Sportos szélsőérték-feladatok a fizikában

Szakdolgozat

Készítette: Kis Róbert

Témavezető: Gémes Margit

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematika Alapszak Tanári Szakirány

2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Témaválasztásomat a mindennapi életben előforduló matematikai problémakörök, sportok iránti érdeklődésem, fizikás mellék-szakirányom, valamint az egyetemi évek folyamán legjobban megkedvelt analízis tárgya inspirálta. Utóbbi eszközei a fizika számos területén, így többek között a mechanikában is nagy segítséget nyújtanak a különféle mozgások leírásában, szemléltetésében. Szakdolgozatom célja, hogy a fentebb említett két természettudományban használt összefüggések segítségével racionalizáljam a sportpályákról kiragadott, némileg idealizált szituációkat, melyeket akár egy középiskolai emelt szintű szakkör alkalmával be lehet mutatni az iránta érdeklődőknek.

Tapasztalataim alapján – s ezt a különböző felmérések is alátámasztják – kijelenthetem, hogy a középiskolai diákok tudása nem elég gyakorlatias. Emiatt elsődleges szempontként tekintettem arra, hogy olyan feladatokat keressek, illetve találjak ki a problémák szemléltetésére, amelyek közel állnak a valós életben tapasztaltakhoz, ugyanakkor jól modellezhetőek a matematika nyelvén. Ezen perspektívát szem előtt tartva szeretném elősegíteni azt a folyamatot, hogy a matematikát az iránta kevésbé fogékonyak számára is érdekessé tegyem, egyúttal megmutatni számukra azt, hogy ennek a tudományágnak a mindennapi szituációkban is hasznát vehetjük.

Szakdolgozatomat igyekeztem következetesen felépíteni, az egyes témakörökben található feladatokat a nehézségi szintjük alapján sorrendbe állítani. Minden fejezet elején olvasható egy rövid bevezető, melyben ismertetem a feladatok közös vonásait, valamint már itt kitérek az őket idealizáló körülményekre – pontszerűség; közegellenállás elhanyagolása –. Ezekre a feladatok szövegeiben már nem térek ki újra, de egy verseny vagy egy középiskolai szakkör alkalmával természetesen ezeket újra fel kell tüntetni. Az egyes témakörben szereplő példák között olyan módszertani kapcsolatok fedezhetőek fel, mint egy speciális esetről történő általánosítás – a gokartpályák ördöge → „n" körös autóverseny –, vagy egy korábbi feladat során kiszámolt eredmény értelmezése, fordított alkalmazása – távolugrás → kapusgól –. Gimnáziumi élményeimben központi szerepet játszott a szemléltetés, mint eszköz, ezért a mechanikus számolásokkal bővelkedő megoldásaimat a Paint-tel, illetve a Maple 12 programmal készített ábráimmal fűszereztem meg.

Köszönet illeti a szakdolgozatomban kitűnő segítséget nyújtó témavezetőmet, Gémes Margitot, aki a szakmai részen kívül a technikai megvalósításhoz is ötleteket adott. A nehezebb technikai részek megvalósulásában nyújtott segítségért köszönet legjobb barátomnak.

2. Elméleti ráhangolás

A szélsőérték-számítás a matematika tudományának egy olyan ágazata, melyet a különböző szakterületi – fogyasztási, termelési, pénzügyi, stb. – problémák megoldásakor hívnak segítségül a szakemberek. A számítások elvégzésekor több, változó paramétert is figyelembe kell venniük, így ilyenkor sokszor a legmechanikusabb algoritmushoz, a függvényvizsgálathoz és a differenciálás műveletéhez nyúlnak. A matematika különlegessége azonban abban rejlik, hogy egy konkrét problémára olykor képes egyszerűbb, rövidebb eszmefuttatásokat igénylő választ szolgáltatni. A most következő „sportos” alkalmazásoknál elengedhetetlen a témakörhöz kapcsolódó definíciók, tételek pontos ismerete. Foglaljuk össze őket röviden!

A szélsőértékek keresésénél számunkra fontosak a különböző közepek között fennálló egyenlőtlenségek. Először lássuk a közepeket külön-külön, majd pedig mondjuk ki a kapcsolatukra vonatkozó tételt! A közép elnevezést minden esetben az indokolja, hogy az így értelmezett számok mindegyike az a_i számok legkisebbike és legnagyobbika közé esik. Számtani vagy aritmetikai középértéken bármely $a_1, a_2,.., a_n$ szám átlagát, azaz a számok összegének $n \in \mathbb{Z}^+$-ed részét értjük. A számtani közepet általában A_n-nel jelöljük:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Mértani vagy geometriai középértéken bármely nemnegatív $a_1, a_2,.., a_n$ szám szorzatának $n \in \mathbb{Z}^+$-edik gyökét értjük. A mértani közepet általában G_n-nel jelöljük:

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Harmonikus középértékén bármely $n \in \mathbb{Z}^+$ darab pozitív $a_1, a_2,.., a_n$ szám reciprokából számított számtani közép reciprokát értjük. A harmonikus közepet általában H_n-nel jelöljük:

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Négyzetes középértékén tetszőleges $n\epsilon\mathbb{Z}^+$ darab a_1, a_2,.., a_n számok négyzeteinek számtani közepéből vont négyzetgyökvonást értjük. A négyzetes közepet általában N_n-nel jelöljük:

$$N_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

Bármely $n\epsilon\mathbb{Z}^+$ darab pozitív a_1, a_2,.., a_n szám esetén a következő teljesül:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq N_n$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn a fenti képletben, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

A közepek mellett a függvényvizsgálat jelentheti számunkra a legnagyobb kapaszkodót a szélsőértékek keresésénél. Először definiáljuk azt, hogy mit is jelent egy A halmazon értelmezett egyváltozós f függvény esetén a szélsőérték! Ha az A halmazhoz tartozó $f(A)$ értékkészletnek van legnagyobb/legkisebb eleme, akkor azt az f függvény A–n felvett maximumának/minimumának nevezzük és max$f(x)$-szel/min$f(x)$-szel jelöljük. Amennyiben $a\in A$ és $f(a)$ = max$f(a)$ vagy $f(a)$ = min$f(a)$, akkor azt mondjuk, hogy a az f függvény A-hoz tartozó abszolút maximumhelye/minimumhelye. Ezeket közösen abszolút szélsőértékhelyeknek nevezzük. Egy abszolút szélsőértékhely nem szükségképpen lokális, mert utóbbi esetében megköveteljük, hogy a függvénynek legyen az a egy környezetében értelmezve. Ugyanakkor egy lokális szélsőértékhely sem szükségképpen abszolút, hiszen f függvény a egy környezetén kívül még felvehet $f(a)$-nál nagyobb értéket.

Szélsőértékek vizsgálatakor szerencsés esetben egy közepekkel való becslés vagy teljes négyzetté alakítás megkönnyítheti a feladatunkat, máskülönben a differenciálás műveletére kell hagyatkoznunk. De honnan is eredeztethető a deriválás és a szélsőértékek közötti szoros kapcsolat? [1]Történelmi megközelítésben már a XVII. századi európai matematikusok tűzték ki célul maguk elé a mozgások és általában a változások jelenségeinek matematikai leírását. Ezt a leírást többek között olyan, a gyakorlati élet és a fizika által szolgáltatott kérdéskörök megválaszolása tette szükségessé, mint például: Melyik gömbbe írható maximális térfogatú henger? Két előre megadott pont között melyik az időben leggyorsabb út, feltéve hogy a sebesség az idő függvényében változik? Ezen probléma kezelésére ők dolgozták ki az úgynevezett kalkulus elméletét – más kifejezéssel élve a differenciálszámítást –, aminek

---

[1] **Laczkovich Miklós, T. Sós Vera:** Analízis I. (Nemzeti Tankönyvkiadó – Budapest, 2006) 10-12. oldala nyomán

három fő összetevője volt: a Descartes-féle koordinátarendszer, a változó mennyiség fogalma, és ezen mennyiség deriváltja.

Az első összetevőt a kúpszeletek leírások már Apollóniosz is használta i.e. III. században, azonban Descartes mutatott rá először arra, hogy a koordináta rendszer segítségével geometriai problémák algebraiakká fogalmazhatóak át. A második összetevő esetében a XVII. századi matematikusok elképzelése szerint a fizikai jelenségekben szereplő mennyiségek az időtől folyamatosan függő változók, amelyeknek értékei pillanatról pillanatra változnak. Ezt az elképzelést a geometriai problémákra is kivetítették: minden görbét egy folytonosan mozgó pont pályájaként képzeltek el, így a pont koordinátái szintén az időtől változó mennyiségekké váltak. A harmadik, s egyben legfontosabb alkotónak a változó mennyiségek differenciálja számított. Ennek az az intuitív kép a lényege, amely szerint minden változás végtelenül kicsiny változások összefüggéséből keletkezik. Így maga az idő is végtelenül kicsiny időintervallumokból tevődik össze. Az x változó mennyiség differenciálja az a végtelenül kicsiny mennyiség, amennyivel x megváltozik egy végtelenül kicsiny időintervallum elteltével. Az x differenciálját dx-szel jelöljük. Ekkor tehát x értéke egy végtelenül kicsiny időintervallum eltelte után $x + dx$-re változik.

A szélsőértékek keresésének az volt a legfőbb kulcsa, hogy ha az x-szel jelölt változó mennyiség egy időpillanatban eléri a legnagyobb/legkisebb értékét, akkor ott a $dx = 0$. Egy elhajított test esetében azt az „egy pillanatot" jelenti, amikor eléri pályájának legmagasabb pontját, hiszen ott „egy pillanatig" vízszintesen repül. Ezt használja ki a matematika is, azonban hangsúlyozni kell azt, hogy a most következő tételek mindegyike szükséges, de nem elégséges feltételeket szolgáltatnak a keresésben.

I. Tegyük fel, hogy f differenciálható a pontban. Ha f-nek lokális szélsőértékhelye van a-ban, akkor $f'(a) = 0$. Az állítás meg nem fordíthatósága végett itt jegyezzük meg a következő példát: x^3 0-beli deriváltja ugyan nulla, ám a 0-ban a függvénynek nem szélsőértékhelye, hanem inflexiós pontja van.

II. Legyen f differenciálható az a pont egy környezetében. Ha $f'(a) = 0$ és f' szigorúan lokálisan növekedő (lokálisan csökkenő) az a helyen, akkor az a pont f-nek szigorú lokális minimumhelye. A szigorú lokális maximumhely analóg módon adódik.

III. Legyen *f* kétszer differenciálható *a* pontban. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) \geq 0$, akkor *f*-nek szigorú lokális minimuma van *a* pontban. A szigorú lokális maximum analóg módon adódik.

Természetesen a többváltozós függvények esetében is van értelme szélsőértékeket keresni. A megtalálásukhoz vezető úton a parciális deriváltak segítenek bennünket, azonban feladatainkban – egyetlen kivételt leszámítva – kizárólag egyváltozós függvények jöhetnek szóba. Az elméleti bevezetést követően a továbbiakban már csak egy jelmondat vezéreljen kedves Olvasóm: Mozdulj velünk!

2.1. Ügyességi verseny a biliárdasztalon

Kezdésként egy olyan, az utóbbi időben a fiatalok körében közkedveltté vált sportágat szeretnénk tudományossá varázsolni, amelyben a precizitás elengedhetetlen erénynek számít. A *254* cm hosszú, *157* cm széles téglalap alakú asztalon űzött pool biliárd legfőbb célja az, hogy a rendelkezésünkre álló biliárddákó használatával kizárólag a fehér golyó meglökésével üssük le az úgynevezett teli vagy csíkos golyókat az asztal oldalzsákjaiba. Jelen esetben egy olyan speciális biliárdasztalról lesz szó, amelynek kizárólag a csúcsaiban találhatóak ilyen zsákok. A golyók mozgása során fellépő közegellenállási erő elhanyagolható nagysága, valamint a dákó-golyó, golyó-fal, golyó-golyó ütközések közel tökéletesen rugalmas volta – a testek mozgási energiáinak összege állandó – miatt ez az egy síkban lejátszódó mozgás jól modellezhető matematikailag. Ebben a leírásban a legfontosabb egyszerűsítésnek a golyók pontszerűsége számít, mivel a különböző „lökési technikáknak” köszönhetően eltérő mozgásokat – például csavarás – hozhatunk létre. Miután a golyók a fallal való ütközés során ugyanúgy „közlekednek”, mint ahogyan a fény egy új közeg határához érve visszaverődik – a beesési és visszaverődési szög megegyezik –, ezért a feladatmegoldásaink során a geometriában tanult tengelyes tükrözéseket, mint szög- és távolságtartó transzformációkat hívtuk segítségül.

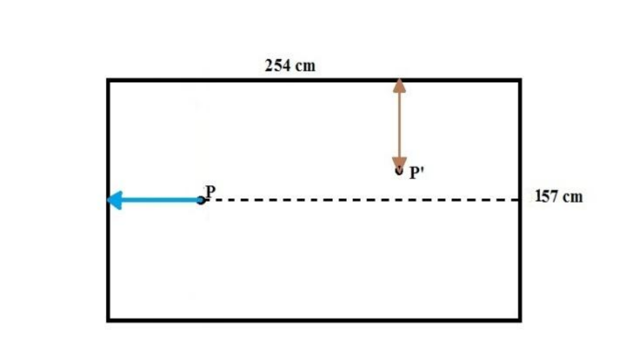
2.1.1. Minimális út egy golyó esetén

Helyezzük el a fehér golyót a téglalap alakú biliárdasztal egy általunk tetszőlegesen kiválasztott pontjába! A célunk az, hogy a dákóval való lökést követően a golyó visszakerüljön a kiindulási helyzetébe. Mi lesz az a legrövidebb útja a golyónak, miközben

a) egy falat,
b) két falat,
c) három falat,
d) mind a négy falat kell érintenünk vele?

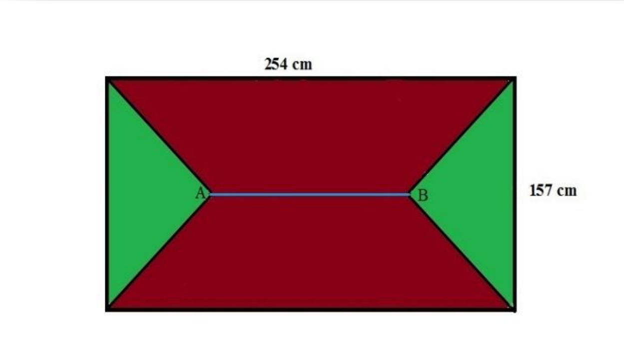
M e g o l d á s :

a) Egyetlen fal érintésekor a beesési és visszaverődési szögek megegyezéséből az adódik, hogy a tetszőlegesen választott *P* pontból a fehér golyót merőlegesen kell a rálöknünk a rövidebbik vagy hosszabbik oldal egyikére az 1. ábrán látható módon.



1 . á b r a

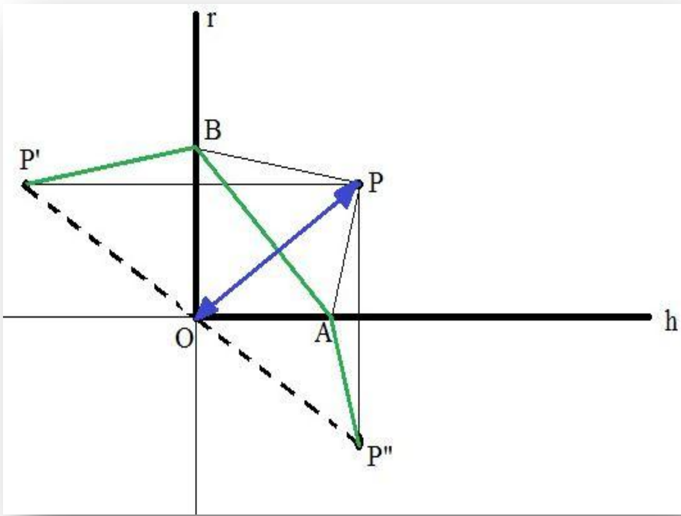
Most már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a fehér golyót elhelyezésétől függően melyik falra kell merőlegesen rálöknünk. A 2. ábrán már ennek a kérdésnek a diszkutálása látható. Zöld színnel jelöltük azokat a területeket, amikor a rövidebbik oldalra lökjük a golyót, bordó színnel pedig azokat, amikor a hosszabbikra. A fekete színnel jelölt határvonalakon a játékos döntésén múlik az, hogy a rövidebbik és hosszabbik oldal közül melyikre esik a választása. A golyó tetszőleges elhelyezése miatt csak egy esetben tudunk számszerű adattal szolgálni. Ha a golyót az ábrán kék



2 . á b r a

színnel látható *AB* szakaszon – a rövidebbik oldal felezőmerőlegesének egy része – helyezzük el, akkor a legrövidebb út $\frac{157\ \mathrm{cm}}{2} \cdot 2 = 157$ centiméternek adódik.

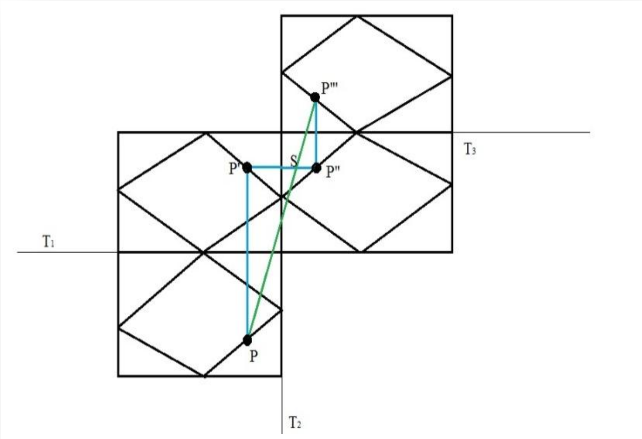
b) Két fal érintésekor a legrövidebb útra vonatkozó kérdést átfogalmazhatjuk a következő példára: Adott egy α – esetünkben 90˚-os – szögtartomány, belsejében egy *P* ponttal. Keressük meg azt a legkisebb kerületű háromszöget, melynek egyik csúcsa *P*, másik két csúcsa a szög két szárán tartózkodik. Először is tekintsük a 3. számú ábrán látható *PBA* háromszöget. Ilyen háromszögből végtelen sokat tudnánk rajzolni, ezért is keressük a minimális kerületűt közöttük. Tükrözzük a *P* pontot mindkét szögszárra. Ekkor a *PBA* háromszög kerülete meg fog egyezni a *P”ABP’* töröttvonal hosszával. Az így kapott töröttvonal hossza nem kisebb a *P”P’* szakasz hosszánál, ezért a célunk a töröttvonal hosszának minimalizálása.



3. ábra

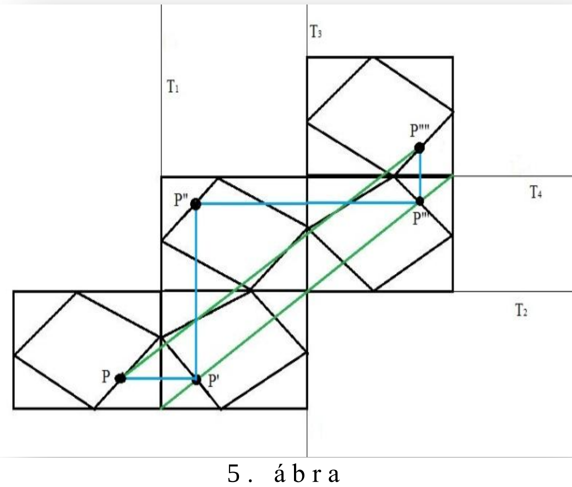
α < 90˚ esetén *P”P’* szakasz *A* és *B* pontokban metszi el a két szögszárat, s a tükrözések távolságtartó tulajdonsága miatt ekkor *PAB* háromszög lesz a legkisebb kerületű. α = 90˚ esetén a *P”P’* szakasz a *r, h* szögszárakat a közös csúcsban metszi el, mivel egy téglalap átlói egy pontban – a 3. ábrán az *O* pontban – metszik egymást. Ilyenkor egy úgynevezett elfajuló esetet kapunk eredményül, melynek értelmében a golyó útja *POP* lenne. Azonban a biliárdozás nyelvén ez annyit jelentene, hogy a fehér golyót lelökjük az hozzá legközelebb található oldalsarokba. Mivel onnan már nincs visszaút a labda számára, így ebben az esetben számszerűen nem tudunk legrövidebb úttal szolgálni.

c) Három oldal érintésekor nyissuk ki a szóban forgó utat T_1, T_2 és T_3 tengelyes tükrözések segítségével a 4. ábrán látható módon! A P, P', P'' és P''' pontokat összekötő töröttvonal hosszát szeretnénk minimalizálni. Ez a háromszög-egyenlőtlenségből fakadóan – $PP'+P'S \geq PS$, illetve $SP''+P''P''' \geq SP'''$ – pontosan akkor érhető el, ha a P és P''' pontokat összekötő szakaszt vesszük. A tengelyes tükrözések távolságtartó tulajdonságából az következik, hogy az eredményül kapott zöld szakasz P elhelyezésétől függetlenül mind közül a legrövidebb lesz. Mivel ezúttal 3 tengelyt kell választanunk, ezért felmerülhet az a kérdés, hogy a 2 rövidebb és 1 hosszabb, vagy a 2 hosszabb és 1 rövidebb oldal konfigurációt válasszuk. Azaz a rövidebb vagy a hosszabb oldalra „kifizetődőbb" tükrözni? Ezzel az átfogalmazással az a) részben ismertetett, P elhelyezkedésére vonatkozó diszkusszió – 2. ábra – ad választ.



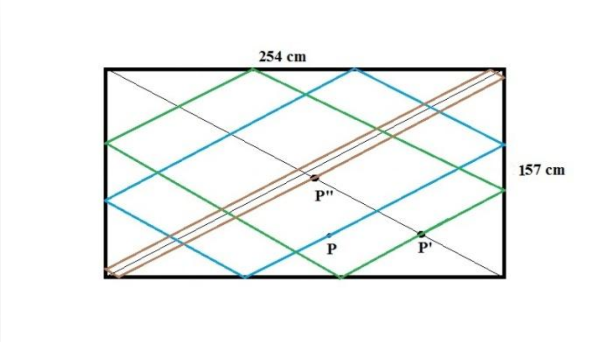
4. ábra

d) Négy fal érintésekor is használhatjuk a c) pontban „bevetett" módszert: nyissuk ki a szóban forgó utat! Tükrözzük a biliárdasztalt sorrendben T_1, T_2, T_3 és végül T_4 tengelyekre! Célunk továbbra is az, hogy a tükrözések által keletkezett, a P, P', P'', P''', P'''' pontokat összekötő töröttvonal hosszát minimalizáljuk. Ez a háromszög-egyenlőtlenségekből fakadóan pontosan akkor valósítható meg, ha a P és P'''' pontokat összekötő egyenest – az 5. ábrán zöld színnel látható – vesszük. Jelen esetben a hossz nagyságáról is számszerű adatokkal tudunk szolgálni: P elhelyezésétől független a tükrözések és az eltolások távolságtartása miatt a



5. ábra

minimális hossz a biliárdasztal átlóhosszúságának kétszeresével egyezik meg. A Pitagorasz-tétel segítségével ez a hossz:



6. ábra

$L = 2 \cdot \sqrt{1{,}57m^2 + 2{,}54m^2} = 5{,}972$ méternek adódik.

Itt jegyezzük meg, hogy a minimális utat az „eredeti" biliárdasztalon is rekonstruálhatjuk: az általunk tetszőlegesen kiválasztott *P* pontból indulva a 6. ábrán látható módon húzzuk be a téglalap megfelelő átlóival párhuzamos egyeneseket!

1. Nehezebb, kitűzhető feladat: Minimális út két golyó esetén

Ezúttal két darab, egy piros és egy fehér színű golyót helyezünk el a biliárdasztalon: a pirosat egy általunk tetszőlegesen kiválasztott pontba, a fehéret az asztal átlóinak metszéspontjába. Jelenlegi célunk az, hogy a fehér golyó meglökését követően a piros közvetlenül az általunk előre „bemondott" sarokban kössön ki. Számítsd ki, hogy mi lesz a fehér golyónak a legrövidebb útja a sarokba találásig, ha közben a pirossal való ütközésig három falat kell megérintenie?

2.2. Gyorsulási verseny

Ebben az epizódban a másik nagy precizitást igénylő műfajról, a technikai sportágakról lesz szó. Minden egyes, versenyzők által megtett kör újabb és újabb telemetriai adatokkal szolgál a mérnököknek az autók beállításánál – szárnyak helyzete, guminyomás, fékkopás –. Ezek segítségével tudják elérni azt, hogy a kocsi nagy sebességek esetén is jól tapadjon. A feladatainkban egy kikötést mindenképpen meg kell tennünk: a versenyautót és a benne ülő pilótát, mint rendszert a mozgása során kezeljük egyetlen tömegpontként! A versenyzőknek a minél jobb helyezés elérése érdekében azonban sokszor a „határon kell autózniuk", ami esetenként a tapadás megszűnésével és csúszási súrlódás jelenségének megjelenésével jár. Így az előző fejezetben elhanyagolt súrlódást most meg kell őriznünk, ugyanakkor a légellenállással továbbra sem szeretnénk számolni. Eme háttér mellett eljött az idő, hogy bepillantsunk a sebesség megszállottjainak világába.

2.2.1. A gokartpályák ördöge

7. ábra

Egy hatkörös – egy kör 3 km hosszú – gokartverseny győztes pilótája az egyes köröket rendre 18, 20, 24, 15, 20, 26 $\frac{km}{h}$ *-s állandó sebességekkel teljesítette. Számold ki, hogy mekkora volt az átlagsebessége a verseny során! Általánosítsd a kapott eredményt egy n körből álló futam esetére!*

Megoldás:

Amennyiben nem jut eszünkbe egyetlen összefüggés sem, akkor sokszor a precízen megtanult definíció jelenti a legfőbb kapaszkodót a példa megoldásában. Jelen esetben ez a „módszer” a sebességátlag és átlagsebesség fogalmakat összekeverni képes középiskolások miatt hatványozottan is fontosnak bizonyul. Előbb ismertessük őket külön-külön!

Átlagsebességen az adott objektum által megtett teljes út hosszának és az ehhez szükséges időnek a hányadosát értjük. Véleményem szerint ettől szemléletesebb a következő megfogalmazás: az átlagsebesség annak az egyenletesen mozgó testnek a sebessége lenne, ami ugyanolyan hosszú utat ugyanannyi idő alatt tenne meg, mint a változó sebességű mozgást végző test. Egy v_1, v_2,..., v_n állandó sebességekkel teljesített n körös futam esetében a következő képlettel írhatjuk fel az átlagsebességet:

$$\langle v \rangle = \frac{s_{\text{összes}}}{t_{\text{összes}}} = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{t_1+t_2+\cdots+t_n} = \frac{ns}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}+\cdots+\frac{s}{v_n}} = \frac{n}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\cdots+\frac{1}{v_n}} \qquad (1)$$

Most alkalmazzuk (1)-et a példában szereplő adatokra!

$$\langle v \rangle = \frac{6}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\cdots+\frac{1}{v_6}} = \frac{6}{\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{24}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{26}} = \frac{6\cdot 936}{283} = 19{,}84\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Itt jegyezném meg azt, hogy a pálya hosszának ismeretében ki lehetne számolni az egyes köridőket is, azonban a harmonikus középpel való számolás technikailag akkor is kivitelezhető, ha ismeretlen számunkra a pálya hossza.

A korábban már pedzegetett sebességátlag fogalmán a sebességek számtani közepét értjük, amit előbb *n* körre felírva, majd a gokart-versenyzőre alkalmazva a következőt jelenti:

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n}$$

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\sum_{i=1}^{6} v_i}{6} = \frac{18+20+24+15+20+26}{6} = 20{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

A két fogalom közti különbséget immáron számszerűsítve is érzékeltettük – vigyázat: $<v>$ és $v_{\acute{a}tlag}$ közötti különbség nem feltétlen lesz állandó érték, nagyban függ a feladatban szereplő sebességek nagyságától! –, míg a kettőjük között fennálló kapcsolatot a harmonikus és számtani közép közti egyenlőtlenség jelenti.

$$\frac{n}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\dots+\frac{1}{v_n}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n}$$

Azaz a gyakran összekevert átlagsebesség és sebességátlag akkor és csak akkor fog megegyezni, ha a pilóta a futam összes körét ugyanakkor sebességgel teljesítette: $v_1 = v_2 = \dots = v_n$

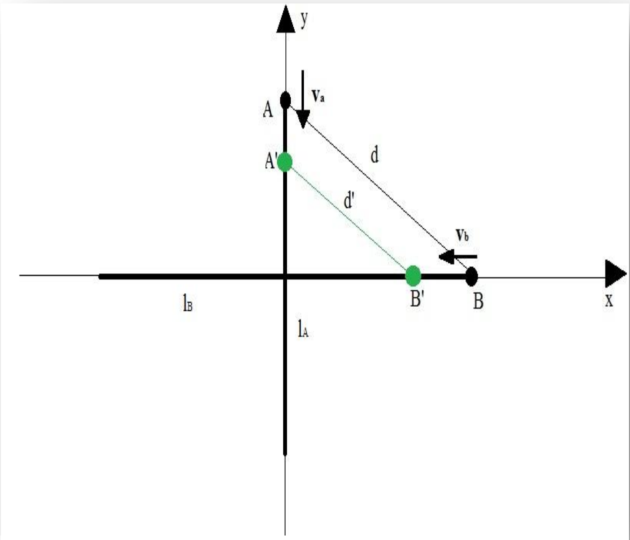
2.2.2. Egyszer fenn, egyszer lenn

8. ábra

A Suzuka Circuit azon érdekes vonalvezetésű asztfaltcsíkok közé tartozik a világon, amelynek egy rövid szakaszán néhány pillanat erejéig egyszerre láthatunk lenn az alagútban és fenn a „felüljáróban” közlekedő versenyzőket. Ennek mintájára vegyünk egy l_A és l_B hosszúságú, egymásra merőleges egyeneseket, melyek felezik is egymást. A „kereszteződés” felé egyszerre indul el A és B versenyző, akik v_A és v_B állandó sebességekkel haladnak mozgásuk során. A starttól, $t_0 = 0$ időpillanattól számítva mennyi idő múlva lesz a két pilóta a legkisebb távolságra egymástól, és mennyi ez a távolság?

M e g o l d á s :

Az átláthatóbb megoldás érdekében az egymásra merőleges egyenesek „kereszteződési pontját” – a 9. ábrán látható módon – vegyük a derékszögű koordinátarendszer origójának. Ez azért lesz hasznos számunkra, mert az *A* testnek csak az *y* koordinátája, *B*-nek csak az *x* koordinátája fog megváltozni a mozgásuk során. Az egyenes vonalú egyenletes mozgást leíró $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ összefüggést mindkét test esetében rendezzük át a megtett utakra!



9 . á b r a

$$\Delta s_A = v_A \Delta t_A \qquad \Delta s_B = v_B \Delta t_B$$

Koordinátageometria ismereteink segítségével írjuk fel a két test kiindulási koordinátáit, valamint határozzuk meg a kezdeti távolságukat! A $t_0 = 0$ időpillanatban *A* pilóta a $(0; \frac{l_A}{2})$, *B* pilóta a $(\frac{l_B}{2}; 0)$ pontban helyezkednek el, távolságuk:

$$d(t_0 = 0) = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(\frac{l_B}{2} - 0)^2 + (0 - \frac{l_A}{2})^2} \qquad (1)$$

$\Delta t \neq 0$ időpillanattal $-\Delta t - t_0 =: t-$ később az *A* pilótát a $(0; \frac{l_A}{2} - v_A t)$, míg a *B* pilótát a $(\frac{l_B}{2} - v_B t;\ 0)$ koordinátákkal jellemzett pontokban találjuk, melyek egymástól való távolsága:

$$d(t) = |\mathbf{A'B'}| = \sqrt{(\frac{l_B}{2} - v_B t - 0)^2 + (0 - \frac{l_A}{2} + v_A t)^2} \qquad (2)$$

Mivel a *d(t)* függvény értéke a gyökjel alatt szereplő időtől, egyenesek hosszúságától és versenyautók sebességétől függetlenül nemnegatív, így elegendő a nemnegatív számokon a szigorú monotonitás tulajdonságával rendelkező $d^2(t)$ függvény minimumát vizsgálnunk.

$$d^2(t) = (\frac{l_B}{2} - v_B t)^2 + (v_A t - \frac{l_A}{2})^2 = (v_B^2 + v_A^2)t^2 - (v_B l_B + v_A l_A)t + \frac{l_B^2}{4} + \frac{l_A^2}{4}$$

Ezzel egy *t*-ben másodfokú kifejezést kaptunk, melynek legrövidebb útra vonatkozó megoldását a differenciálás segítségével határozhatjuk meg:

$$[d^2(t)]' = 2\left(\frac{l_B^2}{l_A^2} + 1\right)v_A^2 t - \left(l_A + \frac{l_B^2}{l_A}\right)v_A = 0$$

$$0 = v_A\left[2\left(\frac{l_B^2}{l_A^2} + 1\right) v_A t - \left(l_A + \frac{l_B^2}{l_A}\right)\right] = v_A\left(l_B^2 + l_A^2\right)\left(\frac{2 \cdot v_A \cdot t}{l_A^2} - \frac{1}{l_A}\right) \Rightarrow t = \frac{l_A}{2v_A}$$

$$d^2\left(t = \frac{l_A}{2 \cdot v_A}\right) = \left(v_B^2 + v_A^2\right)\left(\frac{l_A}{2 \cdot v_A}\right)^2 - \left(v_B l_B + v_A l_A\right)\frac{l_A}{2\, v_A} + \frac{l_B^2}{4} + \frac{l_A^2}{4} = \left(v_B \frac{l_A}{2 \cdot v_A} - \frac{l_B}{2}\right)^2$$

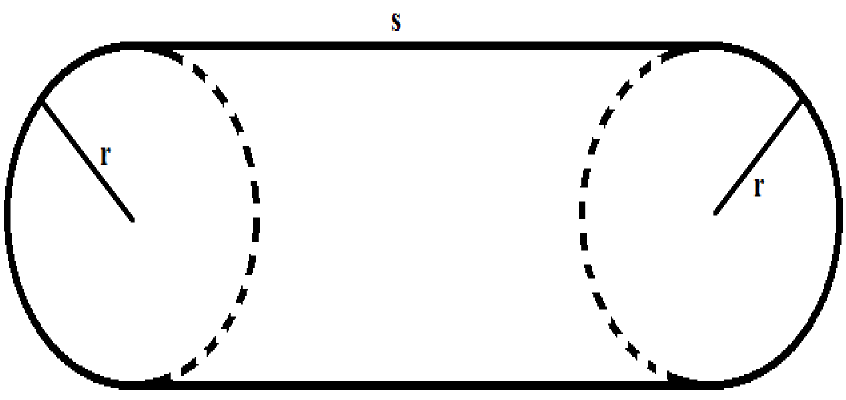
A nemnegatív számokon értelmezett $d^2(t)$ parabola szigorú monotonitásából a következő adódik:

$$d\left(t = \frac{l_A}{2 \cdot v_A}\right) = \left(v_B \frac{l_A}{2\, v_A} - \frac{l_B}{2}\right) \Rightarrow \qquad \frac{l_A}{2\, v_A} = \frac{l_B}{v_B \cdot 2} \Rightarrow \qquad \frac{l_A}{l_B} = \frac{v_A}{v_B}$$

Mivel a második derivált minden $t > 0$ időpillanatban és $v > 0$ sebességnagyság esetén pozitív – $[d^2(t)]'' = 2\left(\frac{l_B^2}{l_A^2}+1\right)v_A^2 > 0$ –, így a *d(t)*-re kapott eredmény tényleg minimum.

Tehát a két versenyző akkor és csak akkor tartózkodhat egy időpillanatban fenn és lenn a versenypályán – *d(t)* értéke ilyenkor lesz 0 –, ha a sebességeik aránya megegyezik a kiindulási távolságaik arányával.

2.2.3. Az Indy 500-őrület



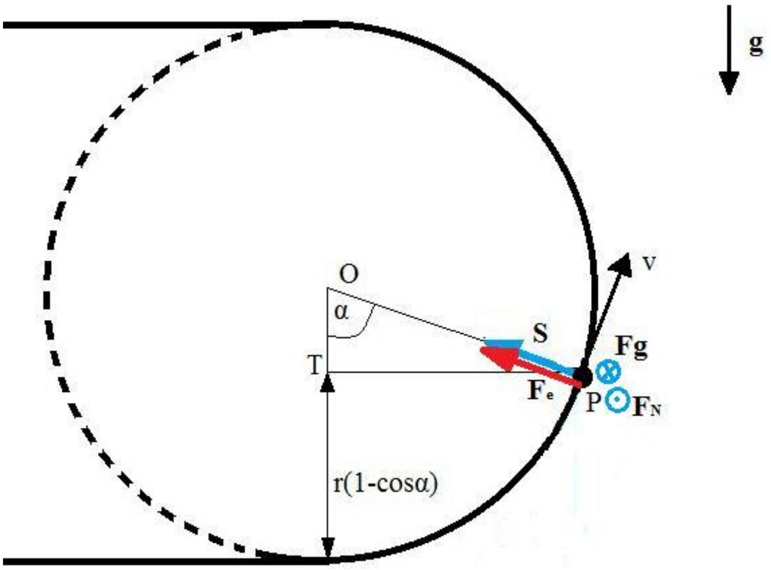
10. ábra

Az Indianapolisi 500 mérföldes autóversenyt 1911 óta tradicionálisan a háborús hősök emléknapjának – május 30. – hétvégéjén rendezik meg. A 200 körből álló futamot az ábrán látható s hosszúságú egyenesekkel és r sugarú körökkel tűzdelt pályán szokták lebonyolítani. Számítsd ki, hogy legfeljebb mekkora állandó nagyságú sebességgel kanyarodjon a pilóta ahhoz, hogy ne vágódjon *neki a közvetlenül a kanyarodó aszfaltcsík mellett futó gumifalnak! A kerekek és az aszfalt közötti tapadási súrlódási együttható legyen μ_0!*

M e g o l d á s :

Ezen probléma megoldásakor szükségünk lesz arra a feltételre, hogy a versenyautót és a benne ülő pilótát egy tömegpontként kezeljük. A példa egy kényszermozgásról szól, hiszen a test – melyre megadott szabad erő hat – csak az előírt pályán mozoghat. Jelen esetben ez két félkört és két egyenes szakaszt jelent, de a maximális sebesség szemszögéből csak a félkör – szimmetria miatt elég az egyikre megvizsgálni – bír jelentőséggel.

Egy dinamikai feladat megoldásakor mindig a testre ható erők felrajzolásával kell kezdenünk, ahogyan az a 11. ábrán is látszik. A síkba befelé – ábránkon lefelé – mutat a testre ható gravitációs erő, míg vele ellentétes irányba – a síkból kifelé, az ábránkon felfelé – hat a föld által a testre kifejtett nyomóerő. Ezek nagysága Newton harmadik törvényének értelmében megegyező.



1 1 . á b r a

$$m \cdot g = Fg = F_N$$

A lapra merőleges síkban ez az összefüggés biztosítja azt, hogy a versenyautó nem emelkedik el az aszfaltról. Itt kell megjegyeznünk azt, hogy a valóságban a levegő áramlásáról és a közegellenállási erőről sem szabadna megfeledkeznünk. Ilyenkor az is előfordulhat, hogy a kocsi orra hirtelen megemelkedik, azonban ennek elkerülése végett szerelnek be szárnyakat az autókba. Esetünkben a közegellenállási erő nagyságát és a levegő áramlását is elhanyagolhatónak vesszük.

A lappal párhuzamos síkban a sebesség irányának változása miatt – a nagyság viszont állandó! – a testnek van gyorsulása, mégpedig centripetális. Newton első és második törvényének értelmében, a test ebben a síkban már nem lesz egyensúlyban: ilyenkor a testre ható erőket helyettesíthetjük egy úgynevezett eredő erővel. Ezt az erőt jelen esetben a fiktív centripetális erő szolgáltatja, amely a körpálya minden pontjából a kör középpontja felé mutat. Az egyetlen nyitott kérdés már csak az, hogy milyen valóságos erő szolgáltatja a centripetális erőt? A tömegpont pontosan addig marad a körpályán, amíg a tapadási súrlódási erő, T_{max} biztosítani tudja a test körpályán maradásához szükséges centripetális erőt. Tehát:

$$\mathbf{F_e} = \mathbf{F_{cp}} = \mathbf{T_{max}}$$

$$m\frac{v^2}{r} \leq \mu_0 mg$$

$$m\frac{v_{max}^2}{r} = \mu_0 mg$$

$$v_{max}^2 = \mu_0 rg \Rightarrow \qquad v_{max} = \sqrt{\mu_0 rg}$$

Mivel a futamon megtett össztávolság és a megtett körök között egyenes arányosság áll fenn, így a feladat szövege alapján 2,5 mérföldet tesznek meg a versenyzők körönként. Miután 1 angol szárazföldi mérföld 1609,3 méterrel egyezik meg, így a 16. ábrán látható pályán egy teljesített kör kerülete:

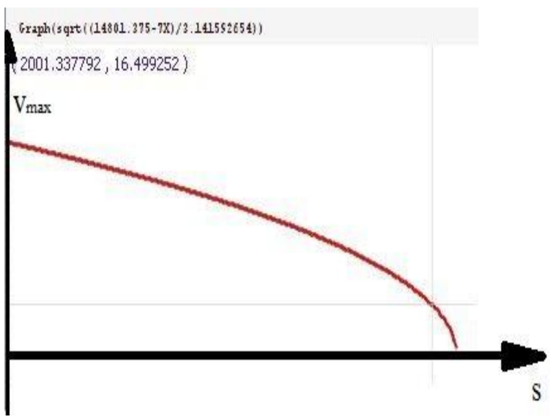
$$K = 2r\pi + 2s \Rightarrow \text{esetünkben: } r = \frac{1{,}25 \cdot 1609{,}3 - s}{\pi}$$

Írjuk ezt vissza a maximális sebességre kapott képletbe!

$$v_{max}(\mu_0, s) = \sqrt{\mu_0 rg} = \sqrt{\mu_0 \left(\frac{1{,}25 \cdot 1609{,}3 - s}{\pi}\right) \cdot 10\,\frac{m}{s^2}}$$

Gumi-aszfalt közegek esetén $\mu_0 = 0{,}7$. A bal oldali, 12. ábrán $v_{max}(s)$ függvény látható, melyről azonnal leolvasható, hogy a maximális sebességek közül $s = 0$ esetén – ekkor a pilóta egy körpályán versenyez – nyomhatjuk leginkább tövig a gázt. Ekkor $v_{max} = \sqrt{0{,}7 \cdot \left(\frac{1{,}25 \cdot 1609{,}3}{\pi}\right) \cdot 10\,\frac{m}{s^2}} \approx$

$$\approx 66{,}9495\,\frac{m}{s} = 241{,}018\,\frac{km}{h}$$



12. ábra

2. Kitűzhető feladat: Teli tank vagy gyorsaság?

A Formula-1 világában az autó karosszériájának tervezésekor a mérnökök nagy hangsúlyt helyeznek arra, hogy a tapadási súrlódási erő nagyságát maximalizálják. Ebben többek között az is közrejátszik, hogy a 600 kg-os modellek x^2 alapterületű, h magasságú, négyzetes hasáb alakú, $V = h \cdot x^2$ térfogatú tankjában mennyi üzemanyag található, ahol $0 \leq h \leq x$. Bizonyítsuk be, hogy az átlagos tapadási súrlódási erő pontosan akkor lesz maximális a két kötelező kiállással tarkított verseny során, ha a versenyző a táv egy- és kétharmadánál állt ki a bokszutcába tankolni!(Figyelem: minden egyes tankoláskor a szerelők teletöltik a versenyautó tankját!)

2.3. Asterix és Obelix az atlétikapályán

Ebben a fejezetben olyan atlétikai számokkal találkozunk, amelyek egy síkban lejátszódó mozdulatsorainak leírásában és szemléltetésében nagy segítséget nyújt a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben való ábrázolás. Ennek köszönhetően a pontszerűnek tekinthető testek mozgása jól nyomon követhetővé válik. A következő példák esetében elhanyagolható nagyságúnak vettem a testeket – súly, ember – akadályozó súrlódási és közegellenállási erőt. Ezen közelítések jóvoltából mindösszesen két olyan tényező maradt, ami nagyban befolyásolja azt, hogy a két mesefigura milyen eredményeket ér el a versenyek során: a sebességük és az elrugaszkodásnak/eldobásnak a talajjal bezárt szöge. Ezen feltételezések ismertetése után már csak annyi dolgunk maradt, hogy világcsúcsra fel!

2.3.1. Távolugrás

13. ábra

Az alacsony termetű, ám meglehetősen fürge Asterix úgy döntött, hogy képviselteti hazáját az olimpiai játékok távolugró számában. Milyen α szög alatt kell elrugaszkodnia a gall képregényhősnek ahhoz, hogy egy adott v_0 kezdősebesség és T repülési idő mellett ő érjen a lehető legtávolabb földet?

1. megoldás:

Asterix az ugrása során egy α hajlásszögű, v_0 kezdősebességű ferde hajítás végez, melyre a derékszögű koordinátarendszerben a következő egyenletek írhatóak fel:

$$x = d = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot T \qquad (1)$$

$$y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot T - \frac{g}{2} \cdot T^2 \qquad (2)$$

Fejezzünk ki T-t az (1) egyenletből, s helyettesítsük be (2)-be!

$$T = \frac{d}{v_0 \cdot \cos\alpha} \Rightarrow y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{d}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{d}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 = -\frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} + d \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

Miután Asterix elrugaszkodásának helyét az egyszerűség kedvéért a koordinátarendszerünk origójába tettük, ezért a gall mesefigura az ugrást követően is az $y = 0$ koordinátában fog landolni.

$$0 = -\frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{v_0^2} \cdot (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + d \cdot \mathrm{tg}\alpha \qquad (3)$$

Ezzel egy $tg\alpha$-ban másodfokú egyenletet kaptunk, melynek megoldását a bevett középiskolás módszereknek megfelelően a diszkrimináns vizsgálatával kezdjük:

$$D = d^2 - \frac{g^2}{v_0^4} \cdot d^4 = d^2 \cdot \left(1 - \frac{g^2}{v_0^4} \cdot d^2\right) \geq 0$$

Miután $d^2 \geq 0$ mindig teljesül, ezért a zárójeles kifejezésnek is nemnegatívnak kell lennie. Azaz:

$$1 - \frac{g^2}{v_0^4} \cdot d^2 \geq 0$$

$$d^2 \leq \frac{v_0^4}{g^2}$$

$$d_{max}^2 = \frac{v_0^4}{g^2} \Rightarrow d_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

A kapott eredményt helyettesítsük vissza (3) egyenletbe!

$$0 = -\frac{g}{2} \cdot \frac{\frac{v_0^4}{g^2}}{v_0^2} \cdot (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + \frac{v_0^2}{g} \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

$$0 = -\frac{v_0^2}{2g} \cdot (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + \frac{v_0^2}{g} \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

$$\mathrm{tg}\alpha_{1,2} = \frac{-\frac{v_0^2}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2} - 4 \cdot \frac{v_0^4}{4g^2}}}{-\frac{v_0^2}{g}} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Az eredményül kapott α a szögek nyelvén annyit jelent számunkra, hogy Asterixnek 45˚-os szög alatt kell elrugaszkodnia a maximális hosszúságú ugrás elérésének érdekében.

2. megoldás:

A differenciálásnak köszönhetően ellenőrizhetjük a szögre kapott eredményünk helyességét. Ehhez vissza kell menni a kiindulási (1) és (2) egyenletekhez, melyek közül $y = 0$ ismeretében most (2)-ből a T repülési időre kapunk egy másodfokú egyenletet!

$$0 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot T - \frac{g}{2} \cdot T^2$$

$$T_{1,2} = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot g}}{g}$$

Mivel a gyökjel előtti kivonás esetén T értékére negatív számot kapnánk, így csak egy megoldás fog T-re adódni, amit nyomban vissza is írhatunk (1)-be.

$$d(\alpha) = \frac{v_0 \cdot \cos\alpha}{g} \cdot \left(v_0 \cdot \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}\right)$$

$$d(\alpha) = \frac{v_0 \cdot \cos\alpha}{g} \cdot \left(v_0 \cdot \sin\alpha + |v_0 \cdot \sin\alpha|\right)$$

A $|v_0 \cdot \sin\alpha|$ kifejezésben az abszolútérték jel elhagyható, mivel a sebesség nagysága az ugrás során mindig pozitív, a szinuszfüggvény $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ között mindig nemnegatív értékeket vesz fel.

$$d(\alpha) = \frac{v_0 \cdot \cos\alpha}{g} \cdot 2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

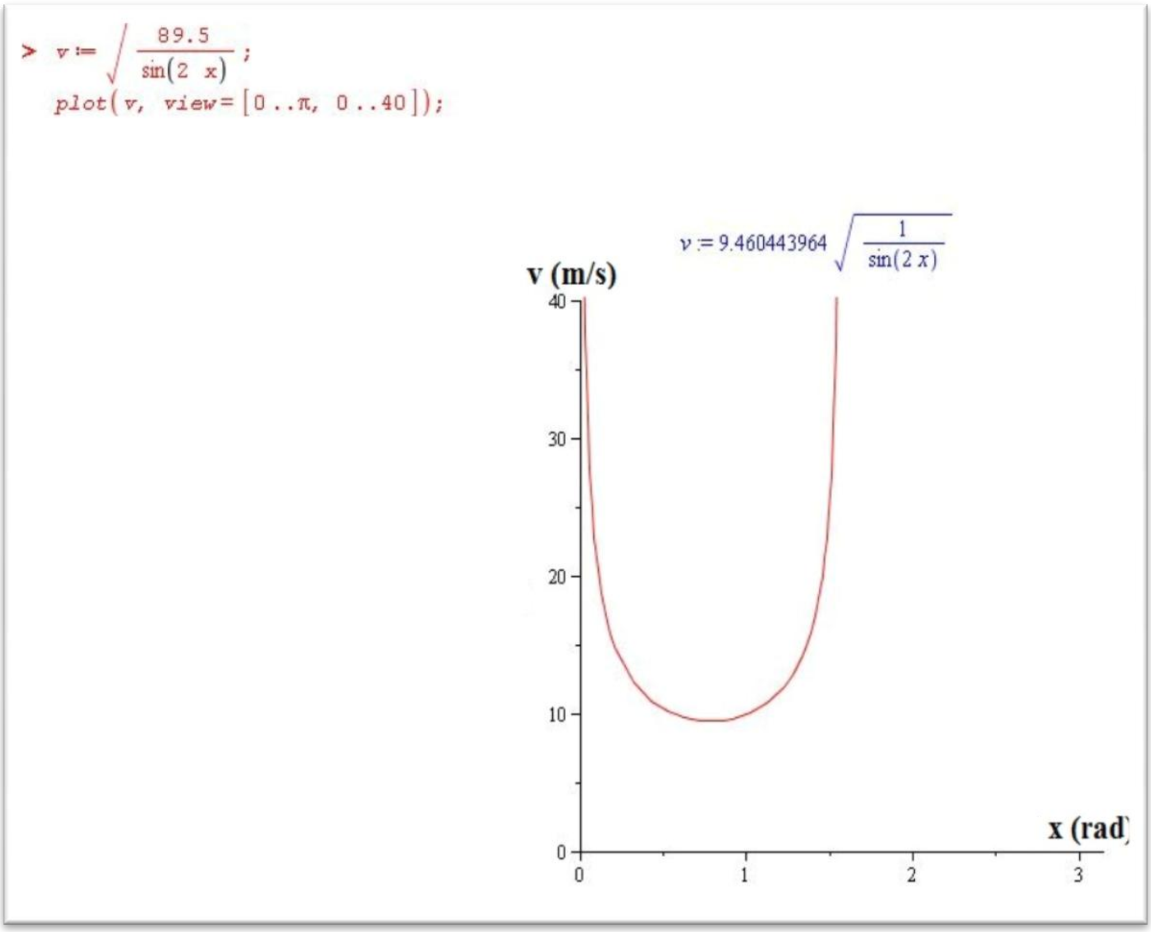
$$d'(\alpha) = 0 = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Most már csak azt kell ellenőrizni, hogy az eredményül kapott $\frac{\pi}{4}$ ténylegesen szélsőértéke-e $d'(\alpha)$-nak:

$$d''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{v_0^2}{g} \cdot 4 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -4 \cdot \frac{v_0^2}{g} < 0$$

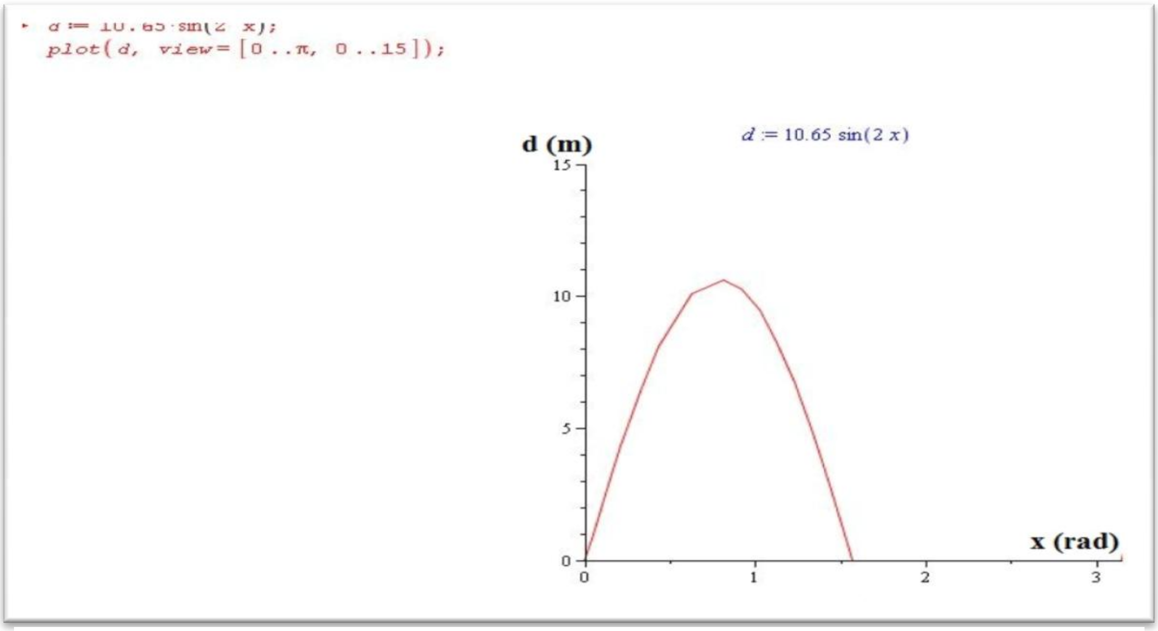
Mivel a második derivált a $\frac{\pi}{4}$ helyen minden $v_0 \neq 0$ nagyságú sebesség mellett – a probléma felvetésének $v_0 = 0$ esetben nincs értelme – negatív értéket ad, ezért $d(\alpha)$ függvénynek a $\frac{\pi}{4}$ helyen maximuma van.

A korábbi, $d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$ összefüggés ismeretében pillanatok alatt kielemezhetjük azt, hogy a Mike Powell által 1991-ben felállított 8,95 méteres világcsúcshoz különböző α szögek esetén milyen sebességet kellett elérnie a nekifutáshoz biztosított 40 méteres táv végén. Amennyiben a gravitációs gyorsulás értékét $g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$ –nak vesszük, akkor a $v_0(\alpha) = \sqrt{\frac{d \cdot g}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{89{,}5}{\sin 2\alpha}}$ képletre a következő, 14. ábrát kapjuk.



14. ábra

Amennyiben most az elugrási sebességet rögzítjük le, akkor az ugrás hosszának szögfüggésére nyerhetünk tanúbizonyságot. A nekifutáshoz biztosított 40 méteres táv végére elért sebesség alapjául Usain Bolt 100 méteres síkfutás során elért 9,69 másodperces világcsúcsának átlagsebességét vettem. A $<v> = \frac{100\ m}{9{,}69\ s} \approx 10{,}32\ \frac{m}{s}$ eredményt a $d(\alpha) = \frac{<v>^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$ összefüggésbe visszaírva a következő, 15. ábrát kapjuk:



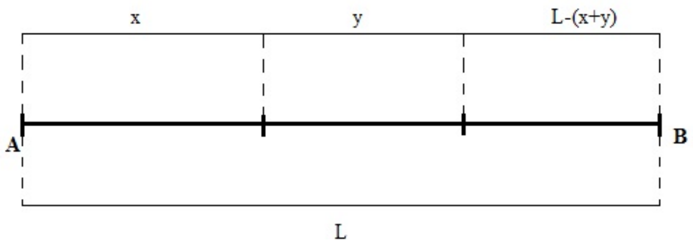
15. ábra

2.3.2. Hármasugrás

Asterix a „tökéletesre” fejlesztett távolugrós technika elsajátítását követően arra határozta el magát, hogy hármasugrásban is a rajtvonalhoz áll. A számottevő különbséget a két műfaj között az jelenti, hogy utóbbinál az elugró-gerendáról való elrugaszkodást követően csak a harmadik „lépésre” ugrik el valójában a versenyző. Amennyiben az elugró-gerenda és a leérkező-hely közelebbi vége közti távolságot L hosszúságúra rögzítjük, akkor keressük meg a szakaszt a két közbülső lépés által keletkezett 3 rész szorzatának maximumát, majd általánosítsuk ezt n részre!

Megoldás:

Az ábrán látható L hosszúságú szakaszt úgy szeretnénk három részre osztani, hogy a „lépések” közti részhosszúságok szorzata maximális legyen. A rajz jelöléseinek és matematikai apparátusunk felhasználásával ez annyit jelent, hogy keressük a $z = x \cdot y \cdot (L-(x+y))$ függvény (abszolút) maximumát a következő feltételek teljesülése mellett: $x > 0$, $y > 0$ és $x+y < L$.



16. ábra

Miután a fenti függvényben szereplő szorzótényezők hosszakat jelölnek, így pozitív létükből kifolyólag alkalmazhatjuk rájuk a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenséget.

$$\sqrt[3]{x \cdot y \cdot (L - (x + y))} \leq \frac{x+y+(L-(x+y))}{3} = \frac{L}{3}$$

Ezzel azt kaptuk, hogy a három hosszúság mértani közepe egy konstans számtani középpel, $\frac{L}{3}$ hosszal becsülhető felülről. A számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenségben szereplő egyenlőség reláció pontosan akkor fog teljesülni, ha:

$x = y = L - (x+y)$, azaz mindhárom rész hossza $\frac{L}{3}$ nagyságú.

Most már rátérhetünk a probléma általánosítására is, ahol $n \geq 2$ természetes szám. Az L hosszúságú szakasz felosztásával nyert szakaszokat x_1, $x_2, \ldots, x_n$-nel jelölve szeretnénk megtalálni az $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ $(= \prod_i^n x_i)$ szorzat maximumát a következő feltételek mellett: $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$ és $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = L$ $(= \sum_i^n x_i)$

Mivel a fenti függvényben szereplő szorzótényezők mindegyike pozitív, így alkalmazzuk újfent a mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenséget, ezúttal n tagra!

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{L}{n}, \text{ ahol } n \geq 2 \text{ rögzített!}$$

Ezzel azt kaptuk, hogy az x_1, $x_2, \ldots$, x_n hosszúságok mértani közepét $\frac{L}{n}$ konstanssal becsültük felülről. Az egyenlőség, mint reláció pontosan akkor fog teljesülni a két oldal között, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, azaz mindegyik rész hossza $\frac{L}{n}$ nagyságú.

2.3.3. Súlydobás

Miközben Asterix az ugrószámokban sorra nyerte az aranyérmeket Gallia számára, addig Obelix sem szeretett volna lemaradni tőle, így termetéből és erejéből adódóan a súlydobás sportágában próbálta ki magát. Milyen α szög alatt kell ellöknie a varázselixírben „megfürdött” Obelixnek a súlygolyót ahhoz, hogy az egy adott v_0 kezdősebesség és T repülési idő mellett a lehető legtávolabb érkezzen földet?

17. ábra

1 . m e g o l d á s :

Ismét egy ferde hajítással kell szembenéznünk, azonban a 2.3.1. példában taglaltakkal ellentétben egy lényeges eltérésről nem szabad elfeledkeznünk. Most a földfelszíntől mért kezdeti magasság – azaz h_0 – már nem lesz egyenlő *0*-val, hiszen a súlylökő minden erejét beleadva kézből löki ki a súlyt a dobókörből. Így a távolugrásnál felírt egyenletek a következőkre módosulnak:

$$x = d = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot T \qquad (1)$$

$$y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot T - \frac{g}{2} \cdot T^2 + h_0 \qquad (2)$$

Fejezzünk ki ismét *T*-t az (1) egyenletből, s helyettesítsük be (2)-be!

$$T = \frac{d}{v_0 \cdot \cos\alpha} \Rightarrow y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{d}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{d}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + h_0 = -\frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} + d \cdot \mathrm{tg}\alpha + h_0$$

$$0 = -\frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{v_0^2} \cdot (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + d \cdot \mathrm{tg}\alpha + h_0 \qquad (3)$$

Ezzel egy *tgα*-ban másodfokú egyenletet kaptunk, melynek megoldását a bevett középiskolás módszereknek megfelelően a diszkrimináns vizsgálatával kezdjük:

$$D = d^2 - \frac{g^2}{v_0^4} \cdot d^4 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2} \cdot d^2 = d^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2} - \frac{g^2}{v_0^4} \cdot d^2\right) \geq 0$$

Miután $d^2 \geq 0$ mindig teljesül, ezért a zárójeles kifejezésnek is nemnegatívnak kell lennie. Azaz:

$$1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2} - \frac{g^2}{v_0^4} \cdot d^2 \geq 0$$

$$d^2 \leq \frac{v_0^4}{g^2} + \frac{2 \cdot h_0 \cdot v_0^2}{g}$$

$$d_{max}^2 = \frac{v_0^4}{g^2} + \frac{2 \cdot h_0 \cdot v_0^2}{g}$$

$$d_{max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2}}$$

A kapott eredményt helyettesítsük vissza (3) egyenletbe!

$$0 = -\frac{g}{2} \cdot \frac{\frac{v_0^2}{g} \cdot \left(\frac{v_0^2}{g} + 2 \cdot h_0\right)}{v_0^2} \cdot (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + \frac{v_0^2}{g} \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2}} + h_0$$

$$0 = -\left(\frac{v_0^2}{2g} + h_0\right) \cdot (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + \frac{v_0^2}{g} \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2}} + h_0$$

$$\mathrm{tg}\alpha_{1,2} = \frac{-\frac{v_0^2}{g} \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^4}{g^2} + \frac{2 \cdot h_0 \cdot v_0^2}{g}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{v_0^2}{2g}\right) \cdot \left(-\frac{v_0^2}{2g} - h_0\right)}}{\frac{v^2}{g} + 2h_0} = \frac{-\frac{v_0^2}{g} \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2}} \pm \sqrt{0}}{\frac{v_0^2}{g} + 2h_0}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{-\frac{v_0^2}{g}\cdot\sqrt{1+\frac{2\cdot h_0\cdot g}{v_0^2}}}{\frac{v_0^2}{g}(1+\frac{2\cdot h_0\cdot g}{v_0^2})} = \frac{-\sqrt{1+\frac{2\cdot h_0\cdot g}{v_0^2}}}{(1+\frac{2\cdot h_0\cdot g}{v_0^2})} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\cdot h_0\cdot g}{v_0^2}}}$$

2. m e g o l d á s :

A differenciálásnak köszönhetően ellenőrizhetjük a szögre kapott eredményünk helyességét. Ehhez vissza kell menni a kiindulási (1) és (2) egyenletekhez, melyek közül *y = 0* ismeretében most (2)-ből a *T* repülési időre kapunk egy másodfokú egyenletet!

$$0 = v_0\cdot\sin\alpha\cdot T - \frac{g}{2}\cdot T^2 + h_0$$

$$T_{1,2} = \frac{v_0\cdot\sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2\cdot\sin^2\alpha + 2\cdot g\cdot h_0}}{g}$$

Mivel $\sqrt{v_0^2\cdot\sin^2\alpha + 2\cdot g\cdot h_0} > v_0\cdot\sin\alpha$, így a számlálóban található kifejezések elvégzését követően *T* értékére negatív számot is kaphatnánk, ami fizikailag értelmetlen megoldást szolgáltatna. Emiatt *T*-re pontosan egy megoldás fog adódni, amit írjunk is vissza (1)-be! $d(\alpha) = \frac{v_0\cdot\cos\alpha}{g}\cdot(v_0\cdot\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\cdot\sin^2\alpha + 2\cdot g\cdot h_0})$

$$d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2\cdot g\cdot h_0}{v_0^2}})$$

$$d'(\alpha) = 0 = \frac{v_0^2}{g}\cdot(\cos 2\alpha - \sin\alpha\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2\cdot g\cdot h_0}{v_0^2}} + \cos\alpha\cdot\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2\cdot g\cdot h_0}{v_0^2}}})$$

Tudjuk, hogy egy szorzat pontosan akkor lesz *0*, ha a szorzótényezők valamelyike *0,* ezért vizsgáljuk meg ezt a feltételt a különböző tényezőkre! A $\frac{v_0^2}{g}$ tényező minden időpillanatban pozitív értéket vesz fel, így a másik tényezőnek kell *0*-val egyenlőnek lennie. $0 = \cos 2\alpha - \sin\alpha\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2\cdot g\cdot h_0}{v_0^2}} + \cos\alpha\cdot\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2\cdot g\cdot h_0}{v_0^2}}}$

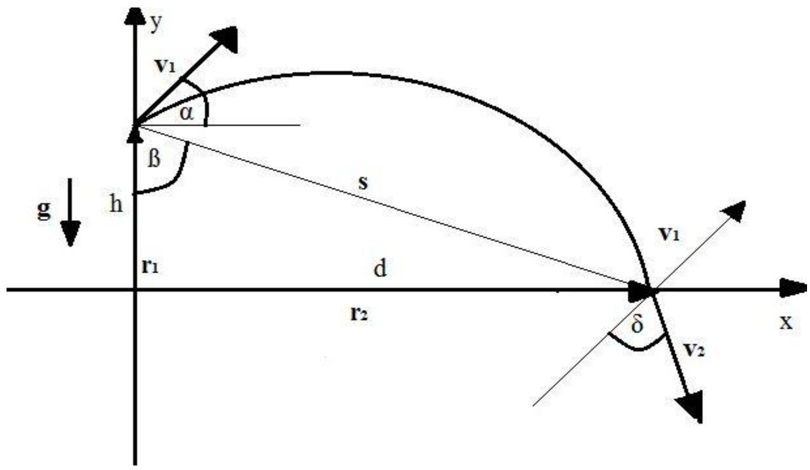
$$\mathrm{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{2\cdot g\cdot h_0}{v_0^2}, \text{ ahol } \alpha < 45°$$

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\cdot h_0\cdot g}{v_0^2}}} \Leftrightarrow \mathrm{ctg}\alpha = -\sqrt{1 + \frac{2\cdot h_0\cdot g}{v_0^2}} \Rightarrow \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{2\cdot g\cdot h_0}{v_0^2}$$

Ebből a súlydobás maximális távolságára $d_{max} = \frac{v_0^2}{g}\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2\cdot g\cdot h_0}{v_0^2}}$ adódik.

3. megoldás:

Most jelöljük v_1-gyel a kezdősebességet! A két mechanikus megoldást követően most egy szebbet, dinamikusabbat is szeretnénk mutatni. A most követ-kező kifejezésekben a félkövér betűtípus az adott kifejezés vektori létére utal. Newton második, az erőt definiáló törvényének alkalmazásával írjuk fel az eldobott súly mozgásegyenletét! Mivel a súlyra csak a gravitációs tér fejt ki erőt, így a következő differenciálegyenletet kapjuk: $m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \cdot \mathbf{g}$



18. ábra

Mechanikai alapismeretink alapján a $\mathbf{v_1}$ kezdő- és $\mathbf{v_2}$ végsebességre a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\text{I. } \mathbf{v} = \mathbf{g} \cdot t + \mathbf{v_1}$$

$$\text{II. } \mathbf{v_2} = \mathbf{g} \cdot T + \mathbf{v_1} \; (\Rightarrow \mathbf{g} = \frac{\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}}{T})$$

Mivel a sebességet definíció szerint az elmozdulás időderiváltjaként értelmezzük, – azaz $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ –, így a fenti egyenletek tovább alakíthatóak:

$$\text{I. } \mathbf{r} = \frac{\mathbf{g}}{2} \cdot t^2 + \mathbf{v_1} \cdot t + \mathbf{r_1}$$

$$\text{II. } \mathbf{r_2} = \frac{\mathbf{g}}{2} \cdot T^2 + \mathbf{v_1} \cdot T + \mathbf{r_1}$$

Az ábrán szereplő **s** elmozdulásvektort a II.-ből kifejezve az alábbira jutunk:

$$\mathbf{s} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} = \frac{\mathbf{g}}{2} \cdot T^2 + \mathbf{v_1} \cdot T = \frac{\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}}{2} \cdot T + \mathbf{v_1} \cdot T = \frac{\mathbf{v_2} + \mathbf{v_1}}{2} \cdot T$$

y irányban egy egyenletesen gyorsuló mozgásról lévén szó:

$$S = \langle v \rangle \cdot T \Rightarrow \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{v_2} + \mathbf{v_1}}{2} = \mathbf{v}_{\text{átlag}}$$

Vegyük észre a $\mathbf{g} \times \mathbf{s} = \mathbf{v_2} \times \mathbf{v_1}$ vektoriális szorzatokról szóló egyenlőséget! Először bontsuk fel a kezdő- és végsebességet a vízszintes illetve a függőleges tengellyel párhuzamos komponensekre, majd végezzük el a vektoriális szorzást!

$$\mathbf{v_2} \times \mathbf{v_1} = (\mathbf{v_2^{függ.}} + \mathbf{v_2^{vízsz.}}) \times (\mathbf{v_1^{függ.}} + \mathbf{v_1^{vízsz.}})$$

Az egy irányba mutató – azaz párhuzamos – vektorok vektoriális szorzata 0, így csak a különböző irányba mutatókat kell összeszoroznunk.

$$\mathbf{v_2} \times \mathbf{v_1} = (\mathbf{v_2^{függ.}} \times \mathbf{v_1^{vízsz.}}) + (\mathbf{v_2^{vízsz.}} \times \mathbf{v_1^{függ.}})$$

A vízszintes irányú sebesség a mozgás során állandó irányú és nagyságú, emiatt minden időpillanatban teljesül a $\mathbf{v_1^{vízsz.}} = \mathbf{v_2^{vízsz.}}$ egyenlőség. Továbbá használjuk fel a vektoriális szorzásra tanult *(a x b) = – (b x a)* azonosságot!

$$\mathbf{v_2} \times \mathbf{v_1} = -(\mathbf{v_1^{vízsz.}} \times \mathbf{v_2^{függ.}}) + (\mathbf{v_1^{vízsz.}} \times \mathbf{v_1^{függ.}}) = \mathbf{v_1^{vízsz.}} \times (-\mathbf{v_2^{függ.}} + \mathbf{v_1^{függ.}}) =$$

$$= \mathbf{v_1^{vízsz.}} \times (-\mathbf{g} \cdot T) = (\mathbf{v_1^{vízsz.}} \cdot T) \times (-\mathbf{g}) = \mathbf{g} \times \mathbf{s}$$

Most vizsgáljuk meg a $\mathbf{g} \times \mathbf{s} = \mathbf{v_2} \times \mathbf{v_1}$ vektoriális szorzatokról szóló egyenlőség tényezőinek nagyságát!

$$|\,\mathbf{g} \times \mathbf{s}\,| = g \cdot s \cdot \sin\beta = g \cdot d = |\,\mathbf{v_2} \times \mathbf{v_1}\,| = v_2 \cdot v_1 \cdot \sin\delta$$

Az általunk keresett *d* akkor veszi fel a maximális értékét ha, $\delta = 90^\circ$. Szemléletesen ez annyit jelent számunkra, hogy az ábránkon szereplő $\boldsymbol{v_1}$ és $\boldsymbol{v_2}$ vektorok merőlegesek lesznek egymásra. Vizsgáljuk meg, hogy milyen koordinátákkal írható fel $\boldsymbol{v_1}$ és $\boldsymbol{v_2}$!

$$\mathbf{v_1} = (v \cdot \cos\alpha\,,\, v \cdot \sin\alpha)$$

Az energia-megmaradás elvét alkalmazva minden t időpillanatra teljesülni fog:

$$\mathbf{v_2} = (v \cdot \cos\alpha\,,\, -\sqrt{v^2 \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot g \cdot h_0}\,)$$

Miután $\boldsymbol{v_1}$ és $\boldsymbol{v_2}$ vektorok merőlegesek egymásra, ezért a skaláris szorzatuk nullát ad eredményül. Írjuk fel a sebességek koordinátáinak felhasználásával ezt az egyenlőséget!

$$v^2 \cdot \cos^2\alpha - v \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{v^2 \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot g \cdot h_0} = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{\sqrt{2 \cdot v^2 + 2 \cdot g \cdot h_0}}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v^2}}} \Leftrightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v^2}}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v}{\sqrt{2 \cdot v^2 + 2 \cdot g \cdot h_0}}$$

A korábbi, $d_{max} = \frac{v^2}{g} \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2 \cdot g \cdot h_0}{v^2}}$ összefüggés ismeretében pillanatok alatt kielemezhetjük azt, hogy a Randy Barnes által 1990-ben felállított 23,12 méteres világcsúcshoz különböző α szögek esetén milyen sebességgel kellett elhajítania a súlyt. Amennyiben a gravitációs gyorsulás értékét $g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$ –nak, valamint egy átlagember esetén a $h_0 = 2$ méternek vesszük, akkor a következő egyenletet kapjuk:

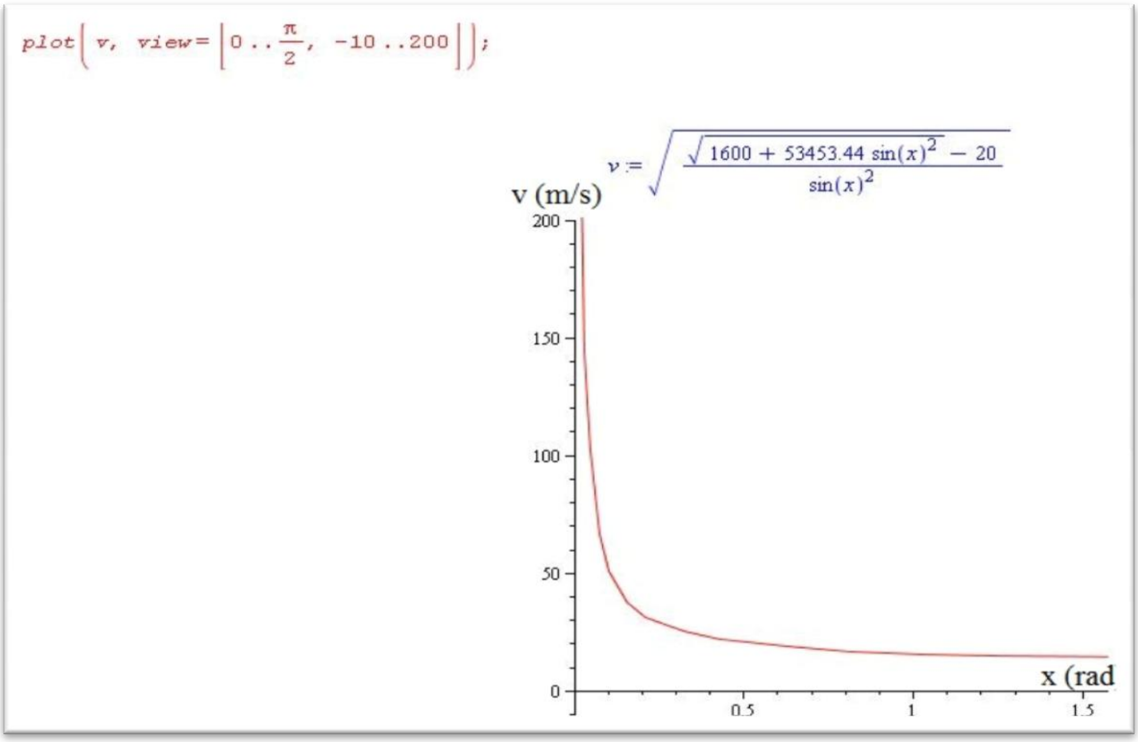
$$0 = \frac{\sin^2\alpha}{g^2} \cdot v^4 + \frac{2 \cdot h_0}{g} \cdot v^2 - d_{max}^2$$

$$v^2(\alpha) = \frac{-\frac{2 \cdot h_0}{g} \pm \sqrt{\frac{4 \cdot h_0^2}{g^2} + 4 \cdot d_{max}^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{g^2}}}{2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{g^2}} = \frac{-\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{64}{100} + 4 \cdot 534{,}5344 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{100}}}{\frac{\sin^2\alpha}{50}} = \frac{-20 \pm \sqrt{1600 + 53453{,}44 \cdot \sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$$

Mivel a sebesség nagysága egy nemnegatív szám, ezért a *v(α)*-ra kapható négy megoldás közül csak a pozitív(ak)nak lesz fizikai valóságtartalma.

$$v^2(\alpha) = \frac{-20 + \sqrt{1600 + 53453{,}44 \cdot \sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha} \Rightarrow v(\alpha) = \sqrt{\frac{\sqrt{1600 + 53453{,}44 \cdot \sin^2\alpha} - 20}{\sin^2\alpha}}$$

Erre a képletre a következő, 19. ábrát kapjuk:

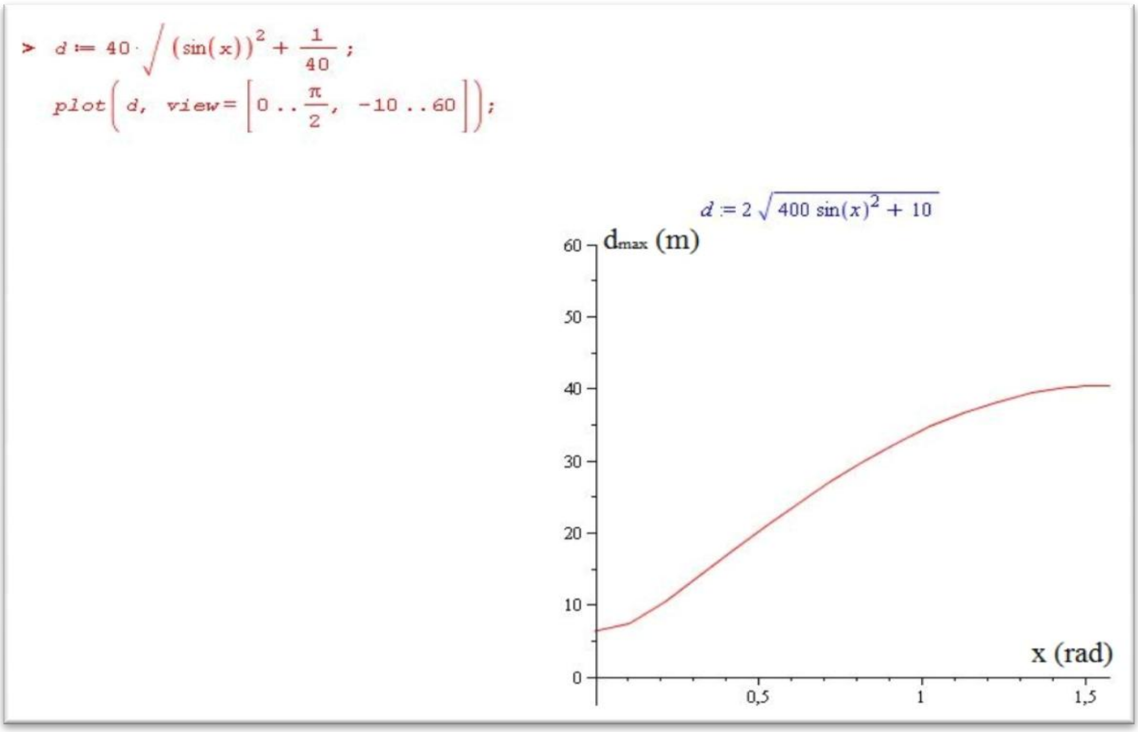


19. ábra

Amennyiben az eldobási sebességet rögzítjük le $v := 20\ \frac{m}{s}$, úgy a dobás hosszának szögfüggésére nyerhetünk tanúbizonyságot.

$$d_{\max}(\alpha) = \frac{v^2}{g} \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2 \cdot g \cdot h_0}{v^2}} = 40\text{m} \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{1}{40}}$$

Erre a képletre a következő, 20. ábrát kapjuk:



20. ábra

3. Kitűzhető feladat: Magasugrás

Az olimpia utolsó atlétika versenyén Asterix egy újabb aranyéremmel koronázta meg saját és Gallia addigi produkcióját. Milyen α szög alatt rugaszkodott el a mesehős, ha egy adott v_0 kezdősebesség és T repülési idő mellett a versenyzők közül ő emelkedett a legmagasabbra?

2.4. Trükkök a futballpályáról

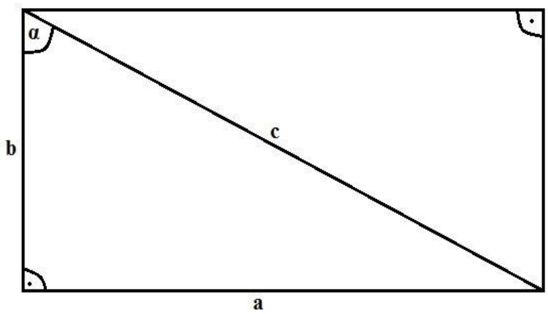
Az utolsó epizódban a világ egyik legnépszerűbb sportágában, a labdarúgásban olykor a mérkőzések végkimenetelét eldöntő, technikailag jól kivitelezett pontrúgásokat veszem közelebbről szemügyre. Ebben a leírásban a legfontosabb egyszerűsítésnek a labda pontszerűsége számít, mivel a különböző rúgási technikáknak köszönhetően eltérő mozgásokat – például csavarást - hozhatunk létre. A feladataimban ismertetett három rögzített játékhelyzet két különböző mozgás segítségével írható le, esetükben fontos kihangsúlyoznunk a közegellenállási erő nagyságának elhanyagolását és a mozdulatsorok egy síkban való lejátszódásának kritériumát. Az elrúgások sebességeinek számolásakor erősen támaszkodom arra a feltételezésre, hogy a lábfej és a labda közti ütközések tökéletes rugalmasak. Ezen kikötés után már semmi és senki nem akadályoz meg minket abban, hogy elvégezzünk egy szabad- és egy kirúgást.

2.4.1. A méret is lényeg I.

A futballklubok a Nemzetközi Labdarúgó Szövetség (FIFA) által meghatározott paraméterekkel rendelkező pályákon – 90-120 méter hosszú, 45-90 méter széles – rendezhetik meg bajnoki mérkőzéseiket. Amennyiben számunkra adott ennek a pályának a T területe, akkor számoljuk ki, hogy legalább mennyi ideig tartana egy 30 $\frac{km}{h}$ *állandó sebességgel megtett sprint az átlós szögletzászlók között?*

1. megoldás:

A *T* területű, téglalap alakú futballpálya átlós csúcsai közötti távolság minimális nagyságára irányuló feladat kérdését a matematika nyelvére a következőképpen fogalmazhatjuk át: keressük azon $\frac{T}{2}$ területű derékszögű háromszög(ek)et, amely átfogójának a hossza minimális. Az ábra jelöléseit, a háromszög területére vonatkozó összefüggéseket és a Pitagorasz-tételt használva a következő egyenleteket kapjuk:



21. ábra

$$\frac{T}{2} = \frac{(\text{alap})\cdot(\text{alaphoz tartozó magasság})}{2} = \frac{a\cdot b}{2} \qquad (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (2)$$

Az átfogalmazott problémánk célja az, hogy c értékét minimalizáljuk. Miután *a*, *b*, *c* oldalhosszak pozitív létéből kifolyólag a (2) egyenletből ekvivalens átalakítással kapott

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ kifejezés a négyzetgyök-függvény szigorú monotonitása miatt pontosan ott lesz minimális, ahol (2) teljesül. A következő lépésben használjuk fel (1)-et, s írjuk be (2)-be! $c^2 = a^2 + \frac{T^2}{a^2} = (a - \frac{T}{a})^2 + 2\cdot T$

A c^2 kifejezésre kapott parabola a függvény-transzformációk ismeretében pontosan akkor lesz minimális, amikor $a = \frac{T}{a}$, azaz $a^2 = T = b^2$. Szemléletesen ez azt jelenti számunkra, hogy az átfogó hossza akkor lesz a legrövidebb, amikor az átfogalmazáskor kapott derékszögű háromszög egyenlő szárú. Ez az átlóira szimmetrikus, *T* területű futballpálya méreteinek ismeretében egy *90·90* m²-es, négyzet alakú gyepszőnyeget eredményez.

Így a sprinthez szükséges minimális idő a sebesség definíciójából és az egyenes vonalú egyenletes mozgásból $v = \frac{s}{t_{min}} \Rightarrow t_{min} = \frac{s}{v} = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{2\cdot T}}{v} = \frac{\sqrt{2\cdot 8100\,m^2}}{8{,}33\,\frac{m}{s}} \approx 15{,}27$ másodpercnek adódik.

2. megoldás:

Használjuk fel most is a feladatnak az előző megoldásban már ismertetett átfogalmazását és ábráját. Ezúttal a derékszögű háromszög befogóit az átfogója és a szögfüggvények segítségével a következőképpen írhatjuk fel:

$$a = c\cdot\sin\alpha \qquad b = c\cdot\cos\alpha$$

Vizsgáljuk meg ezek ismeretében a háromszög területét!

$$\frac{T}{2} = \frac{(\text{alap})\cdot(\text{alaphoz tartozó magasság})}{2} = \frac{a\cdot b}{2} = \frac{c^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2} \qquad \Rightarrow c^2 = \frac{T}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2\cdot T}{\sin 2\alpha}$$

Ez a hányados pontosan akkor lesz minimális, ha $\sin 2\alpha = 1$ (a számláló konstans!), ahol $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Az adott intervallumban $\sin 2\alpha = 1$ pontosan akkor igaz, ha:

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

A keresett derékszögű háromszög esetében ez azt jelenti, hogy egyenlő szárú lesz és az átfogója $c = \sqrt{2\cdot T}$ hosszúságú. Ez az átlóira szimmetrikus, *T* területű futballpálya méreteinek ismeretében egy *90·90* m²-es, négyzet alakú gyepszőnyeget eredményez. Így a sprinthez szükséges minimális idő a sebesség definíciójából és az egyenes vonalú egyenletes mozgásból $v = \frac{s}{t_{min}} \Rightarrow t_{min} = \frac{s}{v} = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{2\cdot T}}{v} = \frac{\sqrt{2\cdot 8100\,m^2}}{8{,}33\,\frac{m}{s}} \approx 15{,}27$ másodpercnek adódik.

Végezetül nem árt megjegyezni, hogy az eredményül kapott négyzet alakú futballpálya ideája nem lehet valóságos, mivel a FIFA által meghatározott szabálykönyvben a gyepszőnyeg „a” hosszúsága és „b” szélessége között az alábbi arányosság áll fenn: $1{,}333 \leq \frac{a}{b} \leq 1{,}467$. Ebben az esetben a c átmérő minimális hosszára, s vele együtt a sprint minimális idejére a következő adódik:

$$c^2 = a^2 + (1{,}333 \cdot a)^2 = 2{,}7689 \cdot a^2$$

$$t_{min} = \frac{s}{v} = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{2{,}7689 \cdot a^2}}{8{,}33\ \frac{m}{s}} = 0{,}19968014 \cdot a$$

$90\ m \leq a \leq 120\ m$ hosszúságú pályák esetén a sprint $17{,}97\ s \leq t_{min} \leq 23{,}9616\ s$ ideig tarthat.

2.4.2. A méret is lényeg II.

22. ábra

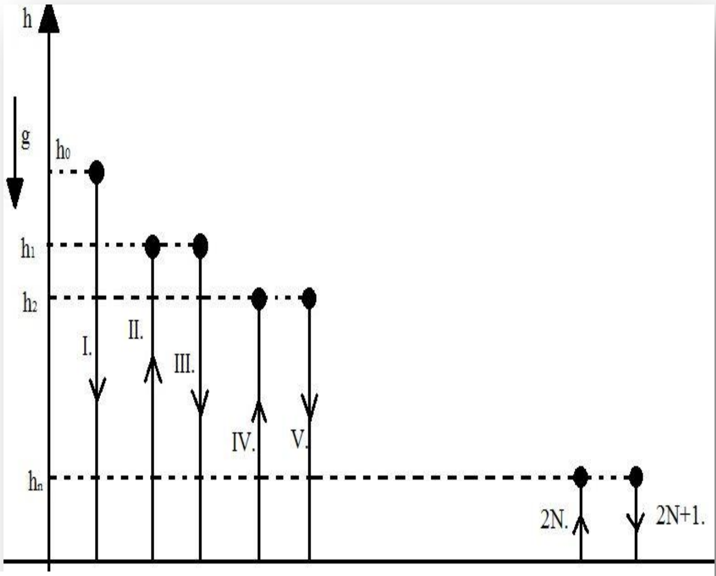
A mérkőzések megkezdése előtt a játékvezető és asszisztensei feladatkörébe tartozik az, hogy szemrevételezzék a játékhoz szükséges eszközök megfelelő állapotát, többek között a labda minőségét is. Utóbbi vizsgálatán azt kell érteni, hogy egy úgynevezett 5-ös méretű, 400 gramm tömegű játékszer h_0 magasságból történő ejtését követően milyen magasra pattan vissza a földről. A visszapattanás sebessége k-szorosa a becsapódásinak, s ennek a $0 \leq k \leq 1$ ütközési számnak a FIFA szabályzata alapján 0,7 és 0,8 közé kell esnie. Számold ki, hogy 1, 2 majd n darab pattanást követően legalább és legfeljebb milyen magasságra pattanhat vissza a labda!

Megoldás:

Bontsuk két részre ezt a mozgásfolyamatot az ábrán látható módon! Minden páratlan, becsapódás előtti szakaszon a test egy h_n magasságból történő szabadesést végez, ugyanis aktuális pályájának legmagasabb pontján sebességének nagysága *0*. Minden páros, visszapattanást követő szakaszon egy

$v_{fel} \neq 0$ kezdősebességű függőleges hajítást fedezhetünk fel a test mozgásában. A feladat szövege alapján az n-edik becsapódási (v_{le}) és visszapattanási (v_{fel}) sebesség közötti összefüggés:

$v_{fel} = k \cdot v_{le}$ (1)



23. ábra

A mechanikai problémák többségében nagy segítséget nyújtó munkatétel – képlettel felírva: $W = \Delta E_{mozgási}$ – felhasználásával vizsgáljuk meg a 23. ábrán I. jelölt első becsapódást! Jelen esetben a munkatétel bal oldalán szereplő munkavégzésnek a gravitációs tér test ellenében végzett munkájával egyezik meg. Így a következő összefüggésre jutunk:

$$m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 \qquad (2)$$

Az ekvivalens átalakítások elvégzését követően $v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$, melyet a (1) egyenletbe beírva a visszapattanás sebességére $v_1 = k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$ adódik. Alkalmazzuk a II., visszapattanási szakaszon bekövetkező függőleges hajításnál az emelkedés nagyságára vonatkozó $h = \frac{v_{fel}^2}{2 \cdot g}$ (3) képletet! $h_1 = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{k^2 \cdot 2 \cdot g \cdot h_0}{2 \cdot g} = k^2 \cdot h_0$

A második visszapattanás minimális/maximális nagyságának meghatározása érdekében írjuk fel a munkatételt a III. szakaszra!

$$m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$$

Az (1) egyenletbe való behelyettesítést követően a második visszapattanás sebességére a következő adódik: $v_2 = k \cdot v_1 = k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} = k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot k \cdot h_0} = k^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$

Alkalmazzuk újfent a (3) összefüggést! $h_2 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = \frac{k^4 \cdot 2 \cdot g \cdot h_0}{2 \cdot g} = k^4 \cdot h_0$

Terjesszük ki a fent ismertetett algoritmust az *n*-edik esetre!

$$\mathrm{m}\cdot\mathrm{g}\cdot\mathrm{h_n} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{m}\cdot \mathrm{v_n^2} - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{m}\cdot 0^2 \Rightarrow \mathrm{v_n} = \sqrt{2\cdot \mathrm{g}\cdot \mathrm{h_n}}$$

$$\mathrm{v_n} = \mathrm{k}\cdot \mathrm{v_{n-1}} = \mathrm{k}\cdot\sqrt{2\cdot \mathrm{g}\cdot \mathrm{h_{n-1}}} = \mathrm{k^{n-1}}\cdot\sqrt{2\cdot \mathrm{g}\cdot \mathrm{k}\cdot \mathrm{h_0}} = \mathrm{k^n}\cdot\sqrt{2\cdot \mathrm{g}\cdot \mathrm{h_0}}$$

$$\mathrm{h_n} = \frac{\mathrm{v_n^2}}{2\cdot \mathrm{g}} = \frac{\mathrm{k^{2n}}\cdot 2\cdot \mathrm{g}\cdot \mathrm{h_0}}{2\cdot \mathrm{g}} = \mathrm{k^{2n}}\cdot \mathrm{h_0} \qquad (4)$$

A visszapattanások magasságának nagyságára vonatkozó (4) képletben szereplő k ütközési szám mindig páros kitevőn fog szerepelni, s így $h_n(k)$ folytonos függvény a $k\in[0,\ 1]$ szakaszon szigorúan monoton növekedik. A Weierstrass tételének a FIFA szabályzatában szereplő $k\in[\frac{7}{10},\ \frac{8}{10}]$ kritérium mellett történő alkalmazásakor az intervallum végpontjaiban találjuk $h_n(k)$ abszolút minimumát/maximumát.

A valóságban egy $h_0 = 2$ méter magasságból történő ejtés esetén ez a következőt jelenti:

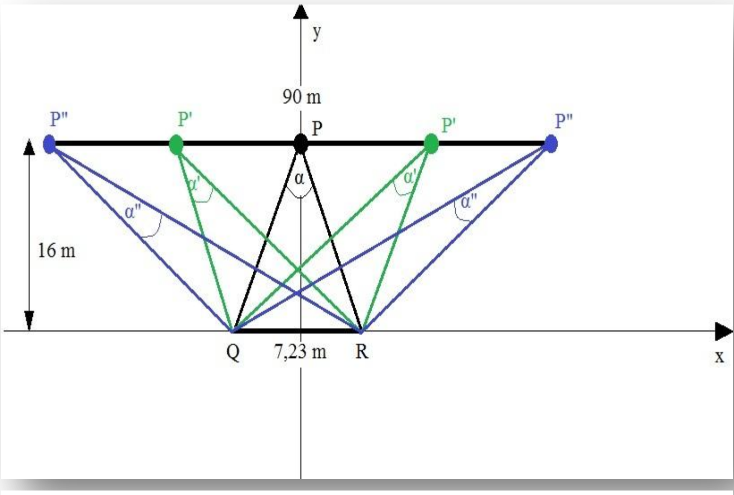
$n = 1$ pattanás esetén	$\mathrm{h_{1,min}}(0{,}7) = (0{,}7)^2\cdot 2 = 0{,}98\ \mathrm{m}$
	$\mathrm{h_{1,max}}(0{,}8) = (0{,}8)^2\cdot 2 = 1{,}28\ \mathrm{m}$
$n = 2$ pattanás esetén	$\mathrm{h_{2,min}}(0{,}7) = (0{,}7)^4\cdot 2 = 0{,}4802\ \mathrm{m}$
	$\mathrm{h_{2,max}}(0{,}8) = (0{,}8)^4\cdot 2 = 0{,}8192\ \mathrm{m}$

2.4.3 Szabadrúgás a 16-os vonaláról

A Nemzetközi Labdarúgó Szövetség (FIFA) jóvoltából minden esztendő végén sort kerítenek az úgynevezett Mesterlövészek Versenyére, amelyen a résztvevőknek különböző távolságokból kell egy kapus által őrzött hálóba találniuk. Ezúttal válasszuk ki egy 90 méter széles futballpálya alapvonalaival párhuzamos, az egyik kaputól 16 méter távolságban levő, oldalvonaltól oldalvonalig tartó egyenesét. Ezen az egyenesen haladva hol találjuk az(oka)t a ponto(ka)t, ahonnan egy „zsinóron húzott" lövésből a legkönnyebben találhatunk az 7,23 méter széles kapuba?(Segítségül: 1.legkönnyebben akkor találhatunk a kapuba, ha azt a lehető legnagyobb szög alatt látjuk; 2.zsinóron húzott lövés alatt egy egyenes pályán haladó labdát értünk)

M e g o l d á s :

A megoldáshoz vezető út kulcsfontosságú lépésének számít az, hogy a derékszögű koordinátarendszerben mit választunk origónak, valamint *x* és *y* tengelynek. Az ábrán látható módon szimmetriai okok miatt válasszuk a p = 7,23 méter széles kapu felezőpontját a kezdőpontnak, a pálya szélességét az *x*, hosszúságát pedig az *y* tengelynek.



2 4 . á b r a

Koordinátageometriai ismereteink segítségével adjuk meg *P*, *Q*, *R* pontokat, majd általánosítjuk az *x* tengellyel párhuzamos egyenesen futó *P* koordinátáit! A kifejezésekben szereplő számok méteregységekben értendőek.

Q = (-3,615 , 0) R = (3,615 , 0)

P = (0; 16) általánosan megadva: P = (x , 16) ahol $0 \leq x \leq 45$

Minden alkalommal egy *PQR* háromszöget fogunk kapni, melynek *P* csúcsánál található α szögére a háromszög *p*, *q*, *r* oldalainak ismeretében felírhatjuk a koszinusztételt.

$p = |\mathbf{QR}| = 7{,}23 = \text{állandó} \Rightarrow p^2 = 52{,}2729$

$r(x) = |\mathbf{PQ}| = \sqrt{(-3{,}615 - x)^2 + (0 - 16)^2} \Rightarrow r(x)^2 = x^2 + 7{,}23x + 269{,}068225$

$q(x) = |\mathbf{PR}| = \sqrt{(3{,}615 - x)^2 + (0 - 16)^2} \Rightarrow q(x)^2 = x^2 - 7{,}23x + 269{,}068225$

$$p^2 = r(x)^2 + q(x)^2 - 2 \cdot r(x) \cdot q(x) \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

A példában keresett legnagyobb szög pontosan a koszinusztételben is szereplő α szög, amelyre a következő kifejezést kaptuk: $\cos[\alpha(x)] = \frac{r(x)^2 + q(x)^2 - p^2}{2 \cdot r(x) \cdot q(x)}$ (2)

$$\cos[\alpha(x)] = \frac{2 \cdot x^2 - 485{,}86355}{2 \cdot (x^4 + 590{,}40935x^2 + 72397{,}7097)}$$

$$\alpha(x) = \arccos\left(\frac{2 \cdot x^2 - 485{,}86355}{2 \cdot (x^4 + 590{,}40935x^2 + 72397{,}7097)}\right) \qquad (3)$$

A Weierstrass-tétel értelmében a [-1, 1] intervallumon értelmezett *arccos* függvény folytonossága miatt mindig lesz abszolút maximum- és minimumhelye. Mivel az *arccos* függvény [-1, 1]-en még a szigorúan monoton csökkenés tulajdonságával is rendelkezik, ezért az abszolút szélsőértékhelyei a [-1, 1] intervallum végpontjaiban találhatóak. A $0 \leq x \leq 45$ feltétel értelmében (3) képletben szereplő kifejezés $x = 0$-ban veszi fel a maximumát, amelynek értéke:

$$\alpha(0) \quad = \arccos(\frac{-485{,}86355}{144795{,}4194}) = 90{,}192°$$

A probléma tovább általánosítható, ha nem kötjük ki, hogy a játékos a kaputól hány méterre fogja elvégezni a szabadrúgást.

$$Q = (-3{,}615\ ,\ 0) \qquad R = (3{,}615\ ,\ 0)$$

$$P = (x\ ,\ h) \text{ ahol } 0 \leq x \leq 45 \text{ és } 0 \leq h \leq 90$$

Minden alkalommal egy *PQR* háromszöget fogunk kapni, melynek *P* csúcsánál található α szögére a háromszög *p*, *q*, *r* oldalainak ismeretében felírhatjuk a koszinusztételt.

$p = |\mathbf{QR}| = 7{,}23 = \text{állandó} \Rightarrow p^2 = 52{,}2729$

$r(x,h) = |\mathbf{PQ}| = \sqrt{(-3{,}615 - x)^2 + (0 - h)^2} \Rightarrow r(x,h)^2 = x^2+7{,}23x+13{,}068225+h^2$

$q(x,h) = |\mathbf{PR}| = \sqrt{(3{,}615 - x)^2 + (0 - h)^2} \Rightarrow q(x,h)^2 = x^2 - 7{,}23x+13{,}068225+ h^2$

$$p^2 = r(x,h)^2+q(x,h)^2 - 2\cdot r(x,h)\cdot q(x,h)\cdot \cos\alpha$$

A példában keresett legnagyobb szög pontosan a koszinusztételben is szereplő *α* szög, amelyre a következő kifejezést kaptuk:

$$\cos[\alpha(x, h)] = \frac{r(x,h)^2+q(x,h)^2-p^2}{2\cdot r(x,h)\cdot q(x,h)} = \frac{2\cdot x^2-26{,}13645+2\cdot h^2}{2\cdot[x^4+(2\cdot h^2-26{,}13645)\cdot x^2+(170{,}7785+26{,}13645\cdot h^2+h^4]}$$

$$\alpha(x, h) = \arccos(\frac{2\cdot x^2-26{,}13645+2\cdot h^2}{2\cdot[x^4+(2\cdot h^2-26{,}13645)\cdot x^2+(170{,}7785+26{,}13645\cdot h^2+h^4]})$$

Így egy többváltozós függvényt kaptunk eredményül, melynek a szélsőértékeit a változókra vonatkozó feltételek teljesülése mellett – most: $0 \leq x \leq 45$ és $0 \leq h \leq 90$ – találhatjuk meg. Mivel munkákban csak egyváltozós esetek szélsőérték keresése szerepel, így a többváltozós eset kiszámításától most eltekintetnénk. Ugyanakkor konkrét paraméterek esetén kitűnően alkalmazható a *α(x, h)* függvényre kapott képlet.

Amennyiben az *x* értékét lerögzítjük, akkor az általunk vizsgált *α* szög nagysága és az alapvonaltól mért *h* távolság között fordítottan arányosságot fedezhetünk fel. Mivel a büntetőterületen belül elkövetett szabálytalanságért vagy tizenegyes, vagy közvetett szabadrúgás jár – utóbbi esetben nem lehet közvetlenül kapura rúgni a lasztit –, így a kommentátorok nem véletlenül hangoztatják a közvetítésekben azt, hogy egy, a kaputól 16 méterre elkövetett fault hatalmas gólszerzési lehetőséggel kecsegtet a támadó csapat számára. Itt jegyezzük meg, hogy számításunk helyességét egy látókörív szerkesztéssel könnyedén ellenőrizhetjük.

2.4.4. Kapusgól

A mai futballban már nem számít olyan meglepő jelenségnek az, ha egy hálóőr büntető- vagy szabadrúgásból szerez gólt saját csapata számára. Számítsuk ki, hogy egy szabályosan, α = 45°-os szög alatt elvégzett kapuskirúgás során mekkora v_0 kezdősebességgel kellene belerúgnia a labdába ahhoz, hogy az a közegellenállástól eltekintve éppen, illetve még a másik csapat kapujában – a kapu magassága 2,44 méter – kössön ki! (Segítségül: egy kapuskirúgás akkor tekinthető szabályosnak, ha a kapus az úgynevezett 5 és feles téglalap sarkáról – azaz az alapvonallal párhuzamos, attól 5,5 méterre lévő vonalról - hozza játékba a labdát)

M e g o l d á s :

A labda mozgását az azt akadályozó erőhatások elhanyagolhatóságának köszönhetően egy ferde hajítással írhatjuk le:

$$x = d = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot T \qquad (1)$$

$$y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot T - \frac{g}{2} \cdot T^2 + h_0 \qquad (2)$$

Fejezzünk ki *T*-t az (1) egyenletből, s helyettesítsük be (2)-be!

$$T = \frac{d}{v_0 \cdot \cos\alpha} \Rightarrow y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{d}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{d}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + h_0 = -\frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} + d \cdot \mathrm{tg}\alpha + h_0$$

Miután a labda elrúgásának helyét az egyszerűség kedvéért a koordinátarendszerünk origójába tettük, ezért az a kirúgást követően is az $y = 0$ koordinátában fog landolni.

$$0 = -\frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{v_0^2} \cdot (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + d \cdot \mathrm{tg}\alpha + h_0 \qquad (3)$$

Ezzel egy $tg\alpha$-ban másodfokú egyenletet kaptunk, melynek megoldását a bevett középiskolás módszereknek megfelelően a diszkrimináns vizsgálatával kezdünk:

$$D = d^2 - \frac{g^2}{v_0^4} \cdot d^4 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2} \cdot d^2 = d^2 \cdot (1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2} - \frac{g^2}{v_0^4} \cdot d^2) \geq 0$$

Miután $d^2 \geq 0$ mindig teljesül, ezért a zárójeles kifejezésnek is nemnegatívnak kell lennie. Azaz:

$$1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2} - \frac{g^2}{v_0^4} \cdot d^2 \geq 0$$

$$d^2 \leq \frac{v_0^4}{g^2} + \frac{2 \cdot h_0 \cdot v_0^2}{g}$$

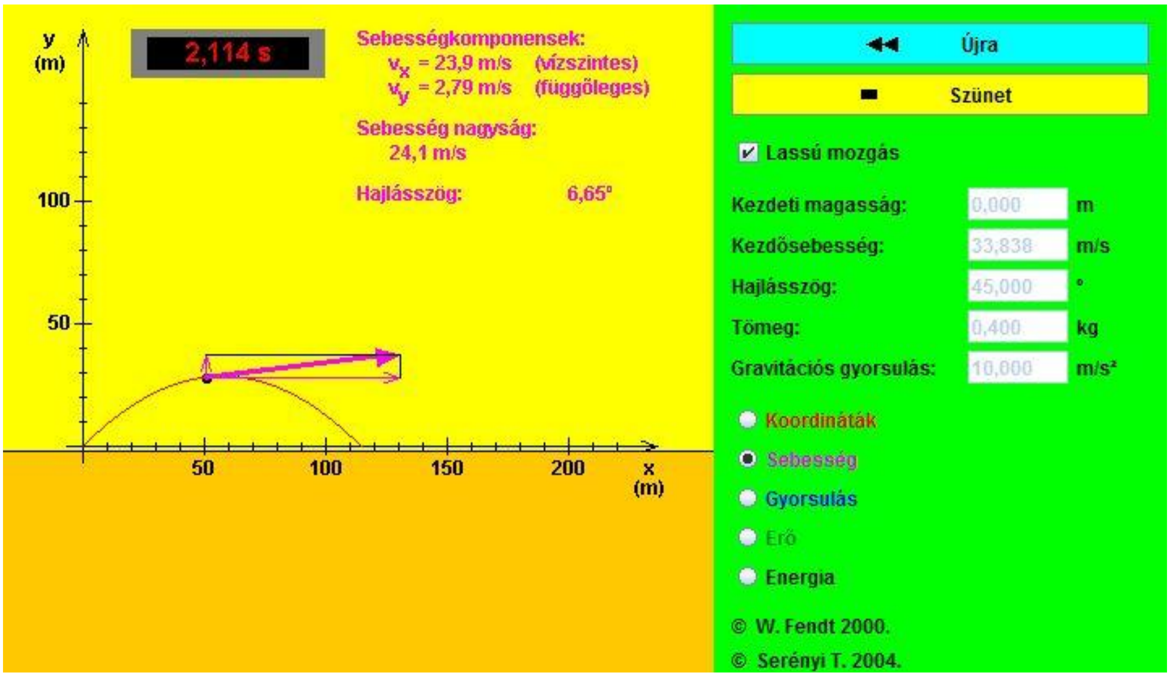
$$d_{max}^2 = \frac{v_0^4}{g^2} + \frac{2 \cdot h_0 \cdot v_0^2}{g}$$

$$d_{max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2}}$$

Amennyiben a labda éppen az ellenfél kapujának gólvonalán ér földet, akkor a d_{max} értéke $120 - 5{,}5 = 114{,}5$ méternek adódik, mivel a kapus nem az alapvonalról, hanem az attól 5,5 méterre húzott, az ő védelmét biztosító téglalap sarkáról hozza játékba a labdát. A $g \approx 10\,\frac{m}{s^2}$ -es gravitációs gyorsulással számolva:

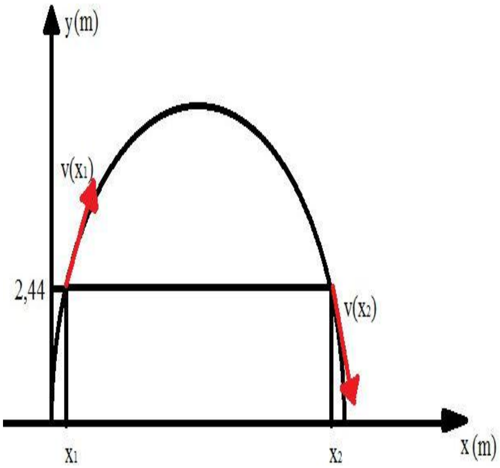
$$v_0^2 = d_{max} \cdot g$$

$$v_0 = \sqrt{d_{max} \cdot g} = \sqrt{(120\ \text{m} - 5{,}5\ \text{m}) \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 33{,}838\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 121{,}816\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$



25. ábra

A $d_{max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sqrt{1+\frac{2 \cdot h_0 \cdot g}{v_0^2}}$ összefüggés abban az esetben is használható, amikor a labda a felső lécet érinti. Most azonban nem tudjuk közvetlen úton megmondani d_{max} értékét. Ezért előbb azt kell meghatároznunk, hogy egy *2,44* méteres emelkedés mekkora *x* koordinátaváltozással jár. Ennek érdekében használjuk (3) egyenletet, melyben *d* szerepét ezúttal *x* veszi át.



2 6 . á b r a

$$y = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2} \cdot (1+tg^2\alpha) + x \cdot tg\alpha$$

$\alpha = 45°$-kal és $g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$ -es gravitációs gyorsulással számolva:

$$0 = -\frac{10\ \frac{m}{s^2}}{v_0^2} \cdot x^2 + x - 2{,}44m$$

Tudjuk, hogy egy ferdén elhajított test a parabolapályán mozogva ugyanannyi ideig emelkedik, mint ameddig esik. Így egy magassághoz – sőt: egy sebességnagysághoz - két különböző x hely is tartozik.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 2{,}44m \cdot \frac{10\ \frac{m}{s^2}}{v_0^2}}}{-\frac{20\ \frac{m}{s^2}}{v_0^2}} = \frac{1 \mp \sqrt{1-4 \cdot 2{,}44m \cdot \frac{10\ \frac{m}{s^2}}{v_0^2}}}{\frac{20\ \frac{m}{s^2}}{v_0^2}}$$

Ennek a másodfokú egyenletnek x_2 = 114,5 méter az egyik – nagyobbik – gyöke. Számítsuk ki a hozzá tartozó sebesség nagyságát!

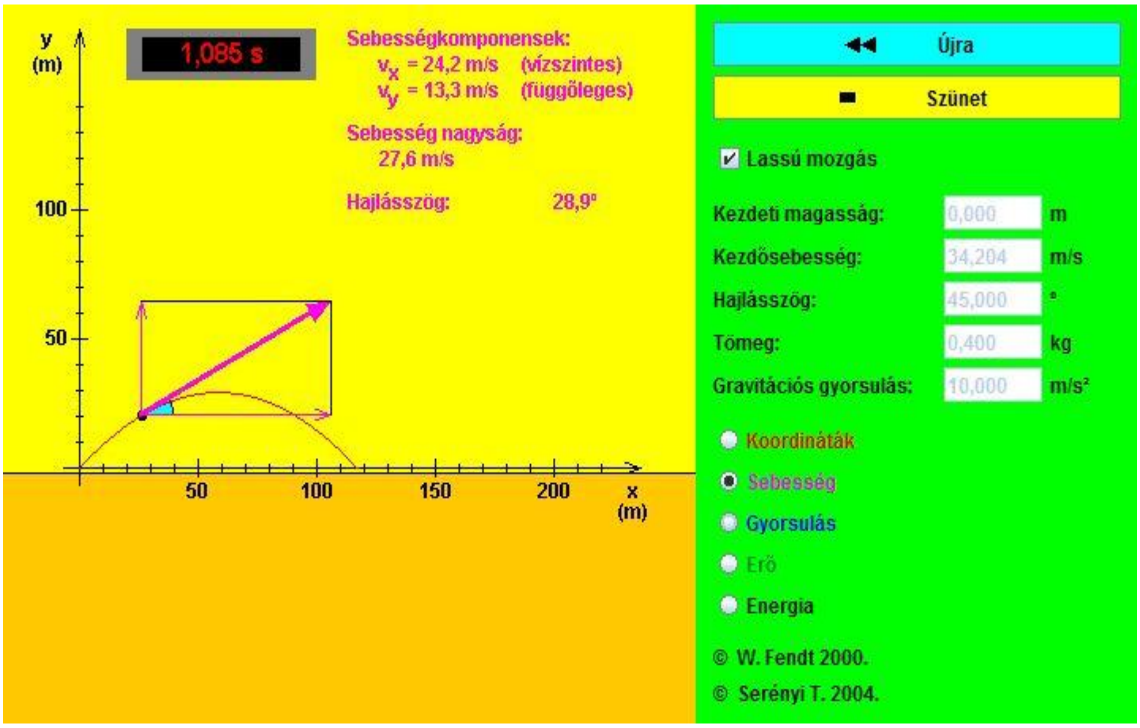
$$x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4 \cdot 2{,}44m \cdot \frac{10\ \frac{m}{s^2}}{v_0^2}}}{\frac{20\ \frac{m}{s^2}}{v_0^2}} \quad => v_0^2(x_2) = \frac{131102{,}5}{112{,}06} \frac{m^2}{s^2}$$

Mivel a sebességnagyság kizárólag nemnegatív értékeket vehet fel, így nyomban következik az, hogy $v_0^2(x_1) = v_0^2(x_2)$. Ennek ismeretében már meghatározható x_1 értéke:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-4 \cdot 2{,}44m \cdot \frac{10\ \frac{m}{s^2}}{v_0^2}}}{\frac{20\ \frac{m}{s^2}}{v_0^2}} \approx 2{,}493\ m$$

$$v_0^2 = d_{max} \cdot g$$

$$v_0 = \sqrt{d_{max} \cdot g} = \sqrt{(120\ \mathrm{m} - 5{,}5\ \mathrm{m} + 2{,}493\ \mathrm{m}) \cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \approx 34{,}204\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 123{,}135\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$



27. ábra

Összegezve a számításainkat arra az eredményre jutottunk, hogy egy szabályosan, *45°* fokos szög alatt elvégzett kapuskirúgás esetén a játékosnak $121{,}816\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \leq v_{0,kapus} \leq 123{,}135\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sebességgel kell „meglendítenie” a lábát ahhoz, hogy pattanás nélkül a másik kapuba találjon. Ezeket a sebességnagyságokat még a képzett játékosoknak is óriási feladatot jelentene elérni, azonban az időjárási tényezők kedvező összejátszása esetén – például hátszélben – megvalósíthatóvá válhat.

4. Kitűzhető feladat: Gól büntetőből

A futball világában gyakran szokták azt hangoztatni, hogy a büntetőt csak rosszul lehet rúgni. Számold ki, hogy a kaputól 11 méterre lehelyezett, v_0 kezdősebességgel α szög alatt panenkásan meglőtt, a 2,44 méter magas keresztlécről bepattanó labdára legfeljebb mennyi ideje lehet a kapusnak reagálni, ha a labda pályája a gyepre merőleges, függőleges síkban egy ferde hajítás segítségével írható le!(Segítségül: panenkás rúgás alatt azt értjük, ha a játékos a lábfejével alálöbböl a labdának)

3. Összegzés

Szakdolgozatomban a matematika sokszínű módszereinek és a mozgásfajták fizikai mechanizmusának különböző sportágakban történő összekapcsolódását vizsgáltam. Munkám során a számomra még ismeretlen összefüggések felderítése helyett a problémák realisztikus megközelítésére, értelmezésére és szemléltetésére helyeztem a hangsúlyt.

Matematika-fizika szakos tanárjelöltként a két tudományág oktatása mellett fontos, érdekes kihívásnak érzem azt, hogy ezeket a tantárgyakat mennyire sikerül megkedveltetni a diákokkal. Miután a fiatalok többsége még mindig szeret mozogni – sőt szervezetük igényli is ezt a kikapcsolódást –, ezért a figyelemfelkeltésük érdekében a legkülönfélébb sportágakat hívtam segítségül. Meglátásom szerint bonyolult pedagógiai feladatnak számít az, hogy a sportágak kiválasztásakor mindenkinek sikerüljön a kedvére tenni. Miután a pályákról kiragadott szituációk között olykor több hasonlóság is felfedezhető, ezért az oktató éberségén, szemfülességén is múlhat a kedvcsinálás sikeressége.

Dolgozatomban igyekeztem az egyes témaköröket minél alaposabban körbejárni, azonban a dinamikusan fejlődő műfajok mindegyikének feldolgozása lehetetlen küldetésnek ígérkezett. A feladatok készítése során nagyon ügyeltem arra, hogy a felvezetőkben ismertetett modellezési kritériumoknak megfeleljenek. Ez mind nagy odafigyelést igényelt. Ugyanakkor úgy gondolom, hogy megérte a fáradtságot, mert érdekes témával foglalkoztam, melyekből hasznos és meglepő matematikai megállapítások születtek. Különösen jónak találtam, hogy a matematika legkülönbözőbb tárgykörei bukkantak fel egy-egy feladat megoldása során.

Szemléletmódomra is nagyban rányomta a bélyegét ez a vizsgálódás, hiszen a sportolók teljesítményét most már „matematikai szemüvegen” keresztül is értékelni tudom. Bízom benne, hogy ezzel az olvasmánnyal idősebbeket és fiatalabbakat egyaránt sikerül motiválnom abban, hogy a karosszék és a számítógép helyett továbbra is a rendszeres mozgás mellett tegyék le voksukat.

Irodalomjegyzék

[1] **Laczkovich Miklós, T. Sós Vera:** Analízis I. (Nemzeti Tankönyvkiadó – Budapest 2006)

[2] **Kovács István, Párkány László:** Mechanika I. (Nemzeti Tankönyvkiadó – Budapest 2007)

[3] **Bonifert Miklós:** Néhány tipikus problémaszituáció matematikából (Mozaik Oktatási Stúdió - Szeged 1994, 2. kiadás)

[4] http://hu.wikipedia.org/wiki

[5] http://sdt.sulinet.hu

[5] az illusztrációként felhasznált képek forrása az internet

[6] a 2.4.3. pontban használt program forrása: **Walter Fendt, Serényi Tamás**: http://www.walter-fendt.de/ph14hu/projectile_hu.htm (2004)