Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Számítógéptudományi Tanszék

Síkbarajzolható gráfok

Szakdolgozat

Témavezető:

Szőnyi Tamás

Egyetemi tanár

Készítette:

Iváncsó Veronika

Matematika BSc

Budapest
2010

Tartalom

Előszó

Mindig is szerettem a gráfokat. Bonyolult problémákat egyszerűen lehet velük szemléltetni. Érdekes, hogy a gimnáziumban nem sok szó esik róluk. Sok helyen csak éppen megtanulják a fogalmakat, megoldanak pár feladatot és mennek is tovább a következő anyagrészre. A síkbarajzolhatóság pedig több gimnáziumi tankönyvben egyáltalán nem is szerepel. Mivel matematikatanár szeretnék lenni, gondoltam utánajárok, hogyan is lehetne intenzívebben bevinni az iskolákba a gráfokat és megszerettetni a diákokkal az ilyen jellegű feladatokat. Olyan problémákat vetettem fel leginkább, amiket még gimnáziumban meg lehet tanítani, de vannak olyanok is, amiket egyetemen lehet igazán megérteni. Mindenesetre a dolgozat egy kis alapot ad, és belátást enged a síkbarajzolható gráfok témakörébe.

Célkitűzésem az, hogy a dolgozat áttanulmányozása után az olvasó jobban megértse a síkbarajzolható gráfok fogalmát és gyakorlati alkalmazását. Ha valaki tanárként szeretne többet adni a témából diákjainak, az ő számára is hasznos legyen, és ha az olvasó netalán diák, számára is tartalmazzon olyan feladatokat, melyek felkeltik érdeklődését a síkbarajzolható gráfok iránt. Gyakran tapasztaljuk, hogy a gyerekek szeretnek rajzolgatni, különféle (síkbarajzolható gráfokhoz hasonló) ábrákat készítgetnek, színezgetnek. Természetesen nem tudatosul bennük ennek matematikai háttere, de ha sikerül ezt megvilágítani, talán szívesebben foglalkoznak majd ezzel az érdekes matematikai problémával.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szőnyi Tamás egyetemi tanárnak, a sok segítséget és támogatást, amit a félév folyamán a szakdolgozat megírásához nyújtott.

1. Alapfogalmak

A gráfokról általánosságban

Az alapfogalmakat, vagyis a gráfok megértéséhez szükséges alaptételeket, definíciókat gyűjtöttem össze ebben a pontban. Először egy rövid bevezető következik, ami után rendszerezve következnek a pontos matematikai leírások. Ezeket jórészt az első féléves véges matematika előadás jegyzetéből, illetve az irodalomjegyzékben szereplő könyvekből gyűjtöttem ki. Az előadást a [6] könyv egyik írója, Recski András tartotta.

A gráfokat kölcsönös kapcsolatok szemléltetésére használhatjuk. Ezen kapcsolatok lehetnek ismeretségek egy társaságban, kézfogás, koccintás, levelezés, fénykép adományozása. (Itt figyelni kell arra, hogy ha egyik ember a másiknak ad képet, az nem ugyanaz, mint fordítva. Ezt az úgynevezett irányított gráfokkal lehet jól és pontosan szemléltetni.) Idetartoznak még a sportmeccsek és bajnokságok, a könyvespolcon levő könyvek (amiknél azt nézzük, hogy melyek vannak egymás mellett) vagy bármilyen tárgyaknál adott elhelyezésében az érintkezés. Tehát élő és élettelen dolgok kapcsán is előfordulhatnak. Továbbá egy halmaz részhalmazainak vizsgálata oly módon, hogy a metszetük nem üres, pontok vagy alakzatok között a távolság viszonya (kisebb, nagyobb, egyenlő) az adott értékhez. Gráfokkal rendkívül jól lehet szemléltetni családfát, közlekedési útvonalakat, vízhálózatot, áramkörök kapcsolási rajzát, 2-től n-ig a nem relatív prímek kapcsolatát.

Szemléletesen a gráf fogalmát a következőképpen lehetne leírni: legyenek megadva a síkon bizonyos *pont*ok, más szóval *csúcs*ok. Ezek azok a dolgok, amik között a kapcsolatot ábrázoljuk. Ahol van kapcsolat, ott a pontok legyenek összekötve. Az ilyen összekötő vonalat *él*nek nevezzük. Az élek más csúcson nem mehetnek át, csak azokon, amelyeket összekötnek. Egy él tehát két csúcsot köt össze, mely csúcsokat az él *végpont*jainak hívunk. A pontok és élek ezen rendszerét hívjuk *gráf*nak. Az, hogy hogyan vannak lerajzolva a pontok és élek, egyelőre nem lényegesek, csak az a fontos, hogy melyek vannak összekötve. Vagyis még lényegtelen, hogy az élek metszik-e egymást. Ha majd síkbarajzolható gráfokról beszélünk, ott fontos lesz, hogyan van lerajzolva a gráf. Ugyanis nem lesz mindegy, hogy az élek metszik-e egymást, vagy sem, illetve, hogy van-e olyan síkba rajzolása a gráfnak, amelyben nem keresztezik egymást az élek. Egy gráf *síkbarajzolható*, ha lerajzolható a síkba keresztező élek nélkül.

Definíciók, tételek, állítások

Most rátérünk a pontos definíciók, tételek és állítások kimondására, melyek nagyrészt az első féléves véges matematika előadás jegyzetéből és az irodalomjegyzékben szereplő [6] könyvből valók.

1.1. Definíció. Az *gráf* egy rendezett pár. Jelölése: G = (V , E), ahol *V* egy nem-üres halmaz és *E* a *V* halmazból képezhető párok egy családja (azaz egy elem többször is előfordulhat).

Jelölések: G(V,E) a *G* gráf. V(G) = {A ; B ; C ; … D ; F ; H} a gráf pontjainak vagy csúcsainak halmaza. E(G) = {{A ; B}, {A ; C} … {F ; H}} a gráf éleinek halmaza, ahol egy-egy párból több is szerepelhet a felsorolásban, illetve előfordulhat {A ; A} , {B ; B} stb is.(Ezek lesznek a párhuzamos élek, illetve a hurokélek, lásd 1.2. és 1.3. Definíció.)

1.2. Definíció. Egy *e* élt *hurokél*nek nevezünk, ha egyetlen végpontja van.

1.3. Definíció. *Párhuzamos* vagy *többszörös* élekről van szó akkor, ha két különböző élnek a végpontjai azonosak.

Egy gráf *egyszerű*, ha nem tartalmaz sem hurokélt, sem párhuzamos élt, azaz egyik pont sincs összekötve önmagával és bármely két pont között legfeljebb egy él fut.

1.4. Definíció. *Teljes gráf*nak nevezzük az olyan egyszerű gráfokat, ahol minden pont minden ponttal össze van kötve. Más szóval: a gráf tetszőleges két pontja szomszédos. Jelölés: K_n , ahol *n* a pontok száma. A K_n élszáma: $\binom{n}{2}$.

A pontok számát *v(G)* –vel, az élek számát *e(G)* –vel jelöljük. Az élek száma egy *n* pontú egyszerű gráfban maximum $\binom{n}{2}$ és minimum 0.

*Szomszédos él*eknek nevezünk két élt, *e*-t és *f*-et, ha e, f Є E végpontjai $\{v_1 ; v_2\}$ illetve $\{w_1 ; w_2\}$, továbbá $\{v_1 ; v_2\} \cap \{w_1 ; w_2\} \neq \emptyset$. A szomszédos pontoknál hasonlóan. *Szomszédos pont*nak nevezünk két pontot, v_1 –t és v_2 –t, ha $\{v_1 ; v_2\}$ Є E. Megjegyzendő még az *illeszkedés*, amit úgy határozhatunk meg, hogy v_1 illeszkedik *e*-re, ha annak egyik végpontja.

1.5. Definíció. A *G* gráf *X* pontjából kiinduló élek számát, az *X* pont *fokszám*ának nevezzük. Egy *G*-beli *X* pont foka: d(X).

1.1. Állítás. $\sum_{x \in V} d(X)$ = 2 |E|, tehát az élszám kétszerese.

1.1. Állítás bizonyítása:

A fokszám összegezésénél megszámoljuk minden pontra a hozzá illeszkedő élek számát, majd ezeket összeadjuk. Mivel minden élnek két végpontja van, így minden élt pontosan kétszer számoltunk meg. □

Ebből következik, hogy a fokszámok összegének párosnak kell lennie. A hurokél kettővel növeli a fokszámot. A maximális és minimális fokszám jele: Δ illetve δ. Egy gráf *k-reguláris*, ha minden pont foka *k*.

1.6. Definíció. Egy pontot *izolált pont*nak nevezzük, ha nem illeszkedik egyetlen élre sem, azaz d(X) = 0 , ahol X ϵ V(G).

1.7. Definíció. A *séta* egy $v_1 , e_1 , v_2 , e_2 , \dots , v_s , e_s , v_{s+1}$ sorozat, ahol v_i Є V(G), e_i Є E(G) és az e_i él két végpontja éppen v_i és v_{i+1}. A v_1 -et a séta kezdőpontjának, a v_{s+1} –et a végpontjának nevezzük. A k*örséta* egy olyan séta, amelyben $v_1 = v_{s+1}$ (s = 0 lehetséges). A *vonal* egy olyan séta, amelyben az élek páronként különbözőek. A *körvonal* egy olyan körséta, amelyben az élek páronként különbözőek. Az *út* olyan séta, amelyre $v_i \neq v_j$, $e_k \neq e_l$. Megjegyzendő, hogy ez azt is jelenti, hogy semelyik út kezdőpontja és végpontja nem lehet azonos. Az *s* számot, vagyis az út éleinek számát pedig az út hosszának nevezzük. Megjegyezzük, hogy elegendő lenne a pontok különbözőségét megkívánni. A *kör* egy olyan körséta, amelyben $v_i \neq v_j$, ha i , j ≠ s + 1 (tehát $e_i \neq e_j$). Vagyis kör esetén a kezdőpont és végpont azonos, de más egyezés nincs a sétában. Az *s* a kör hossza. Az s = 1 esetén a kör egy csúcsból és egy hozzá kapcsolódó hurokélből áll. Az s = 2 esetén két csúcs és két párhuzamos él van. Az s ≥ 3 esetén a kör az s-szögnek felel meg.

1.8. Definíció. Egy *G* egyszerű gráf *komplementer*én azt a $\overline{G}$ gráfot értjük, amelyet akkor kapunk, ha *G* –t a $K_{|V(G)|}$ teljes gráf részgráfjának tekintjük, és $\overline{G}$ –ben pontosan azok a pontpárok vannak összekötve, amelyek *G* –ben nincsenek.

1.9. Definíció. A G' = (V' ; E') gráf a G = (V ; E) gráf r*észgráf*ja, ha V' $\subseteq$V, E' $\subseteq$ E valamint egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra *G'* –ben, ha *G*-ben is illeszkedők. Implicit módon ez azt is jelenti, hogy (V' ; E') maga is gráf, vagyis minden *E'* –beli él végpontjai *V'* –ben vannak. Oly módon kaphatunk részgráfot, hogy az eredeti gráfból elhagyunk pontokat a hozzá illeszkedő élekkel együtt, valamint esetleg még néhány élt is. *Feszítő részgráf*nál az eredeti gráf összes pontját tartalmaznia kell a részgráfnak. A *feszített részgráf*nak az összes olyan élt tartalmaznia kell, amelynek a végpontjai a részgráfban vannak.

1.10. Definíció. A *G* egyszerű gráfot *összefüggő*nek nevezzük, ha tetszőleges két pontja között vezet út.

1.1. Megjegyzés: A teljes gráf nyilván összefüggő, ugyanis a definíció szerint minden pont minden ponttal össze van kötve.

1.2. Megjegyzés: Ha egy gráfnak $\binom{n}{2}$-1 éle van, akkor még biztosan összefüggő marad. Ha $\binom{n}{2}$-2 éle van, még akkor is összefüggő lesz. Azonban, ha csak $\binom{n-1}{2}$ éle van, akkor már nem biztos, hogy összefüggő lesz, hiszen elképzelhető, hogy a gráfban lesz egy izolált pont és egy K_{n-1} teljes gráf.

1.11. Definíció. *Elvágó pont*nak nevezünk egy pontot, ha elhagyva a gráfból, a gráf már nem lesz összefüggő.

1.12. Definíció. *Elvágó él*nek nevezzük egy összefüggő gráfnak olyan élét, amelynek elhagyása két össze nem függő részre bontja a gráfot.

1.13. Definíció. Egy *G* gráf *k-szorosan összefüggő*, ha legalább *k + 1* csúcsa van és *k* –nál kevesebb csúcsát elhagyva még mindig összefüggő marad. Egy gráf *k-szorosan élösszefüggő*, ha *k* –nál kevesebb élét elhagyva még mindig összefüggő marad.

1.14. Definíció. Egy nem összefüggő gráf szétesik kisebb összefüggő részgráfokra, ezeket *komponens*nek nevezzük. Precízen megfogalmazva elmondhatjuk, hogy a komponens maximális összefüggő részgráf. Maximális, hiszen sem pont, sem él nem vehető hozzá.

1.15. Definíció. Az *irányított gráf* egy olyan rendezett pár, amelynek élei nem $\{v_1, v_2\}$ hanem (v_1, v_2) alakú, tehát rendezett párok. Vagyis fontos, hogy az él melyik pontból melyik pontba mutat. Egy ilyen (v_1, v_2) élnek v_1 a kezdőpontja és v_2 a végpontja. Rajzban ez úgy nyilvánul meg, hogy az élt egy v_1 –ből v_2 –be mutató nyíllal helyettesítjük. Az olyan pontot, mely egyetlen élnek sem végpontja, *forrás*nak nevezzük. Ha pedig egyetlen élnek sem kezdőpontja egy pont, akkor *nyelő*nek hívjuk.

Figyelnünk kell arra, hogy irányított gráfok esetében akkor párhuzamos két él, ha kezdő és végpontjuk is azonos.

1.16. Definíció. Legyen *G* egy egyszerű gráf. Az A $\subseteq$ V(G) *független* halmaz, ha *A* elemei nincsenek összekötve.

1.17. Definíció. Legyen *G* egy egyszerű gráf. A *K* $\subseteq$ V(G) egy *klikk*, ha *K* tetszőleges két eleme össze van kötve. A *G* –ben található maximális méretű klikk pontszámát $\omega(G)$ –vel jelöljük és a gráf *klikkszám*ának nevezzük.

1.18. Definíció. Az összefüggő és körmentes gráfokat *fá*nak nevezzük. Egy fa lehet például út vagy csillag (minden él egy csúcsból indul), de sok más fa is van.

1.19. Definíció. A körmentes gráfokat *erdő*nek nevezzük. Az erdő tehát olyan gráf, amelynek komponensei fák.

1.20. Definíció. A *G* gráf *feszítőerdő*je egy *F* gráf, ha *F* erdő és minden komponense feszítőfája *G* megfelelő komponensének.

1.21. Definíció. A *G* gráf *feszítőfá*ja az *F* gráf, ha *F* feszítő részgráfja *G* –nek és *F* fa (feszítőfája csak összefüggő gráfnak van).

1.1. Tétel. Egy legalább két pontú fában létezik legalább kettő első fokú pont.

1.1. Tétel bizonyítása:

Megkeressük a leghosszabb utat a fában és megvizsgáljuk az első pontját.

Ha ennek a pontnak lenne más, nem az úton levő szomszédja, akkor azzal a ponttal együtt hosszabb utat kapnánk, és ez ellentmond annak, hogy a leghosszabb utat választottuk ki.

Ha az út egy későbbi pontjába vezet él, akkor kört kapnánk, és ez ellentmond a fa definíciójának.

Ugyanezt az út utolsó pontjáról is be lehet látni.

Tehát találtunk kettő első fokú pontot a leghosszabb út elején és végén. □

1.2. Tétel. Minden fában a pontok száma az élek számánál eggyel nagyobb, vagyis: $|V| = |E| + 1$.

1.2. Tétel bizonyítása:

A tételre két bizonyítást is adunk.

1. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

$n = 2$ triviális, hiszen két pont van és egy él.

Egy első fokú pontot és a hozzá illeszkedő élt elhagyok, így a gráf marad körmentes és összefüggő, azonban egy ponttal kisebb fa lesz belőle. Az indukciós feltétel szerint ennek eggyel több csúcsa van, mint éle, tehát az eredetinek eggyel több csúcsa van, mint éle. □

2. Bizonyítás: Szemléletesen.

Képzeljük el az utakat, mint utcákat és a pontokat úgy, mint tereket. Minden térre állítsunk egy rendőrt. Az egyik rendőr legyen őrmester, aki ha füttyent, mindenki elindul felé. Egy perc alatt tudnak megtenni a rendőrök egy utat. Így tehát, ha az őrmester füttyent és fél perc után megnézzük, melyik rendőr hol áll, akkor minden utcán lesz egy rendőr. Viszont az őrmester a helyén maradt, így eggyel több tér van, mint utca, vagyis eggyel több pont van, mint út. □

1.2 Állítás. Összefüggő gráfban bármely kör egy tetszőleges élét elhagyva a gráf összefüggő marad.

1.2. Állítás bizonyítása:

Az összefüggőséghez kell, hogy tetszőleges két pont között vezessen út. Csak ott sérülhet az összefüggőség, ahol elhagytam az élt. Mivel körről volt szó, ezért biztos, hogy lesz út azon két pont között is, melyek már nincsenek közvetlen szomszédságban, hiszen a másik irányban el tudok jutni egyik pontból a másikba.

Nézzük meg ezt pontosabban. Vegyünk egy tetszőleges *x* és *y* pontot a gráfban, illetve egy *e* élt a gráfban lévő *C* körben. Ha *G* –ben *x* –ből vezet út *y* –ba és ebben az útban nem használjuk az *e* élt, akkor ezt az élt elhagyva a gráf összefüggő marad, ugyanúgy el tudok jutni *x* –ből *y* –ba. Ha viszont benne van az *e* él az *x* –et és *y* –t összekötő útban, akkor az *e* él helyére egy alkalmas sorrendben befűzve *(C – e)* –t egy *x* és *y* pontok közötti sétát kapunk. Azt pedig tanultuk, hogy az *x* és *y* közti sétát rövidítve *x* és *y* közti utat kaphatunk.

Szemléletesen is meggondolhatjuk az alábbi állítás bizonyítását. A Margit híd felújítása éppen aktuális probléma, de ettől függetlenül még a körúton el tudok jutni mindenhova, hiszen csak egy részt zártak le, amitől viszont még el lehet jutni bármelyik pontból bármelyikbe, ha kerülünk egyet és körbemegyünk a Körúton. □

1.3. Tétel. Minden összefüggő gráf tartalmaz feszítőfát.

1.3. Tétel bizonyítása:

Ha G-ben van kör, akkor hagyjunk el a körből egy tetszőleges élt. Nézzük meg a maradék gráfot, és ha ebben van kör, akkor annak ismét hagyjunk el egy tetszőleges élét. Az eljárást folytassuk addig, ameddig még találunk kört. Most nézzük meg, mit kaptunk. Ez a gráf összefüggő és már körmentes, tehát fa és nem más, mint *G* egy feszítőfája. Valóban, az eljárás során pontokat nem hagytunk el és nem sérült az összefüggőség, hisz mindig egy kör egyik élét hagytuk el (lásd 1.2. Állítás). □

1.22. Definíció. Egy *G* gráfot *páros gráf*nak nevezünk, ha a *G* pontjainak halmaza két részre osztható aszerint, hogy minden élének egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik halmazbeli. Ha a pontok két halmazát *A* –val és *B* –vel jelöljük, akkor a páros gráf jelölése: G = (A ; B).

1.23. Definíció. Azt mondjuk, hogy két egyszerű gráf *izomorf*, ha létezik ponthalmazaik között kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó leképezés. Ha a két egyszerű gráf G_1 és

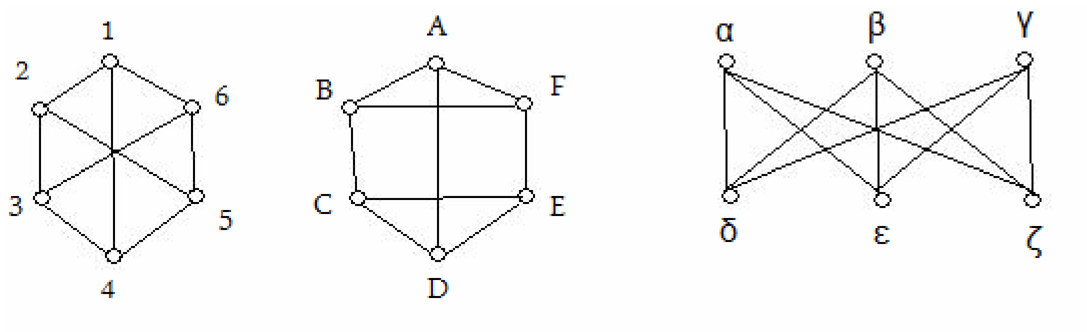
G_2, akkor jelölésben: $G_1(V_1 ; E_1) \cong G_2(V_2 ; E_2)$. Vagyis létezik egy $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ bijektív leképezés, hogy *u* és *v* akkor és csak akkor összekötött, ha *f(u)* és *f(v)* is összekötött.

Egy megfelelő bijekciót találni, vagy bebizonyítani, hogy nincs ilyen, nem könnyű feladat.

1.1. Példa. Izomorfak-e a következő gráfok?

Látható, hogy mind a három gráf 6 pontból és 9 élből áll, továbbá 3-3 fokszámúak a pontjaik. Mégis csak az első és a harmadik gráf izomorf egymással. Megfeleltetem az *1* –et az *α* –nak. Ekkor a *2*, *4* és *6* lesz sorra a *δ*, *ε*, és *ζ*. A *3* –as össze van kötve a *2* –essel, *4* –essel és *6* –ossal. Vagyis a másik ábrán ez azt jelenti, hogy a *β* vagy a *γ* lehet. Válasszuk *β*-nak. És maradt az *5* –ösnek a *δ*. Ha ellenőrzünk, láthatjuk, hogy ez tényleg jó megoldás.

Az is megfigyelhető az 1.1. ábrán, hogy míg az első és harmadik gráfban nincsen háromszög, addig a második gráfban vannak háromszögek. Ez azt is jelenti, hogy a középső gráf nem lehet izomorf a másik két gráffal. Az első és utolsó gráf nem tartalmaz háromszöget, hiszen bennük minden kör páros hosszú.



1.1. ábra: Az 1.1. –es példához

2. Síkbarajzolható gráfok

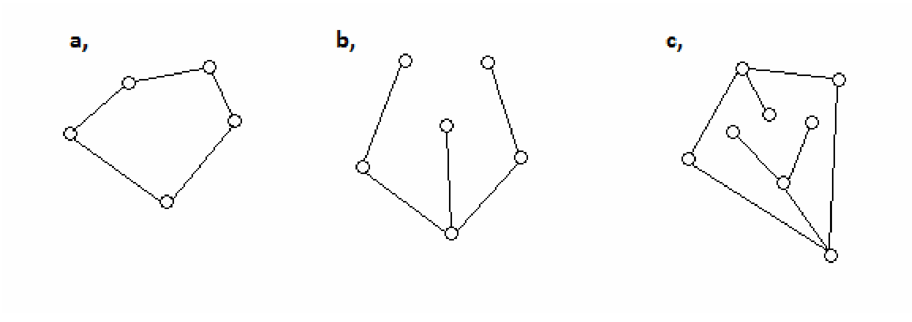
Síkbarajzolható gráfok bevezetése

A síkbarajzolható gráfok bevezetéséhez szükséges alapfogalmakról, tételekről az irodalomjegyzékben szereplő [4], [6] és [9] könyvekből olvastam. Innen gyűjtöttem össze, persze kiegészítéseket még írtam hozzá.

2.1. Definíció. Egy gráf *síkbarajzolható*, ha lerajzolható a síkba úgy, hogy élei ne keresztezzék egymást. A síkbarajzolható gráf a síkot tartományokra osztja.

Ez alapján a gömbre vagy más felületre (például a tóruszra) rajzolható gráfok definíciója ugyanígy történik.

Az összefüggő síkbarajzolható gráf lapjai a többfélék lehetnek, mint ahogy azt az alábbi 2.1. ábra is mutatja. Az *a,* esetben egy „megszokott” gráfot látunk, esetünkben egy 5 hosszú kört. A *b,* esetben van egy nyúlvány, és nincs kör, vagyis fát láthatunk. A *c,* esetben pedig egy olyan gráf tekinthető meg, ahol van egy kör és még nyúlványok is. Ez ne zavarjon meg minket, ettől még mind a három eset síkbarajzolható és összefüggő lesz. A lapok száma az alábbi esetekben sorra $2,\ 1$ és 2 lesz. A tartományokat határoló élek száma rendre: $5,\ 5\cdot 2=10,\ 4+4\cdot 2=12$. Ha sokszögeknek tekintjük őket, akkor sorban ötszög, hatszög és tizenkétszög az alábbi három eset.



2.1. ábra: Összefüggő síkbarajzolható gráf lapjainak típusai

2.2. Definíció. Akkor nevezünk egy gráfot *síkbeli gráf*nak, ha van olyan vele izomorf gráf, amely lerajzolható úgy a síkban, hogy élei ne messék egymást.

2.3 Definíció. *Háromszögelt síkgráf*oknak nevezzük az olyan síkgráfokat, melyeknek minden lapja háromszög.

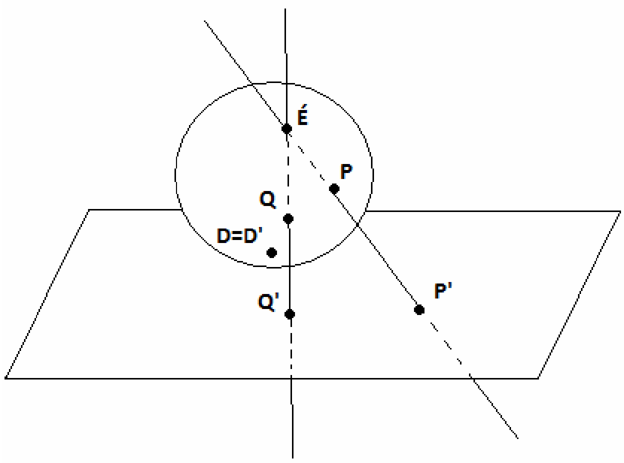
2.1. Tétel. Egy G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

2.1. Tétel bizonyítása: Sztereografikus projekció segítségével.

Veszünk egy gömböt és egy síkot úgy, hogy legyen közös pontjuk. Az egyszerűség kedvéért válasszuk őket oly módon, hogy csak egy közös pontjuk legyen, de egyébként lehetne akár több is. A közös pontot nevezzük Déli-sarknak. A gömbön jelöljük ki az Északi-sarkot a Déli-sarokkal éppen átellenben. A gömbön lévő pontok levetíthetőek a síkba az Északi-sarkon átmenő egyenesek segítségével. Ezen egyenesek beledöfnek a gömbbe, majd továbbhaladva a síkot is elmetszik. A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, szögtartó, de a távolságot nem tartja. Minden pontot egyértelműen le tudtunk vetíteni, kivétel ez alól az Északi-sark.

Ha a gömbre rajzolt gráfban nincs benne az Északi-sark, akkor a gömbön lévő gráf csúcsai egyértelműen levetíthetőek a síkba.

Ha az Északi-sark éppen a gráf csúcsa, akkor forgatunk egy kicsit a gömbön oly módon, hogy az Északi-sarkra ne essen csúcs. Ez után már ez a gráf is egyértelműen levetíthető lesz a síkba.



2.2. ábra: A sztereografikus projekció

2.1. Állítás. Ha *G* síkbarajzolható gráf és *T* egy konkrét síkbarajzolás valamelyik tartománya, akkor létezik olyan másik konkrét síkbarajzolás is, hogy *T* külső tartomány lesz.

2.1. Állítás bizonyítása:

Felvetítem a gömbre a síkba lerajzolt *G* gráfot. Elforgatom a gömböt úgy, hogy felülre kerüljön a *T*, majd újra levetítem a síkba. Fontos, hogy az elforgatás után *T* tartalmazza az Északi csúcsot. □

Euler-formula

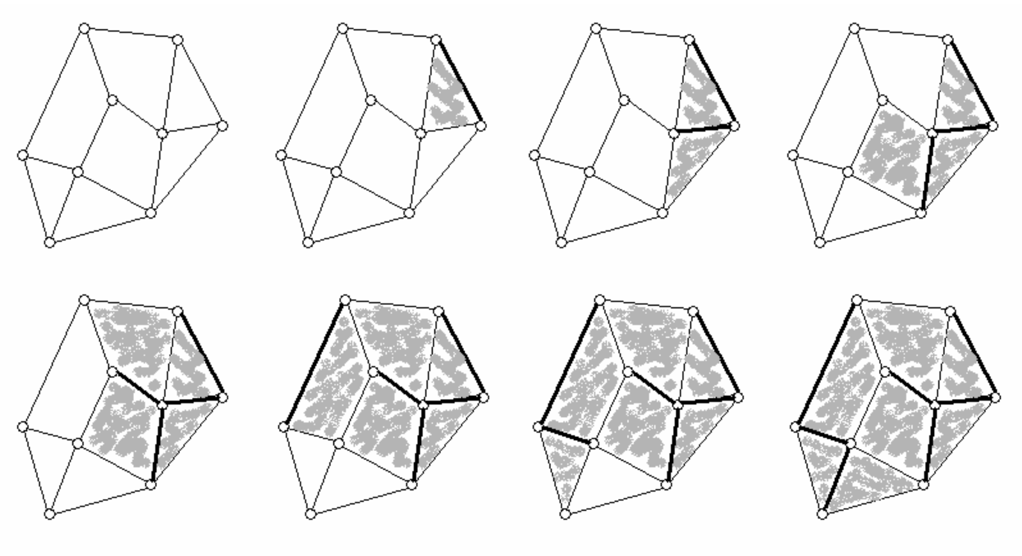
Az Euler-formula 1. bizonyításában szereplő „gátrobbantás" a véges matematika előadás jegyzetében szerepelt. A témakörben elhasználtam még az irodalmak közül a [6] és[9] könyveket.

2.2. Tétel. Ha egy *G* összefüggő síkbeli gráfnak *n* csúcsa, *e* éle és *t* tartománya van, akkor igaz rá az Euler-formula. Vagyis: $n + t = e + 2$. A tartományok számába beletartozik a külső, nem korlátos tartomány is.

2.2 Tétel bizonyítása:

1. Bizonyítás: „Gátrobbantás" módszerével, ami az alábbi 2.3. ábrán nyomon követhető. Több más megoldás is van, én csak egyet követtem nyomon.

Tekintsük a gráfot egy térképnek, ahol az országok a véges tartományok és a nem korlátos, külső tartomány az óceán. Az országhatárok találkozási pontjaiba őrtornyokat építettek. Jön egy terrorista, aki felrobbantja az országhatárokon lévő gátakat, ezáltal az ország víz alá kerül. A terrorista hatékonyan dolgozik. Minél kevesebb robbantással az összes országot víz alá szeretné juttatni. Vagyis olyan gátakat nem robbant fel, aminek már amúgy is mind a két oldala víz alatt van.



2.3. ábra: A „gátrobbantás” folyamata

Mikor a végére ér a munkájának, akkor a maradék gátak éppen egy feszítőfát fognak alkotni. A maradék gátak alkotta gráf körmentes lesz, hiszen akkor a belső tartománynak száraznak kellett volna maradnia. A maradék gátak alkotta gráf összefüggő is, mivel nem robbantott fel olyan gátat, aminek mind a két oldala száraz, vagy mind a két oldala vizes lett volna. Az őrbódékhoz nem nyúlt senki, így tényleg minden pontot tartalmaz. Jelöljük e_1 –gyel a felrobbantott éleket, amik az ábrán sötét vonallal szerepelnek, e_2 –vel a megmaradt éleket. Tudjuk: $e_1 = t - 1$ és $e_2 = n - 1$. Ha összeadjuk a két egyenletet, pont a bizonyítandó formulát kapjuk meg, mert a felrobbantott és megmaradt élek száma éppen kiadja az összes élek számát. □

2. Bizonyítás: teljes indukcióval az élek száma szerint.

Ha egy él van, akkor triviális.

Tekintsük a gráf egy *C* körét (ha van) és ennek egy *a* élét. A *C* kör a síkot két részre osztja, melyeket egyéb élek még további tartományokra osztanak, de mindkét részben van egy-egy olyan tartomány, amelynek az *a* él a határa lesz. Ha elhagyjuk *a* –t, akkor a két tartomány egyesül, vagyis a tartományok száma eggyel csökken, míg a csúcsok száma változatlan marad. Az élek száma is csökkent eggyel, hiszen *a* –t elhagytuk. Ezáltal az $n + t - e$ érték változatlan marad. Tehát az indukciós feltétel szerint az eredetiben is egyenlőség volt a két oldal között.

Ha a gráfban nincsen kör, akkor az 1.2. Tétel alapján könnyűszerrel megoldható, hiszen $t = 1$ és $e = n - 1$. □

2.1. Megjegyzés: A 2.2. Tétel nem csak egyszerű gráfokra érvényes, hanem hurokéleket és párhuzamos éleket tartalmazó gráfokra is, mert ezeket „továbbosztva" egyszerű gráfot kapunk. A „továbbosztást", mint soros bővítést nézzük, lásd a 2.3. Megjegyzést.

2.2. Megjegyzés: Érdemes megnézni, hogy az Euler-formula *k* komponens esetén hogyan változik meg. A következőt lehet mondani: $n + t = e + k + 1$.

2.2. Megjegyzés bizonyítása: teljes indukcióval *k – 1* –ről *k*-ra.

Ha a *k* –adik komponensnek *n', t', e'* csúcsa, tartománya és éle van, akkor $c' + t' = e' + 2$ az Euler-formula alapján. Ezt hozzávesszük az eddigi *k* komponenshez.

$n + t = e + k +1$	eddigi *k* komponensű gráf
$n' + t' = e' + 2$	*k + 1* –edik komponens
$(n + n') + (t + t') = (e + e') + k + 3$	a fentebbi két egyenletet összeadva

Legyen *n*, t*, e** az új *k + 1* komponensű gráf pontjai, tartományai és élei. Ebben az esetben $n^* = (n + n')$ és $e^* = (e + e')$, ám vigyázni kell, mert $t^* \neq (t + t')$, hanem $t^* = t + t' - 1$, mert a *(k + 1)* –edik komponenst az eredeti *k* komponensű gráf egy lapjára rajzoltuk. Azaz ezen lap és a *(k + 1)* –edik komponens külső lapja azonos lesz.

Tehát az új gráfra felírva az eddig ismerteket: $n^* + t^* + 1 = e^* + k + 3$.

Ezt egyszerűsítve: $n^* + t^* = e^* + k + 2$. Ez pedig tényleg *k + 1* komponensre az Euler-formula. □

2.3. Tétel. Ha *G* egy egyszerű, síkbarajzolható gráf és pontjainak száma legalább 3, akkor: $e \leq 3n - 6$, ahol *e* az élek száma és *n* a csúcsok száma a *G* gráfban.

2.3. Tétel bizonyítása:

Összefüggő gráfokra elég belátni a tételt, de ha ezt nem akarjuk kihasználni, akkor a második bizonyítást nézzük.

Meggondolás:

Olyan gráfnak, amely síkbarajzolható és adott *n* –re a lehető legtöbb éle van, biztosan összefüggőnek kell lennie.

Indirekt tegyük fel, hogy több komponensből áll. Kell mindkét komponensből egy-egy csúcs, amit össze lehet kötni úgy, hogy eddigi éleket ne keresztezzünk. Ezáltal egy több élű összefüggő gráfot kapok. De be kell még látni, hogy lehet találni két ilyen csúcsot és egy őket összekötő megfelelő élt. A két komponenst foglaljuk bele egy-egy négyzetbe. Válasszuk a két csúcsnak olyan pontot, ami a komponens külső tartományának határán helyezkedik el és a négyzet kerületéhez húzható belőle olyan vonal, ami nem keresztez egy meglévő élt sem. Most foglaljuk bele a két négyzetet egy nagy téglalapba. Ezután a két négyzet kerületén keletkezett metszéspontokat kell úgy összekötni, hogy a téglalap kerületén fusson az összekötő vonal. Végül némi rendezgetés után egy több élű, összefüggő gráfot kapok.

1. Bizonyítás: összefüggő gráfokra:

Vegyük *G* egy tetszőleges síkbarajzolását. Jelöljük az egyes tartományokat határoló élek számát $h_1, h_2, \ldots, h_t$ –vel. Vagyis h_i darab él határolja az *i* –edik tartományt. Mivel a gráf egyszerű, minden tartományát legalább 3 él határolja és pontjainak száma a legalább 3, ezért $h_k \geq 3$. Egy él viszont legfeljebb két tartomány határához tartozik. Tehát, ha összegezzük a tartományokat határoló élek számát minden tartományra, akkor minden élt legfeljebb kétszer számoltunk. Így felírható az alábbi összefüggés, amiben az Euler-formulát is felhasználtuk:

$$2e \geq h_1 + h_2 + \ldots + h_t = \sum_{k=1}^{t} c_k \geq 3t = 3(e + 2 - n)$$

Meghagyva az egyenlőtlenség két szélét (ezt megtehetjük, hiszen amit felírtunk minden igaz), azt kapjuk, hogy:

$2e \geq 3(e + 2 - n)$.

Felbontva a zárójelet és rendezve az egyenletet, megkapjuk a keresett összefüggést:

$3n - 6 \geq e$.

2. Bizonyítás:

Legyen a gráfnak *k* komponense és legyenek a csúcsok rendre $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$.

Ha egy komponensben $n_i = 1$ csúcs van, akkor $e_i = 0 \leq 3n - 3$ éle lehet.

Ha $n_i = 2$ csúcs van, akkor $e_i \leq 1 \leq 3n_i - 5$ éle lehet.

Ha $n_i \geq 3$ csúcs van, akkor az 1. Bizonyítás szerint $3n_i - 6$ él van. Ha van olyan komponens, amelyre $n_i \geq 3$, akkor összesen legfeljebb $3(n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - 6 - \ldots \leq 3n - 6$ él lehet. A kipontozott résznél minden komponensnél hármat, ötöt vagy hatot vonunk le.

Ha minden komponensre $n_i \leq 2$, de van legalább két komponens, akkor legalább kétszer vonunk le hármat, így ekkor is $3n - 6$. □

2.4. Tétel. Ha *G* egy egyszerű, síkbarajzolható gráf és minden körének hossza legalább 4, továbbá pontjainak száma is legalább 4, akkor $e \leq 2n - 4$. Itt is *e* az élek száma, *n* a csúcsok száma a *G* gráfban.

2.4. Tétel bizonyítása:

Nyilvánvalóan minden tartományt legalább 4 él határol. A 2.3. Tétel bizonyításához hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $4t \leq 2e$.

Alkalmazva az Euler-formulát: $4(e + 2 - n) \leq 2e$. Ebből pedig megkapjuk a keresett állítást: $e \leq 2n - 4$. □

2.5. Tétel. Ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor a minimális fokszáma, δ legfeljebb 5. Formálisan: $\exists x : d(x) \leq 5$.

2.5. Tétel bizonyítása:

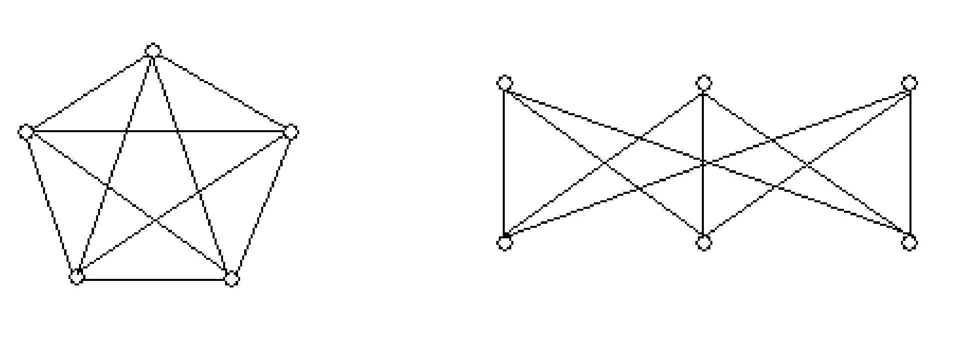
Feltehető, hogy a *G* gráf pontjainak száma legalább 3.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\min d(x) \geq 6$, azaz $d(x) \geq 6, \forall x \in V(G)$. Tudjuk, hogy a fokszámok összege megegyezik az élek számának kétszeresével, így $6n \leq 2e$. Viszont a 2.3. Tétel miatt igaz, hogy $2e \leq 6n - 12$. Ez pedig ellentmondásra vezet, hiszen $6n > 6n - 12$ és nem kisebb vagy egyenlő. □

A Kuratowski-gráfok

A Kuratowski-gráfok bevezetéséhez az irodalomjegyzékben szereplő [4] és [6] könyvet forgattam legtöbbet.

2.4. Definíció. A K_5 és a $K_{3,3}$ gráfokat *Kuratowski-gráf*oknak nevezzük. A K_5 az 5 pontú teljes gráf. A $K_{3,3}$ gráfot szokás *három ház – három kút* gráfnak is nevezni. Az elnevezés onnan ered, hogy a gráf csúcsai olyanok, mint három ház és (velük szemben) három kút. Az élei pedig az utak, melyek minden házat összekötnek minden kúttal. Láthatjuk, hogy az utakat kereszteződések nélkül nem lehet lerajzolni. Tehát a gráfban lesznek egymást keresztező élek. Azt, hogy a $K_{3,3}$ és a K_5 esetében sem lehet az éleket kereszteződés nélkül lerajzolni a síkba, a 2.6. –os tétel mondja ki és bizonyítja.



2.4. ábra. A két Kuratowski-gráf: a K_5 és a $K_{3,3}$

2.6. Tétel. A Kuratowski-gráfok nem rajzolhatóak síkba.

2.6. Tétel bizonyítása:

a, eset: a K_5 –re bizonyítás: indirekt módon.

Indirekt tegyük fel, hogy a K_5 síkbarajzolható. Ekkor teljesül rá a 2.3. Tétel. Azonban a K_5 pontjainak száma 5, éleinek száma 10, és ez ellentmond az $e \leq 3n - 6$ –nek, ugyanis $10 > 9$. Tehát a K_5 nem síkbarajzolható. □

b, eset: a $K_{3,3}$ –ra bizonyítás:

A $K_{3,3}$ minden körének hossza legalább 4, mert $K_{3,3}$ páros gráf. Ezért ha $K_{3,3}$ síkbarajzolható lenne, akkor teljesülnie kellene rá a 2.4. Tételnek. Azonban a $K_{3,3}$ pontjainak száma 6, éleinek száma 9 és ez ellentmond az $e \leq 2n - 4$ –nek, ugyanis $9 > 8$. Tehát a $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. □

2.3. Megjegyzés: Egy gráf síkbarajzolhatóságát nem befolyásolja, ha egy élt egy 2 hosszú úttal helyettesítünk, azaz egy élt egy új 2 fokú csúcs felvételével két élre bontunk, vagy ha egy 2 fokú csúcsra illeszkedő éleket egybeolvasztjuk, és a csúcsot elhagyjuk. Az elsőt nevezzük *soros bővítés*nek.

2.7. Tétel. (Jordan-tétel). Ha egy gráfban létezik olyan kör, hogy a belsejében van az *A* pont, de kívül esik a *B* pont, akkor az *A* –t és *B* –t összekötő él metszi a kör valamelyik élét, vagyis a gráf nem lesz síkbarajzolható.

A Kuratowski-tétel

A Kuratowski-tételt és Fáry-Wagner-tételt az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv alapján bizonyítottam, de az itt szereplő bizonyítás részletesebb. Törekedtem munkám során a könnyebb áttekinthetőségre, érthetőségre.

2.8. Tétel. (Kuratowski-tétel). Egy *G* gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmazza részgráfként a K_5 és a $K_{3,3}$ gráfokat, sem ezek soros bővítéseit.

Mielőtt a Kuratowski-tételt bizonyítanánk, kimondjuk és bizonyítjuk a Fáry-Wagner-tételt, illetve egy állítást. Továbbá kimondunk még egy definíciót, ami a bizonyításhoz még szükséges.

2.9. Tétel. (Fáry-Wagner-tétel). Ha *G* egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor létezik olyan síkbeli ábrázolása is, amelyben minden éle egyenes szakasszal van lerajzolva.

2.9. Tétel bizonyítása:

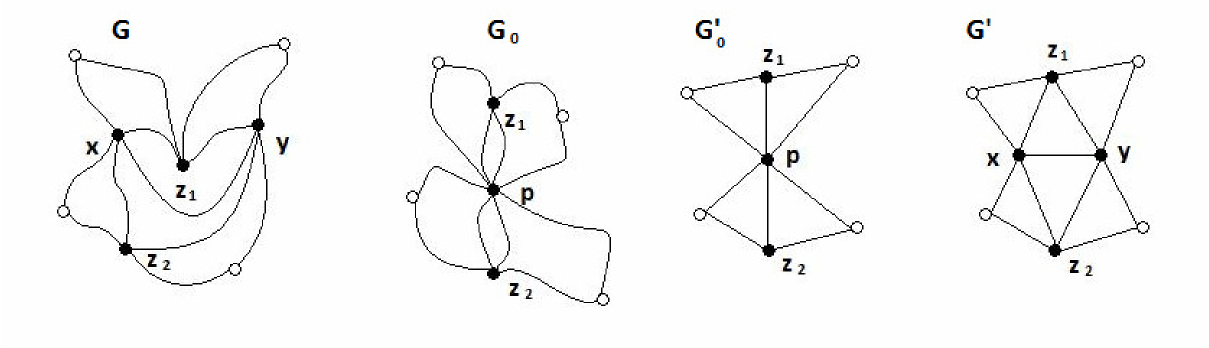
Teljes indukciót alkalmazunk a pontok számára.

Ha a pontok száma legfeljebb 3, akkor a tétel triviális, hiszen 0, 1, 2 vagy 3 éle lehet a gráfnak. Így pedig legfeljebb háromszöget kaphatunk, ami egyenes szakaszokkal és keresztező élek nélkül egyszerűen lerajzolható a síkba.

Először azt mutatjuk meg, hogy ha *G* tetszőleges síkbarajzolható gráf, akkor újabb élek behúzásával minden lapot háromszöggé tehetünk anélkül, hogy párhuzamos éleket kapnánk. Hiszen húzzunk be mindaddig új éleket, míg nem keletkeznek párhuzamos élek. A kapott *G’* gráfban nincsen elvágó pont. Mert ha az új *G’* gráfban lenne elvágó pont, akkor nézzük azt a két részgráfot G_1 –et és G_2 –t, melynek az egyetlen közös pontja ez az x elvágó pont, vagyis $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x\}$, és a két részgráf együtt az egész G' –t adja. Ekkor vegyük $G_1 - x$ egy x_1 pontját, illetve $G_2 - x$ egy x_2 pontját annak a lapnak a határán, mely $G_1 - x$ –szel és $G_2 - x$ –szel is érintkezik. Viszont ebben az esetben x_1 és x_2 egy további éllel összeköthető lenne. Vagyis G' –ben nem lehet elvágó pont, tehát G' kétszeresen összefüggő. Ebből következik, hogy minden lapnak körnek kell lennie. Tegyük fel, hogy C egy legalább 4 pontú lap határa. Legyen a, b, c, d a C kör négy egymást követő pontja. Az {a ; c} és a {b ; d} élek közül valamelyiknek hiányoznia kell, hiszen mind a két élnek a C –n kívül kellene futnia (mivel C egy lap), és így kereszteznniük kellene egymást a 2.7. Tétel miatt. Feltehetjük tehát, hogy mondjuk a és c nem szomszédosak, tehát nem köti össze őket él. Ekkor viszont egy C –n belül elhelyezkedő éllel összeköthetőek lesznek az a és c pontok, ami azt jelenti, hogy a háromszögelést folytathattuk volna. Vagyis G' –nek tényleg minden lapja háromszög.

Ezek után elég a tételt háromszögelt síkgráfokra bizonyítani. Találhatunk olyan {x , y} élt, melyet csak két háromszög tartalmaz. Hiszen legyen x valamely T háromszög belsejében levő pont (minden olyan pont, amely nem a legkülső háromszögön van, rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, tudniillik a legkülső háromszögben benne van) és válasszuk x –et és T –t úgy, hogy a T belsejében levő pontok száma minimális legyen. Válasszuk továbbá az y –t az x bármely szomszédjának. Ha {x ; y} három háromszögnek is éle lenne mondjuk $(x ; y ; z_1)_\triangle$ –nek, $(x ; y ; z_2)_\triangle$ –nek és $(x ; y ; z_3)_\triangle$ –nek, akkor ezen háromszögek, mind T belsejének valódi részei lennének, és például $(x ; y ; z_1)_\triangle$ a belsejében tartalmazná z_3 –at. Ez pedig ellentmond azzal, hogy a T belsejében levő pontok számának minimálisnak kell lennie.

Vagyis válasszunk egy olyan {x ; y} élt, melyre ez az {x ; y} él csak a vele szomszédos két háromszögnek az éle, az $(x ; y ; z_1)_\triangle$-nek és az $(x ; y ; z_2)_\triangle$-nek. Húzzuk össze az {x ; y}-t a p pontba. Ez azt jelenti, hogy két pontból egyet csináltunk, miközben ügyeltünk arra, hogy az éleket ne bolygassuk meg. Ami eredetileg össze volt kötve x –szel és y –al, azt p –vel is összekötjük. Ezáltal keletkezett két párhuzamos élpár, melyekből hagyjunk el egy-egy élt. Így egy új, egyszerű, háromszögelt G_0 síkgráfot kapunk. Az indukciós feltevés szerint pedig van olyan G'_0 háromszögelt síkgráf egyenes élekkel, hogy G_0 és G_0' lapjai egymásnak megfeleltethetők. Ezen lépéssort ábrázoltam az 2.5. ábrán.



2.5. ábra. Egyenes élekhez való eljutás

Azt kell még bizonyítani, hogy tényleg széthúzható *p* –ből *x* és *y* egyenes szakaszokkal. Tekintsük G_0 gráf {p ; z_1} és {p ; z_2} éleit, majd nézzük meg a G_0' –ben az ezen éleknek megfelelő éleket. Ezen élek a *p* körüli szöget két szögre osztják. Ezek egyike tartalmazza azon éleket, melyek elő-képei *G* –ben szomszédosak *x* –szel, míg a másik azokat, melyek elő-képei szomszédosak *y* –nal. Ezek alapján *x* –et és *y* –t széthúzhatjuk és *G* egy megfelelő egyenes élekkel rendelkező *G'* reprezentációját kapjuk. □

2.2. Állítás: Legyen *G* egy minimális nem síkbarajzolható gráf (ez azt jelenti, hogy *G* minden valódi részgráfja síkbarajzolható lesz) és minden fokszáma legyen legalább 3. Továbbá:

a, *G* háromszorosan összefüggő,

b, *G* tartalmaz egy kört húrral.

2.2. Állítás bizonyítása:

a, Először azt látjuk be, hogy *G* kétszeresen összefüggő.

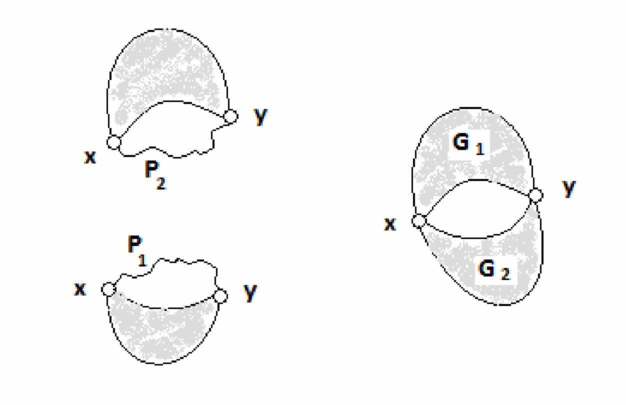
A kétszeres összefüggőséget bizonyítjuk, szintén indirekt bizonyítással.

Legyen G_1 és G_2 két komponense a *G* gráfnak. Egyetlen közös pontjuk legyen *x*. Az *x* pont legyen a legkülső tartományon (ezt sztereografikus projekcióval (2.1. Tétel bizonyításában szerepelt) könnyedén megtehetjük). A Fáry-tétel (2.9. Tétel) miatt le lehet rajzolni egyenes vonalakkal, így ez is síkbarajzolható gráf lenne, de eredetileg *G* nem volt síkbarajzolható. Tehát ellentmondásra jutottunk.

Most rátérünk annak bizonyítására, hogy a *G* gráf háromszorosan összefüggő.

Tegyük fel, hogy $G = G_1 \cup G_2$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x\ ;\ y\}$ és $|V(G_i)| \geq 3$ is teljesül. Ez szavakkal megfogalmazva annyit tesz, hogy *G* –t felbontottuk két olyan részgráfra, melyeknek csak két közös pontja van, *x* és *y*. Illetve minden pont foka legalább három.

Legyen P_1 egy (x ; y) út G_1 –ben és P_2 egy szintén (x ; y) út, de G_2 –ben. Legyen továbbá $H_1 = G_1 + P_2$, illetve $H_2 = G_2 + P_1$. Ekkor H_1 és H_2 síkbarajzolható. Most ágyazzuk a síkba H_1 –et és H_2 –t úgy, hogy a P_1 és P_2 a végtelen tartomány határán helyezkedjen el. Ez a sztereografikus projekció segítségével nem lesz nehéz feladat (a 2.1. Tétel bizonyításában szerepelt a sztereografikus projekció). Mindezek után húzzuk össze az *x* és *y* pontokat és töröljük el a P_1 és P_2 utakat. Ezt mutatja a 2.6. ábra. Így a *G* egy síkbaágyazásához jutunk, ami viszont ellentmondás, hiszen az állításban az szerepelt, hogy *G* nem síkbarajzolható gráf.



2.6. ábra: Az ellentmondás szemléltetése

b, A *G* –beli leghosszabb utat jelölje a következő: (x_0 ; x_1 ; … x_m). Az első pont, x_0 foka legalább 3, hiszen *G* háromszorosan összefüggő. Ezt láttuk be az *a,* esetben. És x_0 nem lehet szomszédos ezen az úton kívüli más ponttal, ugyanis azt a pontot hozzávéve az eredeti leghosszabb úthoz, ez lenne a leghosszabb út, ami pedig ellentmondás. Tehát kell két szomszédnak lennie x_i –nek és x_j –nek melyekre fennáll, hogy j > i > 1. Vagyis x_i és x_j már szerepel a leghosszabb útban, és különböző pontok. Ekkor biztosan (x_0 ; x_1 ; … x_j) egy kör húrral, nevezetesen az x_0x_i húrral. □

2.5. Definíció. Egy G_1 részgráfhoz tartozó *híd* egy olyan összefüggő *B* részgráf, melyre *B* vagy egyetlen él, amelynek mindkét végpontja G_1 –beli, vagy pedig a G_1 részgráfot elhagyva a

G gráfból, vagyis $G - V(G_1)$ –nek egy összefüggő komponense azokkal az élekkel együtt, melyek ezt a komponenst G_1 –hez kötik.

2.8. Tétel bizonyítása:

Tegyük fel, hogy G síkbarajzolható. Ekkor G nem tartalmazhatja K_5 –öt, $K_{3,3}$ –at vagy ezek soros bővítését, hiszen már ezek sem rajzolhatóak síkba. (Lásd 2.6.Tétel.)

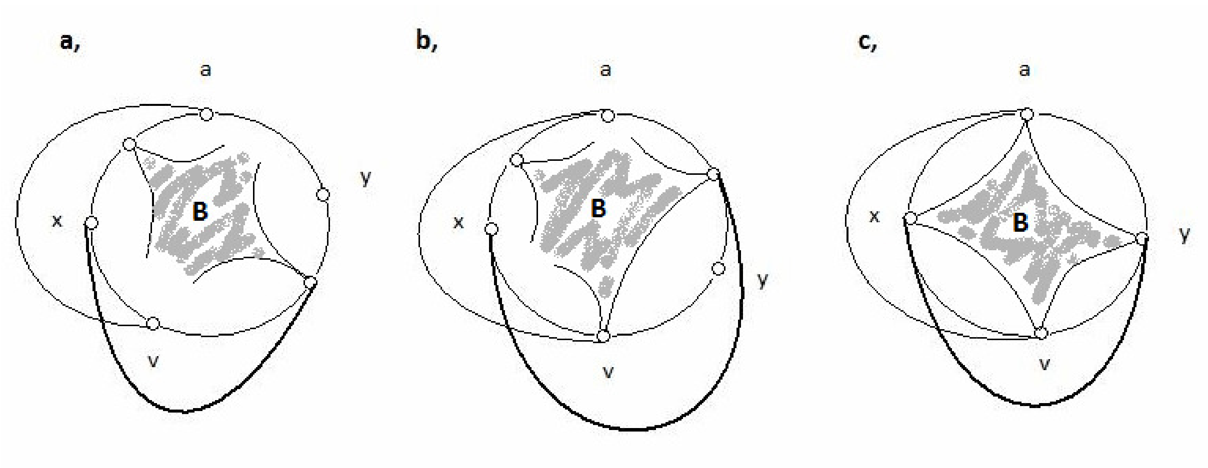
Megfordítás: tegyük fel, hogy G nem síkbarajzolható. Ekkor G tartalmaz egy minimális nem síkbarajzolható G' gráfot. Vegyük ki G' –ből a másodfokú pontokat. Ezt oly módon tesszük meg, hogy elhagyjuk a másodfokú pontot és a két szomszédját egymás után kötjük, összekötjük. Ez éppen a fordítottja a soros bővítésnek (2.3. Megjegyzésben definiáltuk a soros bővítést és fordítottját). Ezáltal kevesebb pontú lesz a gráfunk és egy újabb minimális, nem síkbarajzolható gráfot kapunk. De most olyat, amelyben minden pontnak a foka legalább három lesz. Belátjuk, hogy ez a gráf pedig vagy K_5 vagy $K_{3,3}$, tehát G' a K_5, $K_{3,3}$ vagy ezek soros bővítése az alábbi továbbgondolás miatt.

Be kell tehát még látni, hogy a fenti minimális nem síkbarajzolható gráf miért K_5 vagy $K_{3,3}$. Legyen a C kör egy húrja az (x ; y). (Az, hogy létezik kör és annak egy húrja, beláttuk a 2.2. Állítás *b,* részében.) Válasszuk C –t úgy, hogy G – (x ; y) –t a síkba lerajzolva a C –n belüli tartományok száma a lehető legnagyobb, vagyis maximális legyen. Először is észrevehető, hogy nincsen C –n kívüli pont. Lássuk ezt be:

Legyen G_0 a G – V(G) egy komponense, és indirekt tegyük fel, hogy G_0 a C –n kívülre esik. Mivel G -nek háromszorosan összefüggőnek kell lennie (a háromszoros-összefüggőséget a 2.2. Állítás *a,* részéből tudhatjuk), a C körnek van 3 olyan pontja, ami G_0 –lal szomszédos. Jelöljük ezeket u –val, v –vel és w –vel. Vizsgáljuk ennek a 3 szomszédnak az elhelyezkedését. Két lehetőség áll fenn: vagy mind a 3 pont x és y között helyezkedik el, így egyik sincs x és y által elválasztva, vagy a másik lehetőség, hogy a 3 pont közül legalább 2 nincsen elválasztva az x és az y által. Ekkor ezt a sem x –et és sem y –t nem tartalmazó (u ; v) ívet helyettesíthetjük egy G_0 –on keresztülmenő (u ; v) úttal. Ezáltal viszont egy (x ; y) húrral és több belső lappal rendelkező C' kört kapunk, ami ellentmondás, ugyanis feltettük, hogy a lapok száma a lehető legnagyobb volt.

Ugyanebből az okfejtésből az is következik még, hogy *C* –nek minden kívül futó húrja a *C* két (x ; y) ívének belső pontjait köti össze.

Nézzük meg a *C* körnek azon hídjait, amelyek *C* –n belül vannak. Nevezzünk egy ilyen hidat *billenthető*nek, ha a híd végpontjai nem választják el *C* egyetlen külső húrjának végpontjait sem. Tudjuk, hogy ezek a hidak mind átbillenthetőek *C* –n kívülre. A megmaradó hidak között kell lennie olyannak, ami *C* –nek mind a kettő (x ; y) ívéből tartalmaz belső pontot. Ha nem így lenne, akkor *x* –et és *y* –t a *C* körön belül is összeköthetnénk, ami miatt viszont *G* síkbarajzolható lenne. Tehát van olyan *B* híd *C* –n belül és olyan (a ; v) húr *C* –n kívül, hogy a *B* végpontjai *C* –n elválasztják egymástól az *a* –t *v*-től és az *x* –et *y* –tól. Továbbá {a ; v} és {x ; y} szintén elválasztják egymást. Ez többféleképpen lehetséges, mely grafikusan is megtekinthető a 2.7. ábrán, illetve pontokba szedve alább látható:



2.7. ábra. A három lehetőség *x*, *y*, *a* és *v* –re

a, eset: a *B* híd tartalmaz belső pontokat az (x ; a) ívből és az (y ; v) ívből is (avagy szimmetrikusan az (x ; v) és (y ; a) ívből).

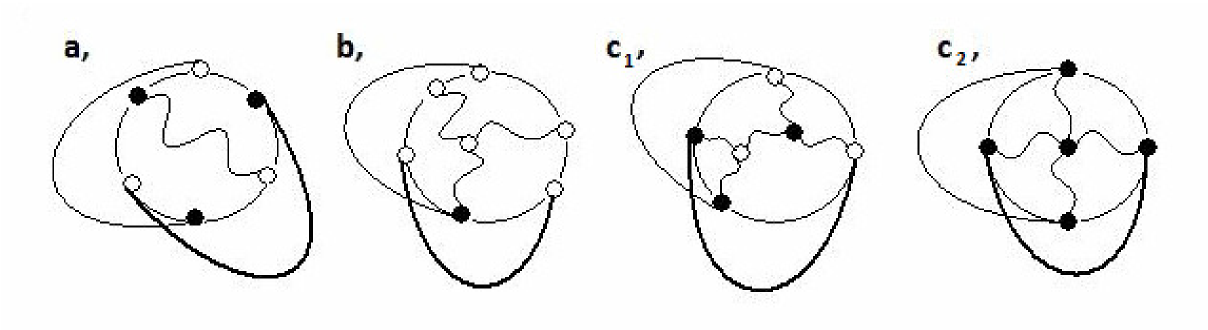
b, eset: a *B* híd tartalmazza *v* –t, az (x ; a) ív egy belső pontját és még az (y ; a) ív egy pontját, ami *a* –tól különböző (itt is található hasonló szimmetrikus elrendezés).

c, eset: a *B* híd tartalmazza *x* –et, *y* –t, *a* –t és *v* –t.

A lentebbi, 2.8. ábrából az is jól kitűnik, hogy az *a,* esetben a $K_{3,3}$ egy felosztásáról van szó. Ez megkönnyíti ennek az esetnek a belátását, ugyanis *G* minimalitása miatt nem lehetnek más élek vagy osztópontok, azaz $G \cong K_{3,3}$. Tehát ezt az esetet bebizonyítottuk.

A másik két eset kicsit bonyolultabb lesz. A *c,* esetet szét is kell bontani alesetekre.

Vegyünk egy *P* utat, mely összeköti *B* két említett végpontját. A *b,* esetben vegyünk egy utat, mely *P* –t összeköti egy harmadikkal. A *c,* esetben vegyünk két utat, melyek *P* –t a másik két végponttal kötik össze. Ha ez a két út találkozik, akkor legyen egy közös kezdő szakaszuk. Így a *c,* esetet két alesetre bonthatjuk attól függően, hogy az említett utak *B* –ben H vagy X formájúak-e. Ez a két forma az 2.8. ábrán jól látszik.



2.8. ábra. Az utak alakja.

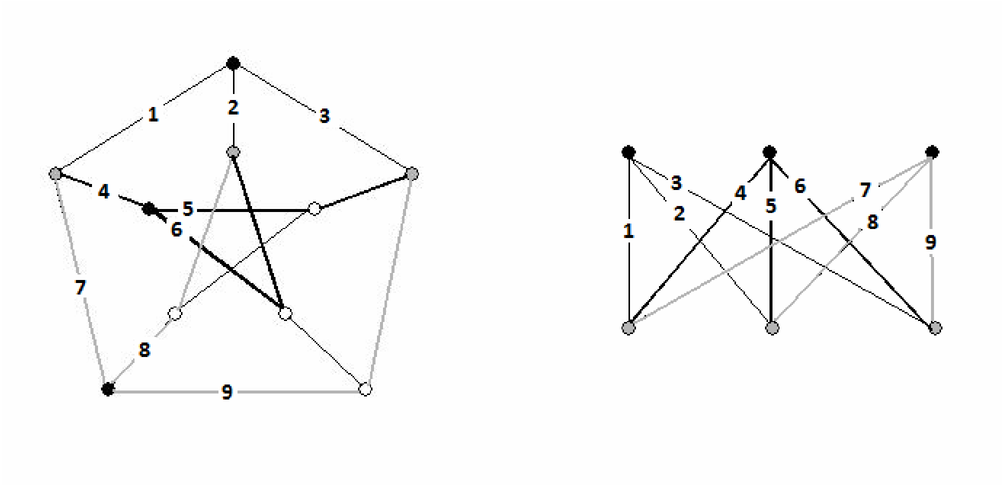
A *b,* és a *c_1,* esetben a gráf valódi részként tartalmazza $K_{3,3}$ egy felosztását. Ez lehetetlen, mivel feltételünk szerint *G* minden valódi részgráfja síkbarajzolható. A *c_2,* esetben pedig látjuk K_5 egy felosztását és így *G* minimalitása miatt $G \cong K_5$. □

Példák nem síkbarajzolható gráfokra:

A Petersen és a Grötzsch gráf szerepelt a [4], [6], [8], [9] könyvekben és a [11] internetes oldal ábrái alapján késztettem el saját ábráimat.

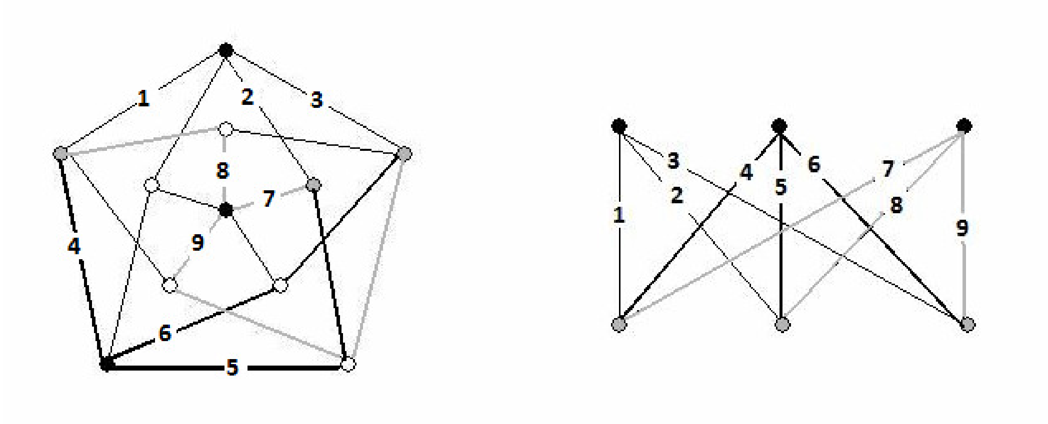
Annak eldöntése, hogy síkbarajzolható-e egy gráf a következőt mondhatjuk el. Ha egy gráf síkbarajzolható, akkor le kell tudni rajzolni. Ahhoz, hogy szépen lássuk a lépéseket vagy az eredményt érdemes számokkal ellátni a csúcsokat, így majd az izomorfiát könnyebb látni, igazolni. Ha nem síkbarajzolható, akkor pedig találni kell benne olyan részgráfot, ami K_5, $K_{3,3}$ vagy ezek soros bővítése.

A Petersen gráf nem rajzolható síkba, ugyanis meglelhető benne a $K_{3,3}$ soros bővítése. Jelöljük az ábrán (2.9. ábra) a fekete pontokkal a kutakat, szürkével a házakat. Ami fehéren maradt, az a soros bővítés pontjaihoz tartozik. Mivel találtunk $K_{3,3}$ –nak egy soros bővítését benne, beláttuk, hogy nem síkbarajzolható.



2.9. ábra. A Petersen gráf

A Grötzsch gráf sem lesz síkbarajzolható. A beláتáshoz ugyancsak K_5 –öt, $K_{3,3}$ –at vagy ezek soros bővítését keressük a gráfban. A K_5 –öt nem találunk, de a remény még megvan a $K_{3,3}$ –ra, vagy soros bővítésére. Ezt meg is találjuk és a 2.10. ábrán meg is nézhetjük. A kutakat jelölhetjük megint fekete pontokkal, a házakat szürkékkel. A fehéren maradt pontok pedig most is a soros bővítést jelentik. Mivel megtaláltuk a három ház – három kút gráf soros bővítését, nem lesz síkbarajzolható a Grötzsch gráf sem.



2.10. ábra. A Grötzsch gráf

3. Színezéses problémák

Bevezető a színezéses problémák témakörébe

A gráfok színezésének bevezetésével kapcsolatban a véges matematika jegyzetből és az irodalomjegyzékben szereplő [6] könyvből olvastam.

A gráfok színezésének problémáját két részre oszthatjuk. Az egyik rész, amikor a pontok színezéséről van szó, a másik részben az éleket színezzük. Ebben a fejezetben nem fogok minden tételt bizonyítani, a legtöbbet csak kimondom.

3.1. Definíció. Egy G hurokélmentes gráf *k színnel kiszínezhető*, hogyha minden csúcsot ki lehet színezni k db szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen. A *G kromatikus száma* $\chi(G) = k$, ha G csúcsai kiszínezhetők k db színnel, de $k - 1$ színnel már nem. Egy ilyen színezésnél az ugyanolyan színt kapott pontok halmazát nevezzük *színosztály*nak. (Tehát a színosztályok független ponthalmazok.)

3.1. Megjegyzés: Ha hurokél csatlakozna egy csúcshoz, akkor azt a csúcsot nem lehetne kiszínezni. Másrészt a színezés szempontjából a többszörös élek nem játszanak szerepet, ezért elég a továbbiakban csak egyszerű gráfokkal foglalkozni.

3.2. Megjegyzés: $\chi(G) \leq |V(G)|$, hiszen ha minden csúcsot különbözőre színezünk, az biztosan jó színezés lesz. A K_n –et ennél kevesebb színnel pedig nem is lehet kiszínezni, vagyis $\chi(K_n) = n$.

3.1. Tétel. Legalább egy élt tartalmazó G gráf akkor és csak akkor páros, ha $\chi(G) = 2$.

3.1. Tétel bizonyítása:

Ha a gráf páros, akkor az egyik oldalon lévő pontokat pirossal, a másik oldalon lévőket kékkel színezve 2 színnel színeztük a gráfot.

Ha a gráfnak van legalább egy éle, akkor ennek két végpontját nem színezhetjük ugyanolyan színűre, így $\chi(G) = 2$.

Ha $\chi(G) = 2$, akkor a két színosztály éppen a páros gráf definíciójában szereplő felbontásnak megfelelő két halmaz lesz. □

3.2. Definíció. Egy *G* gráf élei *k* színnel kiszínezhetők, hogyha minden élét ki lehet színezni *k* db szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos él színe különböző legyen. *G* élkromatikus száma $\chi_e(G) = k$, ha *G* élei *k* színnel kiszínezhetők, de *k – 1* színnel már nem.

3.3. Megjegyzés: Az élkromatikus szám megegyezik a gráf élgráfjának kromatikus számával. Az élkromatikus szám nem lehet kisebb a maximális fokszámnál, hiszen az egy pontra illeszkedő éleket mind különböző színekre kell színezni.

3.4. Megjegyzés: Ha van a gráfban egy klikk, akkor ennek semelyik két pontja nem lehet azonos színű. Ebből következik, hogy minden *G* gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Mycielski konstrukció

Az irodalomjegyzékben szereplő [6] könyv alapján írtam le a konstrukciót, illetve a könyv írója által tartott órán írt jegyzetből készítettem el az ábrákat, kiegészítéseket.

3.2. Tétel. (Mycielski tétel). Minden $k \geq 2$ egész számra létezik olyan G_k gráf, hogy az $\omega(G_k) = 2$ és $\chi(G_k)= k$.

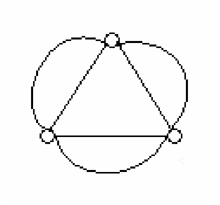
3.3. Tétel. (Brooks) Ha *G* egy egyszerű, összefüggő gráf, de nem teljes gráf és nem egy páratlan hosszúságú kör, akkor $\chi(G) \leq \max d(X)$. Vagyis ekkor a kromatikus szám nem nagyobb, mint a maximális fokszám.

3.4. Tétel. (Vizing). Ha *G* egyszerű gráf, akkor $\max d(X) \leq \chi_e(G) \leq (\max d(X)) + 1$.

3.5. Tétel. (Shannon). Ha G nem egyszerű, akkor $\chi_e(G) \leq \frac{3}{2} \max d(X)$.

3.1. Példa. Shannon-tételre látható egy jellegzetes példa a 3.1. ábrán.

Látható, hogy a maximális fokszám 4. Ezáltal a jobboldal 6 lesz, míg a baloldalon is 6 fog szerepelni, hiszen minden élt más színnel kell megszíneznünk.

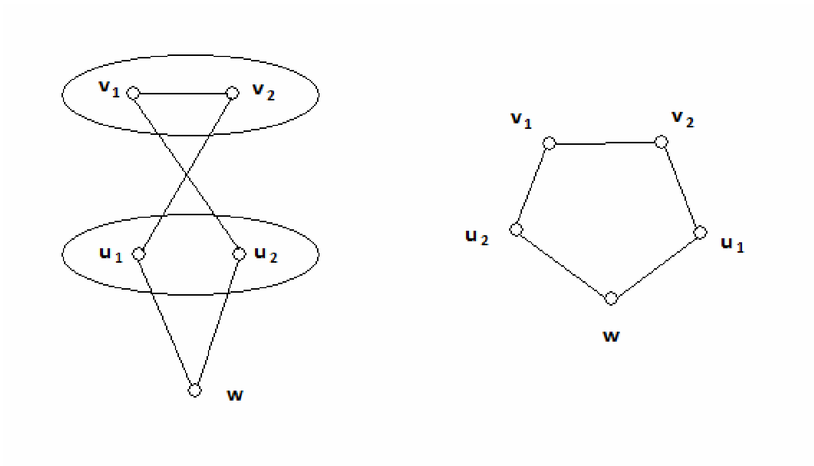


3.1. ábra: Shannon-tételre példa

Ezen tételek közül terjedelmi okokból itt csak a 3.2. Tételt bizonyítom.

A Mycielski konstrukció leírását és a 3.2. ábrát az állítások megértésének könnyebbsége végett készítettem el. Az ábrán a G_3 szerepel, amit megfeleltethetünk egy 5 hosszú körnek. Érdekességként megjegyezném, hogy a G_4 pedig a Grötzsch gráffal izomorf gráf. (Ennek ellenőrzése jó feladat lenne akár a 3. Blokkban.)

A G_2 –nek nyilván megfelel a két csúcsot és egy élt tartalmazó gráf. Tegyük most fel, hogy már megkonstruáltuk G_k –t úgy, hogy $\omega(G_k) = 2$ és $\chi(G_k) = k$. Ebből konstruáljuk tovább G_{k+1} –et. Jelöljük G_k pontjait v_1 , v_2 , v_3 …, v_n –nel. Ezután vegyünk fel n + 1 db új pontot, amiket jelöljünk u_1 , u_2 , u_3 …, u_n és w –vel. Illetve új éleket is fel kell vennünk. Minden u_i –t kössük össze v_i minden G_k –beli szomszédjával, de magával v_i –vel ne. Végül w –t kössük össze minden u_i –val, de a v_1 , v_2 , v_3 , …, v_n pontokkal ne. Az így kapott G_{k+1} gráf kielégíti a 3.2. Tételt, vagyis a Mycielski tételt.



3.2. ábra: Mycielski konstrukció

3.1. Állítás. $\omega(G_{k+1}) = \omega(G_k) = 2$.

3.1. Állítás bizonyítása:

Indirekt bizonyítást használunk, melyben háromszögeket keresünk.

1. eset: A *w* szomszédjai egymással sosem lesznek szomszédok, hisz mind *u* –beliek, amelyek nincsenek összekötve. Tehát a háromszögben nem lesz benne *w*.

2. eset: Nem lehet mind a 3 pont *v* –ből, mert akkor eddig is lett volna háromszög.

3. eset: Az *u* –beliek közül maximum egyet használhatok fel. Marad az a lehetőség, hogy egy *u* –beli pont és két *v* –beli pont alkot háromszöget, azonban ez sem lesz jó, hiszen egy *u* –beli pont nem lesz szomszédos ezzel a két *v* –beli ponttal, vagy akkor eleve háromszög lett volna G_k –ban. □

3.2. Állítás. $\chi(G_{k+1}) = k + 1$.

3.2. Állítás bizonyítása:

Színezzünk ki minden v_i pontot ugyanolyan színnel, mint G_k egy *k* db színnel való kiszínezésében. Ezután minden u_i pontot színezzünk ugyanolyan színűre, mint v_i –t. Végül színezzük ki *w* –t a $k + 1$ –edik színnel. Így G_{k+1} –et jól színeztük $k + 1$ színnel. Ez azt mutatja, hogy $\chi(G_{k+1}) \leq \chi(G_k) + 1$.

Tegyük fel indirekt, hogy *k* db színnel is meg lehet színezni G_{k+1} –et (a *k* –nál kevesebb színnel biztosan nem, mert G_k az színezéséhez is *k* db szín kellett). Jelöljük az *x* pont színét *c(x)* –szel, a színeket pedig *1, 2, 3 , …, k* –val. Feltehetjük még, hogy $c(w) = k$. Mivel *w* minden u_i ponttal össze van kötve, ezért az u_i pontok mindegyikére $c(u_i) \in \{1, 2, 3, \dots , k - 1\}$.

Megadunk egy c' színezést a v_i pontok által feszített részgráfon (ez éppen G_k –val izomorf részgráf). Ha $c(v_i) = k$, akkor legyen $c'(v_i) = c(u_i)$, különben $c'(v_i) = c(v_i)$, vagyis a k színűeket színezzük át a párjuk színére.

Belátjuk, hogy c' egy $k - 1$ színnel való jó színezése G_k –nak. Ez viszont ellentmondás, hiszen $k - 1 < \chi(G_k)$. Az olyan élekkel, amelyeknek egyik végpontja sem volt k színű, nem lehet probléma, hiszen ezek végpontjainak színét nem változtattuk meg. Tegyük fel, hogy $c(v_i) = k$ és v_i –nek létezik egy olyan v_j szomszédja, amelyre $c'(v_j) = c'(v_i)$. A $c(v_j) \neq k$, mert az eredeti színezés jó volt. Viszont emiatt $c'(v_j) = c(v_j)$ és $c'(v_i) = c(u_i)$. Így $c(v_j) = c(u_i)$, ami pedig ellentmondás, ugyanis v_j és u_i szomszédosak G_{k+1} –ben, ha v_j és v_i szomszédosak G_k –ban. □

5-szín tétel

Az 5-szín tétel és bizonyítása a [6] könyvben hasonlóan szerepelt. Némi módosítást eszközöltem rajta a könnyebb érthetőség miatt.

3.6. Tétel. (5-szín tétel). Ha G síkbarajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 5$.

3.6. Tétel bizonyítása:

A csúcsok száma szerinti teljes indukcióval történik a bizonyítás.

Már a 3.1. Megjegyzésben is megbeszéltük, hogy a párhuzamos élek nem befolyásolják a színezést, így feltehető, hogy a gráf egyszerű.

$n = 2$ pontra a tétel nyilvánvalóan igaz, hiszen $2 \leq 5$.

Alkalmazzunk teljes indukciót. Most nézzük 2-nél több pontú gráfra. A 2.3. Tételben beláttuk, hogy G éleinek száma legfeljebb $3n - 6$, ahol $n = |V(G)|$. Így biztosan van olyan x pont, amelynek foka legfeljebb 5, hiszen ha nem így lenne ellentmondást kapnánk a 2.3. Tételben. Ha x foka legfeljebb 4, akkor az indukciós feltevés miatt x –et elhagyva kiszínezhető a gráf 5 színnel. Majd x –et a 4 szomszédjától eltérő ötödik színnel színezzük ki.

Tegyük fel most, hogy $d(X) = 5$. Ha x –nek bármely két szomszédja között van él, akkor a gráfban egy K_6 részgráf szerepel, de ez ellentmond a G síkbarajzolhatóságának. Vagyis x –nek van két olyan szomszédja, y és z, ami nincs összekötve. Húzzuk össze egy ponttá az x, y és z pontokat úgy, hogy közben figyelünk arra, hogy éleket ne hagyjunk el. Az így kapott G'

gráf az indukciós feltevés miatt kiszínezhető 5 színnel. Az ennek megfelelő színezés *G* –ben viszont nem lesz jó, mert *x, y* és *z* egyszínűek. A *G* –ben *x* –nek 3 szomszédja van *y* és *z* –n kívül, melyek legfeljebb 3 színt foglalnak le és a maradék két szomszéd, *y* és *z* egyszínű. Marad tehát az ötödik szín, amellyel kiszínezhetjük *x* –et. Tehát *G* kiszínezhető 5 színnel. □

4-szín tétel

Az internetes oldalak közül a [10], [12], [13] oldalt, és a könyvek közül az [5] könyvet használtam a 4-szín tételhez. A duális gráfokról pedig a [6] könyvben olvasottakat hasznosítottam.

3.7. Tétel. (4-szín tétel). Ha *G* síkbarajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 4$.

A 4-szín tétel bizonyítása nagyon nehéz feladat, ezért ezt nem is tárgyaljuk. Pár szót viszont megemlítünk a tételről.

Eddig a gráfok színezésénél olyan problémákkal foglalkoztunk, ahol a gráf pontjait, esetleg éleit kellett megszíneznünk. Most áttérünk a tartományok színezésére. A tartományok megszínezése, avagy a térképszínezési feladatot könnyen átfogalmazhatjuk. Minden síkbarajzolható *G* gráfhoz gyártsunk egy *G** gráfot oly módon, hogy *G* tartományaihoz (az országokhoz) rendeljünk az új *G** gráf pontjait (fővárosokat). A *G** gráfban akkor kössünk össze két pontot éllel, ha a megfelelő *G* –beli tartománynak van közös határvonala. Az így gyártott *G** gráfot nevezzük a *G* gráf *duális*ának. Mivel a *G** is síkbarajzolható és tartományai épp a *G* pontjainak felelnek meg, így szokás *G* –t és *G** -ot egymás duálisának nevezni.

A Négyszín-tétel állítása szerint minden térkép kiszínezhető négy színnel úgy, hogy bármely két egymás mellett elhelyezkedő tartomány ne kapjon azonos színt. A tartományok akkor szomszédosak, ha él mentén érintkeznek.

A sejtést először Francis Guthrie fogalmazta meg 1852-ben, amikor észrevette, hogy Anglia térképének kiszínezéséhez elegendő négy szín. Az első publikáció Arthur Cayley nevéhez fűződik. Számos sikertelen próbálkozás volt a sejtés bizonyítására, majd 1977-ben

Appel és Haken bizonyította be a tételt először. A bizonyítás hatalmas, több száz oldalas és számítógépes módszerek is szerepet játszanak benne.

A bizonyítás fogalmi részében az állítást visszavezették majd kétezer darab olyan speciális térképre, melyekre teljesülnie kell bizonyos matematikai tulajdonságnak. A térképeket számítógép használata nélkül találták, de a tulajdonság megvizsgálását már a számítógép végezte el. Ez volt az első olyan nevezetes matematikai sejtés, amit számítógép használatával sikerült bizonyítani.

Később több hibát is felfedeztek a bizonyításban, melyeket Appel és Haken szisztematikusan kijavított és kategorizált is. A következő lépcsőfok az volt, mikor 1996-ban Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour és Robin Thomas megalkotott egy négyzetes idejű algoritmust a térképek 4 színnel való színezésére.

4. Feladatok a tanórákra

Elmondható az összes feladatra, hogy az irodalomjegyzékben szereplő [1], [2], [3], [7], [9] és [11] oldalakon szerepelhetnek. Azonban van olyan feladat, aminél csak ötletet adtak és sok saját feladat is szerepel.

1. Blokk: a fokszámokról

Az első öt feladatban a fokszámról van szó. A kapcsolódó definíciók és állítások az 1.1., 1.4. és 1.5. Definíció, illetve az 1.1. Állítás. A megoldáshoz az 1.3. Definíció is szükséges. Ezek a feladatok nem nehezek. Matematikaórán bemelegítő, ráhangoló feladatoknak megfelelőek.

A fokszámokról kimondanék két állítást, amelyekből az elsőt bizonyítom is. Ezek elmondhatóak, megbeszélhetőek a matekórákon. A cél, hogy adott $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ nem negatív egész számokhoz mikor van olyan gráf, amelyben pontosan ezek a fokszámok. Legyen $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ és el szeretnénk érni, hogy az *i* csúcs foka d_i legyen. Először, a 4.1. Állításban még hurokéleket és többszörös hurokéleket is megengedünk, majd a hurokéleket megtiltjuk és a 4.2. Állításban már az egyszerű gráfok esetét vizsgáljuk. Ha a hurokéleket megtiltjuk, akkor nem lehetnek túl nagy fokú pontok, hiszen ha egy pontban nem lehet hurokél, akkor az innen kiinduló élek másik végét a többi pontnak képesnek kell lennie befogadni.

4.1. Állítás: Ha a $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sorozatra teljesül, hogy $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ páros (tehát a fokszámok összege páros), akkor létezik olyan (akár többszörös) hurokéleket is tartalmazó gráf, melyben a fokszámok $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

4.1. Állítás bizonyítása:

Minden csúcsba berajzolunk annyi hurokélt, amennyit csak lehet, így még minden csúcsban 0 vagy 1 él hiányzik. Mivel a d_i –k összege páros, páros sok egyes marad. Ezeket tetszőlegesen összekötve páronként, a kívánt tulajdonságú gráfot kapunk. □

4.2. Állítás: Akkor és csak akkor létezik olyan hurokél nélküli gráf, melyben a fokszámok $d_1, d_2, \ldots, d_n$, ha a d_i –k összege páros és minden d_i legfeljebb akkora, mit az összes többi fokszám összege. Nyilván ezt elég a legnagyobb fokszámra megkövetelni. Ha d_n a legnagyobb fokszám, akkor feltételünk $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ páros és $d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} \geq d_n$ ezen alakba írható.

4.1. Feladat: Egy társaságot megkérdeztünk, ki hány emberrel fogott kezet és a következő eredményeket kaptuk tőlük: 3, 4, 6, 7, 6, 9, 5, 8, 7, 4. Szemléltessük gráfon az esetet!

A 4.1. Feladat arra mutat rá, hogy a fokszámok összegének párosnak kell lennie.

4.2. Feladat: Rajzoljunk 7 csúcsú, ne feltétlenül egyszerű gráfot, ahol a csúcsok fokszáma: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 6!

A 4.2. Feladatban a fokszámok ismeretében kell megrajzolni egy gráfot. Ebben a feladatban még meg vannak engedve a hurokélek és párhuzamos vagy többszörös élek is.

4.3. Feladat: Lehet-e egyszerű az a gráf, melynek fokszámai rendre: 0, 1, 2, 3, 6? Indokolj is!

4.4. Feladat: Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka: 8, 8, 7, 7, 5, 4, 3, 2, 2?

A 4.3., 4.4. Feladatok már egyszerű gráfokra vonatkoznak és megint csak a fokszámok ismertek.

4.5. Feladat: Hány csúcsú az a konvex sokszög, amelynek együttesen 136 oldala és átlója van?

A 4.5. Feladat kapcsán a teljes gráf fogalma is előkerül, illetve a teljes gráf éleinek a száma. A fokszámok nincsenek egyértelműen megadva, mint a fentebbi esetekben. A feladat emiatt is jó. Szöveges feladatokat a diákok mindig nehezebben oldanak meg, mint ha már az adatok ki vannak gyűjtve és nincs felesleges információ. Továbbá a sokszögek kapcsán teljesen más témakörben is elővehető a feladat.

2. Blokk: az összefüggőségről

A hatodiktól a kilencedik feladatig használtuk az összefüggőséget (1.10. Definíció). Továbbá az élszám, a fa, az erdő, a feszítőfa, a kör, fokszám definíciójával kell tisztában lenni (1.19., 1.20., 1.22., 1.7., 1.5. Definíció).

4.6. Feladat: Hányféle egyszerű, összefüggő gráf adható meg 4 csúcson?

A 4.6. Feladatban az egyszerűség, összefüggőség és izomorfia definíciója kerül előtérbe. A 4 csúcs még pont ideális egy összefüggőségről szóló bevezető feladatban.

4.7. Feladat: Igazoljuk, hogy ha egy 5 pontú gráfban minden pontból legalább 2 él indul, akkor a gráfban van kör! Igaz-e, hogy minden csúcs benne szerepel egy körben?

A 4.7. Feladatban a fokszám és kör definíciójára is emlékezni kell. Igazolni kell egy állítást, így a bizonyítást is gyakoroltatja. A bizonyítások fajtájának tanításánál is el lehet mondani, így kapcsolódhatunk másik témakörhöz is. A második kérdéshez pedig egy kis szemfülesség kell.

4.8. Feladat: Igazoljuk, hogy ha egy 6 pontú gráfnak legfeljebb 4 éle van, akkor a gráf nem összefüggő!

A 4.8. Feladatra adtam egy olyan megoldást is, ami az Euler-formulát alkalmazza (2.2. Tételben van kimondva), de van egyszerűbb megoldás is. Ha több megoldást tudunk adni egy feladatra, akkor az a diákok kreativitását növeli, illetve nem vagyunk egyformák, és más-más diákhoz más-más megoldás áll közel.

4.9. Feladat: Mutassuk meg, hogy egy legalább 2 csúcsú összefüggő gráfban létezik olyan csúcs, melyet a rá illeszkedő élekkel együtt elhagyva a gráf összefüggő marad.

A 4.9. Feladathoz nagyon szorosan kapcsolódik az 1.2. Állítás, amit a tanórán lehet, hogy érdemes ennek kapcsán megvizsgálni.

3. Blokk: az izomorfiáról

A lentebbi feladatok az izomorf gráfokról (1.23. Definíció), megértésükről, gyakorlásukról szólnak. Figyelni kell arra, hogy nem volt kikötve az összefüggőség, tehát itt újra felelevenedik az 1.10. Definíció. Az izomorf gráfokról még máshol is szó van a feladatok során, illetve a dolgozatban például az 1.1. Példában, a Mycielski-konstrukcióban a G_4 kapcsán, ezért nem tárgyalunk itt még több hasonló jellegű feladatot.

4.10. Feladat: Rajzoljuk le az összes legfeljebb 4 pontú egyszerű gráfot! És számoljuk meg, hogy mennyi van!

A 4.10. Feladat egy kis összefoglaló, ugyanis össze kell gyűjteni az összes legfeljebb 4 pontú egyszerű gráfot. Ezzel egy kis rálátást kapnak, illetve ez alapján már folytatni tudják több pontú gráfokra is a keresést.

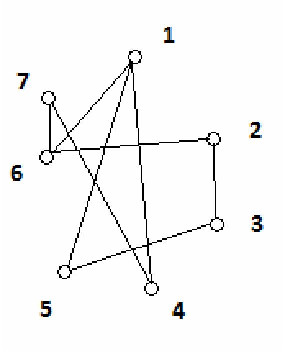
4.11. Feladat: Rajzoljuk le az összes legfeljebb 5 csúcsú fát!

A 4.11. Feladat is összefoglaló, csak ebben az esetben fákról van szó. Ez is arra jó, hogy a különböző megoldások keresése közben megnézzük, mely gráfok izomorfak egymással, melyek nem. Itt is folytathatjuk több pontú fákra a keresést, amelyet megkönnyít, ha már 5 pontig megtaláltuk a keresendő fákat.

4. Blokk: a síkbarajzolható gráfokról

Az alábbi öt feladat a síkbarajzolható gráfokkal kapcsolatos. A 2.1., 2.4., Definíció, a 2.7. Tétel (Jordan tétel) elengedhetetlenül szükséges a feladatok megértéséhez és megoldásához.

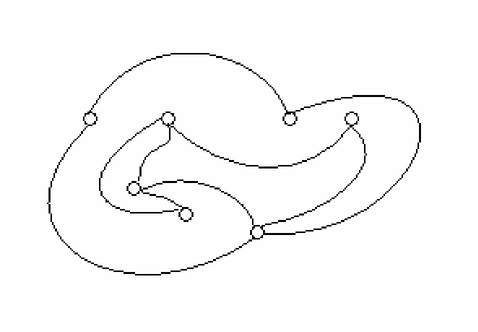
4.12. Feladat: Rajzolható-e az alábbi gráffal izomorf síkbeli gráf? Más szóval: síkbarajzolható-e az alábbi gráf?



4.1. ábra: a 4.12. Feladathoz

A 4.12. Feladatban izomorfia is előkerült, amire már példát (1.1. Példa) és feladatot is láttunk. Ez nagyban megkönnyítheti a megoldást. Könnyítés a feladatban, hogy a csúcsok már eleve meg vannak számozva, ami sugallja, hogyan is kell elindulni, mit is kell csinálni.

4.13. Feladat: Lerajzolható-e a 4.2. ábrán szereplő gráf a síkba úgy, hogy csak egyenes élek szerepeljenek benne? Amennyiben lehetséges, adjunk rá példát!



4.2. ábra: a 4.13. Feladathoz a síkbarajzolható gráf

A 4.13. Faladatban a Fáry-Wagner-tételt alkalmazzuk. Más, akár itt szereplő feladatoknál is meg lehet nézni, hogy egyenes élekkel lerajzolható-e az aktuális gráf és alkalmazható-e a Fáry-Wagner-tétel. Mivel több esetben, más feladatnál is lehet használni ezt a tételt, ezért gondoltam, hogy külön feladatba is beteszem. Ezzel adva esetleg ötletet, hogy más feladatokat is továbbgondoljunk, továbbvigyünk.

4.14. Feladat: Tekintsük a következő testek élvázát gráfnak: tetraéder, kocka, oktaéder, hatszög alapú gúla, hatszög alapú hasáb. Rajzoljunk a síkban a fenti gráfokkal izomorf, keresztező él nélküli gráfokat. Ezek után rajzoljuk meg a gráfokat egyenes szakaszokkal, amennyiben lehetséges.

A 4.14. Feladatba egy kis geometria is bele van csempészve. Ez azért is jó lehet például, mert így a gráfok témaköre előkerülhet más anyagrésznél az év folyamán. Ezt már több feladatnál is láthattuk, hogy más témakörnél előkerülhetnek a gráfok. Minél több ilyen feladatot találunk, ahol különböző témakörök kapcsolódnak egymáshoz, annál többet lehet a gráfok témakörével foglalkozni a tanórákon.

4.15. Feladat: Síkbarajzolhatók-e a következő gráfok? A K_5 –ből egy él elhagyásával keletkezett gráf , a $K_{3,3}$ –ból egy él elhagyásával keletkezett gráf és a Petersen gráf?

A 4.15. Feladat kapcsán a Kuratowski-gráfokról mindent meg lehet beszélni. A Petersen gráfról már volt szó a dolgozat során. A diákoknak érdemes talán a három ház – három kút problémával kezdeni, esetleg rávezetni őket és ezután megnézni a feladat kérdéseit.

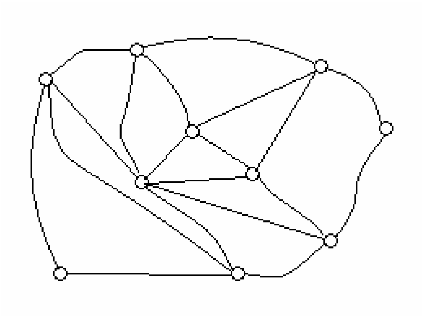
4.16. Feladat: Négy szomszéd mindegyike úgy épített utat a másik három házhoz, hogy azok nem keresztezik egymást. Vázoljunk egy lehetséges úthálózatot! Egy ötödik ember újabb házat épít. Tud-e úgy utakat építeni házától a másik négy házához, hogy az úthálózatban ne legyenek kereszteződések?

A 4.16. Feladatot be lehet vezetni úgy is, hogy először csak két, majd három szomszédot nézünk meg. Vagy járművekkel tesszük fel a feladatot és akkor a negyedik jármű ki tud lépni a síkból, ha hajókról tengeralattjáróról van szó, esetleg léghajóról. Ezzel csak annyit szeretnék érzékeltetni, hogy a feladat több irányban továbbgondolható. A Jordan-tétel (2.7. Tétel) alkalmazására mutat rá egyébként az eredeti feladat.

5. Blokk: a gráfok színezéséről

A gráfok színezésével kapcsolatos feladatok következnek. Az első két feladatban még a síkbarajzolható gráfok is szóba kerülnek (2.1. Definíció). Az összefüggőség, a fokszám definícióját sem szabad elfelejteni (1.10., 1.5. Definíció), hiszen a 4.15. Feladathoz szükséges. Illetve még a kromatikus szám és a komplementer definícióját is ismerni kell (3.1., 3.2. és 1.8. Definíció) az utolsó feladat megoldásához.

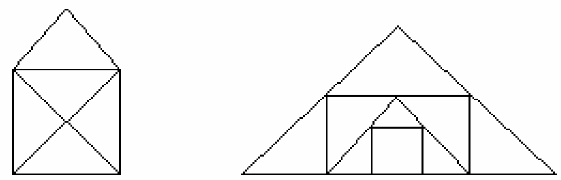
4.17. Feladat: Vegyük az alábbi tíz csúcsú síkbeli gráfot, melyre igaz, hogy minden csúcsának fokszáma páros (a 4.3. ábrán látható a gráf). Tekintsük ezt a gráfot egy sziget térképének. Színezzük ki (a körülötte lévő tengert is beleértve) a tartományokat két színnel úgy, hogy egy-egy él mentén a szomszédos tartományok színe különböző legyen.



4.3. ábra: a 10 csúcsú síkbeli gráf a 4.13. Feladathoz

A 4.17. Feladat a tartományok megszínezéséről szól. A színezés viszonylag élvezetes a diákok számára, amivel meg lehet szerettetni ezt a témakört. Ez a feladat is továbbfűzhető, és ha felkeltette a diákok érdeklődését, akkor ők is továbbgondolhatják a problémát. A parkettázás fogalomkörét is meg lehet említeni.

4.18. Feladat: Rajzoljuk meg a ceruzánk felemelése nélkül a síkon az alábbi két zárt görbét (4.4. ábra), mely többször is metszi önmagát. Színezzük ki az így keletkezett tartományokat két színnel!



4.4. ábra: a két zárt görbe

A 4.18. Feladatban szintén színezni kell. Ez mégis annyival több, hogy itt az eredeti ábrát is nekik kell megrajzolni. A második eset kicsit nehezebb, pont azért, hogy lássuk, lehet bonyolítani az ábrákat.

4.19. Feladat: Mennyi a 4 és 9 hosszú kör kromatikus száma?

A 4. 19. Feladat a kromatikus számokra egy bevezető példa. Ezt még viszonylag egyszerűen meg tudják oldani a diákok. Ha nem vesszük el a kedvüket rögtön a tanulóknak, akkor talán többet fognak foglalkozni a témával. A színezés közel áll hozzájuk és a könnyebb feladatokkal sikerélményt érhetnek el, ami által lelkesek lesznek.

4.20. Feladat: Mennyi a kromatikus száma egy *k-hosszú* körnek? És a *k-hosszú* kör komplementerének?

A 4.20. Feladat az előző feladat általánosítása és kiegészítése. Látszik, hogy egy-egy feladatból lehet általánosítani, következtetéseket levonni, illetve továbbvinni. Ugyanis itt már a komplementerrel is foglalkozunk.

5. Megoldások, segítségek, iránymutatások a feladatokhoz

A feladatok nagyon kis hányadánál szerepeltek megoldások. Én sem minden feladatnál írtam le a teljes megoldást. Sok helyen irányt adtam, merre érdemes elindulni, vagy segítséget írtam, hogy mire kell odafigyelni. A felhasznált irodalmak az [1], [2], [3], [7], [9] és [11] könyvek, illetve internetes oldal az irodalomjegyzékből.

1. Blokk: a fokszámokról

5.1. Megoldás:

Egy kézfogásban két ember vesz részt, ezért ketten számítják be a kézfogásaik számába. Tehát a fent leírt kézfogásszámok összegének kétszeresének kellene lennie a kézfogások számának, ezért ez nem lehet páratlan. A felsorolt számok összege viszont páratlan, tehát ilyen gráfot nem tudunk rajzolni.

5.2. Segítség:

Lesznek többszörös vagy párhuzamos élek is a gráfban.

5.3. Megoldás:

A fokszámok összege páros, ezzel nem lesz baj, viszont nem lehet egyszerű egy ilyen fokszámokkal rendelkező gráf. Az indoklás a következő lehet: a legnagyobb fokszámú csúcs éppen annyi élt ad, amennyi a többi csúcs fokszámának összege. Ez azt jelenti, hogy az összes, nem 0 fokszámú csúcsból az összes él a legnagyobb fokszámú csúcsba fog futni. Tehát a gráfban a 2 és 6 fokszámú, illetve 3 és 6 fokszámú csúcsok között párhuzamos vagy többszörös élek lesznek.

5.4. Megoldás:

A gráfban 9 db csúcs van, ami miatt a két 8 fokszámú csúcsot minden más csúccsal össze kell kötni. Így a maradék 7 db pont foka 2 lesz. Ezzel négy csúcs kész, ugyanis két 2 fokszámú és két 8 fokszámú pontunk volt. A 7 fokszámú csúcsok már két-két élt tartalmaznak. A 9 pontból maradt 5. Önmagába nem húzhatunk élt, mivel egyszerű gráfot szeretnénk kapni, így csak 4 másik csúcsba mehet él, ami pedig kevés, mert így maximum 6 lehet a foka, és nem 7.

5.5. Iránymutatás:

A feladatra kétféle megoldást is adunk azért, hogy látható legyen, hogy több témakörnél is előhozható a feladat.

1. Megoldás:

Teljes gráfról van szó. Élei száma: $\binom{n}{2}=\frac{n\left(n-1\right)}{2}$, ami jelen esetben 136. Az így felírt másodfokú egyenlet meg fog egyezni a második megoldásban megkapott másodfokú egyenlettel.

2. Megoldás:

Az átlók száma: $\frac{n(n-3)}{2}$, ha a csúcsok száma n. A csúcsok számának és átlók oldalainak összegére, továbbá, hogy tudjuk, hogy ez 136, felírhatunk egy másodfokú egyenletet. A két gyökből természetesen csak az egyik lesz jó, hiszen nem lehet negatív a csúcsok száma.

2. Blokk: az összefüggőségről

5.6. Segítség:

Érdemes szisztematikusan valamilyen rendszer szerint megkeresni ezeket a gráfokat, amik például az út vagy a csillag.

5.7. Iránymutatás:

Indirekt bizonyítsunk. Tegyük fel, hogy nincs kör, ekkor fáról vagy erdőről beszélünk, amiben viszont van legalább kettő első fokú pont, ami ellentmondásra vezet.

Nem igaz, hogy minden pont benne van egy körben. Ugyanis összeköthet két kört is egy másodfokú pont.

5.8. Megoldás:

1. Megoldás:

Tudjuk, hogy az n csúcsú fa élszáma $n - 1$, ennek felhasználásával meggondolható, hogy a gráf nem lesz összefüggő.

2. Megoldás:

Felhasználva az Euler-formulát: $n + t = e + 2$, ahol most nekünk $n = 6$, t legalább 1 és e legfeljebb 4. Beírva a formulába ellentmondást kapunk, ugyanis a baloldal legfeljebb 6 lehet, a jobb oldal pedig legalább 7. (Megoldhatjuk a feladatot a k komponensre alkalmazható Euler-formulával is.)

5.9. Segítség:

Nézzük a leghosszabb út valamely végpontját. Segít az 1.1. Tétel is. Egyébként, a feszítőfa két levelét elhagyhatjuk. (Levélen értjük a fa első fokú pontjait.)

3. Blokk: az izomorfiáról

5.10. Iránymutatás:

1 pontúból csak 1 eset lehetséges.

2 pontúból kettő eset van, amikor nincs él, és amikor van egy él.

3 pontúból már 4 esetet nézhetünk, amikor az élek száma: 0, 1, 2 és 3.

4 pontúnál már figyelni kell, mert több lehetőség is van a különböző élszámok esetében. Összesen 12 lehetőség van.

Tehát 1 + 2 + 4 + 12 = 19 esetet kell rajzolni.

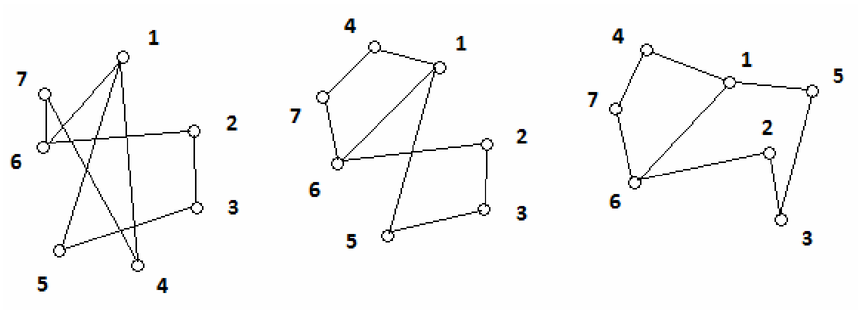
5.11. Segítség:

Azokban az esetekben, mikor csak 1, 2 és 3 csúcs van, akkor egyféle fa adható meg. Ha 4 pontunk van, akkor kétféle fa lehetséges, míg 5 csúcs esetén háromféle lehetőség van különböző fák lerajzolására. Nem nehéz feladat, csak az izomorfiára kell odafigyelni.

4. Blokk: a síkbarajzolható gráfokról

5.12. Megoldás:

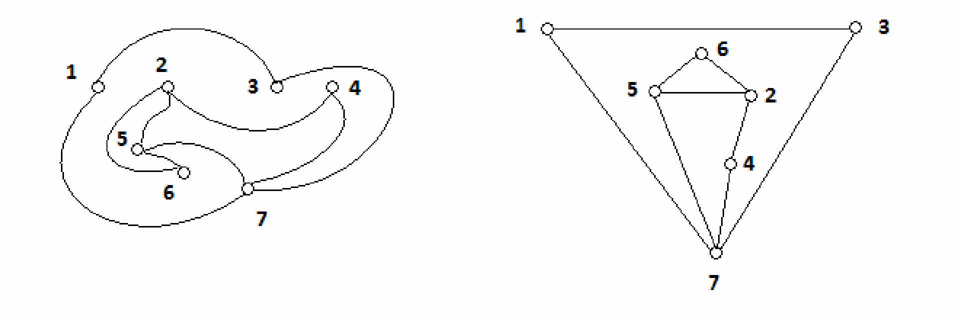
Természetesen máshogy is ki lehet „bogozni” az ábrát, ez csak egy megoldás.



5.1. ábra: A megoldás folyamata

5.13. Megoldás:

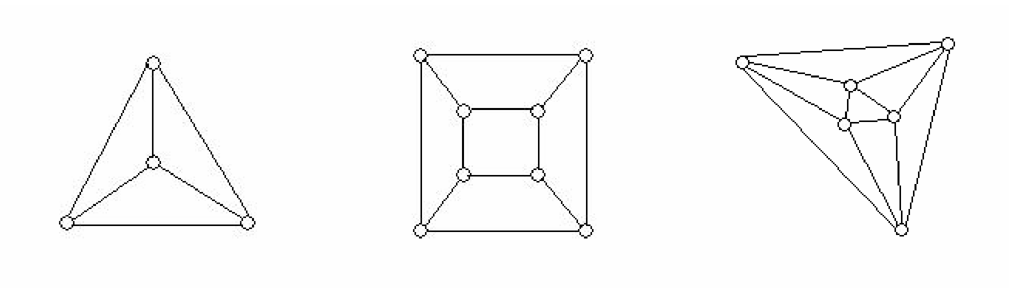
A megoldás folyamatát nem ábrázoltam, de a végeredmény szerepel az 5.2. ábrán. Ez egy lehetséges lerajzolás, de van más megoldás is. A csúcsokat beszámoztam, hogy le lehessen ellenőrizni a végeredményül kapott gráfot.



5.2. ábra: a gráf egyenes élekkel való síkbarajzolása

5.14. Segítség:

Nézzünk a testekre alulról vagy felülről és jó is lesz, mert így keresztező élek nélkül le tudjuk rajzolni. Az oktaédernél ne pont felülről vagy alulról nézünk a testre, hanem döntve, hogy a kritériumnak megfelelő gráfot kapjunk. Egyébként mindegyik gráf síkbarajzolható lesz. A feladat arra irányult, hogy kihegyezzük a síkbarajzolható és síkbarajzolt gráfok közötti különbséget. A tetraéder, kocka és oktaéder élváza keresztező élek nélkül és egyenes élekkel az 5.3. ábrán tekinthető meg.



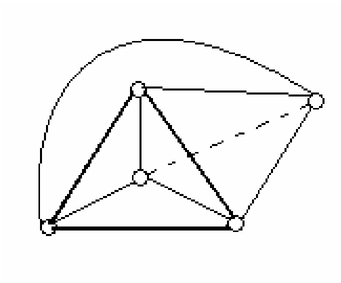
5.3. ábra: A tetraéder, kocka és oktaéder élváza

5.15. Megoldás:

Síkbarajzolhatók lesznek a Kuratowski-gráfokból egy él elhagyásával keletkezett gráfok. Nem nehéz megrajzolni őket. A Petersen-gráf viszont nem síkbarajzolható, ami már korábban, a 2.9. ábrán szerepelt.

5.16. Megoldás:

Négy szomszéd még tud keresztező utak nélkül építkezni. Az ötödik szomszéd viszont már nem tud úgy házat építeni, hogy ne keresztezze valamelyik másik szomszéd útját. A Jordan-tétel (2.7. Tétel) segítségével ez szépen látszik is. Egy lehetséges megoldást szemléltettem is az alábbi ábrán. A sötét élek mutatják a kört a Jordan-tételhez.

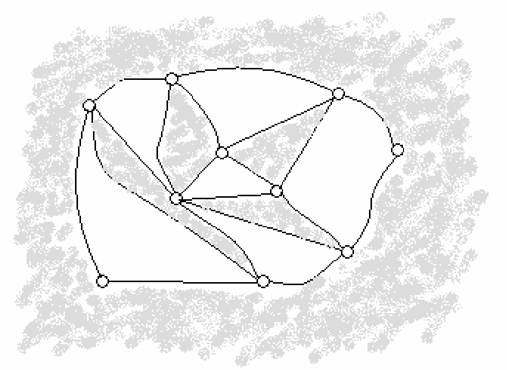


5.4. ábra: Egy lehetséges úthálózat

5. Blokk: a gráfok színezéséről

5.17. Megoldás:

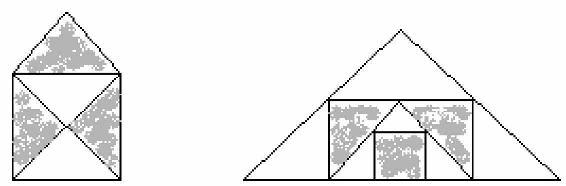
Egy lehetséges megoldás található az 5.5. ábrán.



5.5. ábra: Jó színezésre egy megoldás

5.18. Megoldás:

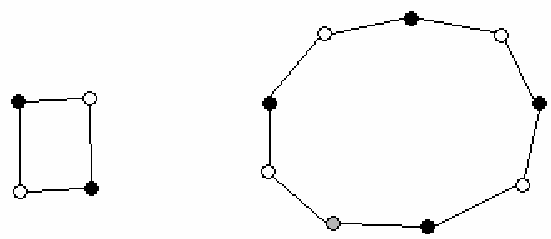
Az 5.6. ábrán egy-egy lehetséges megoldás látható a színezésre. Mind a két gráf megrajzolható a ceruza felemelése nélkül. Néhány próbálkozás után sikerülhet is. Fontos, hogy sok legyen a páros fokszámú pont, hogy fel tudjuk fűzni egymás után a pontokat és ha egy pontba egy élen befutottam, akkor ki is tudjak belőle indulni. Mind a két gráfban két páratlan fokú pont van, tehát az egyikből induljunk és a másikba fogunk megérkezni.



5.6. ábra: egy-egy lehetséges színezés

5.19. Megoldás:

Az 5.7. ábrán látható a 2 és 3 hosszú kör egy lehetséges megszínezése. Az előbbi esetben elég két szín, ha felváltva színezzük a gráf pontjait, viszont a második gráf esetén már nem elég a két szín, kell egy harmadik is.



5.7. ábra: a 2 és 9 hosszú kör

5.20. Segítség:

2 esetet kell vizsgálni, amikor *k* páros, és amikor *k* páratlan. Első esetben a megoldás 2, a másodikban 3.

A másik kérdésre a válasz, hogy ha *k* páros, akkor elég $\frac{k}{2}$ szín, ugyanis válasszunk ki egy pontot és nevezzük el *A* –nak . Az *A* nincs összekötve azzal a két ponttal, amik előbb szomszédjai voltak, legyenek *B* és *C*. Az egyik megkaphatja *A* színét, a másiknak viszont új szín kell, mert *B* és *C* szomszédok. Ez az okfejtés elmondható az összes pontról. Tehát a pontok párokba rendezhetőek, két-két pont lehet azonos színű. Párokból pedig $\frac{k}{2}$ darab van. Ha *k* páratlan, akkor $\frac{k+1}{2}$ színre lesz szükség. A gondolatmenet hasonló, mint a *k* páros eset.

Befejezés

Dolgozatommal szerettem volna elérni, hogy akár tanár, akár diák olvassa el, kedvet kapjon a síkbarajzolható gráfok témakörében jobban elmélyülni. Igyekeztem előbb az elméleti alapokat megerősíteni a definíciókkal, tételekkel és állításokkal, valamint a bizonyításokkal. Ahol lehetett, többféle bizonyítást is írtam. Tettem mindezt a teljesség igénye nélkül, hisz a téma rendkívül sokrétű és egy ilyen szakdolgozatban csak ízelítőt lehet adni belőle, illetve a dolgozat keretei is adottak. A témára vonatkozó legfontosabb irodalmat áttanulmányoztam és annak alapján igyekeztem megírni dolgozatomat.

Érdekes feladatokkal (melyek közül vannak könnyebbek és nehezebbek egyaránt) próbáltam felkelteni az érdeklődést és a megoldásokkal segíteni az önkontrollt.

Számomra a síkbarajzolható gráfok egy rendkívül érdekes témakör. Dolgozatommal remélhetőleg sikerül elérnem, hogy azok a gyakorló, illetve leendő tanárok, akik elolvassák, a matematika órákon esetleg bővebben foglalkozzanak ezzel a problémával.

Irodalomjegyzék

Könyvek

[1] Andrásfai Béla: *Ismerkedés a gráfelmélettel*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[2] *Egységes érettségi feladatgyűjtemény 1., 2.* Konsept-H Könyvkiadó, OM, 2005.

[3] Hajdu Sándor: *Matematika 11., 12.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2004.

[4] Hajnal Péter: *Gráfelmélet*. Polygon jegyzettár, Szeged, 1997.

[5] Ian Stewart: *2050 matematikája*. (lásd az internetes oldalak [12])

[6] Katona Gyula, Recski András, Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*. Typotex kiadó, Budapest, 2006.

[7] Kosztolányi, Kovács és társaik: *Sokszínű matematika tankönyv 11.* Mozaik Kiadó, Szeged, 2005.

[8] Lovász László: *Kombinatorikai problémák és feladatok*. Typotex kiadó, Budapest, 1999.

[9] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: *Diszkrét matematika*. Typotex kiadó, Budapest, 2006.

Internetes oldalak

[10] http://books.google.hu

[11] http://www.tankonyvtar.hu

[12] http://webcache.googleusercontent.com

[13] http://hu.wikipedia.org/wiki