növényevő populáció függése a terméshozamtól

A fizika órának - szinte minden tananyagnál - fontos kelléke az ábra: mechanikában a sebességek, gyorsulások, erők, ingák, csigák; elektronikában a kapcsolási rajzok, optikában a fény útja, stb., mind egy jó ábrával szemléltethetők igazán:



2.5. ábra. Fénytörés prizmában

kémiából molekulaszerkezetekre, grafikonokra:



2.6. ábra. NaCl kristályrácsa

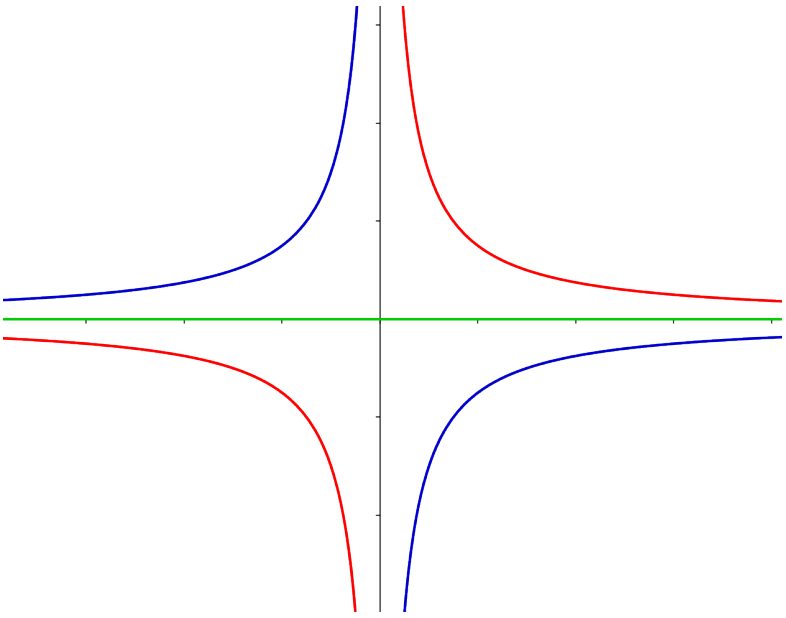
A tanárokon kívül diákok számára is hasznos lehet a Geogebra, egy-egy házi feladat elkészítésekor.

2.4. Saját élményeim

A Bevezető iskolai gyakorlat című órán kell tartanunk két-három órát egy középiskolában. Gondoltam kipróbálom, mennyire válik be gyerekeknél a Geogebra. Ehhez tudni kell, hogy matematika tagozatos iskolába mentem tanítani, bár nem matematika, hanem természettudományi tagozatra, hetedik osztályba. Tehát okos, érdeklődő gyerekekkel álltam szemben. Először a hiperbolát, mint függvénygrafikont mutattam be nekik. Nagyon tetszett a diákoknak az „elektronikus tábla", felkeltette érdeklődésüket. Egy ekkora gyerek számára még nagyon nehezen képzelhető el, hogy a függvény grafikonja sohasem éri el az x tengelyt. Ez nagyon jól szemléltethető a Geogebra segítségével, hiszen nagy számoknál is jól rá lehet közelíteni a függvényre. Ez annyira izgatta őket, hogy még óra után a szünetben is odajöttek, hogy hadd próbálják ki ők is.

Következő órán összefoglaltuk az általuk eddig tanult függvényeket. Ehhez nagyon jól jött, hogy a függvények transzformálását is be tudtam nekik mutatni a program segítségével. Ez gyorsan és egyszerűen kivitelezhető volt, valamint látványos a gyerekek számára. Viszont itt beleestem a gyorsaság hibájába. Hiszen rengeteg ábrát mutattam

meg nekik, de ebből viszonylag keveset írtak ők le a saját füzetükbe. Tehát, ha a programmal dolgozunk, figyelnünk, kell arra, hogy jegyzeteljenek is közben a diákok. Vigyázni kell arra is, hogy bizonyos esetekben a Geogebra „átveri" az embert azzal, hogy az apró részleteket nem mutatja pontosan. Éppen azt néztük, hogy mi történik az $\frac{a}{x}$ függvénnyel, ha a értékét változtatjuk. Gyönyörűen látszódik, hogy ha $a > 0$, akkor a grafikon úgy áll, mint a 2.7. ábrán a piros hiperbola, ha $a < 0$, akkor úgy, mint a kék. Ha pedig $a = 0$, akkor a grafikon a zöld egyenes - mondtam én, és teljesen elfelejtkeztem arról, hogy ez nem egy teljes egyenes, hanem van benne egy szakadás $x = 0$-nál. És ez egyáltalán nem látszik a Geogebrában.



2.7. ábra.

3. fejezet

Hiperbolikus geometria - elméleti háttér

3.1. Axiomatikus geometria

3.1.1. Az axiomatikus módszerről általában

Az abszolút, az euklideszi és a hiperbolikus geometria, mint minden más része a matematikának alapfogalmakra és ezek alapvető tulajdonságaira, azaz az axiómákra épül. Egy axiómarendszert akkor nevezünk ellentmondásmentesnek, ha nincs olyan állítás, amit tagadásával együtt le lehet vezetni az axiómarendszerből. Bizonyított tény, hogy ha a halmazelmélet axiómarendszere ellentmondásmentes, akkor a fenti geometriák axiómarendszerei is azok. Viszont az előbbiről még nem bizonyították az ellentmondásmentességet, sem annak tagadását, így csak relatív ellentmondásmentességről beszélhetünk.

Az egyik módja annak, hogy bebizonyítsuk egy axómarendszerről, hogy nem ellentmondásos, hogy mutatunk egy modellt. Ez úgy történik, hogy megadunk egy konkrét alaphalmazt, és megmondjuk, hogy ebben a halmazban hogyan jelennek meg az alapfogalmak, és belátjuk, hogy ezekre igazak az axiómák. Ha létezik ilyen modell, akkor az axiómarendszer ellentmondásmentes.

3.1.2. Az euklideszi tér Hilbert-féle axiómarendszere

David Hilbert[1] német matematikus volt az, aki a Grundlagen der Geometrie (A geometria alapjai) című művében megfogalmazott tizenhat axiómát, amelyek azóta is az euklideszi geometria leginkább elfogadott axiómarendszerét alkotják. Hilbert úgy rendezte az axiómákat, hogy öt csoportra osztotta őket. Mielőtt megnézzük ezeket, adjuk meg az alapfogalmakat.

Egy X halmazon egy euklideszi tér struktúráját az $\mathscr{E}, \mathscr{S}, R, \cong_1, \cong_2$ struktúraelemekkel adjuk meg. Itt $\mathscr{E}$ és $\mathscr{S}$ az X bizonyos részhalmazainak egy rendszere, az $\mathscr{E}$ elemeit egyeneseknek, az $\mathscr{S}$ elemeit síkoknak nevezzük, $R, \cong_1, \cong_2$ pedig relációk. Az $R \subset X \times X \times X$ reláció a tér ponthármasain van értelmezve. $(ABC) \in R$ esetben azt mondjuk, hogy B az A és C között van, vagy B elválasztja A-t C-től.
Most pedig nézzük az axiómákat:

I. Illeszkedési axiómák

(1) Minden egyenesnek van legalább két pontja.

(2) Bármely két pont egyértelműen meghatároz egy olyan egyenest, amely ezeket a pontokat tartalmazza.

(3) Bármely sík tartalmaz legalább három olyan pontot, amelyek nincsenek egy egyenesen.

(4) Bármely három pont, amely nem kollineáris, egyértelműen meghatároz egy síkot, amely tartalmazza azokat.

(5) Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkhoz, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik ehhez a síkhoz.

(6) Ha két síknak van egy közös pontja, akkor van a két síknak egy további közös pontja is.

(7) Van a térnek négy olyan pontja, amelyek nincsenek egy egyenesen és nincsenek egy síkon sem.

[1] 1862-1943

II. Rendezési axiómák

(0) $(ABC) \in R$ esetén A, B, C egy egyenesen vannak, különbözőek és $(CBA) \in R$.

(1) Ha egy egyenes két pontja A és B, akkor van az egyenesnek olyan C pontja, amelyet B elválaszt A ponttól.

(2) Egy egyenesnek három pontja közül legfeljebb egy van a másik kettő között.
Megjegyzés: A harmadik axióma kimondásához szükségünk van a szakasz fogalmának definiálásához.
Definíció: Az A és B pontok által meghatározott zárt szakasz: $[A, B] = \{C | (ACB) \in R\} \cup \{A, B\}$.

(3) Ha A, B, C nincsenek egy egyenesen, és az őket tartalmazó síkban levő egyenes nem halad át egyik ponton sem, de metszi az $[A, B], [B, C], [C, A]$ szakaszok közül az egyiket, akkor ez az egyenes legalább még egy másik szakaszt is metsz a felsoroltak közül. (Ezt más néven Pasch-féle axiómának szokás nevezni.)

Megjegyzés: Az $\mathscr{E}, \mathscr{S}$ és R struktúraelemek segítségével bevezethetők a szakasz (ezt már meg is tettük), félegyenes, félsík, háromszög és a konvex szögtartomány fogalma. $\cong_1$ és $\cong_2$ ekvivalenciarelációk a szakaszok, illetve a konvex szögtartományok halmazán.

III. Egybevágósági axiómák

(1) Ha adott egy a szakasz és az O kezdőpontú félegyenes, akkor pontosan egy olyan A pont van a félegyenesen, amelyre $OA \cong_1 a$.

(2) Ha az e egyenes egymásutáni A, B, C és az (e-től nem feltétlenül különböző) e' egyenes egymásutáni A_1, B_1, C_1 pontjaira $[AB] \cong_1 [A_1B_1]$ és $[BC] \cong_1 [B_1C_1]$, akkor $[AC] \cong_1 [A_1C_1]$.

(3) Ha adott az α konvex szög, egy félsík és annak határán az OA félegyenes, akkor a megadott félsíkon belül pontosan egy olyan OB félegyenes létezik, amelyre $AOB\angle \cong_2 \alpha$.

(4) Ha az A_1, B_1, C_1 és A_2, B_2, C_2 háromszögekben $[A_1C_1] \cong_1 [A_2C_2]$, $[B_1C_1] \cong_1 [B_2C_2]$ és $A_1C_1B_1\angle \cong_2 A_2C_2B_2\angle$, akkor $B_1A_1C_1\angle \cong_2 B_2A_2C_2\angle$.

IV. Folytonossági axióma

Ha egy egyenes pontjait úgy soroljuk két osztályba, hogy egyik osztály se legyen üres, és egyik osztályba tartozó pont se válasszon el másik osztályba tartozó két pontot, akkor van olyan pont, amely bármely két tőle különböző és más-más osztályba tartozó pontot elválaszt.

V. Párhuzamossági axióma

Ha egy síkban adott egy egyenes és rajta kívül egy pont, akkor ebben a síkban legfeljebb egy olyan egyenes van, amely a megadott ponton áthalad és a megadott egyenest nem metszi.

3.1.3. Geometriai tértípusok

Ha ezen axiómák közül kivesszük az utolsót, azaz a párhuzamossági axiómát, akkor a matematikának egy olyan részéhez jutunk, amit abszolút geometriának nevezünk. Ha a párhuzamossági axióma tagadását tekintjük egy axiómának, akkor is ellentmondásmentes axiómarendszert kapunk. Ez a hiperbolikus tér axiómarendszere. Tehát az első tizenöt axióma mindhárom geometriának az alapját képezi, és attól függően, hogy a párhuzamossági axiómát, vagy annak tagadását vesszük hozzá, nevezzük euklideszi vagy hiperbolikus geometriának. A nem-euklideszi geometriáknak több fajtája is van: gömbi, elliptikus, hiperbolikus geometria, de az első kettőben már az euklideszi tér illeszkedési axiómái sem teljesülnek. Tehát ezen geometriák közül a hiperbolikus geometria áll az euklideszihez legközelebb.

Ebben a dolgozatban csak az utóbbival foglalkozunk.

A hiperbolikus geometriát Bolyai János[2] és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij[3] építették fel egymástól függetlenül, a XIX. században. Ez a geometria önmagában nagyon absztrakt, ezért modelleken keresztül vizsgáljuk meg.

[2] 1802-1860, Erdélyi származású magyar matematikus

[3] 1792-1856, orosz matematikus

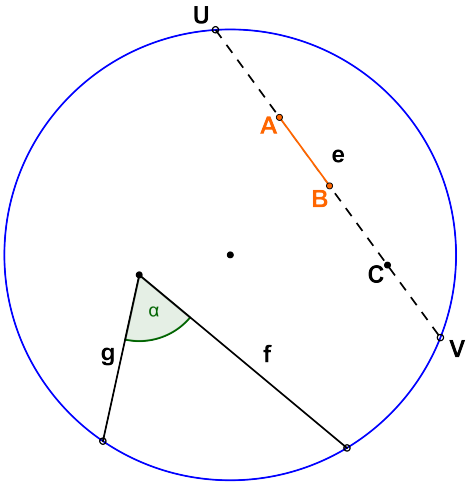
3.2. A hiperbolikus tér modelljei

A hiperbolikus geometriának több modellje is létezik, ezek közül mi kettővel fogunk foglalkozni. Ezek a Cayley-Klein-modell és a Poincaré-féle gömbmodell. Mindkét modell az euklideszi tér egy modelljébe van beágyazva.

3.2.1. Cayley-Klein-modell

Ennél a modellnél a hiperbolikus tér X alaphalmaza egy egységsugarú nyílt gömb az euklideszi térben. Az egyenesek a gömböt metsző euklideszi egyenesek gömbbe eső részei (lásd 3.1. ábrán e). A síkok a gömböt metsző euklideszi síkok gömbbe eső részei. Az R relációt definiáljuk úgy, hogy $A, B, C \in X$ esetén $(ABC) \in R$ pontosan akkor teljesüljön, ha B az euklideszi értelemben A és C között van. Ezek a struktúraelemek már megadják, hogy X mely részhalmazai alkotnak szakaszt, szögtartományt, stb.

Ezek alapján a szakaszok olyan euklideszi ($\mathbb{E}$-beli) szakaszok, melyeknek mindkét végpontja a gömbön belül van (3.1. ábrán $[A, B]$). A félegyenesek olyan $\mathbb{E}$-beli félegyenesek modellbe eső részei, melyek végpontja a gömbön belül van (3.1. ábrán f, g). Az $O \in X$ csúcsú konvex szögtartományt az ebből a pontból induló két félegyenes határozza meg (3.1. ábrán α).



3.1. ábra.

A szakaszok egybevágóságának értelmezéséhez szükségünk van még a távolság fogalom bevezetésére is. Két (különböző) pont (A és B) távolsága: $d(A,B) = |\ln(ABUV)|$, ahol $(ABUV)$ a négy pont kettősviszonyát jelöli, valamint U és V pontok az $[A,B]$ szakaszt tartalmazó $\mathbb{H}$-beli egyenes $\mathbb{E}$-beli végpontjai (lásd 3.1. ábra). Ezek után már mondhatjuk, hogy a szakaszok egybevágóságát a következőképpen definiáljuk: $[A,B] \cong_1 [C,D] \Leftrightarrow d(A,B) = d(C,D)$.

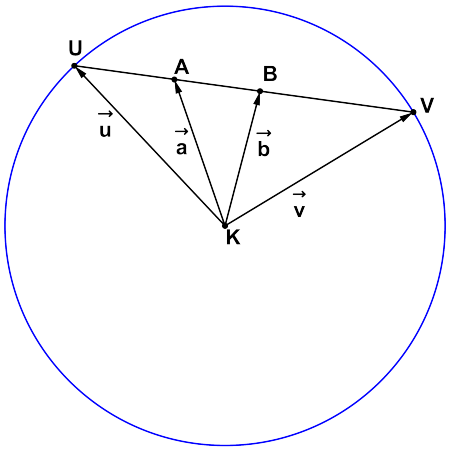
Az illeszkedési és rendezési axiómák teljesülése könnyen ellenőrizhető, mi ezzel most nem foglalkozunk. Vizsgáljuk meg az egybevágósági axiómákat!

Állítás: Az 1. egybevágósági axióma teljesül. Azaz, ha adott egy a szakasz és az O kezdőpontú félegyenes, akkor pontosan egy olyan A pont van a félegyenesen, amelyre $OA \cong_1 a$.

Bizonyítás:

Alkalmazzuk a következő számolást! Legyenek A, B pontok hiperbolikus egyenesének $\mathbb{E}$-beli végpontjai U és V, K a modell középpontja, valamint tetszőleges X pont helyvektora $\vec{x}$ (lásd 3.2. ábra)! Ekkor

$$\vec{a} = \lambda\vec{u} + (1-\lambda)\vec{v}, \text{ ahol } 0 < \lambda < 1$$
$$\vec{b} = \mu\vec{u} + (1-\mu)\vec{v}, \text{ ahol } 0 < \mu < 1$$



3.2. ábra.

A kettősviszony definíciója értelmében: $(UVAB) = \frac{1-\lambda}{\lambda} : \frac{1-\mu}{\mu}$. Tehát az A és B pontok

távolsága $d(A,B) = \left|\ln\frac{1-\lambda}{\lambda} - \ln\frac{1-\mu}{\mu}\right|$.

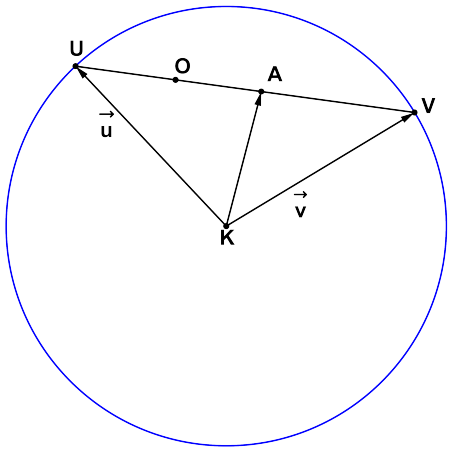
Vizsgáljuk meg a $t \mapsto \ln(\frac{1-t}{t})$ függvényt a $t \in (0,1)$ intervallumon! Az $\frac{1-t}{t} = \frac{1}{t} - 1$ függvény a $(0,1)$ intervallumot folytonosan és szigorúan csökkenő módon képezi le a $(\infty, 0)$ intervallumba, valamint az $\ln t$ függvény folytonosan és szigorúan csökkenő módon képezi le a $(\infty, 0)$-t a $(\infty, -\infty)$-be. Tehát az $\ln(\frac{1-t}{t})$ függvény folytonosan és szigorúan csökkenő módon képezi le a $(0,1)$ intervallumot a $(\infty, -\infty)$ intervallumba.

Ez előbbiek alapján definiálhatjuk az f leképezést az e egyenes (melynek $\mathbb{E}$-beli végpontjai U és V) és a valós számok halmaza között:

$$f : e \to \mathbb{R}\colon\ \lambda\vec{u} + (1-\lambda)\vec{v} \mapsto \ln(\tfrac{1-\lambda}{\lambda}).$$

Tehát az f leképezés bijektív és $d(A,B) = |f(A) - f(B)|$, azaz távolságtartó.

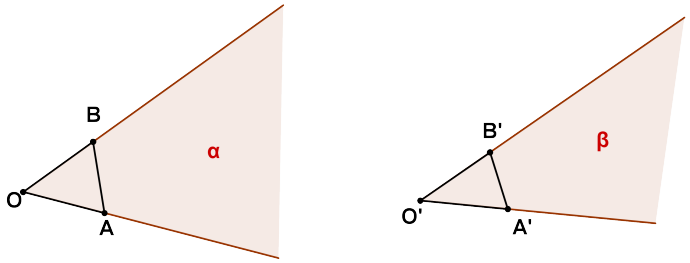
Ha az a szakasz végpontjainak távolsága l, $[O,V)$ az (U,V) egyenes egy félegyenese (lásd 3.3. ábra), $A \in [O,V)$ pontosan akkor lesz l távolságra O-tól, ha $f(A) > f(O)$ és $l = |f(A) - f(O)|$.
$\Rightarrow f(A) = f(O) + l$
$\Rightarrow A = f^{-1}(f(O) + l)$ az egyetlen A, melyre $OA \cong_1 a$.



3.3. ábra.

□

Ezek után definiálhatjuk szögtartományok egybevágóságát. Ahogy a 3.4. ábrán látható, mérjünk fel α és β szögtartományok O, illetve O' csúcsából mindkét szög szárára 1 hosszú szakaszokat. Így keletkeznek A, B, illetve A', B' pontok. Tehát a következő távolságokat ismerjük: $d(O,A) = d(O,B) = d(O',A') = d(O',B') = 1$. Szögtartományok egybevágóságát a következőképpen definiáljuk: $\alpha \cong_2 \beta \Leftrightarrow d(A,B) = d(A',B')$.



3.4. ábra.

Állítás: A 2. egybevágósági axióma teljesül. Azaz, ha az e egyenes egymásutáni A, B, C és az (e-től nem feltétlenül különböző) e' egyenes egymásutáni A_1, B_1, C_1 pontjaira $[AB] \cong_1 [A_1B_1]$ és $[BC] \cong_1 [B_1C_1]$, akkor $[AC] \cong_1 [A_1C_1]$.

Bizonyítás:

Tudjuk, hogy $(ABC) \in R$. Alkalmazva az előző bizonyításban használt f leképezést $\Rightarrow f(A) < f(B) < f(C)$ vagy $f(C) < f(B) < f(A)$.

Definiáljuk a $g : e' \to \mathbb{R}$ leképezést f-hez hasonlóan. A feltevés szerint $g(A_1) < g(B_1) < g(C_1)$ vagy $g(C_1) < g(B_1) < g(A_1)$. Tudjuk még, hogy

$$|f(A) - f(B)| = |g(A_1) - g(B_1)|$$
$$|f(B) - f(C)| = |g(B_1) - g(C_1)|$$

Adjuk össze a két egyenletet! Felhasználva, hogy azonos előjelű $x, y \in \mathbb{R}$ számokra $|x| + |y| = |x + y|$, $|f(A) - f(C)| = |g(A_1) - g(C_1)| \Rightarrow [AC] \cong_1 [A_1C_1]$.

□

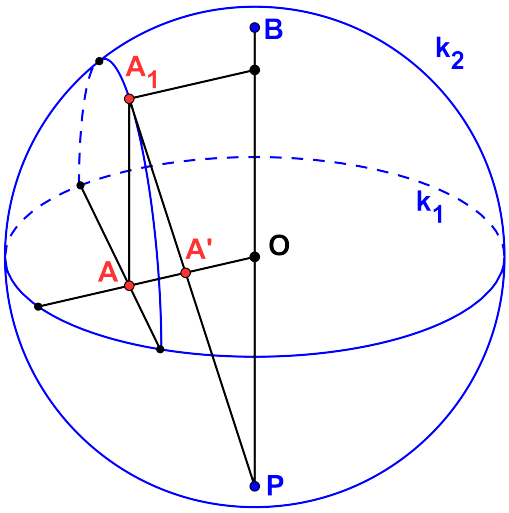
A többi axióma helyességét, a hosszúságra és bonyolultságra való tekintettel most nem bizonyítjuk.

3.2.2. Poincaré-modell

Ezt a modellt a Cayley-Klein-modell segítségével vezetjük be.

Rajzoljunk egy négydimenziós egységsugarú k_2 gömböt a CK-modell háromdimenziós egységsugarú k_1 gömbje fölé. Az 3.5. ábrán ezt szemléltetjük kettő-, illetve háromdimenziós gömbökkel. Legyen $O = (0,0,0,0)$ a gömbök középpontja! Tetszőleges A ponthoz az $(\vec{x},0)$ vektor tartozik, ha A-hoz az $\vec{x}$ tartozott a CK-modellben.

Vetítsük fel ezt a pontot merőlegesen a k_2-re! Ekkor az A_1 pont koordinátái: $(\vec{x},\sqrt{1-|\vec{x}|^2})$. Sztereografikus projekcióval vetítsük le az A_1 pontot a k_1 gömbre! A projekció középpontja a $P=(0,0,0,-1)$ pont. Ha B a $(0,0,0,\sqrt{1-|\vec{x}|^2})$ koordinátájú pont, akkor az A' pont koordinátáit az A_1BP és $A'OP$ háromszögek hasonlóságából tudjuk kiszámolni: $A'=(\frac{\vec{x}}{1+\sqrt{1-|\vec{x}|^2}},0)$. A két modell közötti áttérést ennek a transzformációnak a segítségével definiálhatjuk.



3.5. ábra.

A $\Phi : X \to X : \vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{1+\sqrt{1-|\vec{x}|^2}}$ leképezés az origó középpontú egységsugarú gömböt bijektíven képezi saját magára. Ha a Cayley-Klein-modellre elvégezzük a Φ leképezést, a Poincaré-modellt kapjuk. Ezek alapján $e \subset X$ egyenes a Poincaré-modellben $\Leftrightarrow \Phi^{-1}(e)$ egyenes a Cayley-Klein-modellben, és $S \subset X$ sík a Poincaré-modellben $\Leftrightarrow \Phi^{-1}(S)$ sík a

Cayley-Klein-modellben. Hasonlóan visszük át az $R, \cong_1, \cong_2$ struktúraelemeket a Cayley-Klein-modellről a Poincaré-modellre.

A Poincaré-modellben a síkok olyan $\mathbb{E}$-beli gömbök alaphalmazba eső részei, melyek merőlegesen metszik a modellt határoló gömböt, valamint olyan $\mathbb{E}$-beli síkok alaphalmazba eső részei, melyek áthaladnak a modell középpontján. Az egyenesek olyan $\mathbb{E}$-beli körök alaphalmazba eső részei, melyek merőlegesen metszik a modellt határoló gömböt, valamint olyan $\mathbb{E}$-beli egyenesek alaphalmazba eső részei, melyek áthaladnak a modell középpontján.

4. fejezet

Szerkesztési feladatok

Eddig beszéltünk arról, hogy hogyan működik a Geogebra, valamint arról, hogy miként gondolkodunk a hiperbolikus geometriában. Most pedig egyesítjük a kettőt, és a program segítségével oldunk meg hiperbolikus szerkesztési problémákat. A legegyszerűbb kérdésekkel kezdjük, és haladunk az egyre nehezebbek felé. Felváltva dolgozunk a Cayley-Klein- és a Poincaré-modellben.
Megjegyzés: Innentől kezdve rövidítem a két modell nevét: CK-modell és P-modell. Valamint a hiperbolikus sík $\mathbb{E}$-beli körét mindig kék színnel rajzolom.

4.1. Alapszerkesztések

4.1.1. Egyenes szerkesztése két ponton keresztül

Szerkesztés közönséges pontokra

Első lépésként a Geogebrában mindig fel kell vennünk egy alapkört, amin belül végezzük a szerkesztéseket. Ezután általában szükségünk van egyenesekre. Így az első feladat lehet a következő:
Szerkesszünk egyenest két adott ponton keresztül!

A CK-modellben ez ugyanúgy működik, mint az Euklideszi síkon, így ezt nem részletezzük.

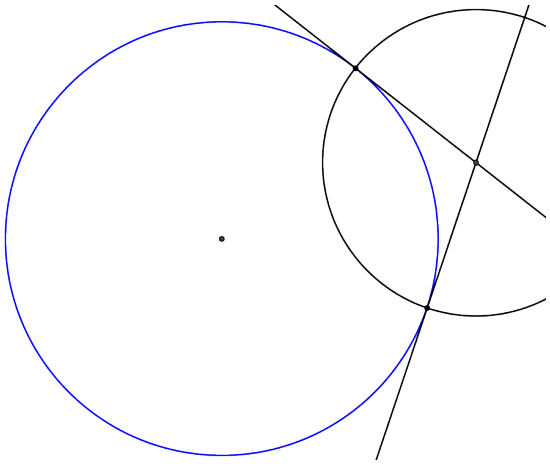
A P-modellben viszont a következőket lehet tenni. Vesszük az egyik pontnak az alap-

körre vonatkozó inverz képét, és a három meglévő pont köré kört rajzolunk. Ennek a körnek az alapkörbe eső része a keresett $\mathbb{H}$-beli egyenes. Erre rögtön készíthetünk is egy eszközt: 'egyenes két közönséges pontra'-néven. Ez a szerkesztés azért jó, mert az inverzió az alapkörre merőleges köröket önmagába viszi, és a $\mathbb{H}$-beli egyenesek merőlegesek az alapkörre.

Egyenes szerkesztése ideális pontokra

Az előző eljárás csak a kör belső pontjaira működik, mivel a körvonalon levő pontok inverz képe önmaga, így két pont köré kellene kört rajzolni, az pedig nem egyértelmű. Az is igaz, hogy a modellt határoló körvonalon levő pontok nem részei a hiperbolikus síknak, viszont a szerkesztések során többször lesz szükségünk arra, hogy két ilyen pontra egyenest illesszünk. Nevezzük ezeket a pontokat ideális pontoknak!

Két ponton átmenő, alapkörre merőleges kör alapkörrel közös pontjaiba húzott sugarak éppen megegyeznek az alapkör érintőivel. Ezért két ideális pontra úgy rajzolunk $\mathbb{H}$-beli egyenest, hogy vesszük az alapkör ezen pontjaiban az érintőket, és ezek metszéspontja lesz a $\mathbb{H}$-beli egyenest tartalmazó kör középpontja (lásd 4.1. ábra). Az eszköz neve: 'egyenes két ideális pontra'.



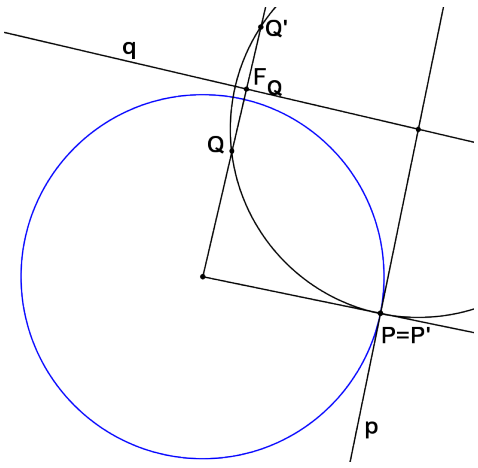
4.1. ábra.

Egyenes szerkesztése a modell lezárásához tartozó pontokra

És mi van, ha az egyik pont közönséges a másik ideális? Akkor hogyan szerkesszük meg a rájuk illeszkedő egyenest? Ha tudjuk, hogy melyik pont a közönséges és melyik az ideális (ezt persze a felhasználó látja, csak a gép nem), akkor az első szerkesztési eljárást alkalmazhatjuk úgy, hogy a közönséges pontot invertáljuk. Meg lehet ugyan vizsgáltatni a Geogebrával, hogy egy pont a kör belsejében van-e vagy sem, de a szerkesztés menetét a választól függővé tenni általában nehézkes, néha lehetetlen. Ezért készítsünk egy olyan parancsot, amely bármilyen típusú pontokra alkalmazható.

Vegyük a P alapkörre vonatkozó P' inverz képét. Szerkesszük meg a $[PP']$ szakasz F_P felezőpontját, majd állítsunk merőlegest (p egyenes) F_P -ben az OP egyenesre, ahol O az alapkör középpontja. Szerkesszük meg hasonló módon Q pontból a q egyenest. A keresett $\mathbb{E}$-beli kör középpontja p és q metszéspontja (lásd 4.2. ábra). Legyen az eszköz neve 'egyenes két bmilyen pontra'.

A szerkesztés helyes lesz, mert két tetszőleges pontra illeszkedő kör középpontja rajta van a pontok által meghatározott szakasz szakaszfelező-merőlegesén. Viszont azért kellett ilyen bonyolultan szerkesztenünk, mert ha P ideális pont, akkor $P' = P$, és egy pontnak nem létezik szakaszfelező-merőlegese, viszont az előbb leírt lépések elvégezhetőek.

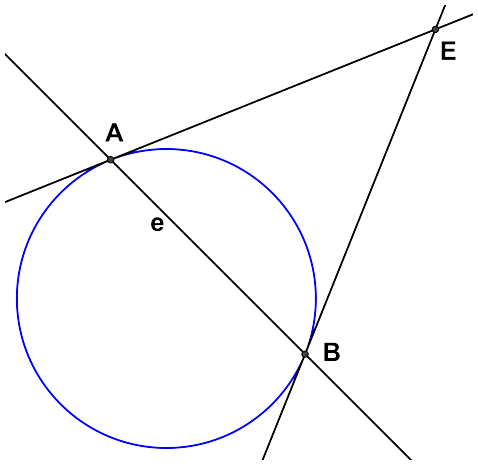


4.2. ábra.

4.1.2. Pólus, poláris szerkesztése

A CK-modellben való szerkesztéshez sokszor szükségünk van egy egyenes pólusára (mely az alapkörön kívül található), illetve egy alapkörön kívüli pont polárisára. A Geogebra meg tudja szerkeszteni a poláris egyenest, viszont a pólus pontot nem. Ezt a pontot úgy tudjuk megszerkeszteni, hogy vesszük az adott e egyenes alapkörrel való A, B metszéspontjait. Az A és B pontokban állított érintők metszéspontja lesz az E pólus (lásd 4.3. ábra). Legyen az eszköz neve: 'Pólus'.

Ezzel akkor van probléma, ha az egyenes áthalad az alapkör középpontján, ugyanis ekkor a két érintő párhuzamos lesz, így a metszéspontjuk ideális pont, amit a Geogebra nem tud kezelni, mi viszont igen. De szerencsére ideális pontot is „össze tud kötni" egy közönséges ponttal, tehát meghúzza az érintőkkel párhuzamos egyenest a ponton keresztül.



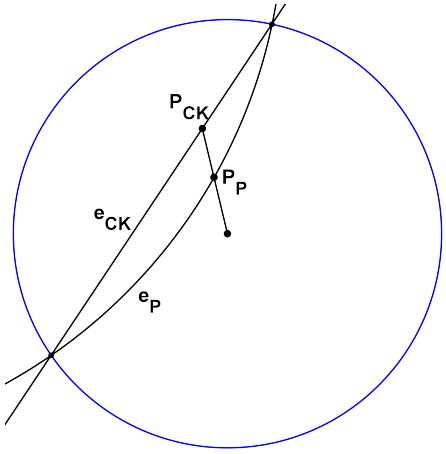
4.3. ábra.

4.1.3. Áttérés a két modell között

Nézzük meg, hogy hogyan tudunk áttérni az egyik modellből a másikba, és visszafele.

Ahogy az elméleti részben megbeszéltük, ezt a lépést sztereografikus projekció segítségével tehetjük meg. Ezt a szerkesztés nyelvére úgy tudjuk lefordítani, hogy felülről tekintünk rá a gömbre. Ekkor alap esetben egy kört látunk a középpontjával együtt.

Az áttérés során az ideális pontok és a kör középpontja helyben maradnak. Egy tetszőleges CK-modellbeli P_{CK} közönséges pont gömbre való felvetítésekor (P') a mi szemszögünkből nem történik semmi. Viszont a sztereografikus projekciót mi úgy látjuk, mintha P'-t összekötnénk a kör középpontjával, és elmetszenénk az e_P P-modellbeli egyenessel. e_P-t úgy kaptuk, hogy vettünk egy tetszőleges P_{CK}-n áthaladó e_{CK} egyenest, és ennek végpontjain át húztunk egy P-modellbeli egyenest. Ugyanezeket a lépéseket fordított sorrendben elvégezve a P-modellből áttérhetünk a CK-modellbe (lásd 4.4. ábra).



4.4. ábra.

4.2. Felezőmerőleges egyenes szerkesztése

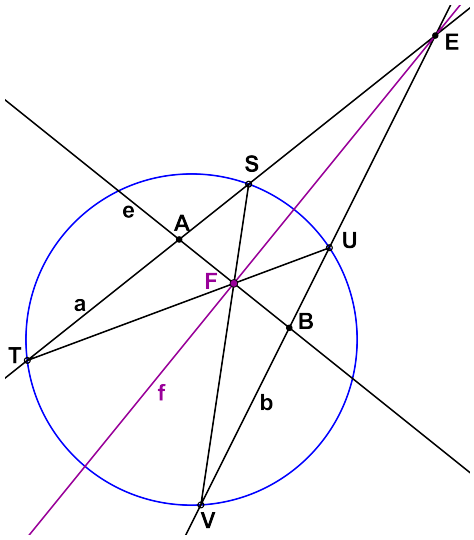
Most eljutottunk az első „igazi" szerkesztési feladathoz: **Szerkesszük meg két pont, A és B felező merőleges egyenesét!**

4.2.1. Szerkesztés a Cayley-Klein-modellben

Végezzük el a feladatot először a CK-modellben. Először is szükségünk van a két ponton áthaladó $\mathbb{H}$-beli e egyenesre, valamint ennek E pólusára. Ezeket a korábban készített eszközökkel tudjuk megszerkeszteni. Kössük össze E-t A-val és B-vel, így kapunk két

$\mathbb{E}$-beli egyenest: a, b. Vegyük ezek S, T, U, V metszéspontjait az alapkörrel. A szemközti pontokat összekötő egyenesek metszéspontja lesz az F felezőpont (mely rajta van az e egyenesen is). Ha pedig összekötjük E-t F-fel, akkor megkapjuk az f felezőmerőlegest (lásd 4.5. ábra). Az eszköz neve: 'Felezőmerőleges CK'.

Fontos, hogy az a, b, illetve f egyenesek, valóban egyenesek legyenek (és ne csak szakaszok, vagy félegyenesek), mert ha E euklideszi értelemben vett ideális pont, akkor a félegyenest/szakaszt nem tudja megrajzolni a Geogebra, az egyenest ellenben, igen.



4.5. ábra.

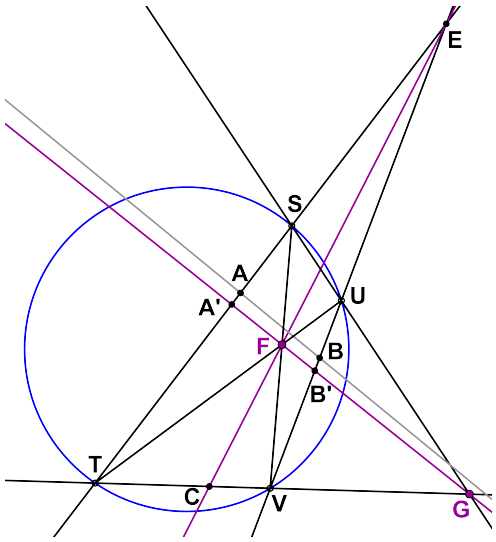
Nem könnyű bebizonyítani, hogy az f egyenes valóban felezőmerőleges, de az alábbi három lépés egy lehetőség erre.

Első lépés: $F \in (AB)$ **egyenesnek**

Legyenek $F = (SV) \cap (UT)$, $G = (SU) \cap (VT)$, illetve $C = (TV) \cap (EF)$! Tegyük fel, hogy $(AB) \neq (FG)$ (lásd 4.6. ábra). Legyen $A' = (ST) \cap (FG)$ és $B' = (UV) \cap (FG)$!

A pólus definíciója miatt T, S és A, E valamint V, U és B, E harmonikus társak, azaz $(TSAE) = (VUBE) = -1$.

A szerkesztés menetéből adódik (a teljes négy oldal tételével), hogy T, V és C, G harmonikus társak, azaz $(TVCG) = -1$. Vetítsük át F pontból (ST), illetve (UV) egyenesekre a T, C, V és G pontokat $\Rightarrow (TSA'E) = (VUB'E) = -1$.



4.6. ábra.

Ha adott három pont, akkor a kettősviszony egyértelműen meghatározza a negyediket $\Rightarrow A' = A$ és $B' = B \Rightarrow (AB) = (A'B') = (FG)$.

Második lépés: F felezi $[AB]$-t

Végezzünk egy középpontos tükrözést $\mathbb{H}$-ban F pontra! Ekkor

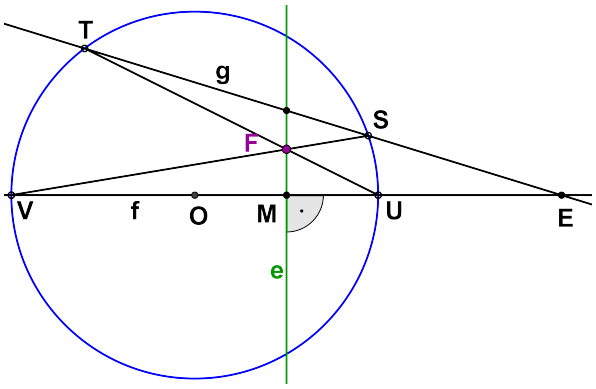
$$\left.\begin{array}{l}[FS) \mapsto [FV) \\ [\mathrm{FT}) \mapsto [FU)\end{array}\right\} \Rightarrow (ST) \mapsto (VU) \Rightarrow A \mapsto B \Rightarrow d(A,F) = d(F,B).$$

Harmadik lépés: f merőleges e-re

A CK-modellben egy O-n átmenő f egyenesre vonatkozó tükrözés, euklideszi tükrözés. $\Rightarrow$ Egy e egyenes hiperbolikus értelemben merőleges f-re akkor és csak akkor, ha euklideszi értelemben az.

Állítás: Ha g egyenes meghosszabbítása átmegy e egyenes E pólusán, akkor $g \perp e$ hiperbolikus értelemben.

Bizonyítás: Ahogy a 4.7. ábrán látható, az e-re való tükrözés következtében



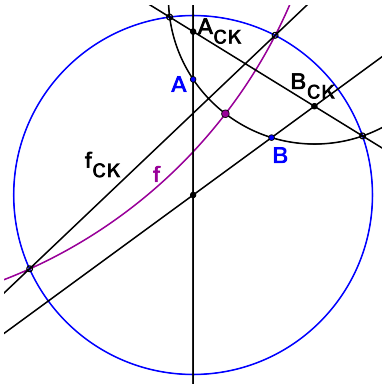
4.7. ábra.

$$\left.\begin{array}{c}[MU) \mapsto [MV) \\ \mathrm{F} \mapsto F\end{array}\right\} \Rightarrow [FV) \mapsto [FU) \Rightarrow [FT) \mapsto [FS) \Rightarrow g \mapsto g \Rightarrow g \perp e.$$

□

4.2.2. Szerkesztés a Poincaré-modellben

Most végezzük el a feladatot a P-modellben is. Ezt úgy fogjuk megtenni, hogy visszavezetjük a CK-modellre.



4.8. ábra.

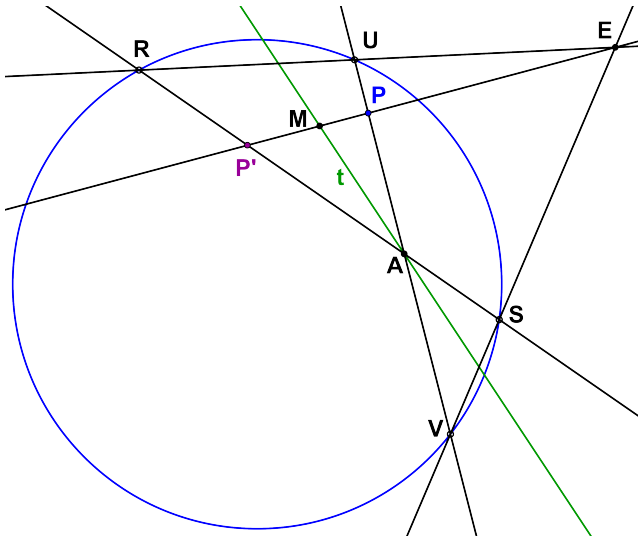
Tehát tetszőleges A, B pontoknak vesszük a CK-modellbeli A_{CK} és B_{CK} megfelelőit. Ezeknek megszerkesztjük az f_{CK} felező merőleges egyenesét, és ezt „áttranszformáljuk" a P-modellbe (lásd 4.8. ábra). Az eszköz neve: 'Felezőmerőleges P'.

4.3. Tengelyes tükrözés

Következő feladatunk: **Tükrözzünk tengelyesen egy pontot!**

4.3.1. Tükrözés a Cayley-Klein-modellben

Legyen P a tükrözendő pont, t a tengely, E a t pólusa és $M = (EP) \cap t$! Vegyünk fel t-n egy tetszőleges M-től különböző A pontot (lásd 4.9. ábra)! Az (AP) egyenes ideális pontjai legyenek U és V. Jelölje az (EV), illetve (EU) euklideszi egyenesek V-től, illetve U-tól különböző metszéspontjait az alapkörrel S és R.



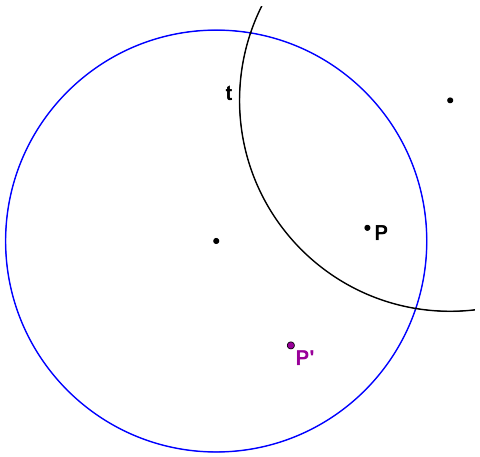
4.9. ábra.

Az előző feladat figyelembevételével azt mondhatjuk, hogy $P' \in (EP)$, illetve $P' \in (RS)$. $\Rightarrow P' = (EP) \cap (RS)$.

4.3.2. Tükrözés a Poincaré-modellben

Ezt a feladatot megoldhatnánk úgy is, hogy visszavezetjük a CK-modellbeli megoldásra. Ennél sokkal egyszerűbb, ha a $\mathbb{H}$-beli tengelyre, mint $\mathbb{E}$-beli körre vett inverziót alkalmazzuk (lásd 4.10. ábra).

Megjegyzés: Ez megoldási lehetőség a CK-modellbeli szerkesztésre.



4.10. ábra.

4.4. Kör szerkesztése adott pont köré adott sugárral

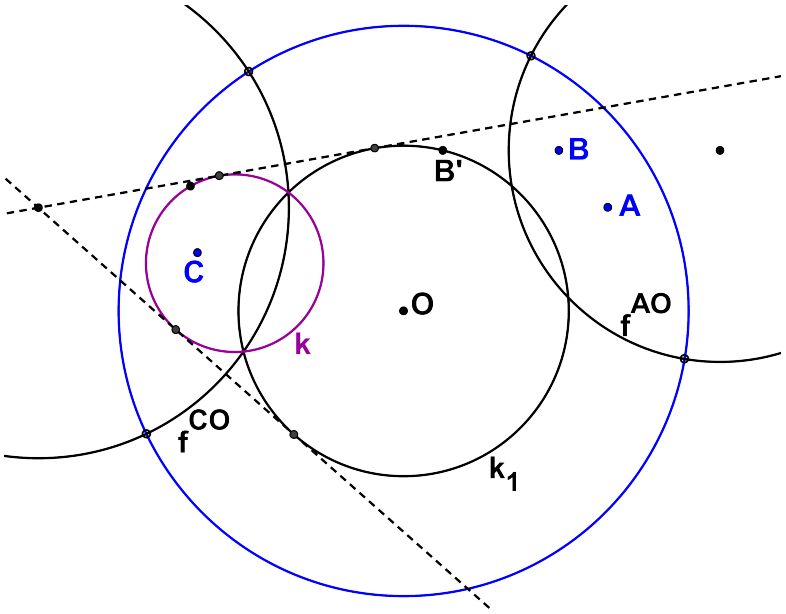
Az eddigiek ismeretében már meg tudjuk oldani a következő feladatot:

Szerkesszünk kört adott pont köré adott sugárral!

Ezt a feladatot csak a P-modellben oldjuk meg, mivel a CK-modellben a körök nem euklideszi körök, míg a P-modellben igen. Legyen O az alapkör középpontja, és a sugár az A, B pontok távolsága! Tegyük fel, hogy a C pont köré kell rajzolnunk a kört (lásd 4.11. ábra). Első lépésként szerkesszük meg O és A $\mathbb{H}$-beli felezőmerőlegesét, f^{AO}-t! Ezek után tükrözzük B-t f^{AO}-ra, így kapunk egy B' pontot. Azt tudjuk, hogy A tükörképe ugyanerre az egyenesre O. Tehát az OB' távolság megegyezik az AB távolsággal. Most megrajzoljuk a k_1 kört O köré OB' sugárral.

Ezek után már csak el kell tolnunk k_1-et a C pontba. Mivel az eltolás, vagy pon-

tosabban az egyenes menti csúsztatás szerkesztése bonyolult, ezért azt fogjuk tenni, hogy tükrözzük a kört az O és C pontok f^{CO} felezőmerőlegesére. Ez a tükrözés, ahogy az előbb láttuk, egy f^{CO}-ra, mint $\mathbb{E}$-beli körre vett inverzióval egyezik meg az euklideszi síkon. Ahhoz, hogy egy kört invertáljunk, legalább három pontjára van szükségünk. Mivel a Geogebrában az eszközökben nem létezik olyan, hogy a program kiválaszt három tetszőleges pontot, ezért válasszuk mi egyik pontnak B'-t, másik kettőnek pedig az f^{CO}, mint $\mathbb{E}$-beli kör középpontjából húzott érintők érintési pontjait. Szerkezzük meg ezek tükörképeit f^{CO}-ra, és e három pont köré rajzoljunk kört. Készítsünk belőle eszközt: 'Pont köré kör P'.



4.11. ábra.

Ezzel akkor van probléma, ha B' egybeesik valamelyik érintési ponttal. Viszont ez olyan kevés eset, hogy elhanyagoljuk, mivel másképpen nagyon nehéz lenne találnunk egy harmadik, mindig megszerkeszthető pontot.

A k_1 kör már megfelel annak a kritériumnak, hogy sugara AB hosszúságú, ha ezt a kört tükrözzük, a sugara nem változik, viszont a középpontja bekerül a kívánt C pontba.

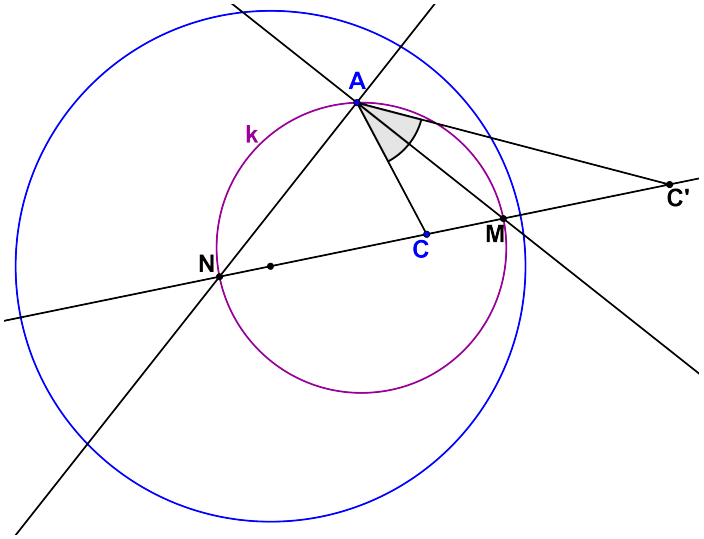
Megjegyzés: Látjuk, hogy a kapott k kör euklideszi- és hiperbolikus középpontja nem esik egybe.

4.5. Kör szerkesztése adott ponton át adott középponttal

Feladat: **Szerkesszünk C középpontú A ponton áthaladó kört!**

A feladatot szintén csak a P-modellben oldjuk meg. Egyik megoldás, hogy visszavezetjük az előző problémára. A másik, hogy alkalmazzuk a körsorokra vonatkozó ismereteinket. Az alapkör, valamint a keresett k kör ugyanannak az elliptikus körsornak a tagjai, melyek pontkörei C és ennek az alapkörre vett inverze, C'. Ennek megfelelően szerkesszük meg C'-t, majd a $C'AC$ szög belső- és külső szögfelezőit. A szögfelezők metszéspontja (CC') egyenesével legyen M és N pont. Ekkor már csak egy Thalesz-kört kell rajzolnunk az M, N pontok fölé. Ezt a Geogebrában úgy fogjuk megtenni, hogy az M, N és A pontok köré rajzolunk kört (lásd 4.12. ábra). Az eszköz neve: 'Kör adott ponton át P'.

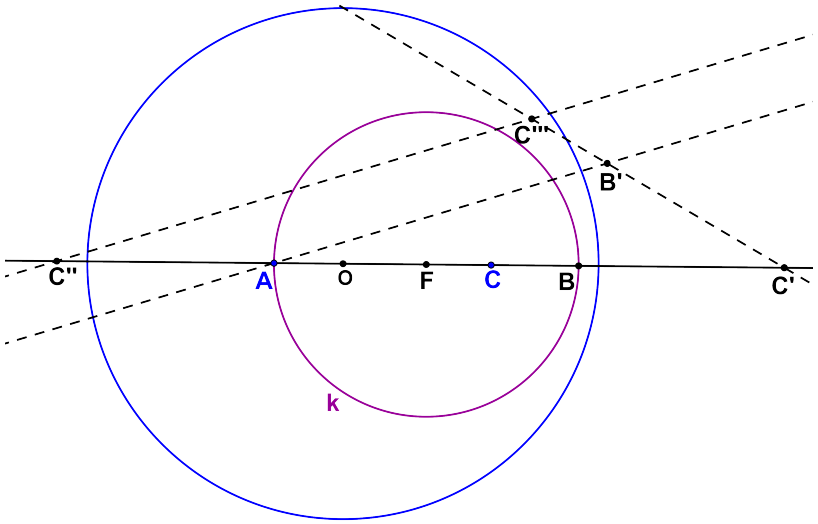
A szögfelezőtétel következtében $\frac{C'A}{CA} = \frac{C'M}{CM} = \frac{C'N}{CN} \Rightarrow M, N, A$ pontok köre a CC' pontpár Apollonius-köre, tehát eleme az elliptikus körsornak.



4.12. ábra.

Ezzel a szerkesztéssel egyetlen probléma van, ha $A \in CC'$ egyenesének. Ekkor teljesen máshogy kell megoldanunk a feladatot, bár az elv ugyanaz. Keresünk olyan B

pontot a síkon, melyre $\frac{C'B}{CB} = \frac{C'A}{CA}$. Legegyszerűbb megkeresnünk a CC' egyenesen levő (A-tól különböző) ilyen pontot. Ezt a párhuzamos szelőszakaszok tételének segítségével oldhatjuk meg. Ez után az A és B pontokra állítunk Thalesz-kört olyan módon, hogy megszerkesztjük $[A, B]$ szakasz F felezőpontját, és e köré rajzolunk FA sugarú kört (lásd 4.13. ábra). Az eszköz neve: 'Kör adott ponton át2 P'.



4.13. ábra.

5. fejezet

Irodalomjegyzék

- Hajós György: Bevezetés a gemetriába (Tankönyvkiadó - Budapest, 1972)
- Strohmajer János: A geometria alapjai (Nemzeti Tankönyvkiadó - 1993)
- Moussong Gábor előadása alapján: Geometria (IV. félév) - saját jegyzet
- Száray Miklós: Történelem III. (Műszaki Könyvkiadó - Budapest, 2004)
- Pethőné Nagy Csilla: Irodalomkönyv 10. osztály
- Probáld Ferenc: Regionális földrajz
- Dr. Lénárd Gábor: Biológia III.
- Kémia-Szervetlen kémia 8. osztály
- Általános fizika III. (Dialóg Campus Kiadó - Pécs-Budapest, 1999)