EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZAKDOLGOZAT

JÁTÉKOS MÓDSZEREK A MATEMATIKA TANÍTÁSÁBAN

Témavezető:
Török Judit
egyetemi adjunktus
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Készítette:
Kottász Kata Boglárka
Matematika BSc

Budapest, 2010

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés

A középiskolai matematika megtanulásában fontos szerepet töltenek be a begyakorlott gondolati műveletek. A szabályozott megoldások, és e jártasságok alkalmazása is rengeteg lehetőséget kínál. A tanuló egy-egy problémával szembekerülve gyakran akaratlanul is hasonló módon megoldható feladatok után kutat az emlékezetében, de a matematika nem ragad meg ezen a szinten. Sokkal gazdagabb annál, minthogy ismételhető gondolkodási sémákba foglaljuk

Ma a matematika tanítása igen fontos feladat. Ezt a tárgyat sokan nem szeretik, ellenségesen közelítenek hozzá, mert nem ismerik igazán. Pedig érdekes és hasznos a matematika. Úgy gondolom, ha megfelelő alapokkal látjuk el a diákokat, és megszerettetjük velük a matematikát, sokkal többen fognak közelíteni felé úgy, mint egy érdekes, tanulható, kihívásokat jelentő feladathoz. Bizalommal és lelkesedéssel vetik bele magukat a feladat tanulmányozásába, megoldásába. Ezzel megakadályozhatjuk, hogy úgy gondoljanak a tárgyra, mint egy mumussal való találkozásra, amin jobb túl lenni gyorsan, akármilyen teljesítménnyel. Bár nehéz az élet különböző területein szerzett tudást összekapcsolni, meg kell próbálni.

A diákok gyakran felteszik a kérdést: ”Mi értelme van ennek az egésznek? Soha nem fogom használni.” Sajnos ez az elterjedt felfogás, az emberek nagy része így gondolja. Többféle lehetőség adott arra, hogy a gyerekek érdeklődését felkeltsük a tantárgy iránt. Sok iskolában alternatív módszereket használnak, mások látványos színes feladatokra esküsznek.

Tény, hogy fárasztó minden órára érdeklődést felkeltő feladatokat találni, előkészíteni, de úgy gondolom, aki a tanári pályát választja, tudja, ezt kell tennie, ha eredményeket akar látni a diákjaival és munkájával kapcsolatban. A lényeg, hogy a diákok örömüket leljék a feladatok megoldásában, hétköznapi következtetéseket is le tudjanak vonni belőle, ne csak a felesleges tanulást lássák benne. A matematika lényege ugyanis nem (csak) a helyes válasz produkálása, hanem a kreatív gondolkodás is.

Azért választottam ezt a szakdolgozati témát, mert a matematika tanításában fontos a jó tapasztalatok szerzése, sikerek elérése. Feltételezésem szerint, ha játékosan, sok oldalról több módszerrel közelítjük meg a tárgyat, sokkal könnyedebbé lehet tenni a matematikát. Elérhetjük, hogy a diákok örömmel vegyék kezükbe a matematikával kapcsolatos könyveket, rácáfolva arra, hogy az egy olyan dolog, amit nem lehet megérteni, megtanulni. Ennek érdekében a nekünk, tanároknak kell megtenni az első lépést, és az évek folyamán nem szabad elveszítenünk a lelkesedést diákjaink és saját mentális egyensúlyunk megtartása érdekében. Ennek feltétele a feladatok változatossága, színessége, ami jó hatással van a diákokra, a tanároknak, pedig napi sikerélményt nyújt. Ezt különböző módon elérhetjük el. A szakdolgozatomban e módszerekbe, foglalkoztatási formákba próbálok egy betekintést nyújtani a teljesség igénye nélkül. A módszerek egyrészt a változatos tanítási lehetőségeket mutatja be, másrészt a játékosság fontosságára hívják fel a figyelmet, hiszen játszani mindenki szeret. Saját magamon tapasztalom, ha egy feladat érdekesen, szellemesen van megfogalmazva, sokkal nagyobb érdeklődést tanúsítok a megoldása érdekében, mintha egy unalmasan megírt feladatról lenne szó. Ezen téma áttekintése fontos a személyes fejlődésem tekintetében, segítséget nyújthat a későbbi tanári pályámon. Fejlődésre és fejlesztésre is látok lehetőséget, hiszen a változatos módszerekhez tartozó példatár még hiányzik az oktatási palettáról. A feladatok pontos, egyértelmű megfogalmazása, jó feladatok választása elengedhetetlen. Ha el akarom érni azokat a célokat, amiket kitűztem, fontos, hogy a diákok kreativitását, hozzáállását fejlesszem, különböző interaktív és érdekes feladatokkal. Ennek elengedhetetlen módja a lelkesedés megtartása, felkészültség, és jó kapcsolatok kiépítése a diákokkal.

Ezekkel a különböző módszerekkel először a „Digitális tananyagok az oktatásban” című kurzuson találkoztam rendszerezve, és már akkor nagyon megtetszett. Némelyik szokatlannak, vagy megvalósíthatatlannak tűnik a tanóra keretein belül, de úgy gondolom, hogy e bukkanók leküzdése csak a fejlődésemet segítheti elő. A megismert és azóta felkutatott módszereket most bemutatom és elemzem, néhány példán keresztül, pedig bemutatom az alkalmazási lehetőségeiket.

Hogy fogadtassuk el a matematikát?

Középiskolás diákok közül sokan panaszkodtak nekem, hogy nem értik a számításokat, de akár magát a feladatot sem. Amikor egy-egy elméleti dologba belekérdeztem, nem tudták a választ. Érthetetlen számomra, hogy míg biológiából, kémiából természetesnek veszik, hogy az elméleti tudás nélkül nem tudják elvégezni a számításokat, matematika tanulása közben, hiányzik ez a felismerés. Hiszen hogy akar az ember megoldani egy feladatot, ha nem ismeri az ahhoz szükséges elméletet? Úgy gondolom, sokan elsiklanak a felett, hogy az elmélet megértése legalább annyira fontos, mint a számolás, vagy akár fontosabb is. Ilyenkor mutathatunk rá az eljárások alkalmazásaira, mind a matematika területén, mind a való életben.

Rengeteg módszer van az óvodákban, iskolákban, hogy játékos formában, fejlesszük a diákokat és felkeltsük érdeklődésüket a matematika iránt. Az építőkockák a térbeli látást fejlesztik, a színes rúdkészlet a törtszámok bevezetésénél hasznos. A logikai készlet, ami az alakzatok kirakásában, jellemzésében segít, már minden elsős iskolai csomagjában alapkövetelmény. A szemléltető eszközök igen fontosak. A geometriai építőkészlet, általános és középiskolában is hasznos lehet. Megtanulhatóak velük a testek elnevezései, geometriai alaptulajdonságai (élváz, átló, felszín) tapasztalati úton. Nem csak matematikából, hanem akár kémiából, is fel tudjuk használni, egyes molekulák térbeli szemléltetésének céljából. A gyerekek játszanak vele, és nem gondolnak arra, hogy ez tanulás. Miközben élvezettel építik a különböző síkbeli és térbeli formákat, meg is jegyzik azokat.

A különböző geometriai testek térfogatának összehasonlításánál is sokkal jobb, ha demonstrálni tudjuk, mire gondolunk, és így a látvány, a diákokban is jobban megmarad. Középiskolában felhasználhatjuk a parabola, ellipszis, hiperbola tanításánál a kifejezetten ezt a célt szolgáló kúp modell készlet metszéssíkokkal.

Nem csak a geometria területén találhatunk szórakoztató segítséget. A számolás gyakorlására is rengeteg játékos lehetőség van. Mindenki ismeri a bűvös négyzetet. Ez a fajta játék, az általános iskolától egészen érettségiig segítségünkre lehet. A legegyszerűbb, amikor összegeket keresünk, és a sorokban, oszlopokban, átlókban ugyanannak a számnak kell kijönni. Nehezíthetjük nagyobb négyzet megadásával, vagy szorzat keresésével.

Amelyik osztályban szeretik a rejtvényeket, vagy a versenyeket, ott egyfajta gyakorló feladat a számkereső, ami a szókereső játékhoz hasonlít. Itt olyan eredményeket kell megkeresni, egy számokkal teli négyzetben, amihez számolások által juthatunk hozzá. Gyakoroltathatjuk vele az alapműveleteket, fejszámolást, zárójelfelbontásokat, egyenletrendszereket, de akár a logaritmusokat is. Szellemessé tehetjük a feladatot, ha a kiszínezett számok egy ábrát adnak ki, amit röviden jellemezni kell. Így ismétlőkérdéseket is feltehetünk, az előző, már megtanult témakörökkel kapcsolatban.

Feladat 1: A következő feladatban meg kell keresni azokat a számokat, amelyek az alábbi kérdésekre megoldások. A számok lehetnek egyenesen, fentről lefelé, lentről felfelé, jobbról balra vagy balról jobbra, illetve átlósan föntről lefelé, vagy lentről felfelé. Milyen alakzatot kapunk? Jellemezzük!

2	5	0	**5**	3	5	7
3	5	**3**	3	**7**	8	9
9	**4**	6	9	1	**0**	4
3	8	7	4	9	1	**6**
8	**6**	2	1	5	**3**	8
6	7	**4**	6	**1**	4	5
9	5	4	**0**	3	7	6

1, Két szám összege 97. A nagyobbik 3/14ede egyenlő a kisebb 5/9ével. Mi az értéke a nagyobb számnak?

2, Gondoltam egy számra. Ha megszorzom a negyedével és hozzáadom a hónapok számát, majd levonok belőle 4364-t, akkor az eredeti szám kétszeresét kapom. Melyik ez a szám?

3, Ha egy szám harmadát, hatodát és tizedét összeadjuk, 261-et kapunk. Melyik ez a szám?

4, Péter pénzének negyedét mozira, ötödét ebédre, hetedét, pedig tanszerre költötte. Maradt 1482 forintja. Mennyi volt eredetileg?

Alakzat neve: Rombusz

Jellemzés: A rombusz egy olyan négyszög, aminek minden oldala egyenlő hosszú. Átlói egymásra merőlegesek, és felezik egymást.

Megjegyzés: Ilyen példát szinte bármelyik témakörben használhatunk gyakorlásra, mert minden témából tudunk olyan feladatot választani, aminek kikereshető eredménye lesz a számnégyzeten. Ez sikerélményt nyújt a diákoknak, hiszen nem csak a feladatot oldották meg helyesen, hanem a sok szám közül is megtalálták a helyes eredményt. Akár nehezebb feladatokkal, tudásszintnek megfelelően is készíthetünk számkeresőt.

Előzetes tudásszint felmérése

Először az alapokra szeretnék kitérni. Ha új osztályt kapunk - például kilencedikben - mindenki más tudásanyaggal jön. Sok témát érintőlegesen vettek már általános iskolában, de a tudásszint eltérő. Ezt azért fontos felmérnünk, mert amikor különböző módszereket használunk, figyelembe kell venni a diákok képzettségét, mind a feladatsorok, mind a párok, csoportok alakításában. A kérdés az, hogyan mérhetjük fel a tényleges tudást, hogyan győződhetünk meg a fogalmak meglétéről, tisztaságáról? Megismerhetjük a tudásszintet, ha egy adott elem kiválasztására kérjük a diákot egy adott felsorolásból, saját példát kérünk, vagy egyszerű számítási vagy szerkesztési feladatokat adunk nekik.

Feladat 2: Válaszd ki a helyes megoldásokat!

Egy háromszög egyértelműen megszerkeszthető ha:

A, meg van adva három oldala (és az oldalakra fenn áll a háromszög egyenlőtlenség)

B, meg van adva mind a három szöge

C, meg van adva egy oldala, és a rajta fekvő két szög

D, meg van adva két oldal és a kisebbikkel szemközti szög

Itt a diákoknak meg kell gondolniuk az általános iskolában tanult definíciót, felidézni a lehetőségeket. Könnyíteni lehet a feladatot, ha csak egy válasz, nehezíteni, ha több helyes megoldás van a felsoroltak között.

A hiányos szöveg kiegészítése is remek lehetőség. Ekkor lehetőségünk van könnyíteni a feladatot azzal, hogy megadjuk a beírandó szavak halmazát segítségül. A nehezebb az, amikor nem adjuk meg a lehetséges válaszokat, azt, a diáknak a saját szavaival kell megfogalmaznia. A csoportosítás is lehet egy ilyen felmérő feladat. Egyszerűbb a diáknak, ha mi adjuk meg a csoportosítás halmazát, illetve nehezebb, amikor a tanulónak kell kitalálnia azt.

Az egy témakörben előforduló, már ismert, vagy tanult, de nem értett fogalmakat, több szempontból, több szituációban vizsgáljuk. Ezeket tisztázzuk, utána, pedig elkezdhetjük bővíteni. A konkrét példák világítják meg legjobban a fogalmak közötti különbséget, vagy hasonlóságot.

Különböző módszerek bemutatása

Matematikát többnyire frontálisan oktatják. Sok tanár úgy véli, idő hiányában ez a leghatékonyabb módszer. Ezesetben az óra nem interaktív, a tanár leadja az anyagot, a diákok, pedig egyedül próbálják megoldani a hozzá tarozó feladatokat, akár az órán, akár házi feladatként. Ilyenkor azonban a tanulók figyelme gyakran elkalandozhat.

A következő módszereket azért ismertetem a szakdolgozatomban, mert mindegyik különbözik a megszokott frontális oktatástól, s bár nem előadó központúak, mégis teret engednek a pedagógus egyéniségének, valamint lekötik és bevonják a munkába a különböző képességekkel rendelkező diákokat.

Csoportmunka

Véleményem szerint a mai diákok, már nem annyira fegyelmezettek, mint mi voltunk régen. Ez furcsán hangozhat egy 22 éves ugyancsak tanuló szájából, de sajnos ez az igazság. Az iskolai gyakorlatomon azt vettem észre, hogy gyakran nem figyelnek a tanárra, koncentrációs képességük nagyon gyorsan csökken, inkább egymással vannak elfoglalva. Órán élénk a kommunikáció a diákok között. Ezt a kapcsolatot szeretnénk használni a csoportmunka során. Úgy gondolom, a diákokat érdekeli a matematika, szeretnék érteni, megoldani a feladatot. Ha mégsem sikerül elkedvtelenednek, és a sok kudarc után, elvesztik a lelkesedésüket, pedig diáktársaik nagyon szívesen magyarázzák el saját megoldási javaslataikat. A csoportmunka éppen erre a természetes kíváncsiságra épül, és arra az alap ambícióra, hogy a nebulók elmagyarázhassák társaiknak a „megoldást" – azaz, egy kis időre a csapat figyelmének középpontjába kerüljenek.

Gyakorló órákra érdemes ezt a módszert választanunk, amikor már van néhány közösen megoldott és ellenőrzött feladat a füzetben, ahova vissza tudnak lapozni a gyerekek. A kísérleteket is érdekesebb csoportmunkában végezni, például a valószínűségi, vagy kombinatorikus feladatokat illetve a szerkesztési problémákat. A csoportalakítás történhet önként, vagy tanári irányítással. Lehetnek homogének, amikor azonos tudásszintű tanulók kerülnek egy csoportba és ösztönzőleg hatnak egymásra, vagy heterogének, amikor több tudásszintű diák kerül össze, és a jobb tanulók segítenek a gyengébbeknek a felzárkózásban. El kell gondolkodnunk azon, hogy ugyanazokat a példákat akarjuk-e minden csoporttal megoldatni, vagy csoportonként különbözőt. A lényeg, hogy a jól megszervezett csoportmunkát gyorsan megszeretik a gyerekek. (Nem az olyanokat, ahol ötből egy dolgozik, a maradék meg megbeszéli az aktuális moziműsort.) Olyan feladatokról kell gondoskodnunk, amik részekre bonthatók, és eloszthatók, mert akkor a csoport minden tagjának jut feladat, és valóban együttesen, munkamegosztással fognak dolgozni. Hátránya a módszernek, hogy nem mindig tudjuk ellenőrizni, hogy tényleg elmondták-e egymásnak a feladat megoldásait, vagy csak elfogadták az általuk legokosabbnak ítélt diák módszerét. Fontos észben tartanunk, hogy a diákok meglehetősen jól ki tudják játszani a tanáraikat, tehát ha hallótávolságon belülre érünk, máris a matematikáról, az adott feladatról kezdenek el beszélgetni. Ennek kiküszöbölésére, a feladat végén szúrópróbaszerűen kiválaszthatunk két vagy három embert, akik, elmondják az egész megoldást az osztály előtt.

A következő feladatot a Véges matematika című kurzus egyik gyakorlati feladatsoráról vettem, és szerintem jól példázza a csoportmunkára adható példák egyik fajtáját:

Feladat 3: Egy 52 lapos francia kártyacsomagot kiosztunk 4 játékosnak.

a) Hány leosztás van?
b) Hány olyan leosztás van, melyben mindenkinek jut ász?
c) Hány olyan leosztás van, melyben minden ász egy kézbe kerül?
d) Hány olyan leosztás van, melyben minden figura két egymással szemben ülő játékoshoz került?
e) Hány olyan leosztás van, melyben minden játékosnak jut legalább egy kör?

Megoldás:

a) Az elsőnek $\binom{52}{13}$ féleképpen tudjuk kiosztani a kártyát. A másodiknak már csak $\binom{52-13}{13} = \binom{39}{13}$ féleképp, a harmadiknak $\binom{26}{13}$ képpen, és az utolsó, pedig $\binom{13}{13}$ képpen kaphatja meg a kártyákat. Ha ezeket összeszorozzuk: $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$ lesz az eredmény.

   Ezt más módon is ki számolhatjuk. Ismétléses permutációval is ugyanezt az eredményt kapjuk, hiszen, mindegy, hogy a 13 megkapott lapot milyen sorrendben kapja meg az illető, tehát $\frac{52!}{13!13!13!13!}$.

b) Ha mindenkinek jut egy ász, azt az elején kiosztjuk, amit 4! féleképp tehetünk meg. Maradt 48 lapunk, amiből mind a négy játékosnak 12 lap jár, így a leosztás lehetőségeinek számát az előző módszerrel tudjunk kiszámolni. Tehát: $4! * \binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$.

c) A 4 ember közül ki kell választani, ki kapja a 4 ászt. Ezt 4 féleképpen tehetjük meg. Akit kiválasztottunk, már csak 9 lapot kaphat. A maradék leosztást az „a" feladatban használt módszer segítségével számolhatjuk ki. Tehát: $4*\binom{48}{9}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

d) Itt fontos megbeszélni, hogy melyik megoldásra gondolunk, mert két lehetőség is van. Az első esetben ki kell térni arra, hogy felbontva akarjuk-e megoldani a feladatot, tehát külön kiszámolni, hogy a 16 figurás lapból hány darab kerül az egyes, és hány darab a hármas, szembeülő játékoshoz. A második esetben, pedig figyelmen kívül hagyjuk, azt, hogy hány darabot kapnak, csak az a fontos, hogy legyen figurás lap a kezükben.

Az első esetben 11 esetet kell végigvennünk.

Az első, amikor a 16 lapból 3 kerül az egyeshez, és 13 a hármas játékoshoz. Ekkor a lehetőségek száma: $\binom{16}{3}\binom{36}{10}\binom{13}{13}\binom{26}{0}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

Hasonló módon kell felírni a megoldást abban az esetben is, ha ez elsőhöz 4 figurás lap kerül a harmadikhoz meg 12. Ekkor: $\binom{16}{4}\binom{36}{9}\binom{12}{12}\binom{27}{1}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

A többi esetben ugyanígy kell eljárni, ezek eredményeit, összeadni, és akkor megkapjuk az eredményt.

A másik esetben van 16 figurás lap, és 36 nem figurás. A kettes és négyes játékosnak abból a pakliból osztunk, amiben nincs figurás lap. Ezt $\binom{36}{13}\binom{23}{13}$ féleképpen tehetjük meg. A maradék 10 kártyát hozzárakjuk a figurás lapokhoz, ebből osztunk az egyes és hármas játékosnak. Ezt $\binom{26}{13}\binom{13}{13}$ képpen tehetjük meg. Ezeket összeszorozzuk, és megkapunk egy második eredményt, ami nem egyezik az előzővel.

e) A feladat megoldása jó példa a szita formula alkalmazására. Azt tudjuk, hogy az összes leosztási lehetőség $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

Az rossz lehetőség, ha valakinek nem jut kőr. A_1 jelenti azt, hogy az egyes, A_2, hogy a kettes, A_3, hogy hármas, és végül A_4, hogy a négyes játékos nem kap kőrt.

Az a leosztás, hogy egy valaki nem kap kőrt: $|A_i| = \binom{39}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

Ekkor 4 féleképp választhatjuk ki azt az embert, aki nem kap kőrt.

Ha 2 ember nem kap kőrt, akkor a leosztások száma

$|A_i \cap A_j| = \binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

Természetesen 4 emberből $\binom{4}{2}$ féleképpen lehet kiválasztani melyik 2 ember, ne kapjon szivecskés lapot.

Abban az esetben, ha 3 ember nem kap kört, tehát mindegyik egy játékos kezébe kerül, az $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}\binom{13}{13}$ féleképpen történhet meg, és az emberek kiválasztása $\binom{4}{3}$ féleképp történhet.

A szitaformula a következő:

$|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = |H| - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

Ezt leegyszerűsíthettük, tehát a megoldás:

$$|H| - 4|A_i| + \binom{4}{2}|A_i \cap A_j| - \binom{4}{3}|A_i \cap A_j \cap A_k| =$$

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} - 4\left[\binom{39}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\right] + \binom{4}{2}\left[\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{26}{13}\right] - \binom{4}{3}\left[\binom{39}{13}\binom{26}{13}\right]$$

Megjegyzés**:** Mivel a részfeladatokat külön osztanám ki, minden megoldásban le kellene vezetnem a leosztások lehetőségeinek az okát, azaz nem hivatkozhatnék „a" feladatra. Ettől most eltekintek, hiszen egybe látjuk az egész megoldást, nem pedig részfeladatonként.

Ez a feladat tipikus példája a csoportmunkának. Könnyebb és nehezebb részei is vannak, alkalmazkodva a diákok tudásszintjéhez. Játékosabbá tehetjük szemléltetéssel, egy csomag kártyával, amivel segíthetjük rávezetni a tanulókat a helyes megoldásra, ha maguktól nem jönnek rá. Természetesen nem az összes variáció kirakására gondoltam, hanem például arra, amikor egy kézben van a négy ász, vagy mindenkinél kell lennie ásznak, tehát egy-egy leosztás demonstrálására.

A csoportmunka során kiderülnek a diákok erősségei, hiányosságai, illetve a tananyag a hiányosságai is, mert kirajzolódnak azok a területek, ami a csoportoknak nem egyértelmű.

A feladat kiegészítéseként, kérhetjük a diákokat, hogy a témakörrel kapcsolatban találjanak ki kérdéseket, amit majd feltesznek a csoport többi tagjának és megbeszélik azokat. Ezzel bíztatjuk a tanulókat arra, hogy merjenek kérdéseket feltenni az osztály előtt is. Ilyen kérdések lehetnek például:

Feladat 4:

a) Hányféleképpen lehet kiválasztani 13 lapot a pakliból, hogy legyen legalább 9 egyszínű?

A megoldás:

$$\binom{13}{9}\binom{39}{4}+\binom{13}{10}\binom{39}{3}+\binom{13}{11}\binom{39}{2}+\binom{13}{12}\binom{39}{1}+\binom{13}{13}\binom{39}{0}$$

Először a 13 egyszínűből kell kiválasztani, hogy melyik darabokat szeretnénk a felsorolásban látni. Utána a maradék pakliból kiválasztjuk a plusz lapokat, hogy összesen 13 lap legyen az asztalon. A legalább 9 lap megfogalmazás miatt meg kell nézni az eshetőségeket 9, 10, 11, 12 és 13 egyszínű lap esetére.

b) Hány olyan leosztás van, melyben maximum 3 treff kerül az egyes játékoshoz?

$$\left[\binom{13}{0}\binom{39}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}+\binom{13}{1}\binom{39}{12}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}+\binom{13}{2}\binom{39}{11}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}+\binom{13}{3}\binom{39}{10}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}\right]$$

Először a treff nélküli esetet nézzük, amikor csak a maradék pakliból kaphat kártyát az egyes játékos. Utána már kapott egy kártyát a treffes pakliból és 12-t a másikból. A többi esetet hasonlóképpen írhatjuk fel.

A következő feladat megoldása egyéni feladat, de kapcsolódik a csoportmunkához. Ha mindenki megoldotta a feladatot, utána összeültetjük a diákokat. Megkérjük őket, hogy magyarázzák el egymásnak a megoldásaikat. Arra ügyelnünk kell, hogy minden csoportba kerüljön legalább két vagy három fajta megoldás. Ezután, máris csoportként működve tanítják egymást.

Feladat 5: Egy három ismeretlenes egyenletrendszer megoldásainak megkeresés:

$$3x + y - 2z = -1$$

$$x - 4y + 3z = 5$$

$$2x + 3y + z = 18$$

<u>Megoldás 1</u>: Behelyettesítő módszer. Ennél a megoldásnál az egyik egyenletből kifejezzük valamelyik ismeretlent, és a kapott alakot behelyettesítjük a többi egyenletbe. Ekkor, a mi esetünkben kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk, tehát az ismeretleneket folyamatosan csökkentjük.

1, $3x + y - 2z = -1$

2, $x - 4y + 3z = 5$ → a második egyenletből kifejezve $x = 5 + 4y - 3z$

3, $2x + 3y + z = 18$

A másik két egyenletből, a visszahelyettesítés után a következő egyenletrendszert kapjuk:

(1), $13y - 11z = -16$

(3), $11y - 5z = 8$ → $z = \frac{(8-11y)}{-5}$, ezt behelyettesítem az elsőbe

Ekkor azt kapom, hogy $(-56y) = (-168)$ tehát $y = 3$.

A kifejezett értékekbe visszahelyettesítve megkapom az $x=2$, $y=3$, $z=5$, eredményt.

Megoldás 2: Az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölése. Az alapgondolat az, hogy valamelyik egyenlet mindkét oldalát arra alkalmas számmal megszorozzuk és a többi egyenlethez adjuk, kiejtve ezzel ismeretleneket. Ezt a módszert Gauss eliminációnak is nevezzük.

1, 3x + y – 2~~z~~ = -1 → adjuk az első egyenlet háromszorosához a második 2-szeresét

2, x – 4y + 3~~z~~ = 5 → adjuk a második egyenlethez a harmadik (-3)-szorosát

3, 2x + 3y + ~~z~~= 18

Ekkor a kapott egyenletek:

1, 11x - 5y =7

2, -5x - 13y = -49

Ha az első ötszörösét összeadjuk, a második tizenegyszeresével, megkapjuk, hogy -168y = -504, tehát y = 3. Ezt visszahelyettesítve megkapjuk a másik 2 ismeretlen megoldását. (x = 2, ~~z~~ = 5)

Megoldás 3: Egyenlő együtthatók módszere. Ezt a megoldást középiskolában a tanórán leginkább kétismeretlenes egyenletek megoldására szokták használni.

A módszer lényege, hogy az egyenleteket megfelelően választott számmal megszorozva elérhetjük, hogy a két egyenletben az egyik ismeretlen együtthatója egymásnak ellentettje legyen. Az egy három ismeretlenes egyenletrendszer esetében nehéz, úgyhogy itt a Cramer szabályt fogom alkalmazni, amely a determinánsok segítségével ad megoldást. A következő módszert, mivel bonyolult, legfeljebb egy matematika szakkör keretein belül tudom elképzelni:

(Tétel <Cramer szabály>: Ha $A \in T^{nxn}$ és $D = \det A \neq 0$, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. A megoldásban $x_j = D_j/D$, ahol D_j determinánst úgy kapjuk, hogy a D-ben a j-edik oszlop helyére a jobb oldali konstansokat (azaz a b vektor komponenseit) írjuk.) [1]

Az eredeti mátrixok:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

---

[1] Freud, 2006

A D mátrix kifejtve:

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ =3*(-13) – (-5) + (-2)*11 = -56

A D1, D2, D3 mátrixok kifejtve:

$D_1 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \\ 18 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 18 & 3 \end{vmatrix} = -112$

$D_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 18 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} = -168$

$D_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 18 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -280$

Visszahelyettesítve az értékeket, a következő megoldást kapom:

$x = \frac{-112}{-56} = 2$, $y = \frac{-168}{-56} = 3$, $z = \frac{-280}{-56} = 5$

Ellenőrzés: Visszahelyettesítem az eredeti egyenletrendszerbe:

1, 3*2 + 3 – 2*5 = -1

2, 2 – 4*3 + 3*5 = 5

3, 2*2 + 3*3 + 5= 18

Tehát helyes megoldásokat kaptunk.

Megjegyzés: Hogy pontosan egy megoldást kapjunk D mátrix determinánsa nem lehet egyenlő 0-val. Ha a determináns 0, akkor, vagy nincs megoldás, vagy végtelen számú megoldás van.

<u>Feladat 6</u>: Itt is egy egyenletrendszerről lesz szó, de ez másodfokú egyenletekből áll.

$$(y + x - 6)(x - y) = 0$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 10y = -18$$

<u>Megoldás1.</u> Algebrai úton, behelyettesítéssel.

Az első egyenletből kifejezzük x-et. Két lehetőség van arra, hogy az első egyenletben teljesüljön az egyenlőség, x = y illetve x = 6-y esetén. Ekkor ezeket visszahelyettesítjük a második egyenletbe:

1) $(6-y)^2+y^2-6*(6-y)-10y= (-18)$
2) $(y-3)^2 + (y-5)^2 = 16$

Ha a két egyenletet kibontjuk, mind a kettőnek a végeredménye a következő:
$2y^2- 16y + 18 = 0$, amit egyszerűsítés után másodfokú egyenletként megoldunk.
Ekkor a megoldás a következő:

$y_{1,2}= \frac{8\pm\sqrt{(64-36)}}{2}$ → $y_1 \approx 6{,}645 \approx 6{,}6$
$y_2 \approx 1{,}354 \approx 1{,}35$

y_1 visszahelyettesítése esetén:

$x_1= 6-y = - 0{,}65$

$x_2 = y = 6{,}65$

y_2 visszahelyettesítése esetén:

$x_3= 6-y = 4{,}65$

$x_4 = y = 1{,}35$

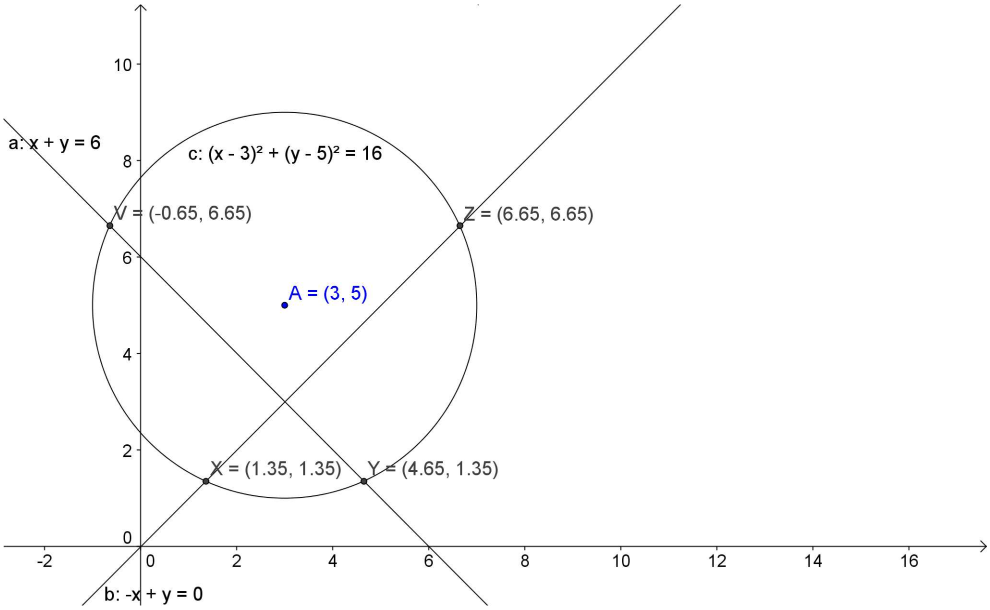
Tehát 4 megoldás van: (-0,65 ; 6,65), (6,65 ; 6,65), (1,35 ; 4,65), (1,35 ; 1,35)

<u>Megoldás 2</u>***:*** Ez is algebrai módszer.
Ha felbontjuk a zárójeleket az első egyenletben, akkor azt kapjuk, hogy: $x^2 + y^2 – 6x + 6y = 0$
Ha a két egyenletet kivonjuk egymásból az eredmény: $2y^2 -16y + 18 = 0$
Ezt a másodfokú egyenletet megoldva megkapjuk y_1 = 6,65-öt és y_2 = 1.35-öt. Az első egyenletbe visszahelyettesítve megkapjuk, a hozzájuk tartozó x –eket:

$x^2 – (6{,}65)^2 -6x – 6*6{,}65 = 0$ → $x_1= -0{,}65$ $x_2 = 6{,}65$
$x^2 – (1{,}35)^2 -6x – 6*1{,}35 = 0$ → $x_3= 4{,}65$ $x_4 = 1{,}35$

<u>Megoldás 3</u>***:*** Geometriai ötletelés, amihez a GeoGebra programot fogom használni.
A második egyenlet kört állít elő: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$

Az első egyenlet alakja mutatja, hogy azt, az y = x, valamint az y = -x + 6 egyenes pontjai elégítik ki. Az 1. ábrán látható kör és két egyenes metszéspontjai lesznek az egyenletrendszer megoldásai.



1.ábra

Megjegyzés: A különböző megoldásokat természetesen mindenki maga választja ki. Én legjobban a 1. megoldást szeretem használni. A geometriai „megoldás” látszólag a legrövidebb és legegyszerűbb, hisz a diáknak nem kell ismernie a számolások menetét, csak a GeoGebra programot, de természetesen ez sem ad tökéletes megoldást, például kerekítve adja meg a számokat. A matematika és számítógép kapcsolatát a későbbiekben tárgyalom még.

Mindenki másképp látja a matematikát, ezért hasznos, ha többféle megoldás születik. Ha valaki megakad, egy gyors rávezetéssel könnyedén tovább lehet lendíteni a nehézségeken. Ha valaki nem ért valamit, magyarázat közben, jobban odafigyel társára, mint egy rossz tanárra, és nem egy, hanem akár 2-3 fajta megoldást is hallhat a végén. Abban a diákban is jobban megmarad a feladat, aki elmondja. Ez az úgynevezett tanítva tanulás. Hasznos, hiszen mindenki rájön a megoldásra, van, aki magától, van, aki segítséggel. Magyarázat közben bevésődik a megoldási mechanizmus, és a későbbiekben könnyebben fog megoldani hasonló típusú feladatokat. Itt is gondolnunk kell arra, hogy az irányítás a kezünkben maradjon, ténylegesen beszéljék meg a feladatot a diákok. Ennek kiküszöbölésére, a csoport megbeszélés után szúrópróbaszerűen kiválaszthatunk két, három diákot és megkérjük, mondjanak el egy, az övéktől különböző, megoldást. Ekkor rá vannak kényszerítve arra, hogy ténylegesen átbeszéljék a kiadott feladatot.

A geometriai ötletelés hasznosságát olyan feladattal szemléltetem, amit egyik tanáromtól hallottam. Mivel ez a feladat is nehéz, ezért csak szakkörön, vagy matematikát emelt szinten tanuló osztályban tudom elképzelni.

Feladat 7: Az „a" értékétől függően, hány megoldása van a következő egyenletrendszernek?

$$1,\ |x| = |y|$$
$$2,\ (x - a)^2 + (y)^2 = 1$$

<u>Megoldás 1</u>: Algebrai módon

Az abszolút értékek miatt 2 részre kell osztani a feladatot.

1) x = y azaz, amikor azonos előjelű x és y.

Ha visszahelyettesítünk x-et a második egyenletbe, azt kapjuk, hogy:

$x^2 - 2ax + a^2 + x^2 = 1$ Tovább alakítva: $2x^2 - 2ax + (a^2-1) = 0$

Ez x-re nézve másodfokú egyenlet tehát a megoldása:

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{[(2a)^2 - 4*2*(a^2-1)]}}{4}$$

Ennek a diszkriminánsát kell vizsgálnunk, hiszen ha D < 0, akkor nincs megoldása, ha D = 0 akkor egy megoldása lesz, ha pedig D > 0, akkor, pedig több megoldást kapunk.

Nézzük az első esetet, amikor D < 0. Ha visszahelyettesítünk a $2x^2 - 2ax + (a^2-1) = 0$ egyenletbe akkor megkapjuk a következő egyenletet: $(2a)^2 – 4*2*(a^2 – 1) < 0$

Ha ezt egyszerűsítjük: $2 < a^2$ –t kapunk.

Ha „a" pozitív leoszthatunk vele, és akkor azt kapjuk, hogy √2 < a . Ha negatív a relációjel megfordul, és az lesz az eredmény, hogy -√2 > a.

Tehát nem lesz megoldása, ha √2 < a és ha -√2 > a.

Második esetben a D = 0. Ha megoldjuk a $(2a)^2 - 4*2*(a^2-1) = 0$ egyenletet azt kapjuk, hogy $a^2 = 2$, tehát ennek a megoldásai az $a_1 = \sqrt{2}$ és $a_2 = -\sqrt{2}$.

Harmadik esetben D > 0 feltevésekor, az $a^2 < 2$ lesz az eredmény. Ha „a" pozitív, akkor leosztunk a-val, és azt kapjuk, hogy $a < \sqrt{2}$. Ha „a" negatív, akkor a relációjel megfordul, és azt az eredményt kapjuk, hogy $a > -\sqrt{2}$.

Tehát nem lesz megoldása, ha $\sqrt{2} < a$ és ha $-\sqrt{2} > a$, 1 megoldása lesz ha $a_1 = \sqrt{2}$ és $a_2 = -\sqrt{2}$, illetve több megoldása lesz, ha $a < \sqrt{2}$, és $a > -\sqrt{2}$.

2) $-x = y$, azaz amikor x és y ellenkező előjelű.
Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe ismerős egyenletet kapunk:
$2x^2 - 2ax + (a^2-1) = 0$

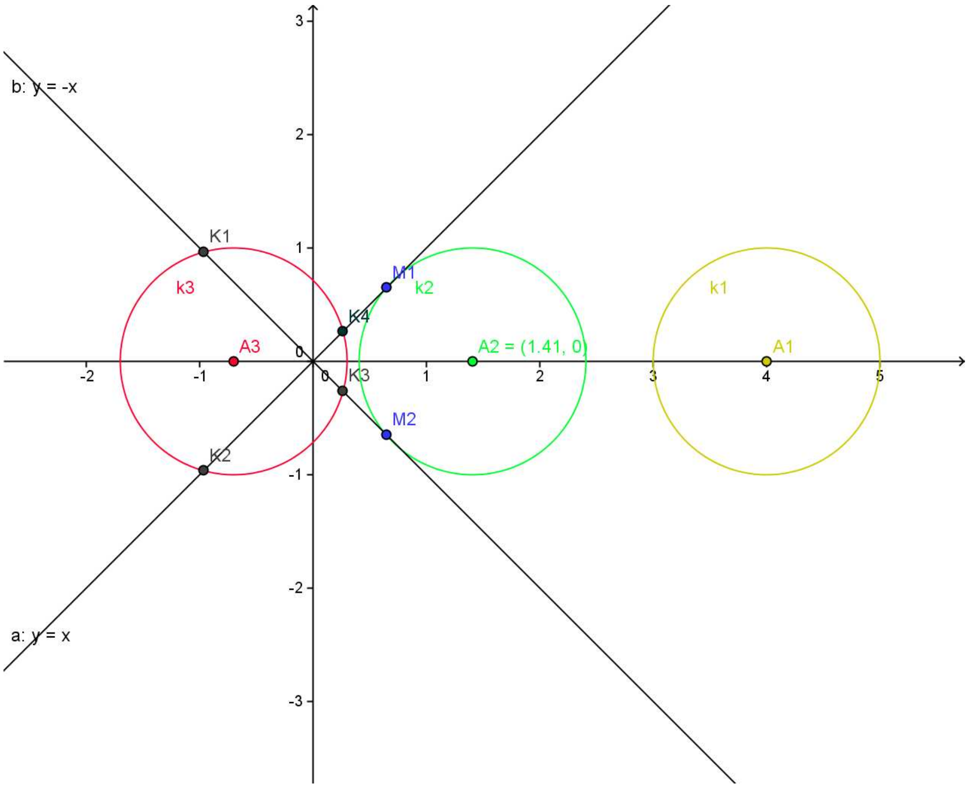
Ha megvizsgáljuk a determinánst, ugyanazt kapjuk, mint az előzőben. Tehát nem lesz megoldása, ha $\sqrt{2} < a$ és ha $-\sqrt{2} > a$, 1 megoldása lesz ha $a_1 = \sqrt{2}$ és $a_2 = -\sqrt{2}$, illetve több megoldása lesz, ha $a < \sqrt{2}$, és $a > -\sqrt{2}$.
Azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a második egyenletnek ugyanott lesz közös pontja az elsővel, mint az előző esetben.

A fentiek alapján kijelenthetjük, hogy az „a"-nak a $[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$ intervallumon kell mozognia ahhoz, hogy legyen megoldása az egyenletrendszernek.

<u>Ellenőrzés:</u>
1, nincs megoldása az egyenletrendszerünknek a = 2 esetén:
$2x^2 - 2ax + (a^2-1)=0$ egyenletbe fogom visszahelyettesíteni, mert az álalakításokat, leírtam a feladatba. $2x^2 - 4x +3 = 0$ Ennek az egyenletnek nincs megoldása, mert a felírt megoldó képletben a diszkrimináns negatív.
2, pontosan egy megoldása van $a = \sqrt{2}$ esetén:
$2x^2 - 2\sqrt{2}x + ((\sqrt{2})^2 - 1)=0$ Ennek megoldása $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3, több megoldás van a = 0,5 esetén:
$2x^2 - x + ((0,5)^2-1)=0 \rightarrow x1 \approx 0,89$; $y1 \approx 0,89$; $x2 \approx 0,03$; $y2 \approx 0,03$;

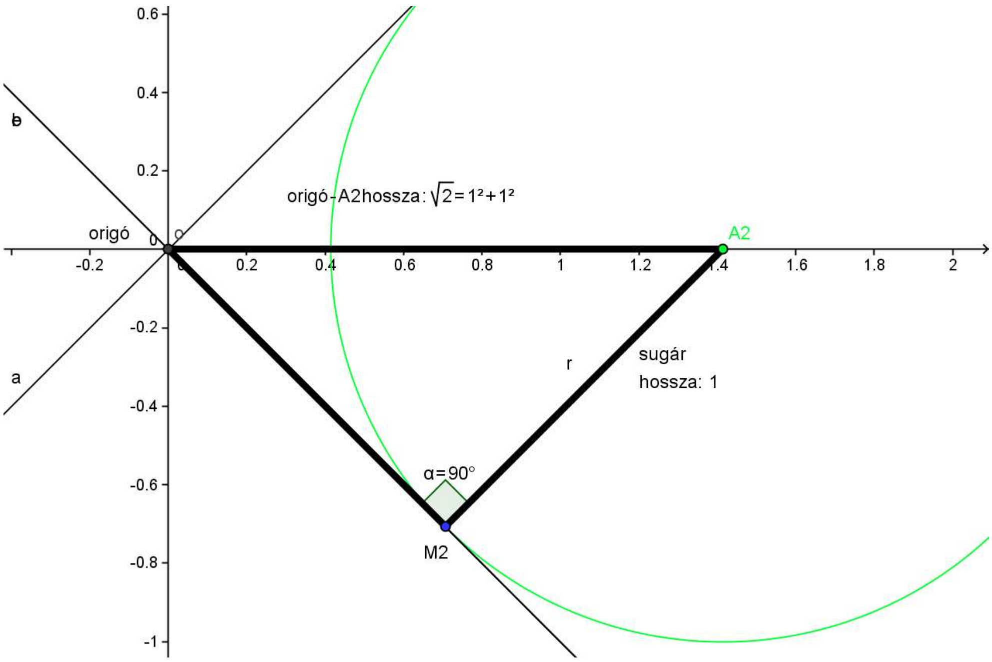
Geometriai ötletelés:

A második egyenlet egy (a ; 0) középpontú egységsugarú kör egyenlete, tehát az origója az x tengelyen mozog. Ha megnézzük az ábrát, látszik, hogy a lehetséges metszéspontok száma 0, 2, 3, vagy 4. A1 középpontú kör esetében nincs metszéspont. Pontosan 2 darab metszéspont akkor van, amikor az |x| = |y| egyenesek lesznek az érintők.(2. ábra)



2. ábra

Ennek a körnek a középpontját ki tudjuk számolni. Mivel a körünk egység sugarú, ha A2 középpontot összekötöm M2-vel, ennek a szakasznak a hossza egy lesz, hiszen sugár. Mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért egy derékszögű háromszöget kapunk. M2 távolsága az origótól is egy, mivel OM2 az x = -y egyenesen fekszik, ezért x és y tengellyel 45° fokot zár be. Tehát M2OA2 szög 45°-os. A háromszög belső szögeinek összegének tulajdonságából OA2M2 szög is 45°-os. Tehát az OA2M2 egy egyenlőszárú derékszögű háromszög, aminek az alapját kell kiszámolnunk, és megkapjuk, hogy A2O = $1^2+1^2 = \sqrt{2}$ (3.ábra)



3.ábra

Ha tükrözzük az ábránkat y tengelyre, akkor ugyanilyen módon, a -√2 is kijön intervallum végnek.

Akkor 3 metszéspont van, ha a kör középpontja (1, 0), illetve (-1, 0). Hiszen akkor egy-egy metszéspontja van a két egyenessel, és az origón keresztül van a harmadik.

4 megoldása akkor van, ha amikor a kör úgy helyezkedik el, hogy az egyenesekkel két-két metszéspontja van.

Tehát ezzel az ötleteléssel is kijött az előző feladatban kihozott [-√2; √2] intervallum, csak sokkal gyorsabban kevesebb számolással. Magát az ábrákat, csak vázlatnak használtuk fel, mégis, megkaptuk a helyes eredményt.

Mozaik módszer

Ebben az esetben is, a diákok csoportokat alkotnak. Mindenki kap egy kifejtést, egyszerű tételt bizonyítással a témakörön belül. Átolvassák, kijegyzetelik, és egyszerű feladatokat oldanak meg belőle. Ezek után jön a tanítás. A diákok bemutatják társaiknak a kapott témakört, úgy, hogy a többi tanuló jegyzeteli azt, amit hall. Utána feladják a már megoldott feladataikat, hogy oldják meg a többiek is, utána ellenőrzik azokat. Az előadás befejezésekor írathatunk egy csoporttesztet, hogy felmérjük, ki mennyire értette meg a társát. A következő órán átbeszéljük azt a témát, amivel a probléma volt. A jutalmazás sem maradhat el, mondjuk a tesztet hibátlanul megoldó csoport mindegyik tagja kisötöst kap. Folyatatása is lehet ennek a feladatnak, az, amikor az azonos témaköröket kidolgozó diákokat ültetjük egy asztalhoz, és mindenkinek még egyszer, de ebben az esetben már egy „szakértő" zsűri előtt, kell elmondani a saját témakörét.

Feladat 9: Téma: A körre vonatkozó fontos ismeretek.

A) A központi szög és a hozzá tartozó körív és körcikk
B) Kerületi szögek, középponti és kerületi szögek tétele
C) Kerületi szögek tétele, látószögkörív
D) A körhöz húzott érintő és szelőszakaszok tétele

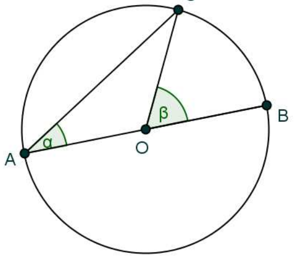
Feladatlap A:

Azokat a szögeket nevezzük a kör kerületi szögének, amelynek a csúcsa a kör kerületén van és a két szára, vagy két húr, vagy egy húr és egy érintő. Egy körben, vagy azonos sugarú körökben az azonos ívhosszhoz tartozó kerületi és középponti szögek között egy összefüggés áll fenn. Ezt a következő tételen keresztül szeretném bemutatni.

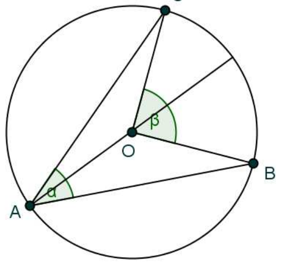
Tétel: Egy körben az azonos hosszúságú ívekhez tartozó középponti és kerületi szögek aránya 2: 1.

Bizonyítás: 4 észre bontjuk a bizonyítást.

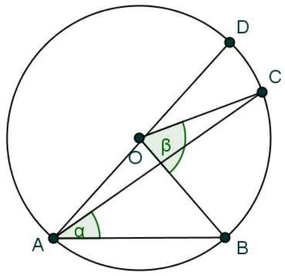
a) a középponti és kerületi szög egyik szára egy egyenesre esik.
b) a középponti szög csúcsa a kerületi szög tartományába esik.
c) a középponti szög csúcsa nem esik a kerületi szög tartományába
d) a kerületi szög egyik szára érintő



4. ábra



5. ábra



6. ábra

a) eset: A 4-es ábrán látható OAC háromszög egyenlőszárú, ezért az ACO∡ = α.
A COB∡ = β ami az ACO háromszög külső szöge, ezért $\beta = 2\alpha$

b) eset: Az 5-ös ábrán az OA egyenes 2 részre vágja a BOC és BAC szögeket is. Az OA egyenes mindkét oldalán fennáll az a) esetben bizonyított arány. Természetesen az összegre is igaz, ezért $\beta = 2\alpha$

c) eset: A 6-os ábrán a BAC és BOC szögek az OA berajzolása után, különbségként felírható.

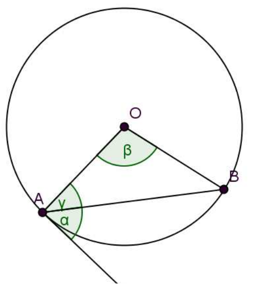
BOC∡ = BOD∡ – COD∡

BAC∡ = BAD∡ - CAD∡

BOD∡ és BAD∡, illetve COD∡ és CAD∡ egy ívhez tartozó középponti és kerületi szögek, amelyeknek az esetét már tárgyaltuk, tehát az arányuk 2:1, és a különbségük aránya is ennyi lesz, ezért $\beta = 2\alpha$.

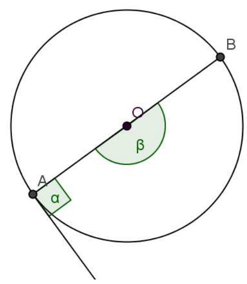
d) eset: ezt is különbontva fogjuk megtárgyalni

$\alpha < 90°$



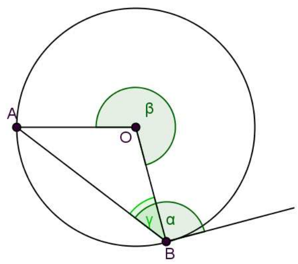
7.ábra

$\alpha = 90°$



8.ábra

$\alpha > 90°$



9.ábra

1,$\alpha < 90°$ Az érintési pontba húzott sugár 90°-ot zár be az érintővel. Tehát $\gamma = 90° - \alpha$. A háromszög egy egyenlőszárú háromszög, tehát a $\beta = 180° - 2*(90°-\alpha) = 2\alpha$ (7.ábra)

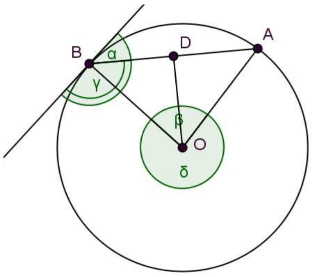
2,$\alpha = 90°$ Ha az érintő szárú, kerületi szög 90° akkor a középponti szög 180° (8.ábra)

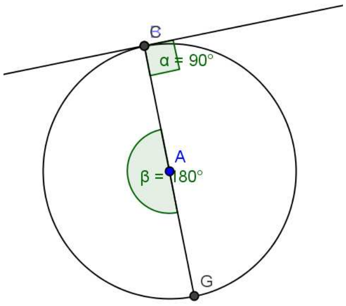
3,$\alpha > 90°$Az első esetből kiindulva: $\gamma = \alpha - 90°$. Mivel AOB háromszög egyenlőszárú, ezért az O-nál lévő külső szög: $\beta = 2*(\alpha - 90°) = 2\alpha$ (9.ábra)

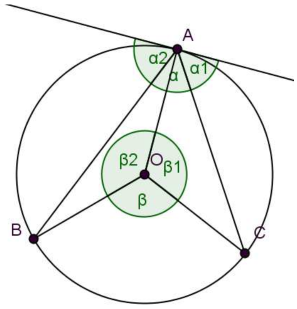
Ezzel megtárgyaltuk az összes eshetőséget.

Bizonytás 2:

Mivel a kerületi szögek többféle helyzetűek lehetnek, ezért ez a bizonyítás is több lépésben történik. A következő gondolatmenet Bolyai Farkas (1755-1856) magyar matematikustól származik:







10. ábra 11.ábra 12.ábra

1, A kerületi szögek szára érintő és $\alpha < 90°$. Az OAB egyenlőszárú háromszög, AB oldalhoz tartotó magasság OD, ami felezi a β középponti szöget. Tehát BOD$\measuredangle$ és AOD$\measuredangle$ szögek egyenlők $\beta/2$-vel. Mivel α és BOD $\measuredangle$ merőleges szárú hegyesszögek, ezért egyenlők, tehát $\beta = 2\alpha$. (10.ábra)

2, Tekintsük α hegyesszögének a γ mellékszögét, ami tompaszög. Ez is kerületi szög, ennek megfelelően a hozzátartozó középponti szög legyen δ. Az ábra mutatja, hogy
$\gamma = 180 - \alpha$, $\delta = 360 - 2\alpha = 2\,(180 - \alpha) = 2\gamma$ (10.ábra)

3, Ha az érintő szárú kerületi szög 90°, akkor a hozzá tartozó középponti szög 180°.(11.ábra)

4, A kerületi szög mindkét szára húr. Húzzuk meg a szög csúcsához tartozó érintőt. Ekkor $\alpha 1$ és $\alpha 2$ érintő szárú kerületi szögek keletkeznek. Ezekre igaz $\alpha 1 + \alpha + \alpha 2 = 180°$. A hozzájuk tartozó középponti szögek összege 360°. $\alpha 1$-re és $\alpha 2$ már bizonyítottuk, hogy a hozzájuk tartozó középponti szög, nekik a kétszeresük, így az α-hoz tartozó középponti szögnek 2α-nak kell lenni.(12.ábra)
Ezzel minden esetre bebizonyítottuk, hogy a középponti szög a hozzá tartozó kerületi szög kétszerese.

Feladat1: Egy azonos ívhez tartozó kerületi és központi szög összege 237. Számold ki a kerületi és középponti szög nagyságát!

Feladat2: Egy ABC háromszög csúcspontjai a köré írt kört a : b : c = 5 : 7 : 8 arányú ívekre bontja. Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldások:

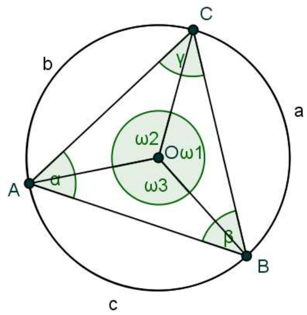
1, Ha α a kerületi szög és ω a középponti szög, akkor $\alpha + \omega = 237$, és azt tudjuk, hogy $\omega = 2\alpha$-val, tehát $3\alpha = 237°$ → Ebből megkapjuk, hogy $\alpha = 79°$, és a hozzátartozó középponti szög pedig $\omega = 158°$

2, Az ábra jelölései szerint AB ív = c, BC ív = a, CA ív = b.

Feltételek szerint a : b : c = 5 : 7 : 8. Ezekhez az ívekhez tartozó középponti szögek aránya is ugyanennyi, azaz $\omega 1 : \omega 2 : \omega 3 = 5 : 7 : 8$.

360:(5+7+8) = 18 → $\omega 1 = 5*18 = 90$, $\omega 2 = 7*18 = 126$, $\omega 3 = 8*18 = 144$

Tehát az ABC háromszög szögei a kerületi és középponti szögek tétele alapján:



$\alpha = \omega_1/2 = 45°$, $\beta = \omega_2/2 = 63°$, $\gamma = \omega_3/2 = 72°$.

A bizonyítások közül, csak az egyiket kell elmondani órán, a második átnézését, házi feladatnak adnám. A megoldásokat, csak később osztanám ki, amikor már többen készen vannak már a feladattal. A többi témakör feladatlapját is hasonló módon kell elkészíteni.

Természetesen a módszert több témakörnél is fel lehet használni, akár algebráról, vagy analízisről van szó.

Kocka játék

Ennél a módszernél 4 fős csoportokat alkotnak a diákok. Mindenkinek lesz egy szerepe. Az első diák kérdések számától függően egy vagy két dobókockával dob, hogy hányas kérdést rakja fel a kérdező (második diák). A válaszoló (harmadik diák) válaszol. A negyedik, pedig ellenőriz. Ha lement egy kör a szerepek továbbadódnak. A tanárnak elő kell készítenie a kérdéseket, borítékba rakni, dobókockákat elrakni. Természetesen „tartósítani" is lehet a papírokat, például laminálással.

Páros ellenőrzés

A diákok a feladat megoldására összpontosítanak, és segítik, ellenőrzik egymást. A csoportok párokra oszlanak. A párok egy feladatlapon dolgoznak. Az egyik diák kidolgozza az első feladat megoldását, amíg a másik figyeli, és ha szükséges, segít. Ha nem értenek egyet, megkérdezik a másik párt. Ha a csoport nem tud megegyezni, megkérdezik a tanárt. Majd a párok szerepet cserélnek. A megoldott feladatokat összehasonlítják a csoport másik párosával, ha nem azonosak, közösen keresik meg a megoldást.

Tanítva tanulás

Aki másoknak magyaráz, maga is tanul. Tehát, ha egy diák megold egy feladatot, és el is tudja magyarázni, akkor értette meg igazán. A tudás az, ha megértettük és meg is tanultuk az anyagot! Gyakran megkérem a tanítványaimat is, hogy egy- egy elmagyarázott feladat után egy hasonlót, vagy akár ugyanazt magyarázzák el nekem. Természetesen közben kérdéseket teszek fel nekik a feladattal kapcsolatban, és ha tudják a válaszokat, csak akkor mehetünk tovább. Ha nem értették meg kellőképp, akkor újra elmagyarázom a feladatot. Természetesen a módszereket is lehet összevonni, keverni. Most, a fenti kettőt összevonva fogom tárgyalni.

Feladat 10: A következő feladatot a 2005. május 10-ei emeltszintű érettségiből választottam ki. Nem a teljes feladatot közlöm.

a) Döntse el, hogy az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Válaszát írja a táblázatba!

A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van.

B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros.

C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.

D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

A	B	C	D

b) Ha valaki sohasem hallott a gráfokról, és mégis kitölti a fenti táblázatot, akkor mekkora valószínűséggel lesz helyes mind a négy válasza?

c) Fogalmazzon meg egy olyan szöveges feladatot, amelynek a megoldása így számítható ki: $\binom{17}{2}$.

<u>Megoldás:</u>

a)

A, Igaz, hiszen n szögpontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n*(n-1)}{2}$, tehát $\frac{6*5}{2} = 15$

B, Hamis, mert egy 5 pontú teljes gráf éleinek száma 10. (Előző képletből)

C, Igaz, hiszen ha egy n szögpontú gráfnak legalább n éle van, akkor tartalmaz kört.

D, Igaz, hiszen minden gráfban a fokszámok összege egyenlő, az élek számának kétszeresével.

b) Annak a valószínűsége, hogy az elsőt eltalálja ½. Ennyi az esélye a másodiknak, a harmadiknak, és a negyediknek is. Szóval a megoldás $(½)^4$. Nem ezt a megoldási módot közli, az érettségi útmutató. Ott úgy oldja meg a feladatot, hogy, összesen 2^4-en kitöltés létezik és ezek közül csak egy a jó. Szóval a $\frac{kedvező}{összes}$ elvet használja. Az eredmény természetesen itt is $\frac{1}{16}$ = 0,0625.

c) Ennek a feladatnak végtelen sok megoldása van, hiszen rengeteg ötlet születhet. Íme néhány:

- Hány féle módon vehetünk el 17 sütiből 2-t?
- 17 feladatból hányféleképpen választhatunk ki kettőt, amiket meg szeretnénk oldani?
- Egy 17 fős osztályból 2 pályázhat külföldi ösztöndíjra. Hányféleképp választhatjuk ki a két szerencsés tanulót?
- Az érettségi útmutató a következőt írja: Hány egyenest határoz meg a sík 17 pontja, ha nincs közöttük három egy egyenesre illeszkedő?

Megjegyzés: A feladat sokféle részre bontható. Mindegyiknek egyszerű magyarázata van. Ez elősegíti a gondolkodást, de mélyíti az elméleti tudást is. Itt is jelentősége van az elmélet megtanulásának, hiszen ha érettségin, elkezdünk gráfokat rajzolgatni, kicsúszhatunk az időből. Előnye, hogy könnyű magyarázni a megoldást és a feladattal gyorsan lehet haladni. Hasznos feladat, ha lendületes órát szeretnénk tartani.

Pármunka

Pármunka alatt két, hasonló képességű tanuló együttműködő tevékenységét értjük. Ebben az esetben homogén páralakítás történik.
A tanulópár is két ember együttműködésén alapszik, bár ebben az esetben két ellentétes tudású (heterogén páralakítás) tanulót kérünk meg arra, hogy dolgozzanak együtt. Ebben az esetben a jobb képességű gyermek a tanár szerepében is tevékenykedhet (tanítva tanulás). Ha páros munkáról van szó, akkor egy időben, egyszerre, az osztály fele beszél. Az idő aktívabban telik, a gyerekek figyelnek egymásra.

Feladatküldés

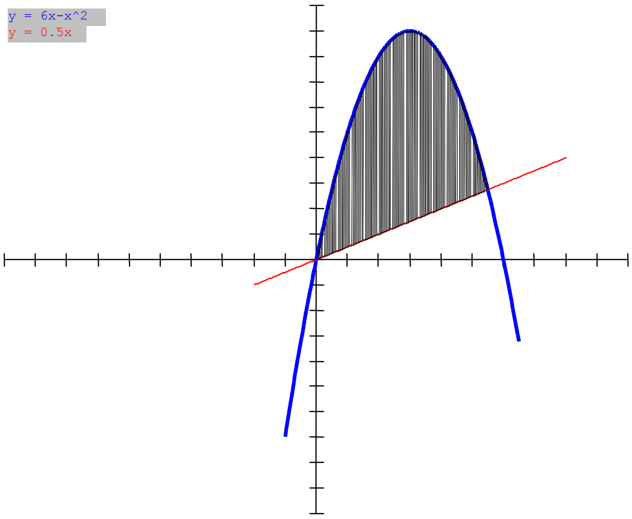
Ebben az esetben a párok feladatot készítenek egy adott témakörben, majd a feladatokat kicserélik egymás között, és megoldják. Ilyenkor fejlődik a kommunikációs készség, és a kreatív gondolkodás is. Ezek az egyik esetben ismétlő kérdések, amikor célszerű megkérnünk a kitalálókat, hogy a papír hátlapjára írják fel a megoldást, hogy elkerüljük, hogy olyan kérdéseket tegyenek fel társaiknak, amit még ők maguk sem tudnak megválaszolni. Ha több időnk van, lehetséges a témakörből konkrét feladatok kitalálása is. Ha a pár megkapta a feladatot, megpróbálják megválaszolni, de ha hiányosnak találják a megoldást, ki is egészíthetik. A kártya továbbküldhető, hogy az egész osztály találkozzon ugyanazokkal a feladatokkal. Érdekesebbé tehetjük az ilyen feladatot, ha megemlítjük, hogy a dolgozatban a kérdések közül egy vagy kettő szerepelni fog. Ezzel rávehetőek, hogy érdemben foglalkozzanak a kérdésekkel, feladatokkal. Ilyen kitalált példa lehet, az integrálás témaköréből, a következő:

Feladat 11: Adottak a következő függvények: $f : x \in [-1, 6{,}5]$, $f(x) = 6x-x^2$ és
$g: x \in [-2, 8]$, $g(x) = 0{,}5x$

a) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az f és g függvényt.
b) Számítsuk ki az f(x) és g(x) görbe által bezárt síkidom területét.

Megoldás:

a)



b) A területet integrálással fogom kiszámolni, úgy, hogy f(x) alatti területből kivonom g(x) alatti területet. Az intervallumot, most a metszéspontok határozzák meg.

$6x - x^2 = 0.5x \rightarrow x_1 = 0$ és $x_2 = 5{,}5$. Tehát az integrál határok: 0 és 5,5.

A síkidom területe: $\int_0^{5,5}(6x - x^2)$ - $\int_0^{5,5} 0{,}5x = \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{5,5}$ - $\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^{5,5} \approx$ 27, 73

Egy másik módszerrel is kiszámolhatjuk az eredményt. A két zérushelye, mint integrálhatárok, között integráljuk f(x)-et. $\int_0^6 (6x\text{-}x^2) = \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^6 = 36$

Ekkor a „felesleges” területet felosztjuk 2 részre. Az egyik egy háromszög, aminek a területe könnyen meghatározható. A másik részt integrálnunk kell.

$T = \frac{5{,}5*2{,}75}{2} + \int_{5,5}^6 6x - x^2 = \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{5,5}^6 = \frac{5{,}5*2{,}75}{2} + (3*6^2 - \frac{1}{3}*6^3) - (3*5{,}5^2 - \frac{1}{3}*5{,}5^3)$

$\approx 8{,}27$

Tehát a keresett terület: 36 – 8,27 = 27,73. Jól számoltunk, hiszen az előző számolásból is ezt az eredményt kaptuk.

Füllentős

Ezt a módszert azért tartom fontosnak itt megemlíteni, mert ez a feladatküldés egyszerűsített verziójának gondolom. Megkérjük a diákokat, írjanak fel, igaz és hamis állításokat az adott témakörben. Az, hogy mennyi legyen az összes kérdés, időfüggő. Az igaz és hamis állítások arányát a tanár szabja meg, lehetőleg párra lebontva, (pl. mindenki húz egy borítékot), hogy ne lehessen kikövetkeztetni a feladatok igaz, vagy hamis voltát. Ez lehet elméleti kérdés, illetve gyakorlati feladat is. Természetesen nem bonyolult számolásokra kell gondolni, hanem könnyen, egy kis gondolkodással megoldható feladatokra. Ezek után minden pár felolvassa az osztály előtt az állításait, és minden párnak, megbeszélés után, fel kell írnia a helyesnek gondolt válaszát. Ha mindenki végzett, ellenőrizzük, és megbeszéljük a feladatok logikai megoldásának menetét. Ebben az esetben, nem mindig tudja irányítani a folyamatokat a tanár, a váratlan helyzetekre is fel kell készülni.

Feladat 11: Igaz vagy hamis?

1, Létezik olyan téglalap, ami trapéz.

2, Minden paralelogramma téglalap.

3, Egy négyszögnek lehet 180°-nál nagyobb szöge.

4, Van olyan háromszög, aminek a súlypontja és magasságpontja egybe esik.

Más témakörből:

5, Ha egy szám osztható 8-cal és 10-zel akkor biztosan osztható 80-nal is.

6, Ha egy szám osztható 6-tal és 7-tel akkor osztható 42-vel.

7, 2 prímszám szorzata mindig páratlan.

8, Tudunk úgy választani 7 szomszédos egész számot, hogy az összegük 0 legyen.

Villámkártya

Ezt a módszert, többféle órán el tudom képzelni. Egyrészről a bevezető szakaszban, mert segítheti a memorizálást, illetve a gyakorló órákon is. Lehet fogalmat párosítani, kifejtéseket memorizálni, ábrákat magyarázni és egyszerűbb elméleti anyagot gyakoroltatni. Fejleszti a hosszú távú és a rövid távú memóriát is, az úgynevezett mélymemóriából veszi ki az adatokat. A füllentős módszerrel ellentétben itt a tanár előre dolgozva készíti el a kártyákat, és osztja szét a diákok között. Ajánlatos „tartósítani" ezeket a kártyákat, hogy az évek folyamán többször fel tudjuk használni őket. A laminálás erre tökéletes, de azt is el tudom képzelni, hogy minden osztálynak „osztályra szabottan" készítjük el a kártyákat, bár ezt túl időigényesnek gondolom. A tanár tudja felügyelni a folyamatokat, az előrelátható kérdésekre fel tud készülni. Többféleképpen is alkalmazhatjuk ezt a módszert.

Az első az, amikor 2 fajta kártyát csinálunk. A kártyák felét úgy készítjük el, hogy a megoldás a hátlapján legyen. Ezek az első, bevezető órán használhatóak. A

második felét a paklinak úgy készítjük el, hogy ugyanazokat a kérdéseket tesszük fel, de megoldások nélkül. Ezt az összefoglaláskor használhatjuk.
Ezek után kettébontjuk az osztályt és 2 koncentrikus kört alakítunk, szembeállítjuk a diákokat, és az egyik kör kérdez a másik válaszol. Ez a köralakítás lehet tudatos, amikor például a gyengébbeket állítjuk a kérdező szerepébe. Ezzel a gyakorlattal segíthetünk a gyengébbek önbizalom-növelésében is, hiszen sikeresek tudnak lenni ebben a szituációban. A másik alakítási mód véletlenszerű. Ha valaki nem tudja a választ, a kérdező diák megmondja neki. Ha végeztek, a külső kör egyel jobbra lép, ezután minden kezdődik előröl.

A második lehetősége ennek a módszernek, amikor 2 különböző kártyára írjuk a kérdést/ fogalmat és egy másikra a megoldást. Ekkor egy adott időn belül mindenkinek meg kell keresni a párját. Előnyei ennek a módszernek, hogy igazán motiváló hatású, több a diákokra jutó aktív tanulási idő, és többféle készséget is fejleszt. Mint minden módszernek ennek is vannak hátrányai, hiszen időigényes, kevesebb anyag dolgozható fel, de mélyebben. Sajnos ebben az esetben az egyes diákok munkája kevésbé kontrollálható.

Példa: A következő táblázatot előre felvágva osztjuk ki, és a feladat az, hogy mindenki megtalálja a párját.

$(a + b)(a - b)$	a^2-b^2
a^3+b^3	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$(a + b + c)(a + b - c)$	$a^2+2ab+b^2-c^2$
$(a-b)^3$	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
A^3-b^3	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

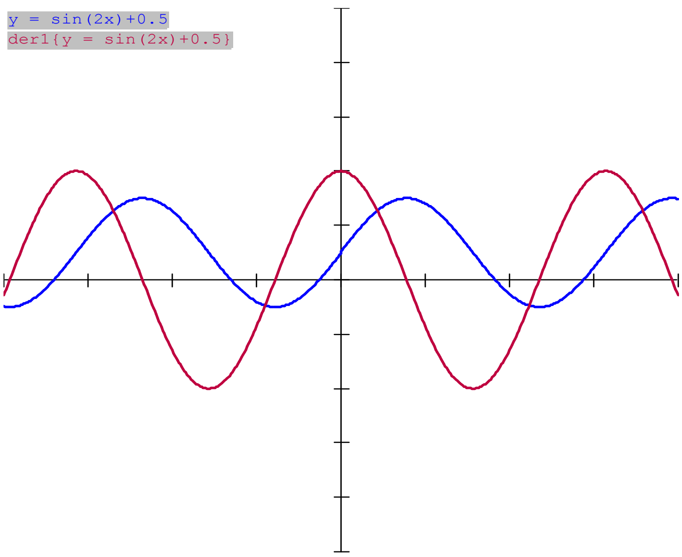
A számítógép és a matematika kapcsolata

Ezt a témát azért említem meg, mert az első feladatokban a GeoGebra programot használtam illusztrációs célokra. A mai világban a diákok már nagyon függenek a számítógépektől. Mindennapi részükké vált, ezért a tanároknak el kell gondolkodni azon, hogy miként használhatják fel a számítógépet a matematikatanítás során. Többféle olyan programmal találkozhatunk, amik segítségünkre lehetnek a különböző témakörök tanításában, szemléltetésében. Például a már említett GeoGebra, ami a koordinátageometriás feladatok, egyenletrendszerek grafikus megoldásában, tételek ábrázolásában lehet segítségünkre. A Winplotot az analízis területén tudjunk alkalmazni, deriválási ábrák, szélsőértékek, zérushelyek, vagy akár határozott integrál ábrázolására. A Maple deriválási, integrálási, geometriai ábrák rajzolásában számelméleti és az algebrai témakörökben is segítségünkre lehet. A számítógép a feladatok illusztrálásban, eljárások felfedezésében segít nekünk, a megoldásokhoz ad ötletet, illetve az ellenőrzést segíti. Nem helyettesíti a gondolkodást, hanem segíti azt.

Mivel nem általános, hogy számítógépekkel felszerelt teremben tartsanak matematika órát, ezért az ilyen ábrázoló programmal készített ábra igen ritka a diákok körében. Ha mégis egyik diákunk felfedezte, és ezzel készítette el a feladatát otthon, akkor örülnünk kell, hisz érdeklődik a tárgy iránt és kutat a különböző lehetőségek között. Az ilyen programok nevelnek a logikus gondolkodásra, az önálló problémamegoldásra, és a grafikus szemléletét is fejleszti a diákoknak. Ezek azért is jók, mert otthonról elérhetőek, gyakorlásra is tökéletesen alkalmasak.

Ha mégis lehetőségünk van arra, hogy számítógépekkel felszerelt termekben oktassunk, fontos, hogy csak akkor érdemes kihasználni ezt a lehetőséget, ha célszerűbb a többi eszközzel szemben, mint például az írásvetítő, vagy a tábla. Előnyösebb, amikor pontosan akarunk ábrázolni, mozgó képeket akarunk bemutatni.

Feladat 8: Ábrázoljuk az y = sin (2x)+0. 5 függvényt, és ennek a deriváltját.



A másik előnye a számítógépeknek az internet használat. Rengeteg matematikatörténeti dolgot olvashatunk, sok matematikus élettörténete, munkássága található meg rajta.

Természetesen nincs idő arra, hogy minden órán foglalkozzunk ilyenekkel, de az érdeklődő diákoknak ajánlhatjuk, hogy készítsenek kiselőadást, és ha jónak találjuk, előadhatja az osztály előtt egy kisötösért.

Foglalkoztatási formák

Szinte mindegyik témakörnél szükség van a frontális oktatásra is, illetve meg kell tanítanunk a diákokat az önálló feladatmegoldásra. A legjobbnak a csoportos feladatmegoldás és a frontális óravezetés együttes alkalmazását tartom, amikor jelen van a változatos óravezetés, illetve a játékos módszer is. Természetesen minden módszernek megvan a maga hátránya is. Előrelátóan bele kell kalkulálni a csoport, vagy páralakítási időt, vagy az esetleges teremátrendezést. Sajnos, sok iskolában nincs lehetőség a módszerek kivitelezésére, mert nincs lehetőség a terem átrendezésére, mert össze vannak csavarozva a padok, vagy túl kicsi a terem. Fontos figyelni a diákok reakcióit is, hogy egy - egy módszer mennyire tetszik nekik, vagy mennyire nem, és ennek alapján folytatni, vagy elvetni azt.

A csoport vagy pármunkák alkalmazásánál kivitelezhetetlen, hogy mindenki egyszerre fejezze be a munkát. A tanárok tartanak az ilyenkor kialakult üresjáratoktól. Fel kell készülni ennek kiküszöbölésére, különböző szintű feladatokkal. Nem csak ilyenkor alakulhatnak ki hasonló helyzetek, hanem akkor is, amikor a gyerekek többféle feladatsoron dolgoznak. Több helyen alkalmazzák, hogy a különböző képességű diákok másfajta feladatsort oldanak meg, szintjüknek megfelelőt. Ezzel képességfejlesztést, vagy felzárkóztatást és tehetséggondozást is elérhetünk. Plusz feladatok készítésével, elkerülhetjük az ilyen helyzeteket. A foglalkoztató feladatoknak több fajtája van. Az egyik az új anyaghoz kapcsolódó érdekes feladatok, a második a gyakoroltató, felzárkóztató feladatok, a harmadik az egyszerű, rövid feladatok az adott tananyag feldolgozására. A feladatoknak vannak jellemzői, kritériumai is. Rövidnek kell lennie, hogy ne legyen túl időigényes, különböző nehézségűeknek kell lenni, hogy minden diáknak tudjon sikerélményt nyújtani. Játékosnak és érdekesnek kell lennie, hiszen ezzel tudjuk a legjobban felkelteni a diák motiváltságát. Nem elég, ha kiírunk egy könyvből 10 feladatot, és azokat adjuk oda a diákoknak. A tanítást, a diákokat ismerve gondosan elő kell készíteni. Otthon, előre értelmeznünk kell a példát, elkerülve az esetleges buktatókat, kizárva a kétértelműségeket. A legfontosabbnak azt tartom, hogy ha a feladatot elolvasva egy tanár és egy diák, „ugyanazt” a kérdést lássa és értelmezze, hiszen mind a kettőnek az a célja, hogy a másik is megértse milyen gondolatmenettel jutott el a megoldásig. Sajnos sok feladat nem egyértelmű, és a tanulónak nehézséget okoz az, hogy vajon mit kell tennie egy adott példával. Természetesen a sikeres együttműködésnek fontos alapja, hogy tisztában legyünk a gyerek elméleti tudásával, hiszen ha a feladatban, vagy a megoldásban mindent megmagyaráznának, elveszne benne az a matematika, amelynek gyakorlására tényleg hivatott a példa. Fontos törekednünk az érthető, egyszerű megfogalmazásra, és erre kell nevelni diákjainkat is. Olyan válaszadásra kell megtanítani őket, ami ténylegesen a feltett kérdésre válaszol, amit természetesen nem csak a matematikai feladatok megoldásában hasznosíthatnak, hanem az élet egyéb területein is. Ezen apróságokra való odafigyeléssel, elkerülhetők a kellemetlen helyzetek.

A jutalmazás

A jutalom megválasztása, körültekintést igényel. Nem lehet felelőtlenül bánni vele, mert akkor elveszítheti az értékét. Úgy gondolom, az órai teljesítményük alapján, tárgyi jutalmat nem szokás adni a diákoknak. Ez alól kivétel a jutalom kártya, aminek összegyűjtésével ötöst szerezhet a diák. A szóbeli jutalmazás (mosoly, dicséret) is eredményes módszer, de csak akkor hatásos, ha a diák, számára tisztelt személytől kapja. Az általános tapasztalat az, ha a diákok előre tudják, hogy ha helyesen oldanak meg egy feladatot, jutalmat kapnak, akkor a koncentrációsképességük megnő, többet próbálkoznak a probléma megoldásával, több segédábrát készítenek, kitartóak, és a kudarc után is nekiülnek, megpróbálkoznak a feladattal. Fontos azt szem előtt tartani, hogy nem a jutalom a cél, hanem a motiváció. A visszacsatolás, megerősítés is fontos a diákok számára. Ez egyfajta visszajelzése a tanulmányokban, feladatok megoldásában való előrehaladnak. Megerősíti a helyes megoldást, vagy ösztönöz a gyengébb területek fejlesztésére. Személyesebbé tehető, ha például névre szól.

A jutalmazásban teret kell engedni a diákok véleményének is. Egy- egy csoportmunka után, amikor minden csoport hallotta, konstatálta a többi csoport munkáját, lehetőség legyen szavazni, a legszebb, legegyszerűbb, vagy akár a legbriliánsabb megoldásra. Ilyenkor mindenki lehetőséget kap a véleménye kinyilvánítására, a legrosszabb tanulótól a legjobbig. Ez motiválttá teszi a gyerekeket, tehát figyelni fognak az órán, hogy később véleményt tudjanak alkotni.

Összegzés

Szakdolgozatom zárásaként, összegezném tapasztalataimat, és élményeimet. Örülök, hogy ezt a témát, választottam, mert az általam ismert tanítási módszereket, úgy érzem, sikerült bővítenem. Igazán élveztem az időt, amit a módszerek felkutatásával, átnézésével töltöttem. Sok, új dolgot olvastam, nagyon jó ötleteket szerezve a későbbi tanításhoz. Leendő tanárként, úgy gondolom, haladnom kell a korral, és fejleszteni a tanítás művészetét. Szerencsésnek tartom azt, hogy a módszereket rengeteg témakörnél fel lehet használni, igazodva a diákok igényeihez. Amikor az iskolai gyakorlatomat töltöttem, és órát tartottam, a második órán csoportmunkával készítettük el a feladatokat. A diákok sokkal lelkesebbek voltak, több feladatot oldottunk meg, mint az elsőn. A gyakorlatom végén a diákokkal kitöltettem egy kérdőívet, megkérve őket, írják le az órákkal kapcsolatos élményeiket. Nagyon sok kérdőíven pozitív élményként tüntették fel, hogy nem „szokásos” órát tartottam. Szerencsés dolog, hogy a frontális oktatásban használt feladatok átültethetők, akár a csoportmunka, akár a páros munka módszerébe. Az is pozitív, hogy a módszereket variálva a diákok láthatják a tanárok munkájának alapjait, hiszen részt vesznek benne, a feladat létrehozástól kezdve egészen a megoldásig. (Feladatküldés). A későbbiekben remélem lesz lehetőségem a módszerek kipróbálására, akár egy általános tantervű, vagy matematikát emelt szinten tanuló osztályban. Biztos vagyok benne, hogy egyik pillanatról a másikra lehetetlen egy jól szervezett, tanulni szerető osztályt kialakítani de bízom abban, hogy a felmerülő problémák ellen sikeresen fogok fellépni.

Irodalomjegyzék

Szakkönyvek:

[1] Angyal Ferenc – Czimmer István László: Didactika minima III. PTE PMMFK, Budapest, 2001.

[2] Freud Róbert: Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó, 2006

[3] Hajnal Imre: Matematika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2000

[4] Hajnal Imre - dr. Pintér Lajos: Matematika III. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1980

[5] Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos – dr. Urbán János: Matematika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1982

[6] KöMaL, 55. évfolyam, 2005. szeptember, 327.-334. oldal

[7] KöMaL, 55. évfolyam, 2005. október, XXVIII. oldal.

[8] Kratofil Dezső: Algebra, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973

[9] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika, Typotex, Budapest, 2006

Internetes források:

[10] http://www.banki.hu/~tkt/segedanyagok/altalanos-pedagogia/motivacio_ea.pdf (letöltés időpontja: 2010. május 18.)

[11] http://www.didactic.eoldal.hu/cikkek/kooperativ/kooperativ-tanulasi-modszerek (letöltés időpontja: 2010. május 13.)

[12] Geogebra rajzoló program: www.geogebra.org (letöltés időpontja: 2010. május 09)

[13] http://www.matematikamodszertan.hu/ (letöltés időpontja: 2010. május 10)

[14] http://www.niif.hu/rendezvenyek/networkshop/96/eloadas/10e04.pdf (letöltés időpontja: 2010. május 21)

[15] http://www.sulinet.hu/tart/fncikk/Kfcc/0/2569/mirejo.html (letöltés időpontja: 2010. május 15)