Matematika a zenében

Szakdolgozat

Készítette: **Kiss Gabriella**

Matematika Bsc, tanári szakirány

Témavezető: **Szeredi Éva**, főiskolai docens

ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

„ Oh, egek – mennyi ügyes módszer szolgál arra, hogy valamit elrejtsünk egy zeneműben…”

(D. R. Hofstadter: Gödel, Escher, Bach)

Bevezetés

2007-ben felvételt nyertem az ELTE TTK által meghirdetett Matematika Bsc szakra. A matematika tanári szakirány választása nem volt kérdéses, hiszen már az egyetemre való jelentkezés előtt tudtam, hogy erre a területre szeretnék szakosodni. Mindig is nagyon szerettem a zenét, így második évben felvettem az Ének-zene tanári szakirányt. Egyik vezénylés órán egy Bartók kórusművet kellett vezényelni, ahol a tanárom érdekességképpen elárulta, hogy a darab csúcspontja éppen az aranymetszéspontban van. Az aranymetszés fogalmával már korábban is találkoztam matematikai tanulmányaim során, így nagyon megörültem, hogy a zene ily módon összekapcsolódhat a matematikával. Annyira felkeltette az érdeklődésemet, hogy elkezdtem ebben a témában kutakodni, nem csak aranymetszést keresve, hanem bármilyen matematikai vonatkozást a zenében. Meglepődve tapasztaltam, hogy a rendelkezésemre álló szakirodalom és tanulmányok sokasága hatalmas anyagrészt fed le, elegendőt egy szakdolgozati téma körüljárásához, ezért döntöttem a saját magam által kitalált téma választása mellett.

Az anyag, amit találtam túl nagy egy Bsc diplomamunkában való kifejtéshez, így annak csak egy részét tudom reprezentálni. A témakörök, amelyek mellett döntöttem a zenében való arányok - részletesebben az aranymetszés- valamint az egybevágósági transzformációk megjelenése. Ennek megfelelően próbáltam meg összeszedni matematikai definíciókat, tételeket, amelyek szervesen kapcsolódnak zenei kompozíciókhoz.

Az első fejezetben a phytegoreusok által felfedezett zenei arányokról, valamint az irracionális számokról beszélek. A második fejezetben az aranymetszéshez összegyűjtött matematikai és zenei eredményeket ismertetem. A harmadik fejezetben a szimmetriákkal foglalkozom. Ez egy hatalmas terület, a matematikai háttere és a képzőművészetben, zenében való megjelenése is nagyon gazdag. Ennek a gazdagságnak a dolgozatomban csak egy kis szeletét mutatom be, de témában nagyon szívesen folytatnám a keresgélést és bővebben kifejteném egy Msc-s szakdolgozati diplomamunka keretében.

1. A Phytagoreusok és munkásságuk

1.1 A hangok arányainak felfedezése

A matematika és zene kapcsolatának kutatásáról már i.e. a VI. századból is vannak forrásaink, ezek közül elsőkként említhetjük meg Pythagoras tanait, illetve tanítványainak, a pythagoreusok által feljegyzett és megfogalmazott észrevételeket. „Pythagoras körül még életében egy filozófiai iskola és közösség szerveződött Kroton városában. Az ókori forrásokból a pythagoreus iskola következő képe bontakozik ki: egy szigorú életelvekhez és kemény felvételi feltételekhez kötött, a beavatottság foka szerint „körökre" osztott, elitista és arisztokratikus jellegű szervezeté, melynek Pythagoras feltétlen irányítója volt." [4] A pythegoreusok felfogása szerint a számok álltak mindenek felett, „ amiről ki tudták mutatni, hogy megegyezik a számokban és a harmóniákban az ég tulajdonságaival, részeivel és az egész rendszerrel, azokat összeszedve egymással kapcsolatba hozták. Ha pedig valami híja volt, minden igyekezetükkel azon voltak, hogy egész elgondolásuk hézagtalanul összefüggő egész legyen." [1] A harmónia természetét és viszonyait is a számok segítségével próbálták meghatározni.

Gyakran kísérleteztek monochordon (egyhúrú hangszer) a konszonancia (zenei hangok harmonikus összecsengése) és a húrhosszak közötti összefüggéseket keresve. Mesterük, Pythagoras fogalmazta meg a húrhosszak arányát a konszonancia megszólaltatására. Ennek felfedezéséről szól egy monda, mely szerint „ Egy alkalommal éppen gondolataiban és feszült töprengésben merült el afelől, hogy nem tudna-e a hallásnak valami segítő eszközt kitalálni…Eközben egy kovácsműhely mellett ment el, s valami isteni véletlen folytán meghallotta a kalapácsokat, amint az üllőn a vasat kalapálták, s hogy egymásnak egy kapcsolat kivételével vegyesen, de összhangzóan adták a hangokat. Felismerte ugyanis bennük az oktávot, a kvintet, a kvartot…berohant a kovácsműhelybe, és sokféle kísérlet révén úgy találta, hogy a hangok különbségének oka a kalapácsok súlyában rejlik…Ez után a mértékeket és a kalapácsokkal a legteljesebben megegyező súlyokat pontosan megjegyezve hazatért, és átlósan a falakba erősített egyetlen cöveket…Erre felfüggesztett négy, azonos anyagú, azonos hosszúságú, azonos vastagságú és egyformán sodrott húrt, éspedig egyiket a másik mellé. A nehezékeket alsó részükre kötötte, úgy szerkesztve, hogy a húrok hosszúsága teljesen egyenlő legyen. Akkor felváltva, kettőnként megpendítette a húrokat, és így megtalálta az …összhangokat.” [1], hogy Pythagoras valóban egy kovácsműhelyben jött rá erre a felismerésre azt nem tudjuk, ami viszont biztos, hogy tőle származik a hangközök arányainak leírása. A feljegyzések szerint négyféle súlyt használt, melyek rendre 12, 9, 8, és 6 mértékűek voltak. A legnagyobb súly a legkisebbel oktáv hangzatot adott (12:6, ahogy a súlyok aránylottak), így megállapította, hogy az oktáv 2:1 arányú. A legnagyobb a legkisebb mellett lévővel kvinthangzást adott (12:8), így az arány 3:2 , a legnagyobb, illetve a súlyban utána következő (12:9) a kvart hangközt eredményezte, így annak aránya 4:3 lett.

További eszközökön is kísérletezett, többek között monochordon is. A kifeszített húrt megpendítve kapta az alaphangot. Ugyanezzel a feszítéssel, ha a húrt a felére rövidítette, akkor az alaphang oktávja hallatszott. A kétharmadára rövidített húr a kvintet, a háromnegyed hosszúságú húr, pedig a kvarthangzást adta.

A pythegoreusok az alaphangot adó húr hosszát 12 egységnek vették, így ők is megkapták ugyanazokat a számokat, mint Pythagoras, mely szerint a kvarthoz tartozó húrhossz 9, a kvinthez 8, az oktávhoz pedig 6 egység. Ezek után pedig a következő összefüggéshez jutottak, melyek a húrhosszak arányaira vonatkoznak: 12:9=8:6 , mind a két oldalon lévő arány a kvarthangzást határozza meg.

Az oktávot kétféleképpen is felírhatjuk a kvint és kvart hangközök összeillesztéséből: kvart+kvint=oktáv, illetve kvint+kvart=oktáv.

1. ábra

Ha arányokban akarunk gondolkodni - vagyis a kvart (4:3), illetve kvint (3:2) arányából, hogyan fejezhetjük ki az oktáv arányát (2:1)- akkor nem az összeadás műveletét kell alkalmaznunk, hanem a pythagoreusok helyes észrevétele szerint szoroznunk kell.

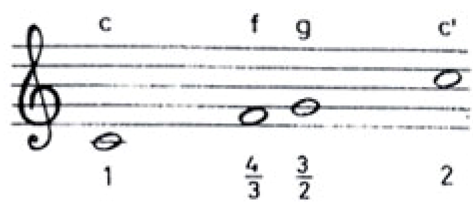
„Kvart+kvint=oktáv összeadásnak a (4:3)·(3:2)=(2:1) szorzás felel meg, ebből következik, hogy az oktáv-kvart=kvint kivonásnak a (2:1): (4:3)=(3:2) osztás felel meg." [2]

1.2 A skálák felépítése

Nézzünk egy c hangot adó, 12 egységnyi hosszúságú húrt. Ezt megfelezve ismét egy c hang szólal meg, csak egy oktávval magasabban. Ebben az esetben a hangokhoz a húrhosszakat rendeltük 2:1 arányban. Viszont ha a fizika törvényeit is figyelembe veszzük, melyek szerint a magasabb hanghoz nagyobb frekvencia tartozik (például, az alsó c hang frekvenciája 264Hz, a fölső c hangé pedig 528Hz), akkor a hangokhoz a húrhosszak fordított arányát kell hozzárendelnünk.
A következőkben ezt a fajta hozzárendelést fogom használni.

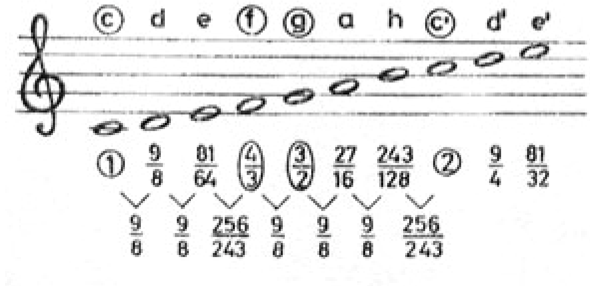
A phytagorasi hangsor

A pythagorasi hangtan ismereteinek segítségével felírhatjuk az ötvonalas rendszerben a következőket:



2.ábra

De nem csak ennek a négy hangnak az arányát lehet megállapitani az alaphanghoz képest, hanem a C-dúr skála összes hangját, mégpedig c-ről kiinduló kvintugrásokkal. Ezt nevezzük *phytagorasi hangsornak.*
Minden kvintugrásnál az adott hang arányszáma 3/2-szeresére nő. A 3. ábrán a c-hez viszonyított hangok arányszámát találjuk, valamint a szomszédos hangok közötti távolságoknak az arányszámát.



3.ábra

Ezeket az arányszámokat kétféle számolással is megkaphatjuk.

Sain Márton a következőképpen számolt: az első kvintugrással a c hangról a g-re jutunk, 1·3/2. (Az alaphanghoz az 1-es számot rendeljük, jelen esetben c=1). A második ugrás g-ről d'-re 9/4-et ad, 3/2·3/2. Ezt egy oktávval lejjebb úgy kapjuk meg, ha leosztjuk 2-vel, tehát a d hanghoz a 9/8-os arányszám tartozik. A következő ugrás az a hangra visz 9/8·3/2=27/16. Az a hangról e'-re ugrik, 27/16·3/2=81/32, ami egy oktávval mélyebben 81/64-ed arányszámot adja. Végül e-re egy kvintugrással megkapjuk a h hangot, 81/64·3/2=243/128.

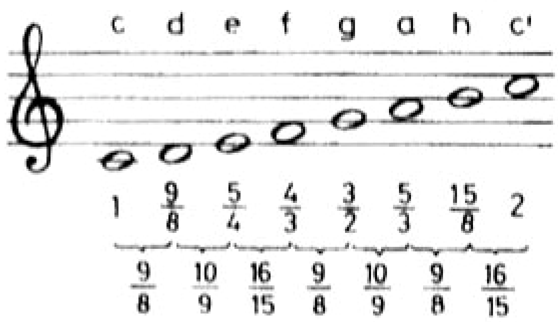
Saját elgondolás szerint egy kicsit rövidebb módszerrel határoznám meg ezeket az arányszámokat. Nem kvintugrásokban gondolkodok, hanem nagy szekundlépésekben. A nagy szekund arányszámát pedig az 1.1-es részben már említett módon kapom meg. Adott a kvart és a kvint hangközök arányszáma, így meghatározhatom a kvint-kvart távolságot is, ami egy nagy szekundnak (egész hangköznek) felel meg. (3:2):(4:3)=(9:8). Tehát, ha c hangról elkezdek felfelé lépegetni nagy szekundokban, akkor az arányszámokat 9/8-al kell szoroznom és így megkapom az ábrán látható törtszámokat. Természetesen a kis szekundlépéseket úgy kerülöm ki, hogy a kvart, kvint és oktáv arányszámát adottnak tekintem.

Akármelyik gondolatmenetet is nézzük, pythagorasi hangsort nem tudunk felépíteni, mivel sohasem juthatunk el az alaphang oktávjához, sem kvintugrásokkal, sem pedig nagy szekundlépésekkel. Matematikai megfogalmazásban 3/2-nek és 9/8-nak nem létezik olyan pozitív egész kitevőjű hatványa, mely megegyezne a 2-nek valamely pozitív egész kitevőjű hatványával. Nagyon kicsi eltéréssel megközelíthetjük az alaphang oktávjainak az arányszámát, például $(9/8)^6 \approx 2{,}02728$, ami nagyon közel van 2-

nek az első hatványához és a fül számára is szinte elhanyagolható ez a kis különbség, mégis két különböző hangot határoznak meg.

A diatónikus skála

A nyolcfokú pythagorasi skálához nagyon hasonló diatónikus skála, másnéven hétfokú hangsor, sokkal szélesebb körben terjedt el. Lényege, hogy az oktávot hét hangköz alapján osztja fel, illetve a hangközei kis egész számok arányaival vannak kifejezve, lásd az alábbi ábrán!



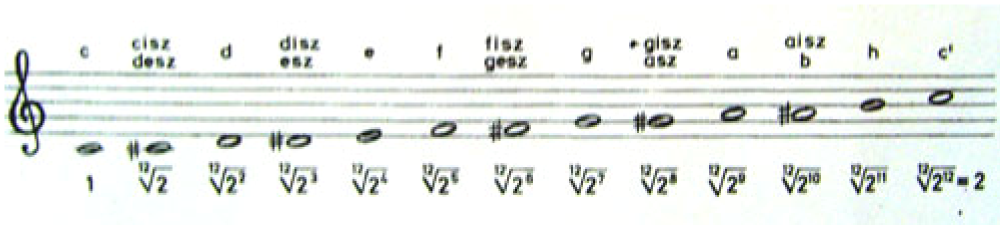
4.ábra

A két skála közötti eltérés nagyon kicsi, elég ha egy hangon megvizsgáljuk. Nézzük meg a phytagorasi skálában az e hanghoz tartozó arányt: 81/64, ugyanehhez az e hanghoz a diatónikus skálában 5/4 arány tartozik. Közös nevezőre hozva:

81/64 ; 80/64=5/4.

A temperált skála

A XVIII. század elején megjelent az igény a transzponálásra, mely szerint nem csak a c hangra építhetek hangközöket egymás után, hanem a skála bármely hangjára. Az oktáv egy újfajta felosztását vették. A zongora billentyűin jól látható hogyan is történt a felbontás, a fehér billentyűk már adottak voltak, a fekete billentyűk beillesztésével emelték a hangok számát 7-ről 12-re. Így az oktávot 12 egyenlő hangközre osztották. Egy adott hangra, ha elkezdjük felépíteni egymás után ezt a hangközt, a 12. lépés után eljutunk az adott hang oktávjához, vagyis, ha k-val jelöljük ennek a hangköznek az arányát, akkor $1\cdot k^{12}=2$, $k=\sqrt[12]{2}\approx1{,}0595$. Így kapták meg az egyenletesen temperált kromatikus hangsort:



5.ábra

1.3 <u>Irracionális számok felfedezése</u>

Mint már láttuk a phytegoreusok a zeneelmélet területén jelentős eredményeket értek el. Többek között megállapították a hangok egymáshoz való viszonyát, amelynek segítségével tudatosan tudunk hangközöket képezni és megszólaltatni.

A világ összes jelenségét a számokkal próbálták kapcsolatba hozni. A természeti elemekhez testeket rendeltek, mint például, a tűzhöz tetraédert, a levegőhöz oktaédert, a vízhez ikozaédert. Az elemeknek nem csak testeket, hanem évszakokat is megfeleltettek, azoknak pedig számokat. Sőt, az évszakok egymáshoz való viszonyát a hangközök segítségével fejezték ki, mely szerint a tavasz az őszhöz kvart, a télhez kvint, a nyárhoz pedig oktáv viszonylatban áll.

Ez mind azt mutatja, hogy a számok mindenek felett álltak, ezért nem is olyan meglepő, hogy a matematika területén is számos felfedezésre jutottak.

Az irracionális számok felfedezését is a phytagoreusoknak tulajdonítják.

Ez a problémakör a négyzet oldala és átlójának összemérhetősége kapcsán merült fel.

Proklosz -görög filozófus, költő és matematikus, Kr.u.412- Kr.u.485. – kommentárjai, Platón, az Állam című művéhez, a mai napig fönnmaradtak. Írásaiban az alábbi módon határozta meg az oldal-és átlószámokat.

Az egységet, mint minden szám ősét definiálta, amely egyben oldal és átló is lehetett. Egy oldal-és egy átlóegységből alkotott új oldalakat, illetve átlókat, a következőképpen: új oldalt kapunk, ha az oldalegységhez egy átlóegységet adunk, és új átlót kapunk, ha az átlóegységhez két oldalegységet adunk.

Így az újonnan keletkezett oldalszám 2, az átlószám pedig 3. Ugyanezt az eljárást folytatjuk a kapott számokra, vagyis 2+3=5, 2·2+3=7, és így tovább. Az algoritmus folytatásával a következő rekurziós képletet kapjuk:

$$a_{n+1}=a_n+d_n, \quad d_{n+1}=2\cdot a_n+d_n$$

A kérdés, ami rögtön felmerülhet, mégis hogyan jöttek rá, hogy a fent említett módon alkossunk oldal-és átlószámokat?

A következőkben B.L. Van der Waerden sejtését szeretném ismertetni, amelynek tanulmányozása során tömör leírása részletesebb kidolgozásra és utánagondolásra késztetett. Van der Waerden sejtése Proklosz: Kommentár Platón Államához című művének ihletése nyomán született, melyre néhány összefüggés felhasználásánál hivatkozik is.

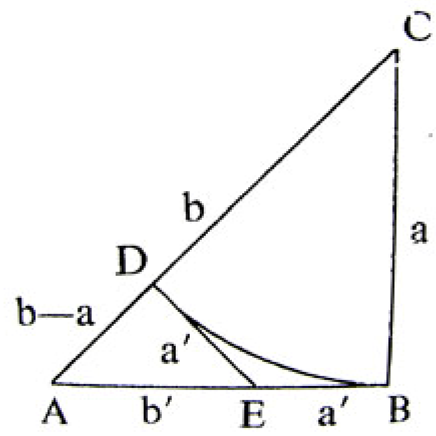
A görög matematikában két mennyiség összemérhetőségét egymás váltakozó kivonásával állapították meg. Ez azt jelenti, hogy a kisebb mennyiséget elvesszük a nagyobbikból, $b>a$ feltételezésével a $(b-a)$ mennyiségről beszélünk.

Az újonnan kapott két mennyiség összemérése után ismét a nagyobból kivonjuk a kisebbet. Közös mérték létezése esetén, a folyamat végén két egyenlő mennyiséget kapunk, ezt hívjuk a legnagyobb közös mértéknek.

A módszer ismerős lehet, így állapítjuk meg két számnak a legnagyobb közös osztóját. Ha összemérhetetlen mennyiségekre alkalmazzuk az algoritmust, akkor a folyamatnak nem lesz vége.

A fent említett eljárással próbálták a négyzet oldalának és átlójának a legnagyobb közös mértékét megkeresni, az alábbi módon.

Legyen a egy négyzet oldala, b pedig az átlója. Mivel a<b, ezért a-t vonjuk le b-ből, az alábbi ábra szerint.



6.ábra

Ekkor a maradék b-a =AD. A D pontból húzzunk érintőt az a sugarú körhöz, úgy hogy az metssze az AB oldalt az E pontban. Az A csúcsnál 45°-os szög helyezkedik el, a D csúcsnál pedig derékszög, ezért AD=DE=a'. Külső pontból körhöz húzott érintők hossza megegyezik, ezért EB=a'.

A maradékot, vagyis a'-t az algoritmus szerint vonjuk le a=AB oldalból, ekkor b'=AE az újabb maradék. Az így kapott a' és b' szintén egy négyzet oldala, illetve átlója.

$$b'=a-a', \quad a'=b-a$$

A fenti összefüggésből már látszik, hogy honnan jött az oldal-és átlószámok képzésének szabálya:

$$a=a'+b', \quad b=2\cdot a'+b'.$$

Ezt az eljárást folytatva ismét egy kisebb oldalt és átlót kapunk, majd azokra alkalmazva a szabályt, szintén újabbakat. Bizonyos lépés után az oldalak és átlók közötti különbség elenyészően kicsi lesz. Így két kis mennyiség esetén, ha elfogadjuk azok közelítő egyenlőségét, valamint az egyiket hosszegységnek választjuk, akkor a rekurziós képlet segítségével visszahelyettesítve, az a és b-t, a' és b'-t, a'' és b''-t, … és így tovább, kifejezhetők egymás utáni oldal-és átlószámokkal.

Térjünk vissza az $a_{n+1}=a_n+d_n$, $d_{n+1}=2\cdot a_n+d_n$ rekurziós képlethez.
A görögök észrevették, az alábbi összefüggést az n-edik oldal- és átlószámok között

$$d_n^2=2\cdot a_n^2\pm 1.$$

Valószínűleg ismerhették a teljes indukció módszerét, ha nem is név szerint, de elvben igen. Lássuk az összefüggés egy bizonyítását!
Szükségünk lesz hozzá a következő azonosságra

$$(2m+n)^2+n^2=2m^2+2(m+n)^2$$

$$4m^2+4mn+n^2+n^2=2m^2+2m^2+4mn+2n^2$$

A zárójelek felbontásával könnyen igazolható az azonosság helyessége.

Ezután a $d_n^2=2\cdot a_n^2\pm 1$ összefüggésre alkalmazzuk a teljes indukciót.

1.) k=1-re igaz, hiszen $a_1=d_1=1$, (negatív előjellel véve az egyet)
k=2-re is igaz, $a_2=2$, $d_2=3$, (pozitív előjellel véve az egyet)

Ha n páratlan, akkor negatív előjellel vesszük az egyet, ha pedig n páros, akkor pozitívval.

2.) Tegyük fel, hogy k=n-re igaz, ez az indukciós feltevésünk, vagyis

$$d_n^2=2\cdot a_n^2\pm 1$$

3.) Nézzük meg k=n+1-re!

Ehhez a $(2m+n)^2+n^2=2m^2+2(m+n)^2$ azonosságból indulunk ki. Helyettesítsünk be m és n helyére az n-edik oldal- és átlószámot!

$$(2a_n+d_n)^2+d_n^2=2a_n^2+2(a_n+d_n)^2$$

A rekurziós felírás értelmében $d_{n+1}=2\cdot a_n+d_n$ és $a_{n+1}=a_n+d_n$

$$d_{n+1}^2+d_n^2=2a_n^2+2a_{n+1}^2.$$

Átrendezés után, használjuk fel az indukciós feltevést, mely szerint $d_n^2=2\cdot a_n^2\pm1$

$$d_{n+1}^2=2a_{n+1}^2+2a_n^2-d_n^2$$

$$d_{n+1}^2=2a_{n+1}^2-(\pm1).$$

Ezzel beláttuk, hogy ha n-re érvényes, akkor (n+1)-re is igaz, csak ellenkező előjellel és ezt folytathatjuk a végtelenségig, nagyon nagy n-ekre is. □

Mai matematikai tudásunkból már tudjuk, hogy egy négyzet oldalának és átlójának az aránya $1/\sqrt{2}\approx0{,}70710678\ldots$

<u>*Észrevétel*</u>: a phytegoreusok által meghatározott oldal-és átlószámok aránya egyre jobban közelíti ezt az értéket

$2/3\approx0{,}66\ldots$; $5/7\approx0{,}714\ldots$; $12/17\approx0{,}7058\ldots$; $29/41\approx0{,}70731\ldots$

<u>*Állítás:*</u> Az oldal és az átlószámok aránya n növekedésével $1/\sqrt{2}$-höz tart.

<u>*Bizonyítás:*</u>

Ennek igazolására ismét tekintsük a már jól ismert összefüggést!

$$d_n^2=2\cdot a_n^2\pm1 \qquad /: a_n^2$$

$$d_n^2/:a_n^2=2\pm1/a_n^2$$

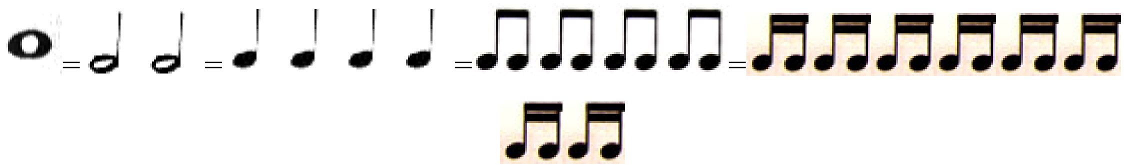
$$a_n\to\infty,\quad 1/a_n^2\to0$$

$$d_n^2/a_n^2\to2$$

$$d_n/a_n\to\sqrt{2}$$ □

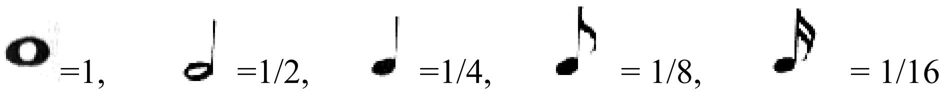
1.4 Törtek tanítása a zenén keresztül

A törtek témaköre nehezebben feldolgozható anyagrésznek számít a gyerekek körében, sokszor nem csak az általános iskolában, hanem a középiskolában is felmerülnek megértésbeli problémák.
Pontosan ezért nagyon fontos, hogy az alapok már a tanulmányok megkezdése elején jól rögzüljenek. A törtek fogalmának kialakulása hosszabb idő. Már első osztályban is találkoznak vele, csak egy másik megjelenési formájukban. Ezek a ritmusértékek.



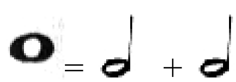
7.ábra

Mivel ez egy jóval korábban megalapozott tudás –hiszen a gyerekek már első osztályban énekelnek kottából- ezért érdemes figyelembe venni ennek a bonyolult fogalomnak a bevezetésénél.
Ha megfigyeljük az ábrán ezeknek a ritmusértékeknek a neveit, akkor észrevehetjük, hogy ezek egyben számok nevei is.



8.ábra

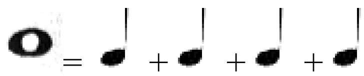
Egy egész kottát 2 darab fél kottára bonthatok, ami azt jelenti, hogy fele annyi ideig tartom, más szóval kétszer olyan gyorsan ütök, tehát egy egészet felbonthatok két félre. Ezt úgy is lehet érzékeltetni a gyerekeknek, hogy két csoportra bontjuk az osztályt és az egyik csoport egész hangértékeket tapsol, míg a másik fél hangértékeket. Láthatják, hogy egy egész hang tartása alatt kétszer lehet egy fél hangot tapsolni, vagyis



1 = 1/2 + 1/2

9.ábra

Ugyanígy be lehet vezetni a negyed fogalmát. Egy egész hang tartása alatt, négy darab negyed hangértéket tapsolhatok, ezért egy egészet négy darab negyedre bonthatok.

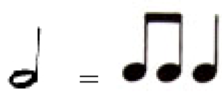


1 = 1/4 +1/4 + 1/4 + 1/4

10.ábra

Ugyanígy meg lehet nézni a tizenhatodra, és így tovább.

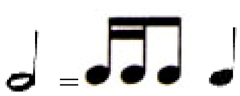
Törtek összeadásának szemléltetésére segítségül hívhatjuk a ritmusértékeket, hiszen ugyanonnan származtatjuk őket. Az egészet osztjuk fel egyenlő részekre. Ritmusértékek segítségével törteket adhatunk össze, és fordítva.



1/2 = 1/8+1/8+1/4

11.ábra

Másik fajta feladat, amely szintén segít a törtek összeadásának megértésében:

 =1/16+1/16+1/8+1/4=2/16+1/8+1/4=1/2

12.ábra

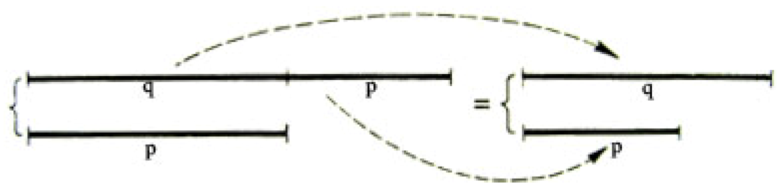
Ebből az egyenlőségből, ha egyet megadok, akkor a hiányzó adatokat meg lehet határozni. Érdemes úgy feladni a feladatot, hogy az egyik oldalon egy hangértékek, a másikon pedig törtek legyenek.

2. Az aranymetszés

2.1 A fogalom tisztázása

„Sokak szerint Pitagorasz és iskolája hozta először szoros összefüggésbe a geometriában szemlélhető harmóniát a szépségben rejlő harmóniával. „[15]
Pontosan erről szól ez a fejezet, egy olyan kitüntetett aránypár bemutatásáról, amelynek számos előfordulási helye is azt mutatja, hogy érdemes odafigyelnünk rá.

Az aranymetszés alatt egy aránypárt értünk, amely a következőképpen keletkezik: Egy távolságot vagy mennyiséget úgy osztunk ketté, hogy az egész szakasz (vagy mennyiség) aránya a nagyobbikhoz megegyezzen a nagyobbik szelet (vagy mennyiség) és a kisebbik szelet arányával.

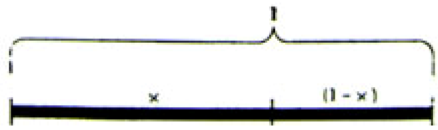


13.ábra

Ha a szakaszok p és q hosszúak, $p<q$ esetén, akkor az alábbi arányt írhatjuk fel:

$$(p+q):q=q:p$$

Az aranymetszés szeleteinek az aránya $(\sqrt{5}+1)/2$. Ezt úgy kaphatjuk meg a legkönnyebben, ha az egész távolságot egységnek vesszük, a nagyobbik szeletet pedig egyenlőre egy ismeretlennel, mondjuk „x”-szel jelöljük és felírjuk ismét a definícióból az arányokat.



14.ábra

$$1:x=x:(1-x)$$

/rendezve az egyenletet a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2+x-1=0$$

/ a másodfokú megoldó képletbe behelyettesítve két megoldása lesz az egyenletnek, de mi csak a pozitív gyököt vesszük figyelembe, mivel x>0 ismeretlen egy távolságot jelöl

$$x_1=(\sqrt{5}-1)/2\approx 0,618$$

$$[x_2=-(\sqrt{5}+1)/2\approx -1,618]$$

Ekkor $1-x=1-(\sqrt{5}-1)/2=(3-\sqrt{5})/2$.

A két szelet aránya $x/(1-x)=(\sqrt{5}-1)/(3-\sqrt{5})$, ami gyöktelenítés után $(\sqrt{5}+1)/2$.

A következő definícióra Bartók szonátájának elemzésénél lesz szükség.

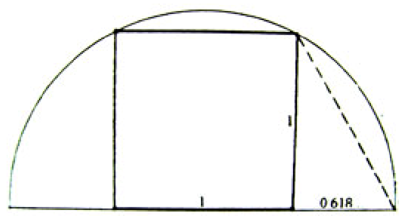
Definíció: Az aranymetszés kétféleképpen állhat elő, a hosszú és a rövid szelet sorrendjétől függően. Hosszú+rövid szelet sorrend fennállása esetén pozitív, rövid+hosszú aranymetszet fennállása esetén pedig negatív aranymetszetről beszélünk.

2.2 Szerkesztési módok

Többféle módon is szerkeszthetünk aranymetszést, ezekből kétféle típust szeretnék ismertetni.

Az *első szerkesztési mód* egy görög matematikus nevéhez fűződik, Eudoxushoz.

Egy egység oldalú négyzet fölé félkörívet szerkesztünk.



15.ábra

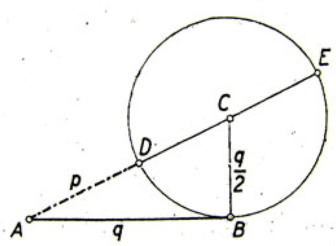
Phytagoras tételének segítségével kiszámolhatjuk a kör sugarát.

A két befogó hossza 1, illetve 1/2, így az átfogó √5/2 hosszúságú lesz, ami éppen a kör sugarával azonos.

Ha a sugárból levonom a négyzet oldalának a felét, √5/2-1/2, akkor ennek a szakasznak és a négyzet oldalának az aránya éppen az előbb említett (√5+1)/2 aranymetszés számmal egyezik meg.

A *második szerkesztési mód* esetében nem egy négyzetből, hanem az aranymetszésben álló szeletek közül a nagyobbikból indulunk ki, vagyis q-ból, ha (p+q):q=q:p , p<q arány fennáll.

Tekintsük az alábbi ábrát:



16.ábra

Jelöljük a q szakasz két végpontját A-val, illetve B-vel, vagyis AB=q. A B pontban állítsunk merőlegest q-ra, majd erre mérjük fel a q szakasz hosszának a felét. Ekkor a kapott q/2 hosszúságú szakasz másik végpontját jelöljük C-vel, vagyis q/2=BC. A C pont körüli, q/2 sugarú kör metszetét vesszük az AC egyenessel, így két metszéspontot kapunk, D, illetve E pontokat. Az A-hoz közelebbi D pont meghatározza a keresett távolságot, AD=p-t.

A 16. ábra szerint a következőket írhatjuk fel:

$$q^2 = AC^2 - (q/2)^2 = (AC - q/2)\cdot(AC + q/2) = AD\cdot AE$$

$AB^2 = AD\cdot AE$, vagyis $q^2 = p\cdot(p+q)$, ezt pedig tudjuk, hogy aranymetszést definiál.

2.3. Tételek a szabályos sokszögek és az aranymetszés kapcsolatáról

Az aranymetszés további érdekes tulajdonságainak bemutatásához szükségünk van a pont körre vonatkozó hatványának értelmezésére, ami rejtetten az előbbi bizonyítás mögött is fellelhető

Legyen adott egy P pont és egy kör. Húzzunk szelőket a ponton át a körhöz! Minden szelőnek a körrel két metszéspontja van. Tekintsük ezek előjeles távolságát a P ponttól!

Segédtétel:

Egy pontból egy körhöz húzott szelődarabok szorzata minden szelőre megegyezik.

- Ha a P pont a körön kívül van, akkor a szorzat pozitív
- Ha a P pont a körön belül van, akkor a szorzat negatív
- Ha a P pont a körön van, akkor a szorzat 0.

Definíció: Ezt az állandót hívjuk a P pont adott körre vonatkozó hatványának.

Külön kiemelném azt a speciális esetet, amikor a pontból húzott szelődarabok áthaladnak az adott kör középpontján. Az így keletkező szelődarabok szorzata könnyen meghatározható.

Következmény1:

„Egy pontnak egy körre vonatkozó hatványa a pont körközépponttól mért távolsága négyzetének s a sugár négyzetének különbségével egyenlő.” [5]

Egy másik egyszerű következmény, amely szintén segítségünkre lesz:

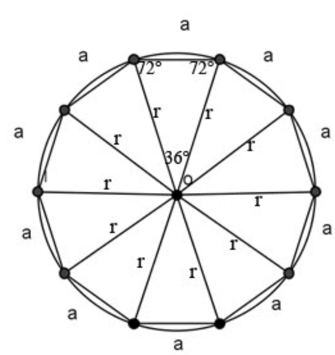
Következmény2:

„Egy a körön kívül lévő pontnak a körre vonatkozó hatványa a pontból a körhöz húzott érintő négyzetével egyenlő.” [5]

Tétel1: A szabályos tízszög oldala aranymetszésben áll a köré írható kör sugarával, méghozzá úgy, ahogy a kisebbik szelet aránylik a nagyobbik szelethez.

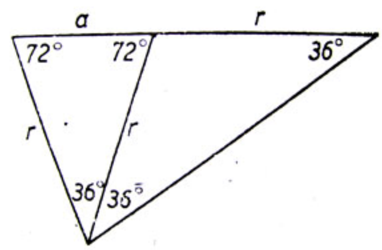
Bizonyítás:

Tekintsünk egy r sugarú kört, melybe egy a oldalú szabályos tízszöget írunk. A csúcsokat a sugarakkal összekötve a kör O középpontjával, tíz egybevágó háromszöget kapunk. Mivel a teljes szöget tizedeltük, ezért mindegyik háromszög O csúcsánál lévő szög 36°-os. A háromszögek egyenlőszárúak (száraik r hosszúak), így az oldalakon fekvő szögek 72°-osak.



17.ábra

Az a oldal és az r sugár kapcsolatát, egymáshoz való arányát keressük, ezért elég egy kis háromszögben vizsgálódni.
Hosszabbítsuk meg az a alapú háromszöget r hosszúsággal, majd a meghosszabbítás végpontját kössük össze a háromszög O csúcsával.
Az alábbi ábrán látható, hogy egy újabb egyenlő szárú háromszöget hoztunk létre.



18.ábra

A szárszöget könnyen kiszámolhatjuk, hiszen a mellékszöge 72°, így 180°-72°=108°. Az alapon fekvő szögek 36°-osak.
Nézzük azt a háromszöget, amelyet a két háromszög együttesen alkot. Az alapja r szögei pedig rendre: 36°, 72°, 72°. Mivel ez is egy egyenlő szárú háromszöget határoz meg, hasonló lesz az eredeti háromszögünkhöz, melyből felírhatjuk az oldalak arányát:

$$a:r=r:(a+r)$$

Ez pedig a keresett arány.

□

Mivel az aranymetszet egyik szeletéből a másik megszerkeszthető a korábban bemutatott módszerekkel, ennek a tételnek a felhasználásával adott sugár esetén megszerkeszthetjük a szabályos tízszög oldalát, illetve a körbe írt szabályos tízszöget.
Ha megszerkesztettük a szabályos tízszöget, akkor minden második csúcs összekötésével a szabályos ötszöget is megkapjuk.

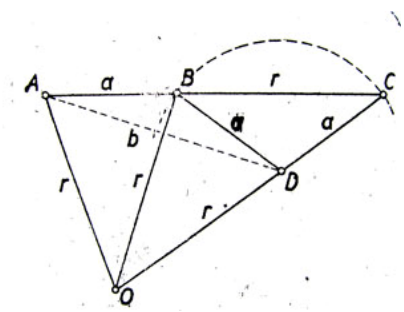
A szabályos ötszög oldalának szerkesztésére azonban van közvetlen eljárás is, ami az alábbi tételen alapul.

Tétel2: A kör sugarával és a körbe írt szabályos tízszög oldalával, mint befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög átfogója, a körbe írt szabályos ötszög oldala.

Bizonyítás:
A következőt kell megmutatnunk:

$$r^2+a^2=b^2,$$

ahol „a” a szabályos tízszög oldala, „r” a köré írható kör sugara, „b” pedig a szabályos ötszög oldala.
Induljunk ki az előző tétel ábrájából, AOC háromszögből.



19.ábra

Tükrözzük az OAB háromszöget az OB oldalra. Az OB szögfelező az OAC háromszögben – amint azt a 18. ábrán láttuk – ezért az OAB háromszög az OBD háromszögbe jut. Mivel a tükrözés távolságtartó, ezért BD=a, OD=r. Az OC oldal hossza meg kell, hogy egyezzen az AC oldalhosszal, mivel az OAC háromszög egyenlő szárú és AC=a+r, ezért teljesülni kell, hogy DC=a. Az OA és OD sugarak szöge 72°, ezért az AD=b távolság a keresett ötszög oldala lesz.

Tekintsük ezután a D középpontú, a sugarú kört. Ez áthalad B és C pontokon.
Írjuk fel az A pontnak erre a körre vonatkozó hatványát kétféleképpen:

$$b^2-a^2=a\cdot(a+r).$$

A következmény1 értelmében $a\cdot(a+r)=r^2$, vagyis $b^2-a^2=r^2$, és ez a Pythagoras tétel megfordítása alapján egy derékszögű háromszöget határoz meg, amelyben a befogók „a” és „r” hosszúságúak, az átfogó, pedig „b” hosszúságú. Így a bizonyítandó állítást kaptuk.

□

Ezeken a tételeken, segédtételeken, és szerkesztési módokon alapszik az alábbi hagyományos eljárás egy adott körbe írt szabályos tíz-, illetve ötszög oldalának megszerkesztésére

Vegyünk egy r sugarú k_1 kört, és induljunk ki, az OA és OB egymásra merőleges sugarakból. Az OA sugárra r/2 távolságot felmérve a C felezőpontot kapjuk, ami egyben egy kör középpontja is. C középpont körüli r/2 sugarú k_2 kört szerkesztünk. Az első szerkesztési mód szerint CB szakasz metszete k_2 körrel (E metszéspont) meghatározza az r sugárhoz tartozó kisebbik aranymetszet szeletet, EB-t. A Tétel1 értelmében ez a szabályos tízszög oldala, EB=a. Ezt a szakaszt C körül elforgatva az OA félegyenesébe az OD=a szakaszt kapjuk. Mivel OA félegyenes merőleges OB=r sugárra, így a és r szakaszok egy derékszögű háromszög befogói. A Tétel2 miatt az általuk meghatározott átfogó lesz a szabályos ötszög oldala.

2.4 A zenében való előfordulás

Az aranymetszés számtalan előfordulási helye közül a zene területét is szeretném kiemelnem.

Egy zenei mű aranymetszetének fogalma csöppet sem egyértelmű. Sok szempont szerint vizsgálódhatunk, többek között az ütemszám, a hangértékek száma, vagy esetleg a hangok egymáshoz viszonyított távolsága értelmében.

Sok zeneszerző művében találunk valamilyen váratlan zenei fordulatot az ütemszám aranymetszetében, például, új téma megjelenése, új hangszer belépése, vagy dinamikai fokozás tetőpontja és még sok minden mást. Ritkán lehet megállapítani, hogy az adott zeneszerző szándékosan komponált az aranymetszés aránya szerint, vagy ösztönösen írta a művét. Utóbbi esetben valószínűleg pár ütem eltérés előfordul, szándékos komponálásnál, viszont nagyon pontosan meg lehet állapítani a határokat, ami gyanúra adhat okot.

Részletesebben Bartók Béla egyik szonátájával szeretnék foglalkozni, melyben hihetetlen pontossággal jelenik meg az aranymetszés. Nem találtam forrást, mely biztosan állítaná a szándékos számolgatást, bár Lendvai Ernő feltételezése szerint Bartókot nagyon foglalkoztatta a Fibonacci-sor (egymás mellett lévő tagjainak hányadosa az aranymetszés arányát közelíti).

Bartók Béla:

2 zongorás ütőhangszeres szonáta I. tétel

A művet Lendvai Ernő munkái alapján elemzem.

A fejezet elején már említettem, hogy a szonáta elemzése során szükség lesz a pozitív, illetve negatív aranymetszet definíciójára. Ha pozitív aranymetszetet számolok, akkor 0,618-al, ha negatívat, akkor 0,382-vel kell szorozni az ütemszámokat.

A tétel 443 ütemből áll, ennek pozitív aranymetszete $443 \cdot 0{,}618$, vagyis 274, ahol a tétel zenei súlypontja található, a repríz-főtéma belépése. Lásd, 2.)-es mellékleten!

A műben nagyon sok példát találhatnánk az aranymetszés megjelenésére, de én most csak a művet bevezető első 17 ütemben fogok vizsgálódni. Az első ütem még nem szerves része a bevezetésnek, ezért a 2-17. ütemig fogok számolni.

Formai felépítés:

3 nagy részre tagolhatjuk a témabelépések alapján:

- (1) alaphelyzetben (tonikán, 2. ütemtől)
- (2) alaphelyzetben (dominánson, 8. ütem végétől)
- (3) megfordításban (szubdominánson, 12-18. ütem elejéig)

A 3.)-as mellékletben található kottában (1), (2), (3) a témabelépéseket jelzi.

A változó ütemrend miatt érdemes triolás egységekben gondolkodni, vagyis 3 darab 8-ad hang tesz ki 1 egységet. Így a 16 ütem 46 egységből áll. Pozitív aranymetszete: $46 \cdot 0{,}618 \approx 28$, ennyi egységből állnak az alaphelyzetben belépő tagok, tehát a megfordítási tag kezdetét mutatja.

Nézzük csak az (1), (2) tagokat, melyek 28 egységből állnak. 28·0,618≈ 17,3, ami az (1) téma végét, illetve a (2) téma belépését adja.

Nagyítsuk fel még jobban a részeket! Az (1) és (2) témában is fontos szerepet töltenek be a cintányér-ütések, amelyek sejtésünk szerint ismét aranymetszéspontban állnak. Az (1) témának a pozitív metszete 17,3·0,618≈11, a (2) témának a negatív metszete 10·0,382≈4, amelyek után a cintányér-ütés belép.

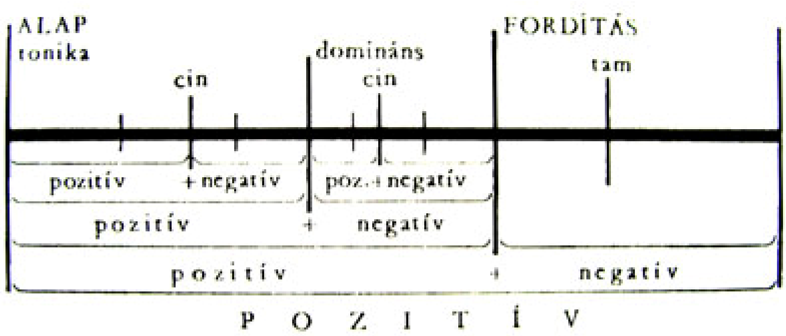
A megfordítás-tagot a tam-tam belépés negatív aranymetszettel tagolja, 19·0,382≈ 7,3.

Ha a részeken belül tovább folytatjuk a méréseket, ismét megdöbbentő eredményeket kapunk. Most már ne egységekben gondolkodjunk, hanem nyolcad hangokban!

A tonikai-tag első részében (cin belépése előtt) a legfontosabb fordulópont a Cisz hangon való timpani-belépés, 33·0,618≈20, és a 21. nyolcadon már belép a timpani. A tonikai tag második részében a kisdob-ütés negatív metszéspontban áll, 18·0,382≈ 7, és a 7. nyolcad hangon valóban megszólal.

A domináns-tag első részében (cin belépése előtt) a zenei súlypont, az Esz hang megnyújtása pozitív metszetben áll, míg a második részében a kisdob-ütés a negatív metszéspontban áll.

A következő ábra segítségével könnyebben lehet szemléltetni az egymásba ágyazott aranymetszések jelenlétét.

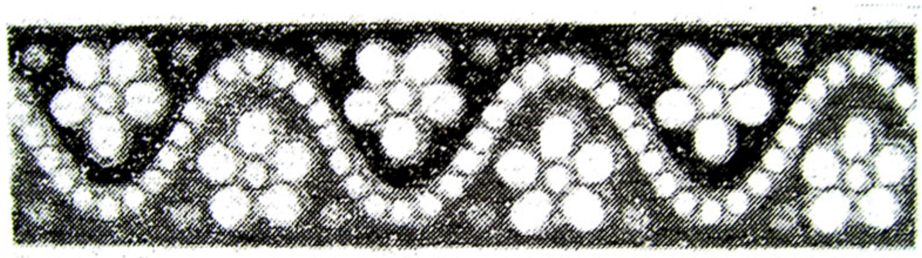


20.ábra

3. Szimmetriák

3.1 Transzformációk, csoportok

Az alábbi képen látható minta szimmetrikus bármely kis virág középpontján át húzott függőleges tengelyre.



21.ábra

Felfedezhetjük a szabályszerűséget, a minta megrajzolását a végtelenségig folytathatnánk. Ezt a szabályszerűséget szeretnénk matematikai nyelven megfogalmazni, leírni.

Ehhez szükségem lesz a szimmetria fogalmának meghatározására. Megmutatom, hogy egy alakzat összes szimmetriája csoportot alkotnak, ezért röviden érintem a csoportelmélet néhány alapvető kérdését is.

Az itt következő elméleti háttér anyagát Hermann Weyl: Szimmetria c. könyve és Kiss Emil: Bevezetés az algebrába c. könyve alapján állítottam össze.

A sík egy leképezése minden p ponthoz egy p’ pontot rendel hozzá. Speciális esete, amikor a p pontot önmagába viszi, ezt a leképezést identitásnak nevezzük és I-vel jelöljük.
Nézzük azt az S leképezést, amely a p pontot a p’ pontba viszi. S inverzéről akkor beszélhetünk, ha létezik egy olyan S’ leképezés, mely a p’-t visszaviszi p-be, vagyis SS’=I és S’S=I. Gyakori jelölés S leképezés inverzére: S^{-1}.

Definíció: Ha egy leképezésnek létezik inverze, akkor kölcsönösen egyértelmű leképezésről, más szóval bijekcióról van szó.

Definíció: Egy X halmazt önmagára képező bijekcióját az X *transzformációjának* hívjuk.

Transzformációk összetételét a következőképpen értelmezhetjük: ha S a p pontot p’-be viszi, T a p’-t pedig p”-be, ekkor T(S)=T·S alatt azt a leképezést értjük, ami a p pontot a p”-be viszi. Fontos a sorrend, először az S transzformációt, majd a T-t alkalmazzuk, a megszokott írásmóddal szemben, mely szerint balról jobbra haladunk.
A matematikában ezt S és T transzformációk *kompozíciójának* hívjuk.
A kompozíció művelete egy *asszociatív művelet*, azaz R(ST) = (RS)T, ez következik abból, hogy a kompozícióképzés valójában egy függvényösszetétel, amiről tudjuk, hogy asszociatív.

Egy X ponthalmaz transzformációinak a halmazát jelöljük S_x-szel.
Az S_x halmaz elemeire igaz, hogy
-bármely két elem kompozícióját a halmaz tartalmazza, azaz X halmaz zárt a kompozíció műveletére nézve.
-bármely S transzformációra SI=IS=S, ahol I az identitás leképezést jelöli, amely minden elemet önmagába visz
-bármely elemének van inverze, azaz olyan S^{-1}, melyre SS^{-1}=I (mivel kölcsönösen egyértelmű leképezésekből áll)

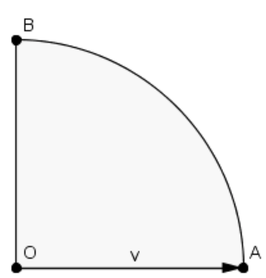
Ezen tulajdonságoknak az összessége a matematikában külön elnevezést kapott.
Azt mondjuk, hogy S_x *csoportot* alkot a kompozíció műveletére nézve, vagy másnéven S_x *szimmetrikus csoport*.

A csoport konkrét definíciójának ismertetése előtt, szükség van néhány fogalom bevezetésére.

Definíció: Egy R halmazon értelmezett *kétváltozós * művelet* alatt azt értjük, hogy bármely a,b ϵ R-re a*b ϵ R, tehát bárhogy választok ki R halmazból két elemet, az azokhoz hozzárendelt érték szintén R egy eleme lesz.

Definíció: Egy kétváltozós * művelet, melyet R halmazon értelmezünk
- *asszociatív*, ha tetszőleges x,y,z ϵ R-re (x*y)*z= x*(y*z) teljesül, vagyis a zárójeleket elhagyhatjuk, figyelve arra, hogy a tagok sorrendje megmaradjon.
- *kommutatív*, ha tetszőleges x,y ϵ R-re x*y=y*x, vagyis a tagok felcserélhetőek.

Megjegyzés: A transzformációkra igaz az asszociativitás, a kommutativitás viszont általában már nem, vagyis a sorrend nem cserélhető fel.
Erre egy egyszerű példa, legyen S az O pont vízszintes eltolása $\underline{v}$ vektorral, T pedig az O pont körüli +90°-os elforgatás. T(S) az O pontot B-be, S(T) pedig A-ba viszi, így a két leképezés nem egyezik meg.



22.ábra

Definíció: *Neutrális elem* alatt a következőt értjük: e ϵ R neutrális elem, ha bármely x ϵ R esetén e*x=x*e=x.

Megjegyzés: Ha az eltolásokat vesszük a kompozíció műveletére nézve, akkor a neutrális elem a 0 vektorral való eltolás, forgatások esetében pedig a 0°-os vagy a k·360°-os forgatások.

Definíció: x,y ϵ R esetén, ha x*y=e, neutrális elem, akkor azt mondjuk, hogy x *balinverze* y-nak, y pedig *jobbinverze* x-nek. y*x=e fennállása esetén x és y egymás *inverzei*. Egy elem invertálható, ha van kétoldali inverze, vagyis létezik jobb-és balinverze is.

Jelölés az inverzre: x inverze x^{-1}.

Megjegyzés:

t tükrözés inverze önmaga, a $\underline{v}$ vektorral vett eltolás inverze pedig, a $-\underline{v}$ vektorral vett eltolás.

Általában két transzformáció kompozíciójának inverzére teljesül, hogy

$(A_1 A_2)^{-1}=A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Definíció: Egy G nem üres halmaz *csoport*, ha értelmezve van rajta egy * művelet, melyre a következők állnak fent:

1.)A * művelet asszociatív.

2.)Van neutrális elem G-ben.

3.)Bármely G-ből vett elemnek van inverze.

Definíció: Tekintsük a G halmazt, mely csoport, illetve G egy részhalmazát, H-t! H *részcsoportja* G-nek, ha csoportot alkot a G-beli * műveletre nézve.

Jelölés: H ≤ G.

Az alábbi feltételek ellenőrzésével eldönthetjük, hogy H (G-nek egy részhalmaza) részcsoportot alkot-e:

-H zárt a * műveletre, vagyis x,y ϵ H esetén x*y ϵ H.

-H-ban benne van G-nek a neutrális eleme

-H zárt a G-beli inverzképzésre, vagyis x ϵ H esetén x^{-1} ϵ H

3.2 Egybevágósági transzformációk

A szimmetria fogalmát lehet szűkebben és tágabban is értelmezni. A szimmetria megszokott értelmezéséhez szükségünk van az egybevágóság fogalmára.

Definíció: Egy f transzformáció *távolságtartó*, vagy más néven *egybevágósági transzformáció*, ha bármely P, Q pontokra teljesül, hogy

$$d(P,Q)=d(f(P),f(Q)).$$

Ez a feltétel teljesül az identitásra, a nem identikus eltolásokra, a nem identikus forgatásokra, a tükrözésekre, illetve a csúsztatva tükrözésekre.

Egybevágósági transzformációk osztályozása

Fixpontjaik szerint osztályozhatjuk őket. Az eltolásoknak, illetve a csúsztatva tükrözéseknek sohasem lesz fixpontjuk, míg az identitásnak minden pontja fixen marad. A tengelyes tükrözések esetében a fixpontok halmaza a tengely, amire tükrözünk, ezzel ellentétben a forgatások fixpontjainak halmaza egyetlen pontból áll, amely körül forgatunk. Így megkapjuk a fent már említett felsorolást.

Megjegyzés: az identitást ugyanakkor szokás speciális – $\underline{0}$ vektorral való- eltolásnak, illetve speciális – 0°szöggel való – forgatásnak is tekinteni.

Megjegyzés: Az egybevágósági transzformációk szükségképpen bijekciók, a távolságtartás miatt. Emiatt létezik inverzük.

Egybevágósági transzformációk csoportja

Egybevágósági transzformációk kompozíciója, illetve ezek inverze is egybevágósági transzformáció, így egy X halmaz egybevágósági transzformációi csoportot alkotnak. Jelölés a sík egybevágósági transzformációinak csoportjára: E.

Definíció: Egy X alakzat, ponthalmaz *szimmetriái* azok az egybevágósági transzformációk, amelyek önmagukba viszik.

Állítás: Egy alakzat összes szimmetriája csoportot alkot.

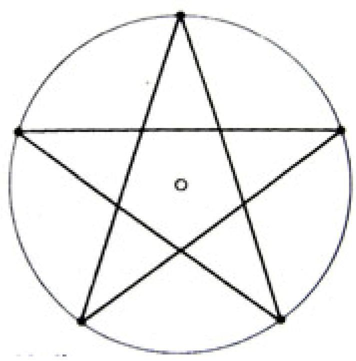
Példa:

A pentagramma

A pentagramma tanulmányozásával már az ókorban is foglalkoztak. Itt visszautalnék a phytegoreusokra, akik nevéhez fűződik az a híres felfedezés, mely szerint a szabályos ötszög átlóinak metszéspontjai két részre osztják az átlókat, és ezek a részek aranymetszésben állnak egymással. Nem csak matematikai tényként kezelték a pentagramma tulajdonságait, hanem az általuk képviselt tanok szimbólumának tekintették.

Vizsgáljuk meg a pentagramma szimmetriáit!

Az alakzatot önmagába vivő transzformációk az O középpont körüli $k\cdot 360°/5$-os szöggel való forgatás ($k=1\ldots5$), valamint az O-t és a csúcsokat összekötő egyenesekre való tükrözések.



23.ábra

10 műveletet határoztunk meg. Ezekből válasszuk ki a O körüli $360°/5 = 72°$ –os szöggel való f elforgatást, illetve a középpontot és a csúcsokat összekötő tengelyekre való tükrözések közül az egyiket, t-vel jelölve. $f^1:= 1\cdot 72°$-os forgatás, $f^2:= 2\cdot 72°$-os forgatás, és így tovább, így f hatványozásával előállíthatjuk az összes többi forgatást. Továbbá $f^k t$ ismét tengelyes tükrözés lesz az eredeti t tengely O körüli, $2k\cdot 72°$-kal való elforgatásával kapott tengelyre, ami szintén áthalad a pentagramma valamelyik csúcsán.

Azaz a pentagramma bármely szimmetriája előáll $f^k t^l$ alakban, ahol k és l is lehet 0.

Az $l = 0$ esetekben kapjuk a forgatásokat, az $l =1$ (l páratlan) esetben kapjuk a tengelyes tükrözéseket, a $k=0$, $l=0$ esetben az I identitást, a helybenhagyást kapjuk.

Megadtam az alakzat összes szimmetriáját, amely valóban csoportot alkot.

Példák a sík összes egybevágósági transzformációjának részcsoportjaira

1.)Az identitásból álló halmaz: $\{I\}$ Ez minden alakzatot önmagába visz.

Szimmetrikusnak csak azokat az alakzatokat nevezzük, amelyeknek van az identitástól különböző szimmetriájuk is.

2.)$\{ t, I \}$, ahol t a tengelyes türközést jelenti

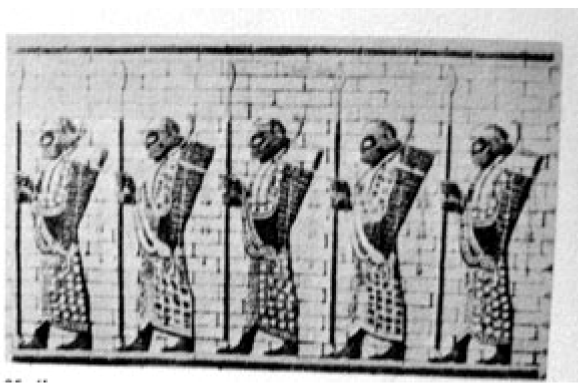
3.)$\{ f^k t^l \mid k,l \in Z^+ \}$ az előbb említett pentagramma szimmetriáinak csoportja

4.)$\{ E(n\cdot\underline{v}) \mid n \in Z\}$, ahol $E(n\cdot\underline{v})$ az $n\cdot\underline{v}$ vektorral való eltolás

Szemléltetés:

Vegyük példának E-t, vagyis az egybevágósági transzformációk csoportját! Az eltolások részcsoportot alkotnak E-ben, hiszen van neutrális eleme (a $\underline{0}$ vektor), inverze (a vektor (-1)-szeresével való eltolás), és bármely két eltolás után ismét eltolást kapunk.

Az alábbi ábrán ennek a művészetben megjelent formáját láthatjuk.



24.ábra

A fenti perzsa íjászokat mutató fríz Dareiosz szúzai palotájából való. Ha az alakok közötti távolságot d-vel jelöljük, akkor a frízt a 2d-vel való eltolással készíthetjük el (2d, mivel csak minden második íjász ruhája egyforma).

5.) A sík összes eltolásai és forgatásai szintén részcsoportot alkotnak

Állítás: H halmaz jelölje a sík eltolásait és forgatásait (az identitást is beleszámítva), mely részhalmaza E-nek. Ekkor H részcsoportot alkot E-ben.

Bizonyítás:
Az állítás bizonyítására a következőket kell ellenőrizni. Az eltolások és forgatások zártak a kompozíció műveletére, H neutrális eleme benne van E-ben, illetve H zárt az E-beli inverzképzésre.
A következő segédállítások hasznosak lehetnek a feltételek ellenőrzése során.

Segédállítás1:
Két egymás utáni tengelyes tükrözés kompozíciója, a két tengely által közbezárt szög kétszeresével való forgatás a tengelymetszéspont körül.
Következmény: Tetszőleges forgatás előáll két, a forgatás középpontján áthaladó tengelyre vett tükrözés kompozíciójaként, végtelen sokféleképpen.

Segédállítás2:
Két, d távolságra lévő párhuzamos egyenesre való tengelyes tükrözés egy eltolás, melynek iránya merőleges az egyenesek irányára, valamint hossza 2d.
Következmény: Tetszőleges eltolás előáll két, az eltolás vektorára merőleges, tengelyes tükrözés kompozíciójaként.

Vizsgáljuk először a neutrális elem létezését.
1.) Neutrális elem
E neutrális eleme az identitás, hiszen bármely f egybevágósági transzformációra igaz, hogy a vele vett kompozíció f. H-ban az identitás szintén neutrális elem lesz.

2.) Inverzképzés
H tartalmazza a sík összes eltolását, valamint forgatását, tehát, a $\underline{v}$ vektorral való eltolás mellett ott van a $-\underline{v}$ vektorral való eltolás is. Ezek egymás inverzei, hiszen kompozíciójuk az identitást adja.
Hasonló a helyzet a forgatások esetében, vagyis H tartalmazza az azonos pont körüli α és $-\alpha$ irányított szöggel való forgatásokat, melyek szintén egymás inverzei.

3.) <u>A kompozíció műveletére való zártság</u>

Ellenőrizni kell, hogy bármely két eltolás, forgatás, illetve ezek kombinációjának kompozíciója is eltolás vagy forgatás lesz. Tehát nem lépek ki a halmazomból, amelyről feltételeztem, hogy részcsoport.

Milyen transzformációt adnak a következő egybevágóságok kompozíciói?

<u>2 forgatás szorzata</u>

f_1, f_2 legyenek forgatások a P_1, P_2 középpontok körül,α és β szögekkel.

Ha $P_1=P_2$, akkor a P_1 körüli forgatást kapjuk az $\alpha+\beta$ szöggel.

Ezek után tekintsük azt az esetet, amikor $P_1 \neq P_2$. Legyen e a P_1, P_2 pontok által meghatározott egyenes. A segégállítás1 értelmében f_1-et fel tudjuk írni két tükrözés szorzataként, $f_1=t_1t$, ahol t az e egyenesre való, t_1 pedig egy olyan P_1 ponton átmenő tengelyre való tükrözés, amelyet $\alpha/2$ irányított szögű elforgatás visz az e egyenesébe.

Ugyanígy felírhatjuk f_2-t is t, valamint t_2 tükrözés szorzataként, ahol t_2 egy olyan P_2 ponton átmenő tengelyre való tükrözés, amelybe t tengelyt $\beta/2$ irányított szögű forgatás viszi, $f_2=t\,t_2$.

Ekkor $f_1\ f_2= t_1t\ t\ t_2= t_1\ (t\ t)\ t_2 = t_1\ t_2$, a kompozíció művelet asszociatív, tehát először vehetem a tt tengelyes tükrözések szorzatát, melyre tt=id.

Az eredmény, amit kaptunk a következő:

- Ha t_1, t_2 tükrözések tengelyei metszik egymást, akkor a $t_1\ t_2$ szorzat egy elforgatás a metszéspont körül, még hozzá $2(\alpha/2+\beta/2)$ szöggel.
- Ha t_1, t_2 tükrözések tengelyei párhuzamosak, azaz, $\alpha = -\beta$ vagy $\alpha = 360° - \beta$, akkor $t_1\ t_2$ szorzat egy eltolás.

<u>Nem identikus forgatás és eltolás szorzata</u>

A gondolatmenet hasonló, mint az előző esetben.

Legyen F(P) a P pont körüli forgatás, E($\underline{v}$) pedig a $\underline{v}$ vektorral való eltolás. A $\underline{v}$-re merőleges, P ponton átmenő egyenest e-vel jelöljük.

Ekkor E($\underline{v}$)= t_1t, ahol t az e-re, t_1 pedig egy olyan tengelyre való tükrözés, mely párhuzamos az e-vel és - $\underline{v}/2$ irányított távolságra van tőle.

F(P)= t t_2 , ahol t ismét az e-re, t_2 pedig egy olyan P-n átmenő tengelyre való tükrözés, amelyet a - $\alpha/2$ irányított szögű elforgatás visz e-be.

F(P) E($\underline{v}$)= t_1t t t_2= t_1 t_2, ahol t|| t_1 tengelyével, t_2 tengelye viszont P pontban metszi e-t, ezért t_1 tengelye nem párhuzamos t_2 tengelyével, vagyis csak forgatásról lehet szó.

Fordított esetben a következőt írhatjuk fel:

E($\underline{v}$)= t t_1', ahol t az e egyenesre való, t_1' pedig az e-re párhuzamos és $\underline{v}$/2 irányított távolságra lévő tengelyes tükrözés.

F(P)= t_2't, ahol t_2' az e-be - $\alpha/2$ irányított szögű elforgatással vivő tengelyre való tükrözés.

E($\underline{v}$) F(P)= t_2't t t_1'= t_2' t_1', amelyre szintén t ||t_1' tengelyével, valamint t_2' tengelye P pontban metszi e-t, tehát t_2' és t_1' tükrözések tengelyei metszik egymást a P pontban, ismét forgatást kaptunk.

<u>Két eltolás kompozíciója</u>

Bármely két eltolás egymásutánja ismét egy eltolást eredményez, méghozzá az eltolásokhoz tartozó vektorok összegével.

Leellenőriztük a feltételek teljesülését, így beláttuk, hogy a sík eltolásai és forgatásai valóban részcsoportot alkotnak a sík egybevágósági transzformációinak csoportjában.

$\square$

3.3 Generátorelem, generált részcsoport

Definíció: Legyen G csoport, melyre g ϵ G. Tekintsük G-nek azt a részcsoportját, amely a g elem egész kitevőjű hatványaiból áll. Ezt a részcsoportot a g elem által *generált részcsoport*nak hívjuk, és <g>-vel jelöljük. <g>={g^i | i ϵ **Z** **}.**

Definíció: Ha a g elem egész kitevőjű hatványai az egész G csoportot előállítják, akkor g-t a G *generátorelem*ének nevezzük, más szóval g elem generálja a G csoportot. Ebben az esetben megkülönböztetjük G-t a többi csoporttól, és *ciklikus csoport*nak nevezzük.

Példákon keresztül való szemléltetés:

1 generátor elem létezése:

Legyen a részcsoportom E-n { E(n·$\underline{v}$) | n ϵ**Z** } , ahol E($\underline{v}$) a $\underline{v}$ vektorral való eltolás, a sík összes egybevágósági transzformációjának részcsoportjainak 4.) példája.
A g (generátorelem) := $\underline{v}$ vektorral vett eltolás, a hatványozást pedig a következő módon definiáljuk: g^1:=E(1$\underline{v}$); g^2:= E(2$\underline{v}$); …; g^n:= E(n$\underline{v}$), n ϵ $\mathbf{Z}^+$**.** De ezzel még nem generáltam az ábra összes elemét, g inverzét, és ennek hatványait is hozzá kell venni, g^{-1}:= E((-1)$\underline{v}$).
Ekkor a g elem által generált részcsoport a $\underline{v}$ vektorral vett eltolások, amelyek az ábra összes eltolását megadják.

2 generátorelem létezése:

Legyen a részcsoportom E-n { f_{72}, t } , amely a pentagramma szimmetriáinak csoportja, a sík összes egybevágósági transzformációjának részcsoportjainak 3.) példája.
A megadott részcsoport generátorelemei f_{72}, t.

3.4 Szimmetriák a zenében

Johann Sebastian Bach: Kétszólamú invenciók

Bach ezeket a műveket csembalóra írta pedagógiai célzattal. Az invenciók lényege, hogy a szerzőnek támad egy ötlete, egy zenei motívum, ami az egész tétel jellegét meghatározza.

Bach invencióinak tanulmányozása során jöttem rá, hogy több matematikát lehet benne találni, mint gondoltam volna. Eltolásokkal, vízszintes és függőleges tükörfordítások sokaságával van tele az egész tétel.

Szinte az összes Bach invencióban találhatunk tükrözéseket, eltolásokat, de részletesebben a d-moll invencióban mutatnám meg ezek megjelenési formáját.

Lásd, 1.)-es melléklet!

d-moll invenció

Az invenció a téma elhangzásával kezdődik, amit az alábbi ábrán láthatunk.

25.ábra

Ha észrevesszük már a témában találunk függőleges tengelyes tükrözést, ahol a Cisz hang a tükörtengely. D hangról a Bé hangra megy szekundlépésekkel, így a tükörtengely után a Bé hangról vissza kell mennie a D hangra, ugyanazokkal a lépésekkel.

Mivel két szólam mozgásáról van szó, így nem csak a felső szólamban, hanem az alsó szólamban is ugyanígy találhatunk függőleges tengelyes tükrözéseket a harmadik ütemtől kezdve.

A tükrözéseket az alábbi módon is lehetne szemléltetni: jelölje 2 a szekundlépéseket, 7 pedig a szeptimugrásokat. Ennek a jelölésnek az értelmében a témát a következőképpen írhatjuk fel: 222227722222. A tétel során, a téma megjelenésénél általában az első szekundlépést mással helyettesíti, így a tükrözések keresésekor a 2222772222 szerkezetet kell figyelembe venni. Ezt a sorrendet pedig az 1-27. ütemig a 17-et kivéve mindenhol megtaláljuk váltakozva a két szólam között.

A 29-35. ütemig egy másikfajta függőleges tengelyes tükrözésre bukkanhatunk. Ismét az első lépést nem kell figyelembe venni, így az A hangról induló sorrend: 2222**22**2222, vagyis a 77 ugrást 22 lépéssel cseréli ki.

A 36. és 37. ütemben nem találunk tükrözéseket, viszont a 38-47. ütemig ismét a 2222772222 szerkezet érvényesül.

Felmerülhetne az a kérdés, hogy a kimaradt ütemekben miért nincs tükrözés. A mű formai elemzése után viszont láthatjuk, hogy a kimaradt ütemekben zárlatok vannak, melyek 3 nagy részre tagolják a művet, így azoknak más szerep jut.

A vízszintes tengelyes tükrözésre a 22. ütem felső szólamában találhatunk példát. Az első szekundlépést ismét ne vegyük figyelembe! Az említett szólamot rakjuk a téma szólama alá. Használjuk a következő jelölést: ↑2: szekundlépés fel, ↓2: szekundlépés le. Téma: ↑2↑2↑2↑2↓7↑7↑2↑2↑2↑2, 22. ütemtől felső szólam: ↓2↓2↓2↓2 ↑6↓7↑2↑2↑2↑2 kisebb elhanyagolással, szeptimugrást szextugrással helyettesítve, ismét láthatjuk a szimmetria megjelenését.

Összegzés

Szakdolgozatomban próbáltam rávilágítani, hogy milyen sok érdekes összefüggés van a matematika és a zene között.

Sok matematikust lehetne említeni, akik komolyabban is művelték a zenét és érdekes eredményekre jutottak a matematika és a zene kapcsolatának szorosabbra fűzésében. Pitagorasz tanulmányai mellett döntöttem, mert olyan nagy ösztönző hatással volt a körülötte lévő emberekre, hogy egy egész iskolarendszert alapított meg, ahol jelentős felfedezéseket tettek zenei és matematikai területen egyaránt.

Az aranymetszés mindig is különleges jelenség volt a matematikában, a művészetben, a természetben és most már tudom, hogy a zenében is, ezért ezt a témakört mindenképpen meg akartam tárgyalni a dolgozatomban.

A csoportelméleti fejezetben azokat a fogalmakat akartam mindenképpen tisztázni, amelyekről úgy gondoltam, hogy alapvetőek a szimmetriák területén való vizsgálódás során, ezért részletesebben kitértem az egybevágósági transzformációkra.

Remélem a középiskolai tanításom során alkalmam nyílik a szakdolgozatomban tárgyalt érdekességeket továbbadni a diákoknak, mellyel hozzájárulok a szélesebb látókörük kialakításához.

Ezúton szeretném megköszönni konzulensemnek a segítségét, aki elvállalta az általam választott téma vezetését és sokban hozzájárult, hogy létrejöhessen ez a munka. Kérdéseimmel bármikor fordulhattam hozzá, mindig segítőkészen válaszolt és az ötleteivel újabb és újabb ajtók nyíltak meg számomra a matematika és zenetudomány területén.

Szaktársaimnak is köszönettel tartozom, akik szintén segítségemre voltak, miután sikerült felkeltenem érdeklődésüket a zene és a matematika összefüggése iránt.

Mellékletek

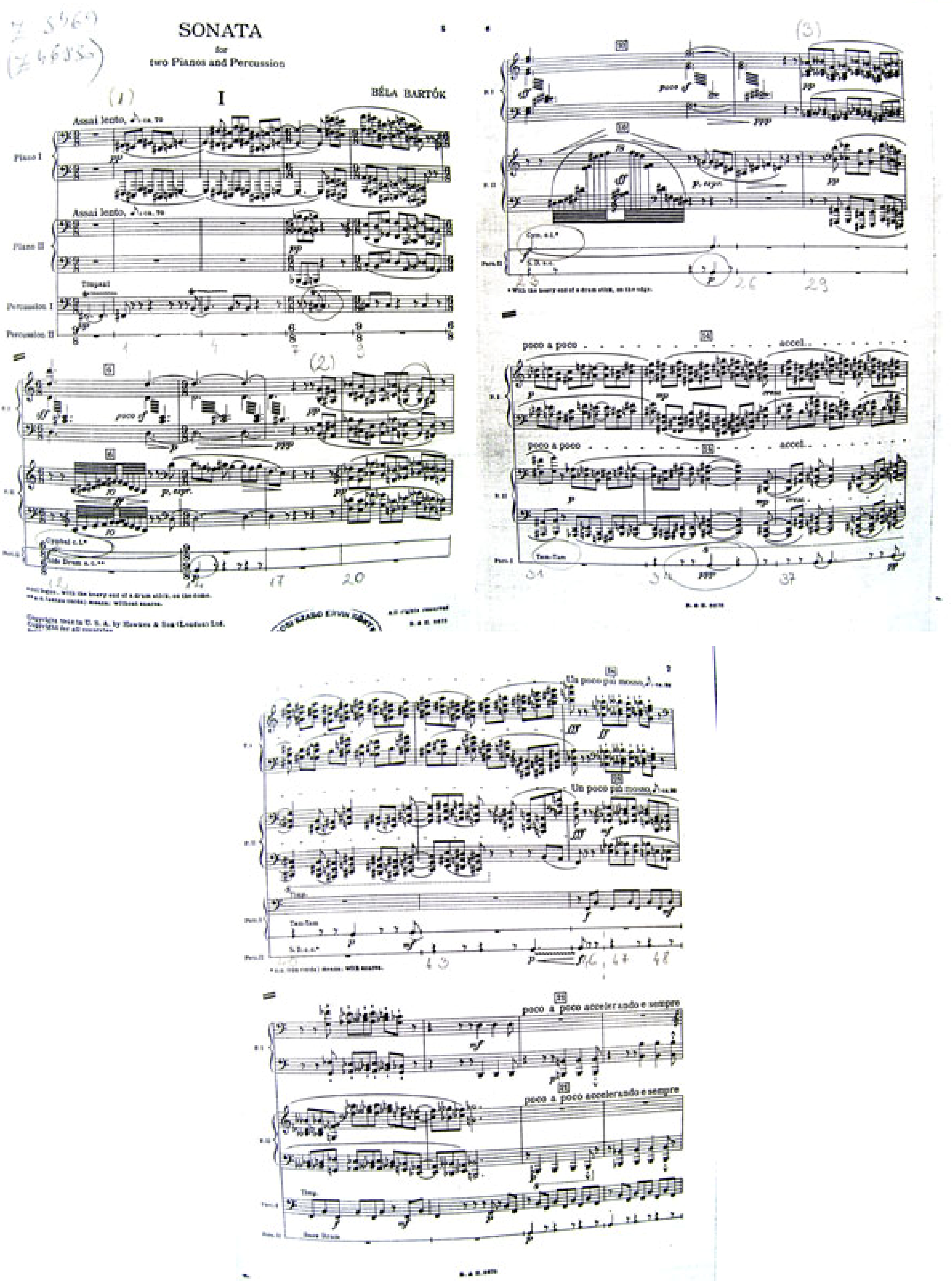
1.)

Johann Sebastian Bach: D-moll invenció

2.)

Bartók Béla: 2 zongorás ütőhangszeres szonáta I. tételének repríz-főtéma belépése

3.)



Bartók Béla: 2 zongorás ütőhangszeres szonáta I. tételének első 22 üteme

Irodalomjegyzék

[1] Ritoók Zsigmond, Források az ókori görög zeneesztétika történetéhez, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982

[2] Sain Márton, Nincs királyi út!, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986

[3] Vargha Balázs, Dimény Judit, Loparits Éva, Nyelv Zene Matematika, RTV-Minerva Kiadó, 1977

[4] http://hu.wikipedia.org/wiki/P%C3%BCthagoreusok

[5] Hajós György, Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960

[6] Lendvai Ernő, Bartók dramaturgiája, Akkord Zenei Kiadó, 1993

[7] Dr. Budó Ágoston / Dr. Pócza Jenő, Kísérleti fizika I. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965

[8] B. L. Van der Waerden, Egy tudomány ébredése, Gondolat Kiadó, Budapest, 1977

[9] Kiss Emil, Bevezetés az algebrába, Typotex Kiadó, Budapest, 2007

[10] Hermann Weyl, Szimmetria, Gondolat Kiadó, Budapest, 1982

[11] Kelemen Imre, A zene története, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest, 1998

[12] Boosy & Hawkes, Hawkes Pocket Scores, Béla Bartók Sonata, Music Publishers, England

[13] D. R. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach, Typotex Kiadó, Budapest, 2005

[14] Darvas Gábor, Zenei Zseblexikon, Zeneműkiadó, Budapest, 1978

[15] Sain Márton, Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978

[16] Alan Bell / Trevor Fletcher, Symmetry groups, Derby