

GRÁFELMÉLET MEGALAPOZÁSA, ALAPSZINTŰ JEGYZET A VÉGES MATEMATIKA I. TANTÁRGYHOZ

SZAKDOLGOZAT

Írta: **Kovács Dóra**

Matematika- Újgörög tanári szakirány

Témavezető:

(Gács András, egyetemi docens)

Vesztergombi Katalin, egyetemi docens
Számítógéptudományi Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Gráfok	3
2.1 Példák	3
2.2 Alapfogalmak	6
2.3 Fokszámmal kapcsolatos állítások	10
3. Fokszámsorozatok realizációja	13
3.1 Tétel 1. (bármely gráfra)	13
3.2 Tétel 2. (hurok élt nem tartalmazó gráfra)	13
3.3 Tétel 3. (egyszerű gráfra)	15
4. Irányított gráfok	16
5. Séta, út, körséta, kör	18
5.1 Alapfogalmak	18
5.2 Euler	20
5.3 Hamilton	22
6. Fák	25
6.1 Alapfogalmak, tételek	25
6.2 Prüfer kód	29
7. Konklúzió	34
Irodalomjegyzék	35

1. BEVEZETÉS

Szakdolgozatom célja egy olyan jegyzet összeállítása, amely a Véges Matematika I. tantárgyat hallgató diákok számára szolgálhat jegyzetül.

Próbáltam a gráfelmélettel kapcsolatos összes alapvető fogalmat, állítást, tételt, bizonyítást összefoglalni oly módon, hogy ez azon diákok számára is érthető legyen, akik a középiskolai tanulmányaik során nem találkoztak gráfelméleti problémákkal. Mindamellet hogy a bizonyítások nyilvánvalóan nem hagyhatnak kívánnivalót maguk után, a hangsúly nem az egzakt megfogalmazáson, hanem az érthetőségen, egyszerűségeen volt. Próbáltam példákkal, ábrákkal szemléltetni mindent, szintén az átláthatóság, megfoghatóság céljából.

Ezt a témát azért is találtam vonzónak, mert úgy gondolom, hogy tanári pályára készülve elengedhetetlen, hogy szembenézzünk olyan problémákkal, mint a tananyag meghatározása és annak logikus felépítése a célközönségnek megfelelő formátumban. Bár jelen esetben ezen feladatok nem mindegyike hárult rám, hiszen a feldolgozandó tananyag adott volt, mégis szakdolgozatom megírása betekintést engedett nyerni a feladat sokrétűségébe, nehézségeibe.

2. GRÁFOK

2.1 Példák

Van 5 db város A, B, C, D és E, amik közül vannak olyanok, amik közvetlen úttal össze vannak kötve és vannak olyanok, amik nem.

Az alábbi felsorolás mutatja, hogy melyik városból hova lehet közvetlenül eljutni.

A: C, D

B: C, E

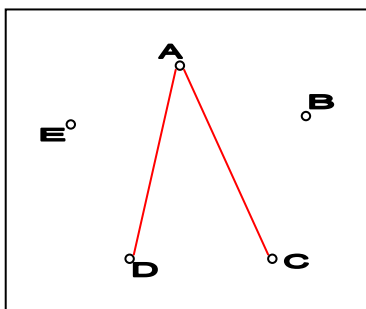
C: B, A

D: A

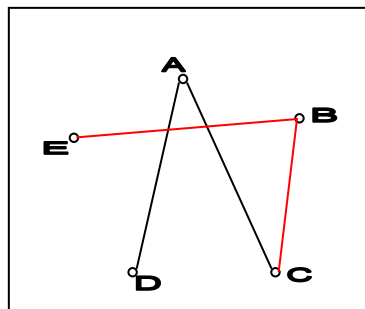
E: B, C

Kérdés: Lehetséges ez?

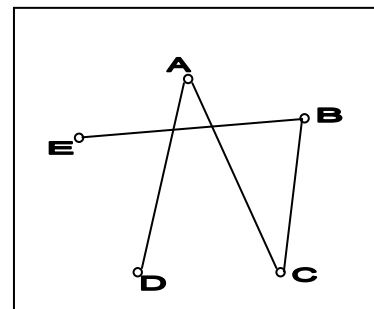
Mivel városokról és utakról beszélünk, kézenfekvő a problémát pontokkal és azokat összekötő vonalakkal ábrázolni.



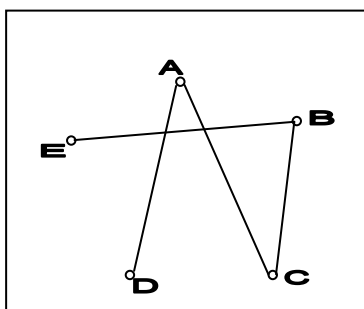
1. ábra



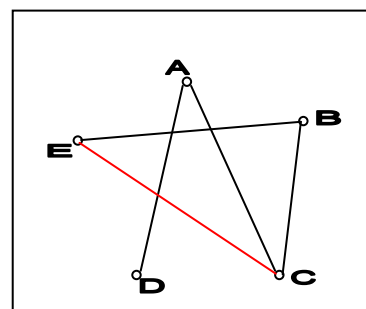
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

A különböző ábrák egyenként azt mutatják, ahogy minden csúcshoz behúzzuk a felsorolásban megadott éleket.

Az 5. ábra szerint C-ből E-be is vezet út, de a felsorolásban ez nem szerepelt. Ez tehát egy ellentmondás.

Válasz: Nem lehetséges.

Láttuk, hogy az ábrák segítségével egy áttekinthetőbb, gyorsabb megoldási módszert kaptunk, ami sok más példa megoldásánál is hasznos lesz.

Másik gyakori példaként tekinthetjük az egy társaságon belül „ki-kit ismer” feladatot.

FELADAT:

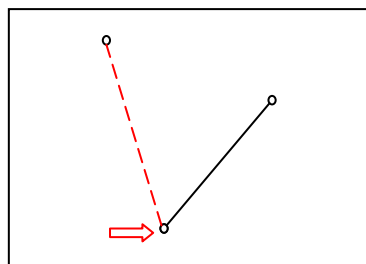
Igaz-e hogy egy 3 tagú társaságban mindig van olyan ember, aki páros sok embert ismer? (Az ismeretség kölcsönös.)

Ötlet:

Ábrázoljuk az embereket pontokkal, és ha ismerik egymást kössük össze az őket ábrázoló pontokat.

Megoldás:

Ha van olyan ember, aki nem ismer senkit az megoldás, mert a nulla páros szám. Tudjuk azt is, hogy mindenki maximum két embert ismerhet, hiszen összesen hárman vannak. Tehát ha valaki ismeri a másik két embert az megint megoldás. Tehát az egyetlen ellenpélda az lehet, ha minden ember pontosan egy embert ismer, vagyis minden pontból pontosan egy vonal indul ki. Ez viszont nem lehetséges, hisz ha valamelyik kettőt összekötöm, akkor azokból már indul ki 1-1 vonal, tehát azokhoz nem lehet további vonalakat húzni, így a harmadik pontot már nem tudom mihez kötni.(lásd 6. ábra)



6. ábra

Az ismeretségi problémát szintén könnyebb ilyen ábrán szemléltetni, főleg ha 3-nál jóval több emberről van szó, mert akkor az ismeretségeket felsoroló táblázat szinte áttekinthetetlen.

Összefoglalva minden olyan esetben segít, amikor egy feladatban szereplő objektumok között valamely reláció vagy fennáll, vagy nem.

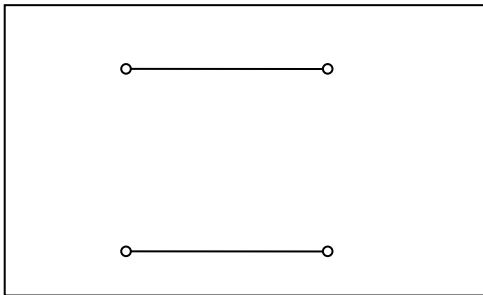
Ilyenkor az objektumok a pontok és a reláció az összekötő vonal.

FELADAT:

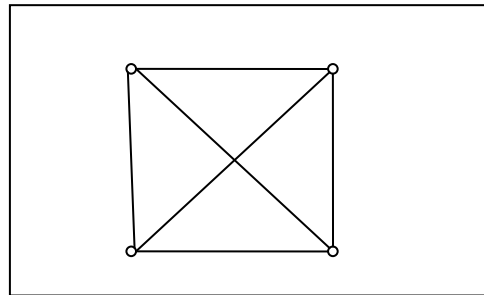
Igaz-e ugyanez az állítás, ha 4 fős társaságról beszélünk?

Megoldás:

Az állítás nem igaz. Könnyű ellenpéldát találni.



7. ábra



8. ábra

A 7. ábrán mindenki egy embert ismer, míg a 8. ábrán mindenki három embert ismer (vagyis mindenki mindenkit ismer).

Megjegyzés:

Tehát ha páros sok emberről beszélünk ez az állítás sosem igaz, hiszen, ha mindenki mindenkit ismer, akkor mindenki páratlan sok embert ismer. Ez mindig jó ellenpélda.

Az eddig látott ábrákat a matematika nyelvén gráfoknak hívjuk. Lássuk a precízebb definíciót.

2.2 Alapfogalmak

Definíció: A pontokat (köröket) és azokat összekötő vonalakat tartalmazó rajzokat gráfoknak nevezzük.

Az alakzat pontjait csúcsoknak vagy pontoknak, az azokat összekötő vonalakat pedig éleknek nevezzük. Ezeket külön-külön két halmazra bontjuk.

$V = \{ \text{a gráf csúcsainak halmaza} \}$ (V , mint vertex = angolul csúcs)

$E = \{ \text{a gráf éleinek halmaza} \}$ (E , mint edge = angolul él)

Általában egy gráfot G -vel jelölünk.

Ekkor, ha G csúcsait V , éleit E tartalmazza akkor $G = (V, E)$ jelölést használjuk.

V elemeit felsorolással adhatjuk meg:

$V = \{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \}$

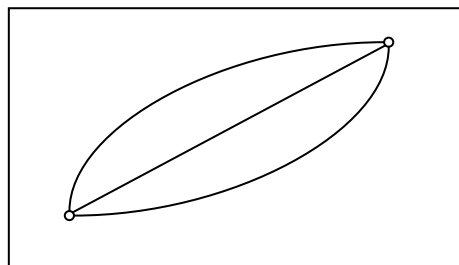
E elemeit megadhatjuk felsorolással:

$E = \{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_s \}$

vagy megadhatjuk V -ből vett pontpárokkal, hiszen minden él két csúcsot köt össze. Ekkor minden i -re $e_i = (v_j, v_k)$ (Ekkor e_i él v_j és v_k pontokat köti össze.)

Definíció: Ha egy gráf két csúcsát nem egy, hanem több él is összeköti, akkor ezen éleket többszörös éleknek nevezzük.

Vagyis: $e_{i1} = e_{i2} = \dots = e_{in} = (v_j, v_k)$

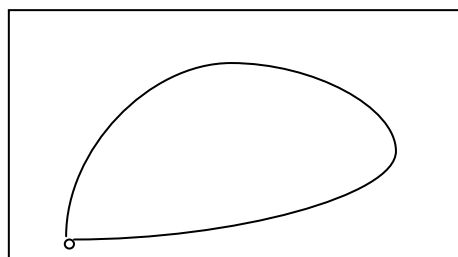


9. ábra

Definíció:

Ha egy él egy pontot önmagával köt össze, akkor ezt az élt hurokélnak nevezzük.

Vagyis: $e_i = (v_j, v_j)$



10. ábra

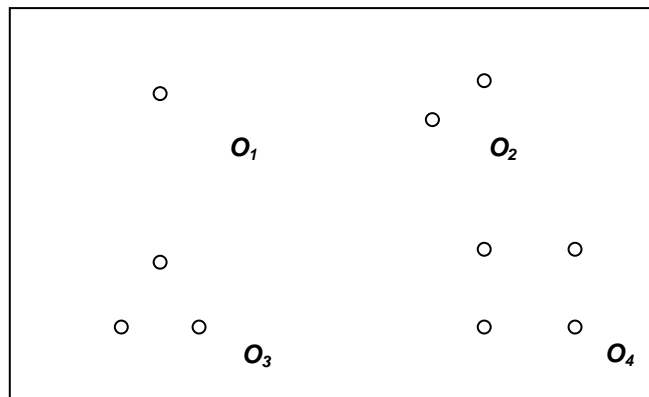
Definíció:

Ha egy gráf nem tartalmaz sem hurokéleket, sem párhuzamos éleket, akkor egyszerű gráfnak nevezzük.

Definíció:

Az üres gráf olyan gráf, amely nem tartalmaz éleket.

Jelölés: O_1, O_2, \dots, O_n , (Ahol az alsóindexben lévő számok a csúcsok számát jelölik.)

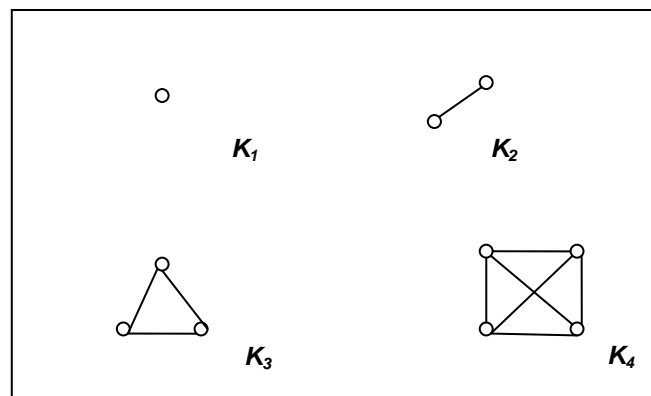


11. ábra

Definíció:

A teljes gráf olyan gráf melyben minden lehetséges él be van húzva, vagyis minden csúcs, minden csúccsal össze van kötve.

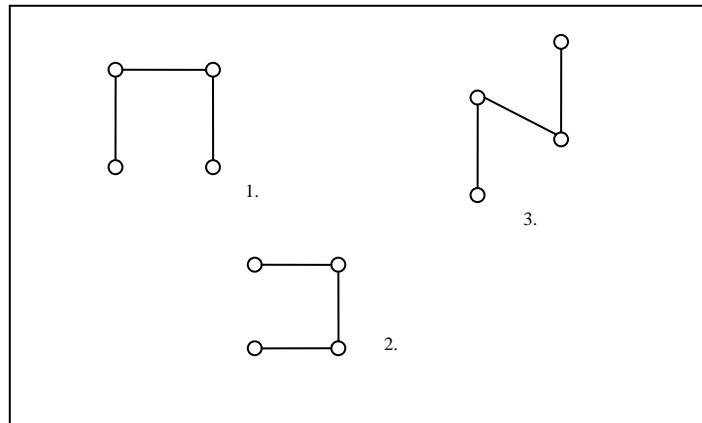
Jelölés: K_1, K_2, \dots, K_n (Ahol az alsóindexben lévő számok a csúcsok számát jelölik.)



12. ábra

PROBLÉMA:

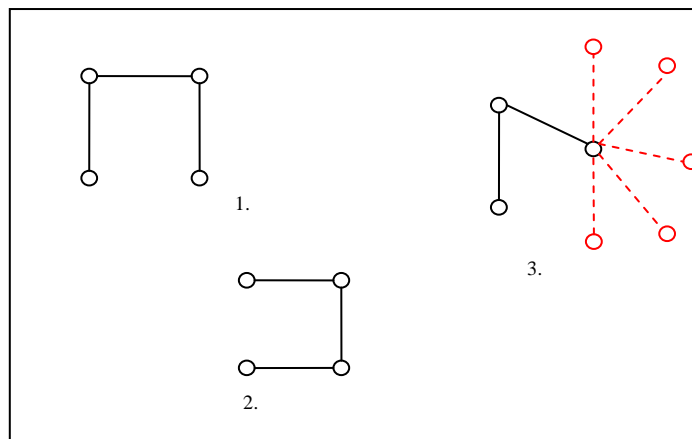
Mikor nevezhetünk két gráfot egyformának?



13. ábra

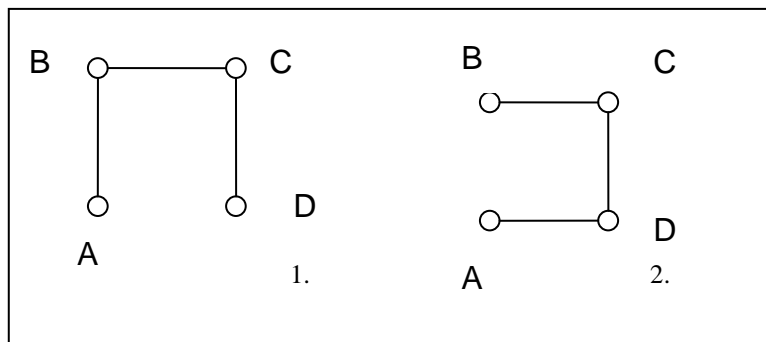
A 13. ábrán lévő gráfok egyformák?

Az 1.-ről és a 2.-ről könnyű látni, hiszen csak egymás elforgatottjai. A harmadikról szemléletesen úgy lehet látni, hogyha a 14. ábra szerint „lefordítjuk” az élt.



14. ábra

Van 2-2 pontjuk, amikből egy él indul és van 2-2 pontjuk, amikből két él indul. Tehát egyformáknak tekintjük őket, csak a felrajzolás más.



15. ábra

A 15. ábrán látható gráfok viszont egyértelműen nem egyformák, hiszen az 1.-nél B-ből két él indul ki, míg a 2.-nál B-ből egy él indul ki.

Következtetés: Nem mindegy, hogy egy gráf csúcsai meg vannak különböztetve vagy sem.

Példa: Ha egy ismeretségi problémánál az a kérdés, hogy hány ismeretség van összesen a csoporton belül, akkor nem különböztetjük meg a csúcsokat, de ha a kérdés az, hogy TE hány embert ismersz akkor, a csúcsok meg vannak különböztetve.

Ha két gráf egyforma akkor izomorfoknak hívjuk őket. Lássuk a precíz definíciót.

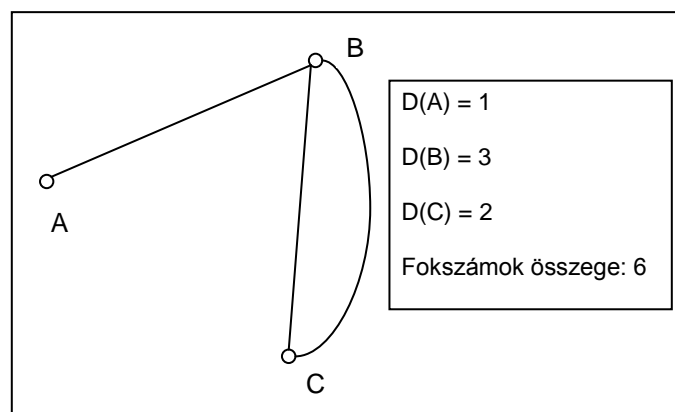
Definíció:

Két gráfot akkor nevezünk izomorfoknak, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetők egymásnak.

Definíció:

A gráf egy csúcsából kiinduló éleinek számát a csúcs fokszámának nevezzük.

Jele: $d(v)$



16. ábra

Megjegyzés: Fokszáma tehát nem a gráfnak van, hanem a gráf csúcsainak. A gráfban tekinthetjük a fokszámok összegét. (Lásd: 16. ábra)

2.3 Fokszámmal kapcsolatos állítások

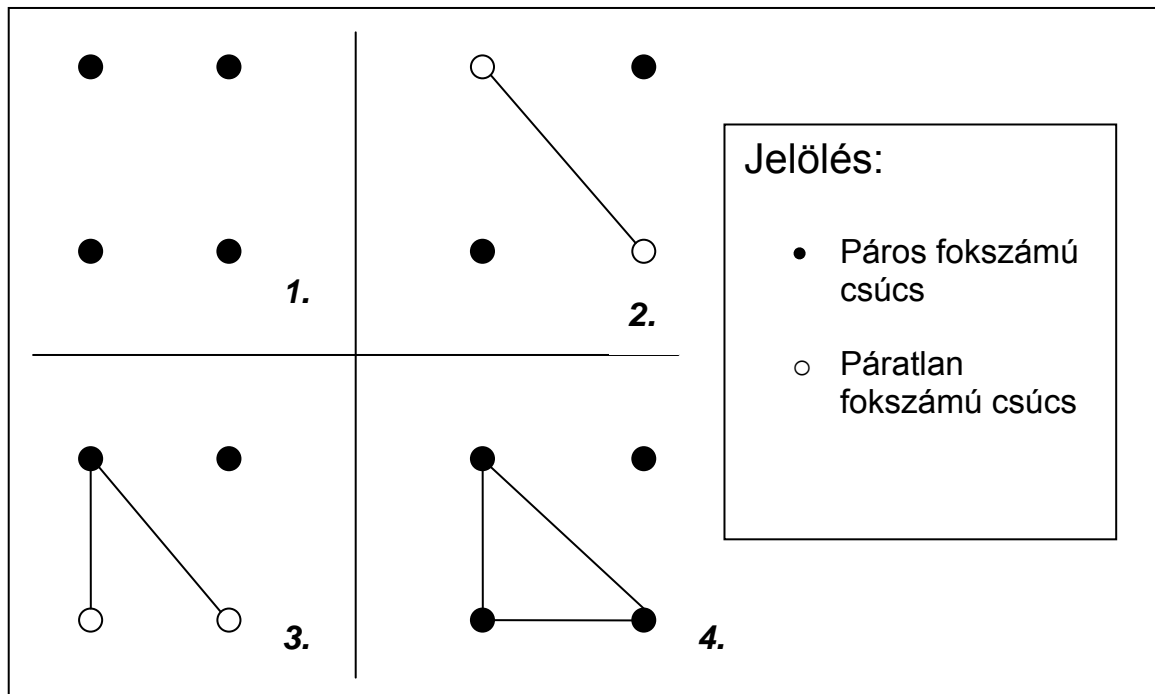
TÉTEL:

Minden gráfban páros sok páratlan fokú csúcs van.

Bizonyítás:

A bizonyítást úgy hajtjuk vége, hogy egy gráf éleit egyenként rajzoljuk be és megfigyeljük, hogy a csúcsok fokszáma közben hogyan változik.

Fontos, hogy mindig abból az állapottól indulunk ki, hogy minden csúcs fokszáma nulla, vagyis minden fokszám páros. Ebből következik, hogy nulla darab páratlan fokszámú csúcs van, vagyis páros számú páratlan fokszámú pont van.



17. ábra

Új élek berajzolásával, mindig az adott két csúcs fokszámát eggyel-eggyel növelem, vagyis páros fokszámú pontból páratlan lesz, míg páratlanból páros. Az ábrán ezt a csúcs színének változása jelöli.

1. eset:

Ha két páros fokszámú csúcsot kötünk össze azok mindketten páratlan fokszámúak lesznek, vagyis a páratlan fokszámú csúcsok száma kettővel nő. (Lásd: 17. ábra 1.-> 2.)

2. eset:

Ha két páratlan fokszámú pontot kötünk össze azok mind a ketten páros fokszámúak lesznek, vagyis a páratlan fokszámú csúcsok száma kettővel csökken. (Lásd: 17. ábra 3.-> 4.)

3. eset:

Ha egy páratlan és egy páros fokszámú csúcsot kötünk össze, akkor mindkettő paritás változik, vagyis eredményül szintén egy páratlan és egy páros fokszámú csúcsot kapunk, vagyis a páratlan fokszámú csúcsok száma nem változik. (Lásd: 17. ábra 2.-> 3.)

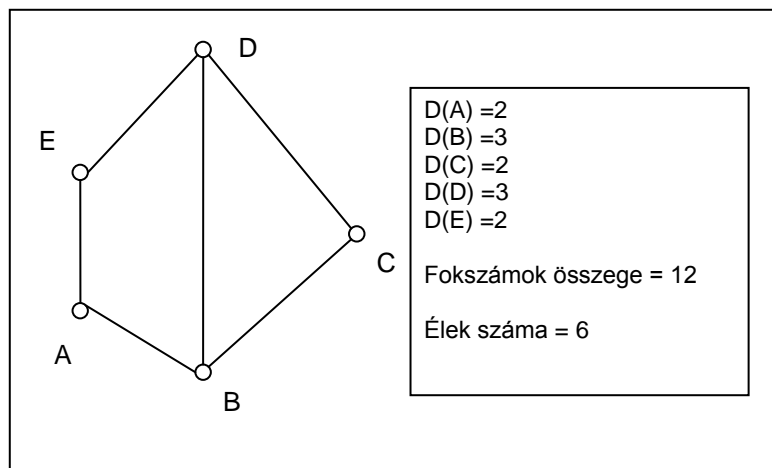
Megjegyzés:

Mi van, ha hurok élt rajzolunk, be? Nem változik semmi, hiszen az adott csúcs fokszáma kettővel nő, így a paritása nem változik, így a páratlan fokszámú csúcsok száma sem változik. Tehát összegezve nulla darab páratlan fokszámú pontból indulunk ki és ehhez tudunk kettőt hozzáadni, kettőt elvenni vagy nem változtatni a számon az egyes élek behúzásával. Így végül páros darab páratlan fokszámú pontot kapunk.

TÉTEL:

A fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

Példa: 18. ábra



18. ábra

Bizonyítás:

Minden élnek két végpontja van. Így ha azt számoljuk, hogy egy csúcsból hány él fut ki, akkor egy-egy élt pontosan kétszer veszünk számításba, tehát ha összeadjuk a fokszámokat, akkor egy minden élt kétszer számoló összeget kapunk.

Következmény:

Az előző tétel ezen tétel által újabb és könnyebb bizonyítást nyer.

Bizonyítás2:

Ha a foksámok összege az élszám kétszerese akkor a foksámok összege mindig páros. A foksámok összegét viszont úgy kapjuk, hogy az összes csúcs foksámát összeadjuk. A páros foksámú csúcsok foksámainak összege páros, hiszen ha páros számokat adok össze, akkor az eredmény páros lesz. Ha ezt kivonjuk az összegből, akkor egyrészt ismét egy páros számot kapunk, másrészt viszont a páratlan foksámú csúcsok foksám összegét. Ez viszont csak úgy lehet páros, ha páros sok volt, hiszen páratlan számok összege csak akkor páros, ha páros sokat adunk össze.

3. FOKSZÁMSOROZATOK REALIZÁCIÓJA

Ez a problémakör azt dolgozza fel, hogy adott fokszámsorozathoz: d_1, d_2, \dots, d_n (értsd: v_1 fokszáma d_1 , v_2 fokszáma d_2 , ... stb.) létezik-e olyan gráf, amelyben rendre ezek a csúcsok fokszámai.

Ha belegondolunk, érezhető, hogy ez a probléma egyre nehezebb lesz, ha hurokéleket, majd a többszörös éleket is tiltjuk.

3.1 TÉTEL.1.:

Ha d_1, d_2, \dots, d_n fokszámsorozat tagjainak összege páros, akkor létezik olyan gráf, amelyben a fokszámok rendre d_1, d_2, \dots, d_n . (Többszörös és hurok él is engedélyezettek.)

Megjegyzés:

A tétel állítása, hogy ez a feltétel elégséges, de tudjuk, hogy szükséges is, hiszen tudjuk, hogy minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese, vagyis páros.

Bizonyítás:

Ha hurok él lehetnek, akkor minden ponthoz annyi hurokért párosítunk, ami fokszáma felének az alsó egész része.

Ekkor minden pontnál a fennmaradó (be nem húzott) fokszám csak 0 vagy 1 lehet. (Ha kettő vagy annál több lenne, akkor még húzhatnánk be hurokért.)

Mivel a fokszámok összege eredetileg páros volt és ez minden hurokért berajzolásával kettővel csökkent, a megmaradt fokszámok összege is páros.

Tehát páros sok 1 „maradék fokszámú” pontunk van. Ezeket párba állítva majd összekötvünk egy megfelelő gráfot.

3.2 TÉTEL.2.:

A d_1, d_2, \dots, d_n fokszámsorozatra akkor és csak akkor létezik neki megfelelő gráf, amelyben a többszörös él engedélyezett, de a hurokért nem, ha a fokszámok összege páros és ha minden i -re teljesül, hogy

$$d_i \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_j$$

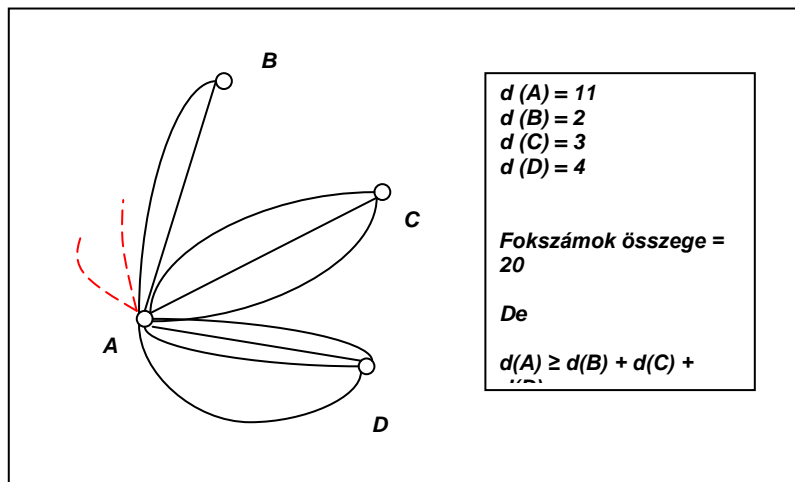
Vagyis minden i -re d_i kisebb vagy egyenlő a fokszám-sorozat többi tagjának összegénél.

Nyilván ha $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ akkor ezt elég d_n -re belátni. (Hisz d_n a legnagyobb szám, így ha szerepelne egy összegben az az összeg biztos nagyobb lenne mint egy nála kisebb vagy egyenlő szám.)

Bizonyítás:

Szükségesség:

Mivel a hurok élek tiltva vannak ezért az egy pontból kiinduló összes élt a többi pontnak kell befogadnia. Tehát ha egy pont fokszáma nagyobb, mint az összes többié együttvéve akkor a tőle kiinduló élek nem mindegyikét tudnák befogadni. (Példa: Lásd 19. ábra)



19. ábra

Elégségesség:

Vagyis, hogy ha ez teljesül, akkor biztosan létezik d_1, d_2, \dots, d_n fokszám-sorozatú gráf.

Ezt két lépésben bizonyítjuk.

$$1. \text{ Ha } d_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_j$$

Ekkor minden d_i -ből ($i < n$) pontosan annyi élt húzunk d_n -be amennyi a fokszáma. És ha ezt minden d_i -re megtesszük az egyenlőség miatt készen is vagyunk.

$$2. \text{ Ha } d_i \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_j$$

Ekkor észre kell vennünk, hogy d_n és $\sum d_i$ azonos paritású, hisz a fokszámok összege páros. Ekkor, ha veszünk v_k, v_j nem nulla fokszámú ($k, j \neq n$) pontokat és ezeket összekötjük, akkor a $\sum d_i$ fokszámok összegét kettővel csökkentjük. (v_j -ét eggyel és v_k -ét eggyel) Azt is tudjuk, hogy $(\sum d_i - 2)$ paritása ugyanaz, mint $\sum d_i$ -é.

Ha $(\sum d_i - 2) = d_n$ akkor az 1. lépést kaptuk, tehát készen vagyunk, ha nem akkor a 2. lépést addig ismétljük, míg el nem érjük az egyenlőséget.

(Ez biztosan bekövetkezik, mivel ha kettővel csökkentjük $\sum d_i$ -t minden d_n -nel azonos paritású fokszámot számba veszünk ami $\sum d_i$ -nél kisebb, vagyis d_n -t is.

3.3 TÉTEL.3.:

Ha létezik G , egyszerű gráf $(0 \leq) d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ fokszámokkal akkor tetszőleges k -ra

$$d_1 + \dots + d_{n-k} \geq d_{n-k+1} + \dots + d_n - k(k-1) .$$

Ez az állítás azt jelenti, hogy ha a csúcsokat akárhogy osztjuk szét kis és nagy fokszámú csúcsok csoportjaivá, akkor a kis fokszámú csúcsok be tudják fogadni azokat az éleket, amiknek a nagy fokszámú csoportból muszáj, hogy feljűk menjenek.

A bizonyítást is ennek a végiggondolásával fogjuk megkapni.

Bizonyítás:

Legyen M azon élek száma, amelyek a 2 csoport között mennek.

Ez legfeljebb a kis fokszámú csúcsok (v_1 -től v_{n-k} -ig) fokszámösszege lehet, hiszen ők maximum ennyit tudnak befogadni.

- $M \leq d_1 + \dots + d_{n-k}$

M -re alsó becslést úgy kapunk, hogy megnézzük, hogy a nagy fokszámú csúcsoktól hány élt kell feltétlenül a kis fokszámúak felé húzni.

A nagy fokszámú pontok (k db) mindegyikéből legfeljebb $(k-1)$ db élt tudunk csoporton belül húzni, hisz összesen ennyi pont van rajta kívül a csoportban és egyszerű gráfról beszélünk, tehát mindegyikhez maximum egy élt húzható. Így az összes fokszámot legfeljebb $k(k-1)$ -el tudjuk csökkenteni. Ez lesz az alsó becslésünk, hisz a maradék élt már biztosan a másik csoportnak kell befogadnia.

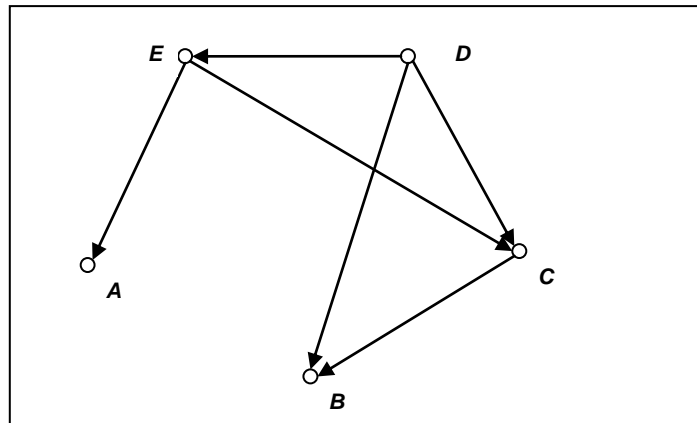
- $d_{n-k+1} + \dots + d_n - k(k-1) \leq M$

Ha a két egyenlőtlenséget összekapcsoljuk, pont a tétel állítását kapjuk.

$$d_1 + \dots + d_{n-k} \geq d_{n-k+1} + \dots + d_n - k(k-1) .$$

4. IRÁNYÍTOTT GRÁFOK

Vegyünk most az első példánkhöz hasonló példát, olyat, amiben városokról és utakról beszélünk. Tegyük fel, hogy minden út valamely irányba egyirányú. Ezt a gráfunkon a haladás irányába mutató nyíllal tudjuk szemléltetni. Példa: 20. ábra



20. ábra

Az ilyen típusú gráfokat irányított gráfoknak nevezzük. Ezeknek a gráfoknak ugyanúgy vannak csúcsaik és éleik, de az éleik halmaza a csúcsokból vett RENDEZETT párokból áll.

$e_i = (v_j, v_k)$, ahol v_j = kezdőpont,
 v_k = végpont.

Definíció:

Az olyan csúcsokat, amelyek egyetlen élnek sem végpontja forrásnak nevezünk.

(lásd: 20. ábra D pont)

Definíció:

Az olyan csúcsokat, amelyek egyetlen élnek sem kezdőpontja nyelőnek nevezünk.

(lásd: 20. ábra B pont)

Definíció:

Írányított gráfnál egy adott csúcsból kiinduló élek számát kifoknak nevezük. Jele: $d_{ki}(A)$

Definíció:

Írányított gráfnál egy adott csúcsba érkező élek számát befoknak nevezük. Jele: $d_{be}(A)$

TÉTEL:

Minden irányított gráfban kifokok összege = befokok összege = élek száma.

Bizonyítás:

$\sum \text{kifok} = \sum \text{befok}$: ezt könnyű látni, hisz minden élnek van egy kezdőpontja és egy végpontja.

Másrészt, ha a gráfunk nem lenne irányított, a következő állítás igaz lenne:

$$\text{kifok} + \text{befok} = \text{fokszám (minden pontban)}$$

Ha ehhez hozzávesszük, hogy a fokszámok összege az élek számának kétszerese és hogy a $\sum \text{kifok} = \sum \text{befok}$, akkor ebből következik a tétel állítása.

$$\sum \text{kifok} + \sum \text{befok} = \sum \text{fokszám} = \text{élek számának kétszerese}$$

$$\sum \text{kifok} = \sum \text{befok}$$

$$\rightarrow \sum \text{befok} + \sum \text{befok} = \text{élek számának kétszerese}$$

$$\rightarrow 2 \sum \text{befok} = \text{élek számának kétszerese}$$

$$\rightarrow \sum \text{befok} = \text{élek száma}$$

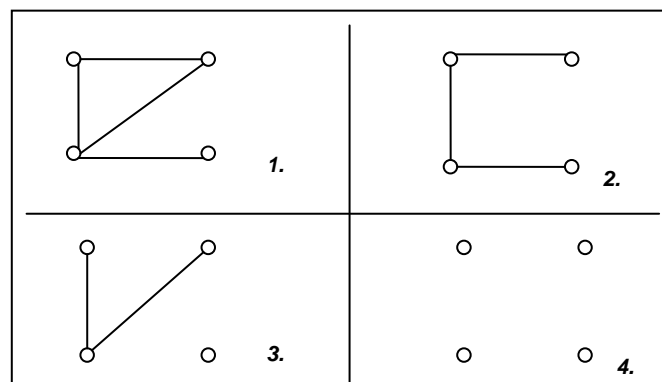
$$\rightarrow \sum \text{kifok} = \text{élek száma}$$

Definíció:

A $G' = (V', E')$ gráf a $G = (V, E)$ gráf részgráfja, ha V' részhalmaza V -nek, E' részhalmaza E -nek valamint egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra G' -ben, ha G -ben is illeszkedik.

Definíció:

G' feszítő részgráfja G -nek, ha G' részgráfja G -nek és $V' = V$, vagyis a csúcsaiknak halmaza megegyezik.



21. ábra

A 21. ábrán látható gráfok mindegyike az 1. gráf feszítő részgráfja, beleértve az 1.-t is. Tehát minden gráf önmagának a feszítő részgráfja és az üres gráf is az.

5. SÉTA, ÚT, KÖRSÉTA, KÖR

5.1 Alapfogalmak

Definíció:

Egy $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_n)$ sorozat séta vagy élsorozat, ha e_i a v_{i-1} -t és v_i -t összekötő él.

Definíció:

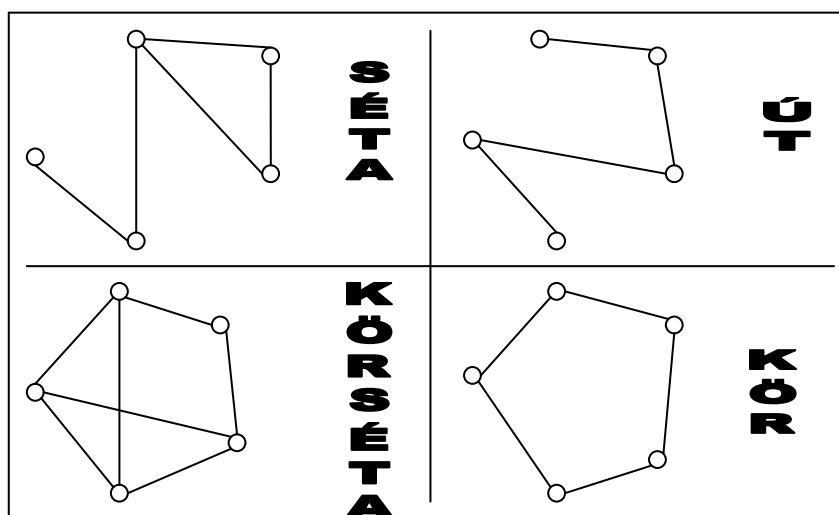
Olyan sétát, amelyben a csúcsok mind különbözőek útnak hívjuk. (Ekkor szükségszerűen az élek is mind különbözőek.)

Definíció:

Ha egy sétában $v_0 = v_n$ akkor körsétának hívjuk.

Definíció:

Az olyan sétát, amelyben a csúcsok mind különbözőek és $v_0 = v_n$, körnek hívjuk.



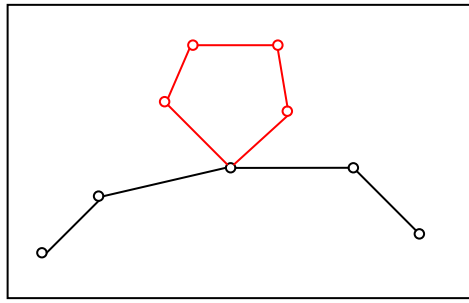
22. ábra

TÉTEL:

Ha G -ben van séta két pont között, akkor út is van.

Bizonyítás:

Ha az S séta pontjai között ismétlődés van, akkor van olyan csúcs, amit többször is érintünk. Ezen csúcs első és második látogatása közötti rész kivágható S -ből és így rövidebb sétához jutunk. (Lásd. 23. ábra) Ennek a lépésnek az ismételtetésével úthoz fogunk jutni, hiszen csak véges sok ismétlődés lehet a sétában, amit ki kell vágnunk.



23. ábra

Definíció:

G gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet út.

Definíció:

G összefüggő komponensének nevezzük G minden maximális, összefüggő H részgráfját. Más szóval a H részgráf a G összefüggő komponense, ha H összefüggő, de G -nek nincs olyan összefüggő részgráfja, amelynek H valódi részgráfja.

Megjegyzés. Két komponensnek nem lehet közös csúcsa, nem lehet közöttük él.

TÉTEL:

Minden gráf felbontható összefüggő komponensekre.

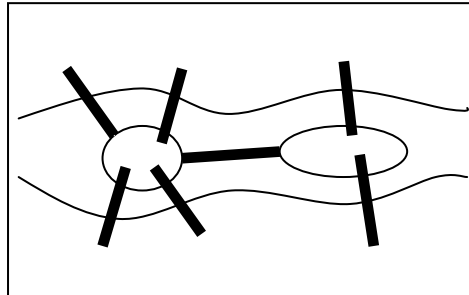
Bizonyítás:

Az előző megjegyzésünk alapján két komponensnek nem lehet közös csúcsa sem közös éle, hiszen ha van, akkor ezek már összefüggőnének, és akkor külön-külön nem lennének maximálisak. Tehát egy csúcs pontosan egy összefüggő komponensben van benne, ezt nevezzük a csúcs komponensének. Két pont pontosan akkor tartozik ugyanabba a komponensbe, ha vezet közöttük út.

Az első lehetőség, hogy egy gráf összefüggő, ekkor egyetlen összefüggő komponensből áll. És így készen is vagyunk a felbontással. Ha nem összefüggő, akkor egy pontot kinevezünk és megjelöljük az összes olyan pontot, ami innen úton elérhető. Ha ezzel végeztünk, akkor megkaptunk egy komponenset. Ez a komponens ezen csúcsok és a csúcsokhoz tartozó összes élekből áll. A komponens elhagyásával kapunk egy új gráfot amiben megint megismételhetjük ezt a lépést. Ezzel az eljárással megkapjuk a gráf összes komponensét.

5.2 Euler

Egy történet alapján, Euler Königsbergben tett délutánonként sétákat. Sétái során felmerült benne a kérdés hogy vajon lehetséges-e úgy körbesétálni a város összes hídján, hogy mindegyiken csak egyszer megy át.



24. ábra

A 24. ábra Königsberg vázlatos rajza. Rövid próbálgatás után meg lehet sejteni, hogy nem lehetséges a séta a fent említett módon. De vajon ezt be lehet bizonyítani? A következőkben ezt próbáljuk kideríteni.

Definíció:

G gráfban Euler-útnak nevezünk egy olyan élsorozatot, amely G összes élét pontosan egyszer tartalmazza. Ha ez az élsorozat zárt, akkor Euler-körről beszélünk.

Megjegyzés:

Ezen definíció alapján minden Euler-kör Euler-út is.

Általában egy Euler-kör, vagy Euler-út, nem kör vagy út, hiszen egy csúcson többször is áthaladhat. Az elnevezés csak a hagyományt követi.

TÉTEL:

Egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van Euler- kör, ha minden csúcsának fokszáma páros. Euler-út pedig akkor, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma nulla vagy kettő.

Bizonyítás:

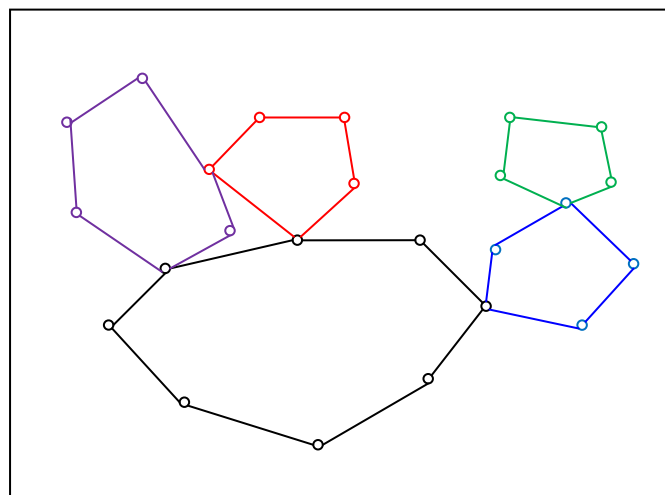
Ha van Euler-kör egy gráfban, akkor egy csúcsot kiválasztva és onnan elindulva, ha végig haladunk ezen az úton, akkor minden csúcsba pontosan annyiszor fut be él, mint ahányszor onnan indulunk ki. (Először odaérünk egy csúcshoz, aztán onnan továbbhaladva, elhagyjuk a csúcsot. Ez alól kivétel az, amelyikből indulunk, mert onnan először kiindulunk, esetleg még többször áthaladunk az előbb említett módon, majd a kör lezárásakor visszaérkezünk.) Tehát

minden csúcs fokszáma páros. Ha Euler-útról beszélünk, akkor az egyik végpontból kiindulva és a másikba érkezve, könnyen láthatjuk, hogy csak a két végpont kivétel, csak azok fokszáma páratlan.

Ez volt a bizonyítás egyik fele. Most még be kell látnunk az ellenkező irányt. Vagyis ha minden csúcs foka páros, akkor van Euler-kör.

Ezt úgy tehetjük, meg hogy ismét kiválasztunk egy csúcsot ahonnan elindulunk. Innen kiindulva bármely pontba húzunk élt, vagyis bármely pontba haladunk be, azt el is tudjuk hagyni, hiszen minden csúcs fokszáma páros. Ha egy élen „bementünk”, még kell lennie legalább egy fennmaradó élnek, amin „kijöhetünk”. Ez alól csak egy kivétel van, ha a kiinduló pontba érkeztünk vissza úgy hogy ezen csúcsnak ez volt az utolsó felhasználható éle. Ha ezzel a módszerrel minden élt végigjártunk akkor készen vagyunk, de ha nem akkor, minden maradék élt tekintve, a hozzá tartozó csúcsokkal, ismét elmondhatjuk, hogy minden csúcs foka páros. (Hiszen eredetileg is páros volt, és ezt mindig csak páros sok fokszámmal kibővítettük.) Így újra kezdhetjük a fent említett módszert és ezt annyiszor ismételhetjük, ahányszor szükséges. Így az eredeti körhöz újabb köröket csatolhatunk, amikkel együtt a végén a teljes gráfot bejáró Euler- kört kapunk. (Szemléletesen lásd: 25. ábra) Az eredeti gráf összefüggősége miatt, és azért mert mindig a már meglévő körhöz csatoltuk az újabb köröket, végül valóban egy összefüggő kört kell kapnunk.

Ismét látható, hogyha két csúcs fokszáma páratlan, akkor az egyikből kiindulva és a másikba érkezve hasonló algoritmussal, Euler-utat kapunk.



25. ábra

5.3 Hamilton

Definíció:

G gráfban Hamilton-körnek nevezünk egy olyan kört, amely G minden csúcsát pontosan egyszer tartalmazza.

G gráfban Hamilton-útnak nevezünk egy olyan utat, amely G minden csúcsát pontosan egyszer tartalmazza.

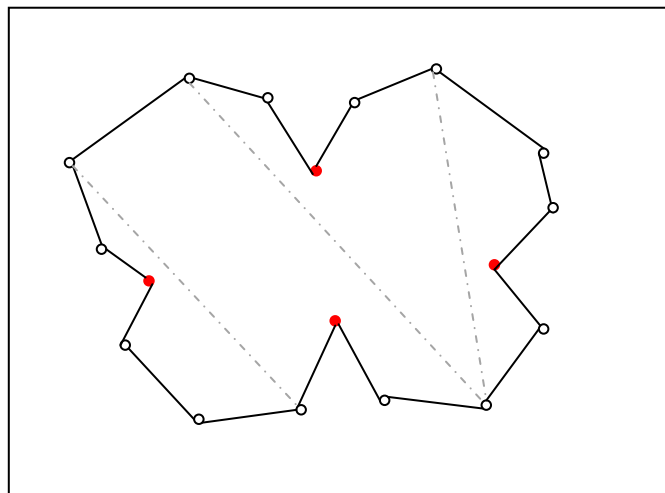
TÉTEL:

Ha egy gráfban létezik k olyan pont, melyek elhagyásával a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor a gráfban nem létezik Hamilton-kör. Ha létezik k olyan pont, amelyek elhagyásával több mint $k+1$ komponensre esik szét akkor Hamilton-út sincs.

Bizonyítás:

Indirekt tegyük fel, hogy van a gráfban Hamilton-kör, ekkor tudjuk, hogy a gráf összes csúcsa rajta van ezen a körön és ezen kívül még lehetnek élek, amelyek nem részei a körnek. Ha nincs ezen kívül több él, akkor is ha k pontot elhagyunk a körünk k db ívre esik szét. A további élek csak csökkenthetik a komponensek számát, ha összekötik őket. Tehát ha több darabra esne szét mint k akkor az eredeti feltételezésünk nem lenne igaz. Vagyis nem tartalmazna a gráf Hamilton-kört. ($k=4$ -re lásd.: 26. ábra)

A bizonyítás hasonló módon megy Hamilton-útra, hisz egy útból, ha elhagyunk k pontot, akkor $k+1$ ívre esik szét.



26. ábra

TÉTEL: ORE TÉLEL

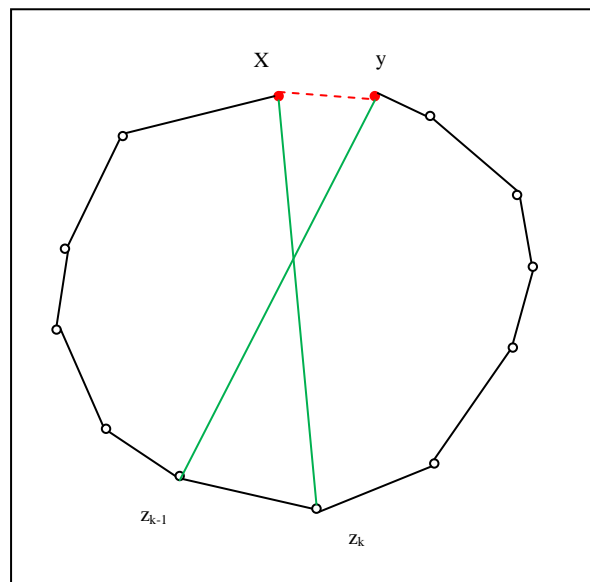
Ha az n csúcsú gráfban minden olyan x, y csúcsra, amelyek között nincs él igaz, hogy fokszámuk összege nagyobb vagy egyenlő mint n (vagyis $d(x) + d(y) \geq n$), akkor a gráfban van Hamilton-kör.

Bizonyítás:

Tegyük fel indirekt, hogy igaz a feltétel, de még sincs a gráfban Hamilton-kör. Vegyünk hozzá a gráfhoz minden lehetséges élt úgy, hogy még mindig ne tartalmazzon Hamilton kört. Az így kapott gráfra szintén igaz az állítás, hiszen az szomszédos (összekötött) csúcsokról nem állítottunk semmit, a nem szomszédos csúcsok fokszámát pedig csak növeltük, tehát ha eredetileg már igaz volt az állítás, akkor most is minden x, y -ra igaz lesz, hogy $d(x) + d(y) \geq n$. Azt is tudjuk, hogy biztosan van olyan pontpár, amely között nem fut él, hiszen ha minden pont között futna él egyértelműen lenne Hamilton kör. Ekkor, ha hozzávesszük az (x, y) élt akkor már lesz Hamilton-kör a gráfban. Vagyis eddig volt Hamilton-út a gráfban. Legyez ez a Hamilton-út z_1, z_2, \dots, z_n ahol $z_1=x$ és $z_n=y$. Ha x szomszédos ezen út valamely pontjával, akkor a nála egyel kisebb sorszámú ponttal y nem lehet szomszédos, hiszen így $(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_n, z_{n-1}, \dots, z_k, z_1)$ Hamilton-kör lenne. (Lásd: 27. ábra) Így y nem lehet összekötve legalább $d(x)$ ponttal, ezért

$$d(y) \leq n-1-d(x)$$

$$\text{átalakítva: } d(y) + d(x) \leq n-1$$



27. ábra

ami viszont ellentmond a feltételünknek. Tehát volt az eredeti gráfban Hamilton-kör.

TÉTEL: DIRAC TÉTEL

Ha egy n pontú gráfban minden pont foka legalább $n/2$. akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

Bizonyítás:

Ez következik az előző tételből, hiszen ha minden pont foka legalább $n/2$ akkor minden x, y pontra teljesül az előző tétel feltétele, jelesen, hogy $d(x) + d(y) \geq n$.

6. FÁK

6.1 Alapfogalmak, állítások

Definíció:

Az olyan gráfokat amelyek körmentesek és összefüggőek fának nevezzük.

Definíció:

Az olyan gráfot amely nem összefüggő de körmentes, erdőnek hívjuk. (Komponensei fák.)

TÉTEL:

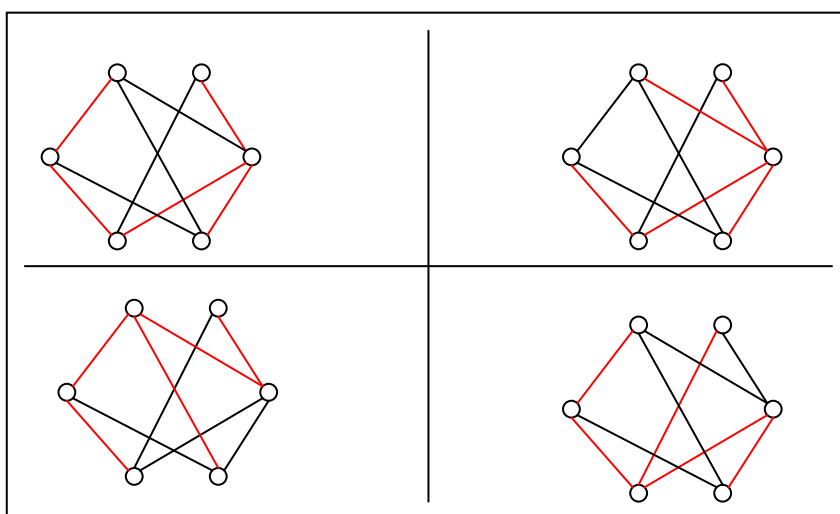
Minden összefüggő grázból élek elhagyásával kaphatunk fát.

Bizonyítás:

A gráfunk összefüggő, így már csak azt kell elérnünk, hogy körmentes legyen. Ha már eredetileg is az volt, akkor ez egy fa, tehát készen vagyunk. Ha nem, akkor keresünk benne kört. Ebből a körből elhagyunk egy élt. Vegyük észre, hogy így a gráfunk összefüggő marad, hiszen az eddig összekötött pontok ezentúl is össze vannak kötve, csak esetleg hosszabb úttal. Ha még ezen lépés után is tartalmaz kört, akkor ezt a lépést ismételjük addig, amíg körmentes gráfot nem kapunk.

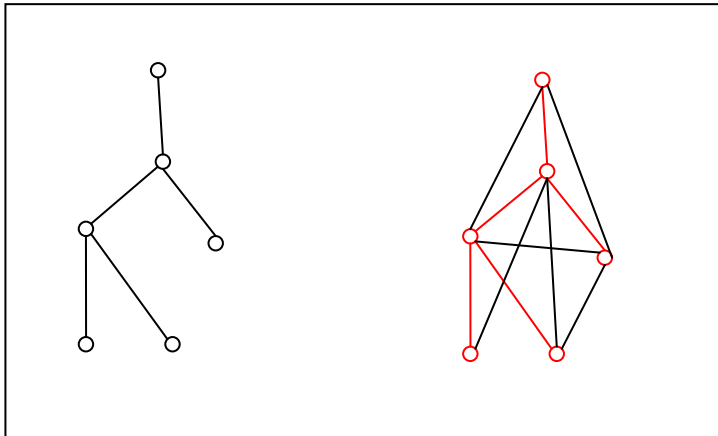
Definíció:

G tetszőleges összefüggő gráf. G feszítőfája olyan fa, amely a gráf összes pontját tartalmazza. (Ha G nem összefüggő, akkor feszítő erdőről beszélhetünk.)



28. ábra

A 28. ábrán látható hogy egy adott gráfnak nagyon sok különböző feszítőfája lehet.



29. ábra

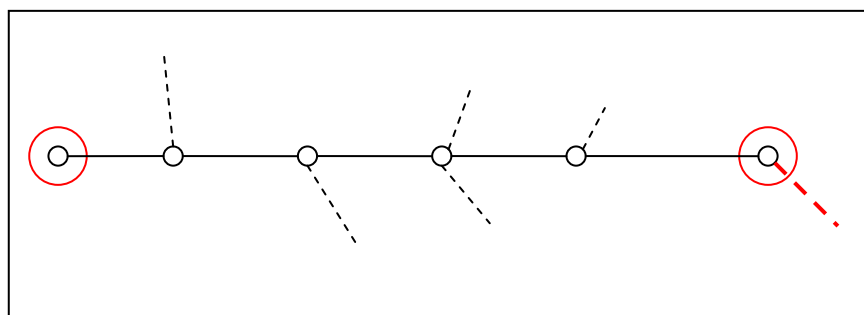
A 29. ábrán látható egy fa és egy olyan gráf aminek ez a feszítőfája. Ezen az ábrán láthatjuk, hogy mi a különbség a fa és a feszítőfa között és azt is, hogy egy fa önmagának a feszítőfája.

TÉTEL:

Minden fában (ami tartalmaz legalább két pontot) van legalább két elsőfokú pont.

Bizonyítás:

Minden fáról tudjuk, hogy összefüggő, ami azt jelenti, hogy bármely két pont között van út. Ha vannak utak a fában, akkor biztosan létezik legalább egy (akár több is) leghosszabb út. Ennek az útnak a két végpontja biztosan elsőfokú, hiszen ha nem az lenne, akkor nem ez lenne a leghosszabb út.



30. ábra

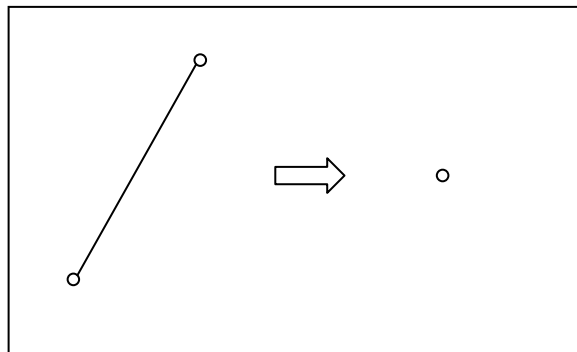
TÉTEL:

Minden fában az élek száma eggyel kevesebb mint a csúcsok száma.

$$|E| = |V| - 1$$

Bizonyítás:

Az előző tétel állítása alapján tudjuk, hogy minden fában biztosan van elsőfokú pont. Ha ezt a csúcsot elhagyom a hozzá tartozó egy éllel, akkor a gráf körmentes és összefüggő marad, vagyis ismét fát kapok. Ezt az eljárást ismételve tehát lecsökkenthetem a csúcsok számát akár kettőig is, majd a következő lépésben egyre. Mivel azt mondtuk, hogy a gráfunk végig fa marad és tudjuk, hogy a legalább kétszűcsű fákban mindig van két első fokú pont, ezért tudjuk, hogy az utolsó két lépés a 31. ábrának megfelelően fog kinézni.



31. ábra

A 31. ábrán látható mindkét gráfra igaz, hogy $|E| = |V| - 1$. És mivel tudjuk, hogy ehhez a gráfhoz úgy jutottunk, hogy mindig egyszerre hagytunk el egy élt és egy csúcsot, így az eredeti gráfunkra is igaz volt az állítás. (Hisz minden lépéssel az egyenletünk két oldalát eggyel-eggyel csökkentettük.)

TÉTEL:

G gráf (n csűcsű) akkor és csak akkor FA, ha

1. Összefüggő, de bármely élet elhagyva már nem az.
2. körmentes, de bármely új élet behűzva már nem az.
3. bármely két pontja között pontosan egy út van.
4. összefüggő és n-1 éle van.
5. körmentes és n-1 éle van.

Ezek az állítások ekvivalensek. Ekvivalenciájukat úgy bizonyítjuk, hogy bebizonyítjuk, hogy bármely állításból következik bármely másik. Nevezetesen bizonyítjuk, hogy $1. \Rightarrow 2.$, $2. \Rightarrow 3.$, $3. \Rightarrow 4.$, $4 \Rightarrow 5.$ és $5. \Rightarrow 1.$ Ezzel az állításokat körbe állítottuk, így ha több lépéssel is, de belátható, hogy minden állításból következik minden állítás. Tehát ekvivalensek.

Bizonyítás:

1. \Rightarrow 2.

Az első állításból egyértelműen következik, hogy körmentes, hiszen ha lenne benne kör, akkor a kör bármely élét elhagyva a gráf összefüggő maradna.

Az hogy bármely új élét behúzza már nem lenne körmentes az összefüggőség definíciójából következik. Ha veszünk két csúcsot, amik nincsenek összekötve és ezek közé egy újabb élét szeretnénk húzni, akkor mivel tudjuk, hogy az összefüggőség definíciója miatt ezek között eddig út volt, akkor az új éllel együtt már kör lenne.

2. \Rightarrow 3.

Az hogy bármely két pontja között pontosan egy út van, azért van, hiszen ha feltesszük, hogy lenne kettő (vagy több), akkor két ponton át lenne kör, vagyis nem lenne körmentes. Hiszen ha vesszük a két különböző út diszjunkt részeit, kört, esetleg köröket kapunk. Ha viszont nem lenne egy sem, akkor, ha vesszük azt az élét amely hiányzik az útból, akkor annak behúzásával nem keletkezne kör (csak út), ami ellentmondana a feltételünknek.

3. \Rightarrow 4.

A hármas állítás pont az összefüggőség definíciója, tehát már csak azt kell belátnunk, hogy $n-1$ éle van. Ezt indukcióval könnyű látni. Ha vesszük a kétpontú és egy élű gráfot, arra igaz az állítás. Tehát n -re igaz az állítás. Vegyük az $n+1$ csúcsú gráfot. Mivel bármely két pont között pontosan egy út megy, van elsőfokú pontunk. Ha ezt elhagyjuk, akkor egy élét és egy csúcsot hagytunk el és kaptunk egy n csúcsú gráfot. Az indukciós feltevés miatt erre igaz az állítás, hogy $n-1$ éle van. Ha visszavesszük az előbb elhagyott csúcsot az éllel együtt, akkor a csúcsok és élek számát is eggyel növeljük, vagyis az állításunk igaz marad.

4. \Rightarrow 5.

Az hogy $n-1$ éle van egyértelmű, azt kell még bizonyítani, hogy körmentes. Ha ismét a kétpontú és egy élű gráfból indulunk ki (amire igaz az állítás), akkor láthatjuk, hogy minden további csúcs hozzáadása a gráfhoz egy élét követel, hogy az összefüggőségnek eleget tegyünk, így a gráfot bármennyig bővítve biztosan nem lesz körünk, hisz ahhoz már két eddig meglévő pontot kellene összekötnünk, de akkor már az élek száma megegyezne a csúcsokéval.

5. \Rightarrow 1.

Tegyük fel indirekt, hogy nem összefüggő. Ekkor legalább két összefüggő részre tudjuk bontani. Tegyük fel, hogy az egyiknek k_1 csúcsa van, a másiknak pedig k_2 . Tudjuk, hogy ezeknek külön, külön k_1-1 és k_2-1 éle van. Ekkor az egész gráfnak lenne k_1+k_2 csúcsa és k_1+k_2-2 éle, ami ellent mond a feltevésnek, tehát összefüggő. Mivel tudjuk azt is, hogy körmentes ezért, ha bármely élet elhagyanánk, már nem lenne összefüggő.

Már tudjuk, hogy minden n csúcsú fának $n-1$ éle van. De vajon előre adott n ponthoz hány különböző fát lehet rajzolni, ha csúcsok előre számozva vannak $1, 2, \dots, n$ -nel. Ezt a számot T_n -el fogjuk jelölni. (Az ezek közül páronként nem izomorfak száma P_n .)

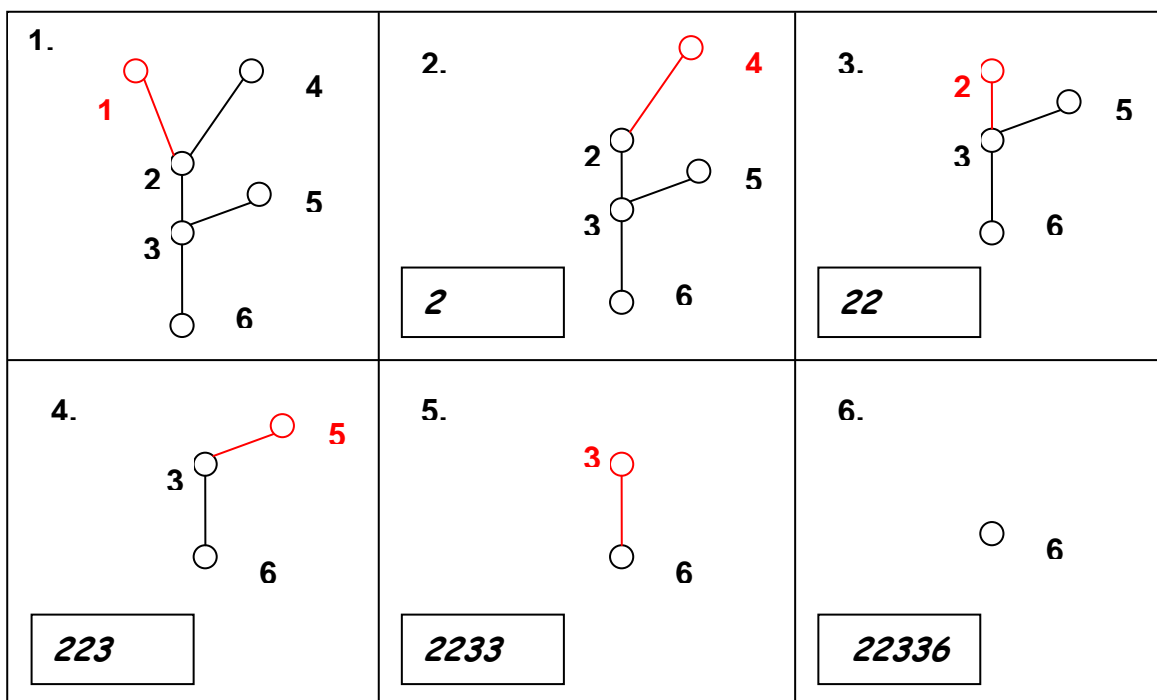
6.2 Prüfer-kód

TÉTEL:

$T_n = n^{(n-2)}$ (Cayley fedezi fel.)

Bizonyítás

Prüfer –féle bizonyítást fogunk alkalmazni. Ennek ötlete, hogy számsorozatokkal kódoljuk a fákat. Ezt a számsorozatot fogjuk Prüfer- kódnek nevezni. A kód előállításának az algoritmus az, hogy vesszük a fában az elsőfokú csúcsok közül a legkisebb sorszámút és letöröljük a hozzá tartozó éllel együtt. Ekkor leírjuk a szomszédjának a sorszámát. Ezt a lépést ismételve, egy egycsúcsú gráfhoz jutunk és az eredeti gráf Prüfer-kódjához.



32. ábra

A 32. ábrán látható egy példa a kód előállítására.

A Prüfer-kód tehát egy $n-1$ hosszú kód (Megjegyzés: Az hogy a prüfer kód $n-1$ vagy $n-2$ hosszúságú csak megállapodás kérdése. Vannak olyan irodalmak amelyben a kód utolsó számjegyét nem jegyzik, hiszen az mindig n .), hiszen ennyi darab élt tudunk az algoritmus során letörölni. Azt is tudjuk, hogy az utolsó számjegye mindig n , mert minden fában legalább két elsőfokú pont van, így biztosan van egy olyan elsőfokú csúcs, amelynek kisebb a sorszáma n -nél. Így azt fogjuk letörölni. A kód első $n-2$ helyére viszont bármilyen szám írható 1-től, n -ig, így $n^{(n-2)}$ féle kódot kaphatunk.

Most már tudjuk, hogy maximum ennyi féle fa állhat elő, de kérdés maradt, hogy vajon minden kódhoz tudunk-e fát rajzolni? Vagyis szükségünk lenne a dekódoló algoritmusra, melynek segítségével kapunk egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kódok és számozott fák között.

Vegyük az előző példánkat. És vizsgáljuk meg ezt a kódot.

22336

Akár a kód hosszából, akár az utolsó számjegyből megállapíthatjuk, hogy hány csúcsú volt a fánk. (Hisz a hossza $n-1$, az utolsó jegy pedig maga n .)

Ezután azt is könnyedén leolvashatjuk, hogy melyek voltak az elsőfokú pontok. Ezek pontosan azok a csúcsok lesznek, amelyek száma nem szerepel a kódban, hiszen csak akkor szerepel egy szám a kódban, ha volt olyan szomszédja amelyet letöröltünk. Az elsőfokú csúcsoknak természetesen nincsen olyan szomszédjuk amit le lehet törölni, így nem kerülnek bele a kódba. A példánkban tehát az 1, 4 és 5 számú csúcsok voltak elsőfokúak. Legkisebb ezek közül az egy tehát biztosan őt töröltük le először.

letörölt pont	1				
Prüfer-kód	2	2	3	3	6

Hogyan folytathatjuk a dekódolást?

letörölt pont	1	X			
Prüfer-kód	2	2	3	3	6

X helyébe mindig a legkisebb olyan számot kell írni, ami nem szerepel egyetlen színezett szám között sem. Az alsó sorban szereplők közül azért nem írhatunk be egyet sem, mivel tudjuk, hogy ők a későbbiekben még szerepelnek a gráfban mint valamely letörölt pont szomszédja. A felső sorban szereplők meg már le vannak törölve. Tehát ezek mind kiesnek. A maradék csúcsok közül pedig a legkisebb számú az, amit mindig letörölünk, így azt kell a négyzetbe írni.

Lássuk akkor, ez hogyan működik a példánkban.

letörölt pont	1	4			
Prüfer-kód	2	2	3	3	6
letörölt pont	1	4	2		
Prüfer-kód	2	2	3	3	6
letörölt pont	1	4	2	5	
Prüfer-kód	2	2	3	3	6
letörölt pont	1	4	2	5	3
Prüfer-kód	2	2	3	3	6

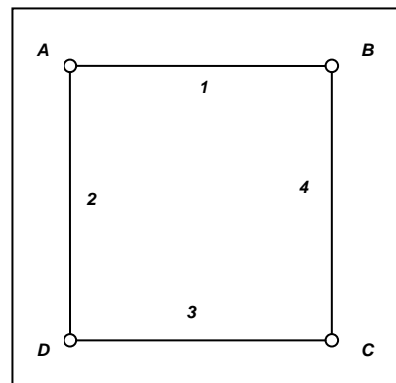
Ha megkaptuk a fenti táblázatot, akkor ezek után már csak annyit kell tennünk, hogy az egy oszlopban szereplőket összekötjük. Hiszen tudjuk, hogy amikor a felső számot az élével együtt letöröltük, akkor alulra a szomszédját írtuk le, tehát megy közöttük él.

Ezek után már csak azt kell belátnunk, hogy az így kapott gráf egy fa. Tudjuk, hogy $n-1$ éle van, tehát már csak azt kell bizonyítanunk, hogy körmentes.

Bizonyítás:

Indirekt próbáljuk ezt bebizonyítani.

Tegyük fel, hogy van kör benne.



33. ábra

Tehát ha feltesszük, hogy van benne kör, például a 33. ábra szerint, akkor a kódjában biztosan kell szerepelnie a következőeknek. A pontok letörlését a példában *B*-vel kezdjük. (Természetesen a gráf mást is tartalmazhat, a kódban ezt üres helyekkel jelölöm.)

B		A		D		C
A		D		C		B

Látjuk, hogy így minden a körben szereplő betűnek a táblázatban felül és alul is kell szerepelnie. Ez viszont ellentmond a dekódoló algoritmusnak, hisz így legalább egyszer olyan számot, betűt kellene a hiányzó helyre írunk, ami már szerepel a színezettek között.

B		A		D		C
A		D		C		B

Mivel ellentmondásra jutottunk az állítás tagadásával, tudjuk, hogy a gráfunk körmentes, tudjuk azt is, hogy $n-1$ éle van, tehát fa.

Ezzel beláttuk, hogy $T_n = n^{(n-2)}$ féle különböző fa rajzolható adott n csúcshoz.

7. KONKLÚZIÓ

Utólag végiggondolva szakdolgozatom írása közben a legtöbb problémát az okozta, hogy nem mindig tudtam felmérni azt, hogy ami számomra evidens, alapvető tudás mások számára esetleg nem az. Ezen kívül egyszer-kétszer belefutottam abba a hibába, hogy olyan definíciót akartam használni bizonyítás, magyarázat közben, ami csak a későbbiekben szerepelt a dolgozatomban. Ezekre a problémákra úgy jöttem rá, hogy írás közben a matematikában nem/kevésbé jártas ismerőseimmel olvastattam a jegyzeteim, akik felmerülő kérdéseikkel akarva-akaratlan segítettek munkám. Akkor tekintettem megfelelőnek egy anyagrészt, ha az olvasottakkal kapcsolatban nem merült fel kérdésük.

Alapvetően úgy gondolom, hogy szakdolgozatom megírása sokban segítette a tanári gondolkodásmódom kialakulását, és a kezdeti nehézségek után már sokkal kritikusabb szemmel tudtam saját munkámra tekinteni, ami nagyban hozzájárult a sikeres elkészítéshez.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindenkinek aki hajlandó volt idejét a munkám olvasgatására szentelni, külön köszönet Gács Andrásnak, aki elindított az úton és Vesztergombi Katalinnak, aki segített a célba érésben.

Végül, de nem utolsó sorban remélem, hogy elértem céloim és az ELTE hallgatóinak is hasznára válik jegyzetem vizsgáikra való felkészülés során.

Irodalomjegyzék:

- [1] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: Diszkrét Matematika, Budapest : Typotex, 2006

- [2] Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba: A számítástudomány alapjai, Budapest : Typotex, 2006

- [3] Andrásfai Béla: Gráfelmélet, Szeged : Polygon, 1997

- [4] Oystein Ore: A gráfok és alkalmazásaik, Budapest : Gondolat, 1972

- [5] J. A. Bondy, U. S. R. Murty: Graph theory, New York : Springer, 2008

Internetes források:

- [6] <http://www.cs.elte.hu/~szonyi>
<http://www.cs.elte.hu/~szonyi/foxam.pdf>

A szakdolgozatomban esetlegesen előforduló szó szerinti idézések nincsenek jelölve. A tételek, bizonyítások, állítások egyértelműsége és az hogy e témában nagyon széles az elérhető szakirodalom listája, szinte lehetetlenné teszi a szó szerinti idézés elkerülését.