

# Geometriai szerkesztések

SZAKDOLGOZAT

Készítette: **Maczkó Renáta** (Matematika BSc)

Témavezető: **Fried Katalin** (főiskolai docens)



Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar  
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Budapest, 2010

# Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	3
2. Geometria története.....	4
3. Euklideszi szerkesztések.....	6
4. Nem szerkeszthetőség.....	15
5. Hatványvonal.....	21
6. Inverzió.....	25
7. Mohr-Mascheroni-féle szerkesztés.....	28
8. Poncelet-Steiner szerkesztés.....	32
9. GeoGebra.....	39

## 1. Bevezetés

A szakdolgozatom témája a geometria, ezen belül főleg szerkesztési feladatokkal foglalkozom. Úgy gondolom, hogy a szerkesztési feladatok segítségével olyan diákokkal is meg lehet szeretetni a matematikát, akiknek a többi terület gondot okoz.

Szakdolgozatom elején a geometria történetét foglalom össze röviden. Ezt követően a főbb iskolai euklideszi szerkesztések menetét tekintem át, amivel a diákok már 5. osztályos koruktól fogva megismerkednek. Ha olyan diákjaink vannak, akiknek ez a téma nagyon megtetszett, akkor akár kicsit nehezebb, gondolkodtatóbb feladatot is adhatunk nekik, mint például az itt bemutatott merev körzős, és csak egyszeri körzőhasználatot megengedő feladatok.

A következő rész az euklideszi geometriában nem szerkeszthető, híres ókori feladatokról és a szabályos sokszögek szerkeszthetőségéről szól. Úgy gondolom, hogy ezt a témakört is el lehet mondani, illetve inkább szemléltetni középiskolában matematika szakkörön vagy speciális matematika tagozat 11. vagy 12. évfolyamában.

A következő két rész a hatványvonal és az inverzió tulajdonságaival, és szerkesztésével foglalkozik. Az inverzió egy újfajta gondolkodásra készítet bennünket, ezért ennek bevezetésekor érdemes úgy feladni néhány feladatot, melyekre inverziót használva egyszerű megoldás adható. Ezt a két témakört Moussong Gábor előadásai alapján készítettem.

A következő rész a Mohr-Mascheroni-tétel bizonyításával foglalkozik. Ezt a tétel részfeladatokra bontva az inverzió témakörénél taníthatjuk szakkörön, vagy speciális matematika tagozaton. Ezzel szemben az utolsó előtti részben leírt Poncelet-Steiner tétel bizonyítása már túl nehéz, de a tétel megemlíthető néhány csak vonalzós szerkesztési feladat után, illetve feladható az is, hogy kör nélkül már nem szerkeszthető merőleges.

Az utolsó témám a Geogebra nevű program bemutatása, mellyel ábráimat készítettem.

## 2. Geometria története

Az alábbiakban a geometria történetét tekintjük át röviden az [4] és [5] alapján.

A geometria szó görögül eredetileg földmérést jelentett, mivel az ókori Mezopotámiában és Egyiptomban ebből alakult ki a kezdetleges geometria.

Mezopotámiában i.e. 2000-300. közötti években már ismerték a derékszögű síkidomok területének és az egyszerűbb testek térfogatának kiszámítási módját és a Pitagorasz-tételt is. Megállapították, hogy a félkörön nyugvó kerületi szög derékszög.

Az egyiptomi geometria a mindennapi élet szükségleteiből alakult ki. Egyszerű terület- és térfogatszámításuk legnagyobb eredménye a kör területének meglepően jó közelítése ( $\pi \approx 3,16$ -tal számoltak) és a négyzetes csonka gúla térfogatának helyes kiszámítása.

A geometriát a görög matematikusok tették tudománnyá. Az első matematikus Thalész (i.e. 624?-548?) volt, aki Egyiptomban egy bot segítségével meg tudta határozni a piramis magasságát. Thalésznek tulajdonítják a szög fogalmát, ő állapította meg, hogy a csúcshögek egyenlők, az átmérő felezi a kört, az egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek egyenlők és hogy két háromszög egybevágó, ha egy oldaluk és a rajta lévő két szög megegyezik. Viszont ezeket az állításokat be is bizonyította, így ő volt az első olyan matematikus, aki az állítások „miért”-jét is kereste. Az ő nevéhez köthető még az a megállapítás, hogy a háromszög belső szögeinek összege  $180^\circ$  és maga a Thalész-tétel is.

Lehetséges, hogy Thalész tanítványa volt Pithagorasz (i.e. VI. sz.), aki iskolát alapított az arisztokrata családok számára. Neki és a tanítványainak köszönhetőek az első ismeretek a szabályos testekről, az első számelméleti felfedezések (pl.: páros, páratlan, tökéletes számok) és az irracionális számok felfedezése. A matematikában az egyik legismertebb, a róla elnevezett tételt nem ő fedezte fel, mert már i.e. 2000 körül a sumérok ismerték és alkalmazták, viszont valószínűleg Pithagorasz egy újfajta bizonyítást adott a tételre, és emiatt a nevéhez kötik.

Már az ógörögöknél is felbukkantak olyan szerkesztési feladatok, amik nemcsak a matematikusok érdeklődését keltették fel, hanem a laikus embereket is. Ilyen a kockakettőzés, szögharmadolás és a kör négyszögesítése (lásd 4. fejezet). A legenda szerint Délosz szigetén pestisjárvány tombolt és az istenek azt kérték, hogy a kocka alakú oltárkövet kettőzzék meg, és akkor elmúlik a járvány. A kőfaragók nem tudták, hogy az új kockának mekkora lesz az éle, és  $\sqrt[3]{2}$  hosszúságú szakaszt nem tudtak szerkeszteni.

Eukleidész (i.e. 300 körül) megalkotta az Elemek (Sztoikheia) című művét, amit a mai középiskolai geometria alapja. Ez a 13 könyvből álló mű összefoglalta a matematika

alapjait. Az Elemek Eukleidészen kívül sok más matematikus eredményét is tartalmazza, de Eukleidész érdeme ezek bemutatása.

Arkhimédész (i.e. 287-212) az ókor legnagyobb matematikusa és fizikusa volt. Bebizonyította, hogy az egyenlő oldalú henger, a bele írható gömb és a hengerbe írható kör térfogatainak aránya 3:2:1. Annyira tetszett neki ez az összefüggés, hogy még a sírkövére is ezeket az ábrákat vésettette rá. Ezen kívül a sokszögek kerületével közelítette a  $\pi$

értéket, és azt találta, hogy  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ .

Menelaosz (100 körül) a gömb geometriájával foglalkozott. Ptolemaiosz nagy műve a „Nagy gyűjtemény” (Almagest) trigonometriai táblázatokat és összefüggéseket, a gömb trigonometriájának alapjait, geometriai tételeket és geocentrikus világregszerének felépítését is tartalmazza. Liu Huj a kör kerületét a 3072 oldalú beírt sokszöggel közelítette, és a  $\pi \approx 3,14159$  értéket találta.

Papposz (i.sz. IV. sz.) a három híres ókori problémáról kimondta, bizonyítás nélkül, hogy csak körzövel és vonalzóval nem szerkeszthető meg. Arkhimédész eredményeit továbbfejlesztette, könyveiben problémákat és ötleteket vetett fel, amik a későbbi matematikusokra ösztönző hatások voltak, ilyen volt a Papposz-tétel a projektív geometriában.

Hosszú idő telt el, amíg új felfedezés született. Desargues (1593-1662) és Fermat (1601-1665) megalapozták az analitikus geometriát. Monge (1746-1818) az ábrázoló, Poncelet (1788-1867) a projektív, Steiner (1796-1863) a szintetikus geometriát teremtették meg.

Gauss jelentős eredményekkel gazdagította a geometriát elemi geometriai eredményeivel és felületelméletével.

Bólyai János (1802-1860) és Lobacsevszkij (1792-1856) megalkották a nem euklideszi geometriát, ezzel megválaszolták az Euklidesz V. (párhuzamossági) posztulátumának bizonyíthatóságáról szóló több évezredes, sokak által vizsgált kérdést. Riemann (1826-1866), Felix Klein (1849-1925) és mások kutatásai szükségessé tették a geometriai alapfogalmak megvizsgálását. Ezt a feladatot a nagy német matematikus Hilbert (1862-1943) hajtotta végre századunk elején.

### 3. Euklideszi szerkesztések

A gyerekek, már általános iskolában megismerkednek a legegyszerűbb eszközökkel, ami a vonalzó és a körző. A legegyszerűbb lépések, amelyeket ezekkel az eszközökkel megtehetünk, a következők:

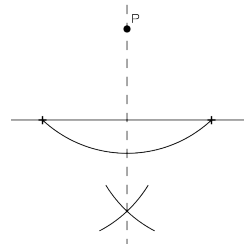
1. A vonalzót két adott ponthoz illesztve megrajzolhatjuk a két ponton áthaladó egyenest.
2. Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott körzőnyílással kört rajzolhatunk.
4. Két metsző egyenes metszéspontját megkereshetjük.
5. Egy kör és azt metsző egyenes mindkét metszéspontját megkereshetjük.
6. Két egymást metsző kör mindkét metszéspontját megkereshetjük.

Ha egy szerkesztést a felsorolt 6 lépés véges sokszori alkalmazásával végzünk, akkor euklideszi szerkesztésnek nevezzük. Természetesen feltesszük, hogy van tetszőleges hosszú vonalzónk és tetszőlegesen kinyitható körzőnk.

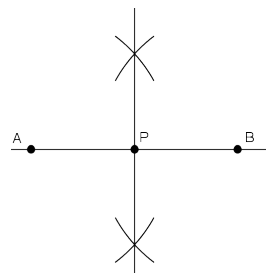
#### ❖ Néhány iskolai és középiskolai szerkesztési módszer:

- *Merőleges szerkesztése adott pontból (1. ábra, 2. ábra)*

Egy külső pontból kell merőlegest állítani az egyenesünkre. A  $P$  pontból akkora sugárral körözünk, hogy 2 helyen metssze az egyenest. A kapott két pont felénél nagyobb távolságra nyitjuk a körzőnket, majd mindkét pontból körözünk mindkét félsíkra. A metszéspontokat összekötjük. (1. ábra)



1. ábra

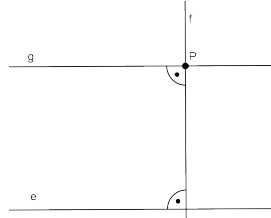


2. ábra

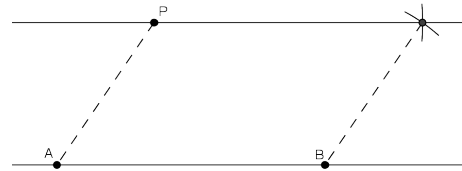
Ha egyenesünkön lévő pontra állítjuk a merőlegest, akkor a  $P$  pontból tetszőleges körzőnyílással elmetsszük két helyen az egyenesünket, majd a kapott két pont közötti távolság felénél nagyobbra vesszük a körzőnket és mindkét félsíkra körözünk  $A$ -ból és  $B$ -ből. A metszéspontokat összekötve megkaptuk a merőleges egyenesünket. (2. ábra)

- *Párhuzamos szerkesztése adott pontból (3. ábra, 4. ábra)*

A  $P$  pontból merőlegest szerkesztünk az adott  $e$  egyenesünkre, majd a ponton keresztül is még egy merőlegest szerkesztünk az  $f$  egyenesünkre. Az így kapott  $g$  egyenes párhuzamos lesz  $e$ -vel. (3. ábra)



3. ábra

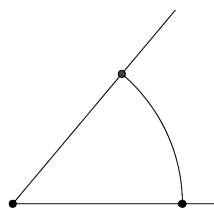


4. ábra

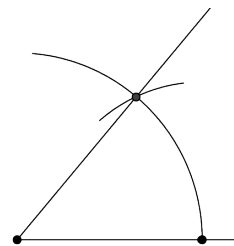
Úgy is szerkeszthetünk párhuzamost a  $P$  pontból, hogy az egyenesünkön kijelölünk egy  $A$  és egy  $B$  pontot. A  $B$  pontból körözünk az  $AP$  távolsággal, majd a  $P$  pontból körözünk az  $AB$  távolsággal. Ez a két kör két helyen is metszi egymást, de csak azt a félsíkbeli metszéspontot kell nézni, amelybe a  $P$  pont is beletartozik. A kapott alakzat egy paralelogramma lesz, ebből az következik, hogy a szemben lévő oldalak párhuzamosak lesznek egymással. (4. ábra)

- *Szögmásolás (5. ábra, 6. ábra)*

Felvezünk egy félegyeneset. Az adott szög csúcsából körözünk. Ugyanezzel a sugárral körözünk a másik félegyenes csúcsából. Az adott szögünk szárai és a szög csúcsából húzott körív metszéspontjai távolságát felmérjük és ezzel a távolsággal körözünk a félegyenesünk kimetszett pontjából. A két körív metszéspontját összekötjük a félegyenesünk végpontjával.



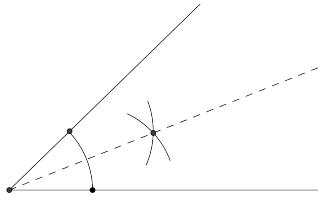
5. ábra



6. ábra

- *Szögfelezés (7. ábra)*

A szög csúcsából tetszőleges körívvel körözünk. Majd ahol a körív metszi a két szög-szárát, azokból a pontokból is ugyanezzel a sugárral körözünk. A kapott metszéspontot összekötjük a szög csúcsával.



7. ábra



8. ábra

- Szakasz többszörözése (8. ábra)

Az  $AB$  szakaszt meghosszabbítjuk. Felmérjük az  $AB$  szakasz távolságát, majd a  $B$  pontból ezzel a távolsággal körzözünk. A metszéspontból megkapjuk  $C$ -t. Ezt a folyamatot ismételve annyiszor többszörözzük a szakaszt, ahányszor akarjuk.

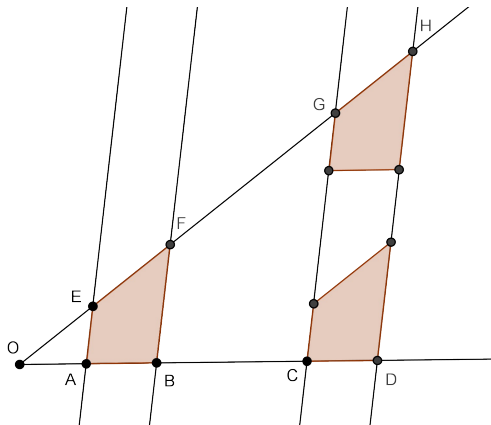
- Párhuzamos szelők tétele (9. ábra, 10. ábra)

**Tétel:** Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.

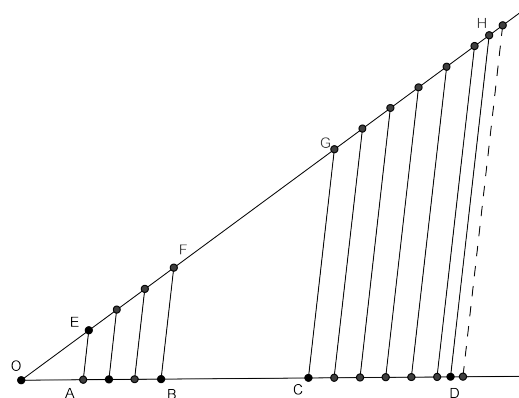
**Biz.:** a) Először azt igazoljuk, hogy ha  $AB=CD$ , akkor  $EF=GH$ .

Toljuk el az  $ABEF$  síkidomot  $OA$  félegyenesen úgy, hogy  $AB$  a  $CD$  szakaszra kerüljön. Az  $AE$  és  $BF$  szakaszok a párhuzamosság miatt a  $CG$ , illetve a  $DH$  egyenesekre fognak kerülni. Újból toljuk el a síkidomunkat, de most a  $CG$  egyenes mentén úgy, hogy az  $E$  pont a  $G$  pont helyére kerüljön. Az  $F$  pont a  $DH$  egyenes mentén mozog. Mivel az  $EF$  iránya az eltolás során nem változott meg, ezért a  $GH$  szakaszra esik, tehát a távolságok egyenlők.

(9. ábra)



9. ábra



10. ábra

b) Most az általános esetet bizonyítjuk be.

Legyen  $n$  természetes szám. Osszuk fel az  $AB$  szakaszt  $n$  egyenlő részre. Majd ezt a részt mérjük fel a  $C$ -ből kiindulva a  $CD$  szakaszra annyiszor, ahányszor csak tudjuk. Ha ez  $k$ -szor lehetséges, akkor

$$k \frac{AB}{n} \leq CD < (k+1) \frac{AB}{n} \quad (1)$$



egyenlőtlenséget kapjuk. A felmért részek végpontjain át párhuzamosokat húzunk a párhuzamos szelőkkel. Minden résznek a) szerint a másik száron is egyenlő szakaszok lesznek, ezért

$$k \frac{EF}{n} \leq GH < (k+1) \frac{EF}{n} \quad (2).$$

Ha az (1) egyenlőtlenségünket  $AB$ -vel, a (2) egyenlőtlenségünket pedig  $EF$ -fel osztjuk le, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{k}{n} \leq \frac{CD}{AB} < \frac{k+1}{n} \quad \text{és} \quad \frac{k}{n} \leq \frac{GH}{EF} < \frac{k+1}{n}.$$

Ha vesszük az  $\frac{CD}{AB}$  és a  $\frac{GH}{EF}$  számok különbségének az abszolút értékét, akkor

$$\left| \frac{CD}{AB} - \frac{GH}{EF} \right| < \frac{1}{n}.$$

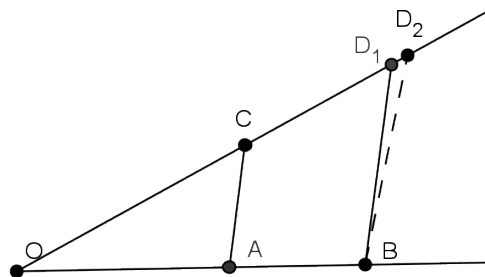
Az  $n$  természetes számot függetlenül választottuk, tehát a bal oldali érték minden természetes szám reciprokánál kisebb. Ebből az következik, hogy a bal oldal  $0$ , mert a  $0$  az egyetlen ilyen szám. Ekkor ez az aránypár igaz:  $CD:EF=AB:GH$ . (10. ábra) [2]

- *Párhuzamos szelők tételének megfordítása (11. ábra)*

**Tétel:** Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyeknek aránya mind a két száron ugyanaz, akkor a két egyenes párhuzamos. [2]

**Biz.:** Tegyük fel, hogy  $OA:OB=OC:OD_1$ .

A  $B$  ponton át  $AC$  egyenessel párhuzamosat húzunk, ami az  $OC$  félegyenest  $D_2$  pontban metszi. Kell, hogy  $D_1=D_2$ . Mivel  $AC \parallel BD_2$ , ezért az előző tétel szerint  $OA:OB=OC:OD_2$ . Ha ezt összevetjük az eredeti feltételünkkel, akkor  $OD_1=OD_2$  adódik, ezért  $D_1=D_2$ .

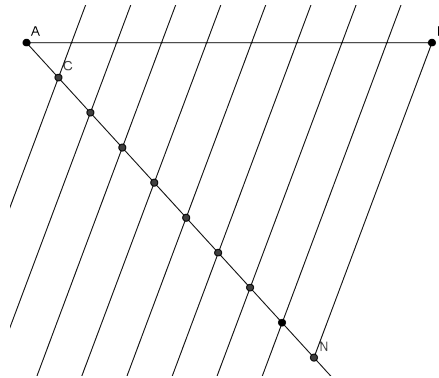


11. ábra

- *Szakasz n-edelése (12. ábra)*

A párhuzamos szelők tételét fogjuk felhasználni a szakasz  $n$ -edelésénél, mivel a tételben beláttuk, hogy egyenlő szakaszokat fogunk kapni.

Az  $AB$  szakasz egyik végpontjából felmérünk egy félegyenesest. A végpontból a félegyenesre felmérünk egy tetszőleges szakaszt, majd többszörözzük a félegyenesen. Annyi szakaszt mérjük fel, ahány részre akarjuk osztani az  $AB$  szakaszunkat. Az utolsó szakasz végpontját összekötjük a szakaszunk végpontjával, majd ezzel az egyenessel párhuzamosokat húzunk a félegyenesen lévő szakaszok pontjaival.

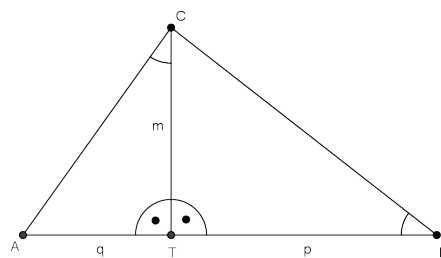


12. ábra

- *Magasság tétel (13. ábra)*

**Tétel:** A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó két szeletének a mértani közepe. [2]

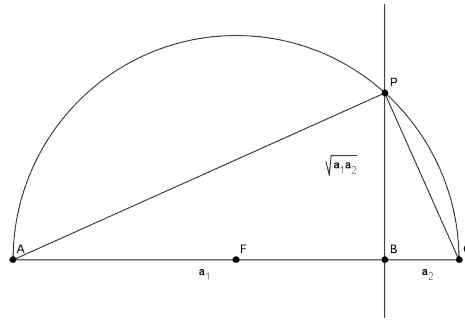
**Biz.:** A derékszögű háromszöget a magassága két hasonló háromszögre osztja, mert szögeik merőleges szárú szögek. A megfelelő oldalak arányát felírva kapjuk, hogy  $p:m=m:q$ , amiből  $m^2=pq$ , tehát  $m = \sqrt{pq}$ .



13. ábra

- *Mértani közép szerkesztése (14. ábra)*

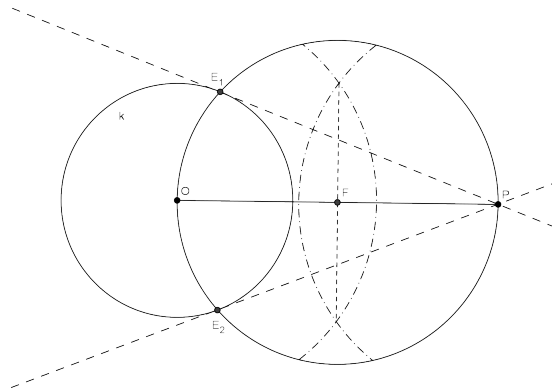
A  $\sqrt{a_1 a_2}$  megszerkesztéséhez vegyünk fel egy  $a_1$  hosszú szakaszt, majd ennek a végpontjába egy  $a_2$  hosszú szakaszt. Az  $a_1 + a_2$  hosszú szakasznak megszerkesztjük a felezőpontját, majd  $F$ -ből  $AF$  távolsággal kört rajzolunk.  $B$ -ből merőlegest állítunk a szakaszra, és ahol metszi a kört, ott lesz  $P$ .  $BP$  távolság megegyezik  $\sqrt{a_1 a_2}$  távolsággal, a magasság-tétel miatt.



14. ábra

- *Körhöz adott külső pontból érintő (15. ábra)*

Összekötjük a  $P$ -t (külső pont) az origóval, majd ennek a távolságnak vesszük a felezőpontját, ami legyen  $F$ .  $F$ -ből  $OF$  sugárral kört rajzolunk, és ahol ez a kör metszi az eredeti körünket, ott lesznek az érintési pontok ( $E_1, E_2$ ).  $P$ -t összekötjük  $E_1$ -gyel és  $E_2$ -vel, így megkaptuk az érintőket. Külső pontból mindig két érintőt kapunk.

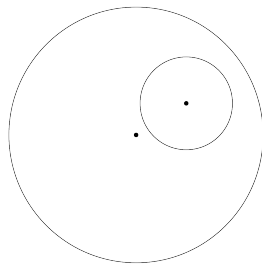


15. ábra

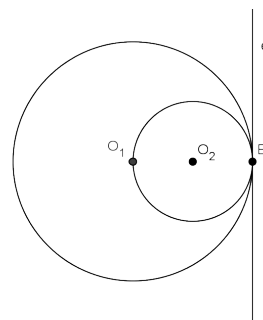
- *Két kör közös érintője (16. ábra, 17. ábra, 18. ábra, 19. ábra, 20. ábra)*

Két körnek 0,1,2,3,4 közös érintője lehet.

Ha az egyik kör a másik kört magába foglalja, akkor a két körnek nincs közös érintője (16. ábra). Ha a két kör belülről érintik egymást, akkor egy közös érintőjük van. A két kör metszéspontjából az  $O_1O_2$  egyenesre állított merőleges egyenes. (17. ábra)

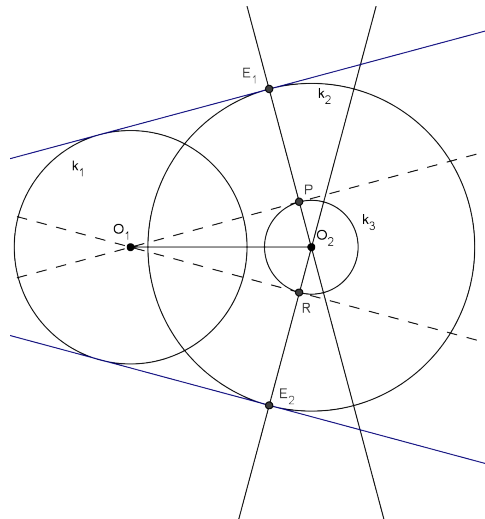


16. ábra



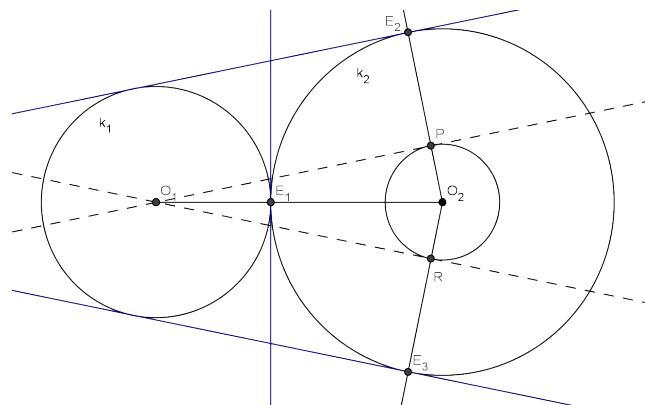
17. ábra

Vegyünk fel egy  $O_1$  középpontú,  $r_1$  sugarú kört és egy  $O_2$  középpontú,  $r_2$  sugarú kört, amik két helyen metszik egymást. Ha  $r_2 > r_1$ , akkor  $O_2$  középpontba vegyünk fel egy  $r_2 - r_1$  sugarú kört, majd  $O_1$  pontból szerkesszük meg  $k_3$  körnek az érintőit. Az érintési pontokat egy egyenessel összekötjük a  $k_2$  kör középpontjával, majd ahol ez az egyenes az eredeti körünket kimetszi, azokon a pontokon át párhuzamosost húzunk az érintőkkel. Ez a két egyenes lesz a két kör közös érintője. (18. ábra)



18. ábra

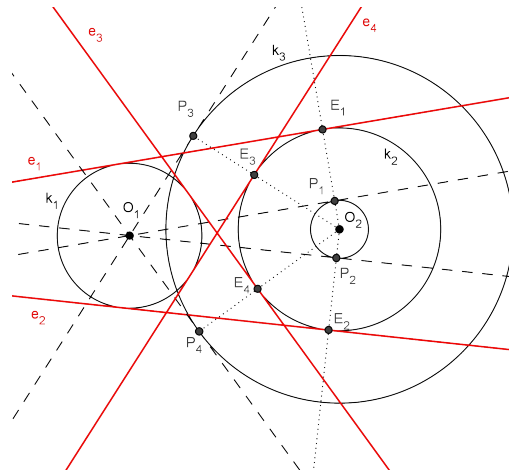
Ha a két kör egy ponton metszi egymást, akkor 3 közös érintőjük lesz. Két külső érintő, amit úgy szerkesztünk, mint amikor két metszéspontra van a két körnek (előző eset, 18. ábra). A harmadik érintőt úgy kapjuk meg, hogy a két kör érintési pontjából  $O_1O_2$  szakaszra merőlegest állítunk (17. ábra).



19. ábra

Ha a két kör nem metszi egymást, és nem egymás belsejében vannak, akkor 4 közös érintőjük van. Két külső érintő ( $e_1$  és  $e_2$ ), amit már az előbbiekből tudunk szerkeszteni, és két belső érintő ( $e_3$  és  $e_4$ ). A belső érintőket úgy szerkesszük, hogy az  $O_2$  középpontba  $r_1 + r_2$  sugárral kört rajzolunk, majd  $O_1$  pontból az új körre megszerkesztjük az érintőket.

Az érintési pontokat összekötjük az  $O_2$ -vel, és ahol ezek az egyenesek metszik az eredeti  $r_2$  sugarú körünket, azokon a pontokon keresztül húzunk párhuzamost az  $r_1 + r_2$  sugarú kör érintőivel. (20. ábra)

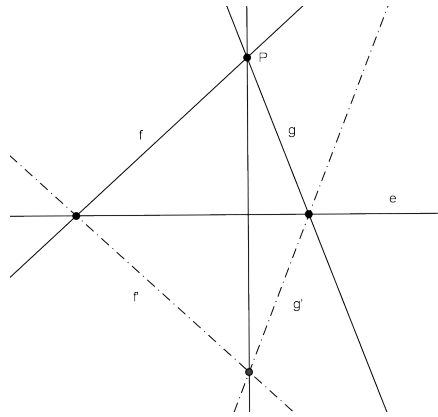


20. ábra

Az első néhány szerkesztési eljárással már 5.-es osztályban megismerkednek a gyerekek. Ilyenkor a párhuzamos egyenes megrajzolását két derékszögű háromszög alakú vonalzóval végzik el, eltolással. Ez ugyan nem euklideszi szerkesztés, de a távolságtartás miatt egyenértékű vele. A merőleges szerkesztését is két vonalzóval rajzolják, egy merőleges háromszög vonalzót egy másik tetszőleges vonalzóra illesztnek, ami az egyenesre illeszkedik. 6. osztályban már az euklideszi szerkesztések menetével is megismerkednek, ezt követően csak szerkesztési lépéseket hajtanak végre. 8. osztályban már a párhuzamos szerkesztésének egy új szerkesztésével ismerkednek meg a gyerekek, amit a 4. ábra mutat be. Léteznek különféle vonalzók és segédeszközök a szerkesztésekhez, de ezek már nem megengedett kellékek az euklideszi szerkesztésekben. 8. osztályban akár az alap szerkesztési feladatok nehezített változatát is fel lehet adni, ilyen például a következő két feladat.

1. Feladat: Szerkesszünk merőlegest úgy, hogy csak akkora körzónk van, hogy a vele írt  $P$  körüli maximális sugarú kör nem metszi az egyenest. (21. ábra)

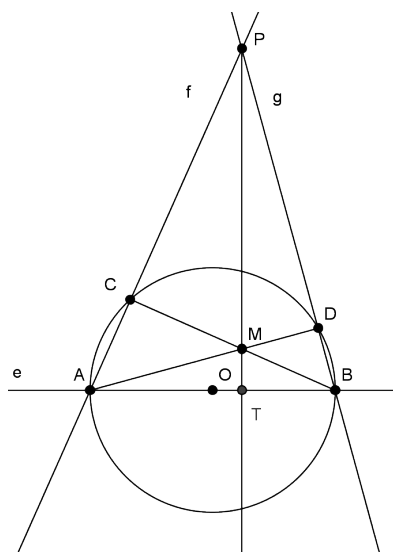
Megoldás: A  $P$  ponton keresztül húzzunk két különböző  $f$  és  $g$  egyenest, melyek metszik az  $e$  egyenesünket. Az  $f$  és  $g$  egyenesek  $e$ -re való tükörképe megszerkeszthető. Azzal a  $P'$  ponttal, ahol a tükörképek metszik egymást, kössük össze a  $P$  pontunkat. Ez az egyenes merőleges lesz az  $e$  egyenesre, hiszen egy olyan deltoidnak az egyik átlója, melynek a másik átlója az  $e$  egyenes.



21. ábra

2. Feladat: Szerkesszünk merőlegest úgy, hogy a körzőnk sugarát nem változtathatjuk, és a körzőt csak egyszer használhatjuk. (22. ábra)

Megoldás: Ha a kör sugara kisebb, mint a  $P$  és  $e$  egyenes távolsága, akkor az egyenesen jelöljük ki egy  $O$  pontot. Ez lesz a körünk középpontja, majd rajzoljuk meg a körünket. Ekkor kössük össze a  $P$  pontunkat  $A$ -val és  $B$ -vel (amik a kör és  $e$  egyenes metszéspontjai). Ezek az egyenesek még 1-1 pontot kimetszenek a körből. Az  $ADBA$  és a  $BCAA$  körül írt köre megegyezik az  $AB$  szakasz Thalész-körével, ebből az következik, hogy az  $ADBA$  derékszögű, emiatt az  $AD$  egyenes az  $APBA$   $PB$  oldalához tartozó magassága. Az  $ACBA$  is derékszögű, emiatt az  $BC$  egyenes az  $APBA$   $AP$  oldalához tartozó magassága. Tudjuk, hogy a háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át, ezért az  $AD$  és  $CB$  egyenesek metszéspontjain a harmadik merőleges egyenesnek is át kell mennie. Ha meghúzzuk a  $PM$  egyenest, akkor a  $T$  pont pontosan derékszögben fogja metszeni az  $e$  egyenest.



22. ábra

## 4. Nem szerkeszthetőség

Ha az a kérdés, hogy valamely szerkesztés körzővel és vonalzóval elvégezhető-e, akkor legkönnyebben úgy dönthetjük el, hogy a geometriai szerkesztést algebrai alakra hozzuk. Sokszor ez az egyetlen eljárás, ami célhoz vezethet. Ezt a témakört a középiskolában matematika szakkörön vagy speciális matematika tagozaton 11., illetve 12. osztályban el lehet mesélni úgy, hogy a testbővítést kihagyva, érzékeltethetjük a diákokkal a következő lemma lényegét, hogy a racionális számtest felett a korábbi adatokból, a négy alpművelet és a négyzetgyök vonás segítségével minden adat megkapható. Ezt koordináta geometriai számításokkal lehet igazolni.

**Def.:** Ha  $K$  részteste az  $L$  testnek, akkor ez  $L$  (test)bővítése  $K$ -nak, vagy  $K \leq L$  egy testbővítés. [3]

**Def.:** Legyen  $K \leq L$  testbővítés és  $\alpha, \beta, \dots$  az  $L$  test néhány eleme. Ekkor  $K(\alpha, \beta, \dots)$  jelöli az  $L$  test legszűkebb olyan résztestét, amely  $K$ -t és az  $\alpha, \beta, \dots$  elemeket is tartalmazza (ez tehát a  $K$  és az  $\alpha, \beta, \dots$  elemek által *generált résztest*). [3]

**Def.:** Ha  $K \leq L$  testbővítés és  $\alpha \in L$ , akkor  $\alpha$  *algebrai*  $K$  fölött, ha gyöke egy nem nulla,  $K$ -beli együtthatós polinomnak. Ellenkező esetben  $\alpha$  *transzcendens*  $K$  fölött. A  $K \leq L$  bővítés *algebrai*, ha  $L$  minden eleme algebrai  $K$  fölött. [3]

**Lemma:** Tegyük föl, hogy a szerkesztés egy pillanatában megadott vagy megszerkesztett pontok, körök, egyenesek koordinátái mind egy  $K \leq \mathbb{R}$  testben vannak. Ha az euklideszi szerkesztés ötféle lépésének bármelyikét végrehajtjuk, akkor az újonnan kapott alakzat koordinátái mindig benne vannak a  $K$ -ban, vagy  $K$  egy olyan másodfokú bővítésében, amely része  $\mathbb{R}$ -nek. Az egyenesek esetében ezt úgy kell érteni, hogy az újonnan kapott egyenesnek van ilyen egyenlete. [3]

**Biz.:** A számoláshoz a koordinátageometria ismereteinkre támaszkodunk.

1. Két ponton átmenő egyenes egyenletét a két pont koordinátáiból a négy alpművelet segítségével fel tudjuk írni, és ekkor nem lépünk ki a  $K$  testből.
2. Két egyenes metszéspontjának meghatározásához lineáris egyenletrendszer kell megoldanunk, de itt is csak a négy alpműveletre van szükségünk, így  $K$ -ból itt sem lépünk ki.

3. A kör sugarát két pont távolságával tudjuk megadni, amit a koordináták és a Pitagorasz tétel segítségével meg tudunk határozni. A kör sugara  $K(\sqrt{d})$  eleme lesz, ami a  $K$ -nak másodfokú bővítése, ahol a  $d \in K$ .
4. Kör és egyenes metszéspontjainak kiszámítása másodfokú egyenletre vezethető vissza, és a megoldó képlet segítségével meghatározhatjuk a metszéspontokat, de ebben az esetben nem lépünk ki a  $K(\sqrt{d})$  testből.
5. Két kör metszéspontjainak meghatározásához a két kör egyenletét kivonjuk egymásból. Ilyenkor egy egyenes egyenletét kapjuk. A két kör metszéspontjai ugyanazok, mint ennek az egyenes egyenletének és valamelyik kör egyenletének a metszéspontjai (4.eset).

**Állítás:** Legyen  $K_0$  egy szerkesztési feladat alapadatai által generált test. Ha a  $(p, q)$  pont szerkeszthető, akkor van olyan  $n$  és egy  $K_0 < K_1 < \dots < K_n \leq \mathbb{R}$  testlánc, melyre  $p, q \in K_n$ , és mindegyik  $K_i \leq K_{i+1}$  bővítés foka kettő. Így a  $K_0 \leq K_n$  bővítés foka 2-hatvány,  $p$  és  $q$  algebrai  $K_0$  fölött, és a fokuk szintén 2-hatvány. [3]

**Biz.:** Ez az állítás az előző lemmából nyilvánvalóan adódik, mert minden szerkesztési lépés során vagy egy első vagy egy másodfokú bővítést kapunk. Ezeknek a bővítéseknek a koordinátái benne lesznek a  $K_i$  testben. Az összes szerkesztés az utolsó bővítésben benne kell, hogy legyen. A szorzástétel miatt  $|K_n : K_0| = 2^n$ . Mivel az elem foka osztója a bővítés fokának, és véges bővítés minden eleme algebrai, ezért  $p$  és  $q$  tényleg 2-hatvány fokú algebrai elemek  $K_0$  fölött. [3]

Néhány euklideszi geometriában nem szerkeszthető feladat:

#### 4.1. Kör négyszögesítése

*Egy egység sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát) kell megszerkeszteni.*

Az egység sugarú kör területe  $\pi$ , tehát a négyzet oldalának  $\sqrt{\pi}$ -nek kellene lennie. Az alaptestünk  $\mathbb{Q}$ . Az előző állítás szerint, ha  $\sqrt{\pi}$  szerkeszthető lenne, akkor  $\pi$  algebrai lenne  $\mathbb{Q}$  felett, de tudjuk, hogy a  $\pi$  transzcendens a következő 1882-ből származó tétel miatt, amit most nem bizonyítunk. Emiatt nem valósítható meg a szerkesztés.

**Lindemann tétele:** Nem létezik olyan racionális együtthatós nem zérus polinom, amelynek  $\pi$  gyöke.



#### 4.2. Kockakettőzés (délósi probléma):

Egy olyan kocka élét kell megszerkeszteni, amelynek térfogata kétszerese az egység oldalú kocka térfogatának.

A szerkesztendő szakasz hossza kielégíti a  $x^3=2$  egyenletet, tehát szerkeszteni kellene  $\sqrt[3]{2}$  hosszú szakaszt. Az alaptestünk szintén a  $\mathbb{Q}$ . Ahhoz, hogy  $\sqrt[3]{2}$  tudjunk szerkeszteni, be kell látnunk, hogy ez a szám algebrai és 2 hatvány a  $\mathbb{Q}$  fölött. De a  $\sqrt[3]{2}$  gyöke az  $x^3-2$  polinomnak, ami a Schönemann-Eisenstein kritérium miatt irreducibilis, ezért a  $\sqrt[3]{2}$  foka 3. Így nem tudunk ekkora szakaszt szerkeszteni.

#### 4.3. Szögharmadolás:

Egy tetszőleges szög harmadát kell megszerkeszteni.

Szerkesszük meg a 60 foknak a harmadát, ami  $20^\circ$ . Az alaptestünk szintén a  $\mathbb{Q}$ . Ha vesszük azt a derékszögű háromszöget, amelynek egyik szöge  $20^\circ$ , az átfogója pedig 1, akkor rájövünk, hogy a  $\cos 20^\circ$  fokot kell megszerkesztenünk. A trigonometrikus összefüggés alapján:

$$\cos(3\varphi) = 4 \cdot \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$$

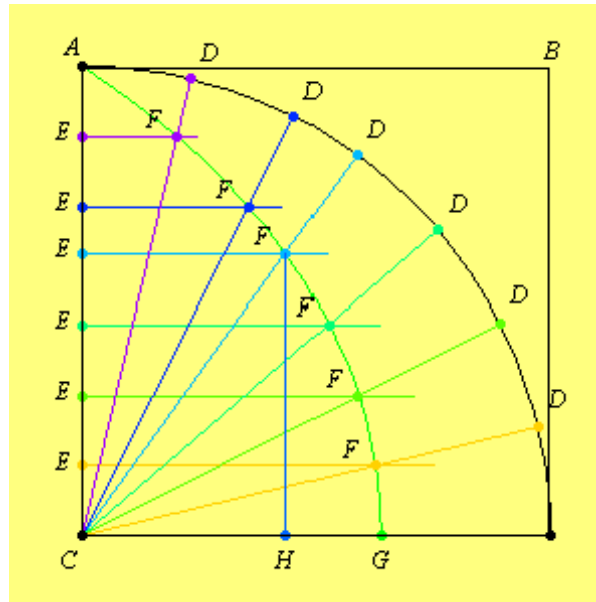
ebből az következik, hogy a  $\cos 20^\circ$  gyöke a

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} \text{ vagy a } 8x^3 - 6x - 1$$

polinomnak, ami irreducibilis és harmadfokú bővítése  $\mathbb{Q}$ -nak, ezért nem szerkeszthető.

Hippiasz i.e. 420 körül feltalálta a triszektrix görbét, amivel megoldotta a szögharmadolás problémáját nem euklideszi módon. Deinosztratosz i.e. 4. sz. második felében a triszektrix felhasználva megoldotta a kör négyszögesítésének problémáját, de az egyik legismertebb a Kochanski szerkesztése. A félkör kerületét, négy tizedes pontossággal szerkesztette meg.

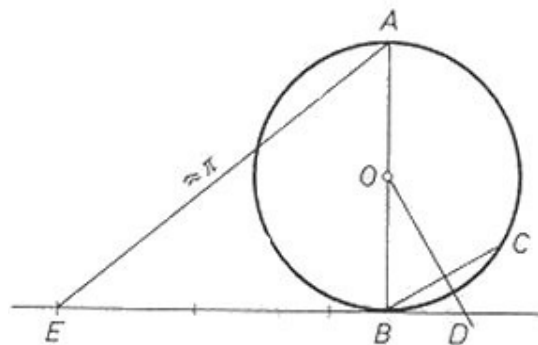
**Triszektrix görbe (23. ábra) :** Rajzoljunk egy ABCD négyzetet. Az AB egyenest csúsztatjuk lefele CD-be, míg ugyanilyen egyenletességgel forgatjuk el a CA oldalt CD-be. A két egyenes metszéspontjait kirajzoljuk (zöld). [8]



23. ábra [8]

Ezzel a görbével megoldható egy tetszőleges szög  $n$ -edelése.

**Kochanski szerkesztése** (24. ábra): Rajzoljunk  $OA = l$  sugarú kört és ennek egyik átmérőjét,  $AB$ -t. Az átmérő  $B$  végpontjához rajzoljunk érintő egyenest, és ebből a végpontból mérjük fel a  $BC = OA$  húrt. A  $BC$  húr felezőmerőlegese kimetszi az érintőn a  $D$  pontot. A  $D$  pontból az érintőre, a  $B$  érintőpont felé indulva, mérjük fel a  $DE = 3 \cdot OA$  távolságot. Végül húzzuk meg az  $EA$  szakaszt. A Pitagorasz-tételnél többet nem kívánó számítással belátható, hogy  $AE \sim 3,14153\dots$  [9]



24. ábra [9]

#### 4.4 Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

A következő tétel Gauss nevéhez fűződik.

**Tétel:** Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos  $n$ -szög körzővel és vonalzóval, ha a  $\varphi(n)$  szám 2-hatvány, ahol  $\varphi$  az Euler-féle  $\varphi$ -függvény. Ez akkor és csak akkor igaz, ha

$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ , ahol  $m \geq 0$  és a  $p_i$  számok páronként különböző Fermat-prímek, vagyis  $2^{2^k} + 1$  alakú prímszámok. [3]

**Biz.:** Szabályos  $n$  szöget akkor tudunk szerkeszteni, ha meg tudjuk szerkeszteni azt a szöget, amely alatt a sokszög középpontjából az egyik oldal látszik. Ez a szög  $2\pi/n$ , vagyis a kérdés az, hogy  $\cos(2\pi/n)$  hosszú szakaszt tudunk-e szerkeszteni. Vizsgáljuk az  $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i \cdot \sin(2\pi/n)$  komplex számot, vagyis az egyik primitív  $n$ -edik egységgyököt, mert erre már könnyű kiszámítani a bővítés fokát, mert mindegyik  $n$ -edik primitív egységgyökkel való bővítés foka  $\mathbb{Q}$  fölött  $\varphi(n)$ , (ahol  $\varphi$  az Euler-függvény), mert közös minimálpolinomjuk a  $\varphi(n)$  fokú  $\phi_n(x)$  körosztási polinom, ami irreducibilis  $\mathbb{Q}$  fölött.

Nyilván  $\varepsilon \in \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))(i \cdot \sin(2\pi/n))$ , és

$$(i \cdot \sin(2\pi/n))^2 = -\sin^2(2\pi/n) = \cos^2(2\pi/n) - 1 \in \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)).$$

Ezért  $\varepsilon$  foka  $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))$  fölött 2 vagy 1. Ha tehát  $\cos(2\pi/n)$  foka  $\mathbb{Q}$  fölött 2-hatvány, akkor  $\varepsilon$  is benne van egy 2-hatvány fokú bővítésben, és így a foka, vagyis  $\varphi(n)$  is 2-hatvány, ezzel igazoltuk az alábbi állítást. [3]

**Áll.:** Ha  $\cos(2\pi/n)$  foka 2-hatvány  $\mathbb{Q}$  fölött, akkor a  $\varphi(n)$  szám is 2-hatvány. [3]

**Tétel:** Az Euler-függvény multiplikatív, azaz ha  $n$  és  $m$  relatív prím pozitív egészek, akkor  $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$ .

Innen következik, hogy ha  $n$  kanonikus alakja:  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ , ahol egyik  $\alpha_i$  kitevő sem nulla, akkor

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}) = p_1^{\alpha_1-1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot \dots \cdot (p_k - 1).$$

Ez a szorzat pontosan akkor lesz 2-hatvány, ha mindegyik tényező az, így a korábbi lemmánk szerint csak akkor van esélyünk szabályos  $n$ -szöget szerkeszteni, ha  $n$  olyan alakú, mint a tételben állítottuk.

A bizonyításnak ez a fele középiskolás diákokkal is megértethető. A következő rész bizonyítását már nem igazán lehet elmondani, helyette a szabályos öt- és tizenhétszögek szerkeszthetőségét érdemes megmutatni  $\cos(2\pi/n)$  kiszámításával.

A szerkeszthetőség bizonyítását csak vázlatosan tekintjük át.

**Tétel:** Legyen  $K_0$  egy szerkesztési feladat alapadatai által generált test. Ekkor egy  $r \in \mathbb{R}$  szám akkor és csak akkor szerkeszthető, ha van olyan  $n$  és egy  $K_0 < K_1 < \dots < K_n \subseteq \mathbb{R}$  testlánc, melyre  $r \in K_n$ , és mindegyik  $K_i \subseteq K_{i+1}$  bővítés foka kettő. [3]

A tétel bizonyításához a korábbi lemmánk szerint csak azt kell megmutatnunk, hogy ilyen esetben szerkeszthető  $r$ , ennek a kulcsa az, hogy az alaptest egy elemének gyökét a magasságtétel szerint meg tudjuk szerkeszteni.

**Lemma:** Tegyük föl, hogy  $K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$  véges normális bővítés, és  $L \subseteq L_1 = L(\sqrt{\alpha}) \subseteq \mathbb{C}$ , ahol  $\alpha \in L$ . Ekkor van olyan  $K \subseteq L \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots \subseteq L_k = M \subseteq \mathbb{C}$  testlánc, hogy mindegyik  $L_i \subseteq L_{i+1}$  bővítés első, vagy másodfokú, és  $K \subseteq M$  már normális bővítés. [3]

**Tétel:** Legyen  $K_0$  egy szerkesztési feladat alapadatai által generált test. Ekkor egy  $r \in \mathbb{R}$  szám akkor és csak akkor szerkeszthető, ha benne van  $K_0$  egy 2-hatvány fokú normális bővítésében. Ezzel ekvivalens, hogy az  $r$  szám  $K_0$  fölötti minimálpolinomjának felbontási teste  $K_0$ -nak 2-hatvány fokú bővítése. [3]

**Def.:** A  $\mathbb{Q}(\varepsilon)$  testet, ahol  $\varepsilon$  egy  $n$ -edik komplex primitív egységgyök, az  $n$ -edik körosztási testnek nevezzük. [3]

Az  $n$ -edik körosztási test az  $x^n - 1$  és a  $\phi_n(x)$  polinomok felbontási teste  $\mathbb{Q}$  fölött. Ezért normális bővítése  $\mathbb{Q}$ -nak, és e bővítés Galois-csoportja a  $\mathbb{Z}_n^\times$  csoport. Most már be tudjuk látni a szabályos sokszögek szerkeszthetőségéről szóló tétel hiányzó irányát is.

Tegyük föl, hogy a  $\varphi(n)$  szám 2-hatvány, és legyen

$$\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i \cdot \sin(2\pi/n).$$

Ekkor  $1/\varepsilon = \cos(2\pi/n) - i \cdot \sin(2\pi/n) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$ , ezért

$$\cos(2\pi/n) = \frac{\varepsilon + (1/\varepsilon)}{2} \in \mathbb{Q}(\varepsilon).$$

Így  $\cos(2\pi/n)$  benne van egy 2-hatvány fokú normális bővítésben, tehát szerkeszthető. [3]

Láthattuk, hogy bár a szerkeszthetőség témaköre algebrai ismeretekre támaszkodik, a legtöbb esetben elmondható (legalábbis részben) középiskolások számára is.

## 5. Hatványvonal

A körrel kapcsolatban szerepelnek olyan távolságok, amelyekről belátható, hogy aránypárt alkotnak. Az egyik ilyen arány, amivel ebben a fejezetben fogunk foglalkozni, a  $P$  pont hatványa.

**Tétel:** Rögzítsünk egy  $k$  kört és egy  $P$  pontot. Húzzunk  $P$  ponton át egy szelőt. A szelő és a kör metszéspontjai legyenek  $A$  és  $B$  pontok. Ekkor  $PA \cdot PB$  nem függ a szelő megválasztásától.

**Biz.:** Azt kell bizonyítani, hogy a  $P$  elhelyezkedésétől független ez a szorzat.

a) Ha  $P \in k$  (25. ábra)

Akkor a  $PA \cdot PB = 0$  szorzat mindig fennáll.

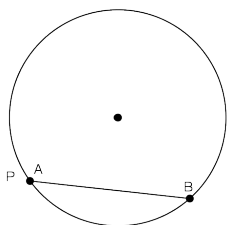
b) Ha  $P$  külső pont (26. ábra)

Akkor a  $PA_1A_2 \Delta \sim PB_1B_2 \Delta$ . A megfelelő szakaszok arányával azt kapjuk:

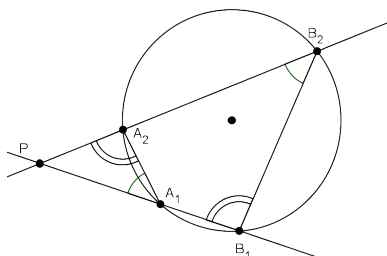
$$\frac{PA_1}{PB_2} = \frac{PA_2}{PB_1}, \text{ átszorzással kapjuk: } PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$$

c) Ha  $P$  belső pont (27. ábra)

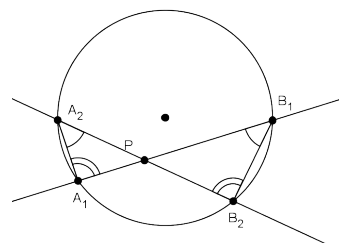
Akkor ugyanazt kapjuk, mintha  $P$  külső pont lenne, mert az itt kapott két háromszög szintén hasonló, tehát a megfelelő szakaszok arányával ugyanazt kapjuk.



25. ábra



26. ábra



27. ábra

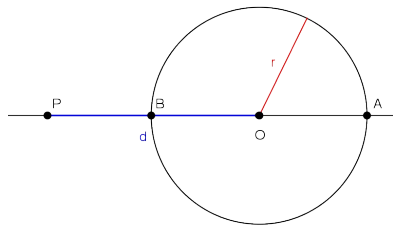
A  $PA \cdot PB$  szorzatot előjelesen értjük, azaz ha a szorzat pozitív, akkor  $P$  külső pont, ha a szorzat negatív, akkor  $P$  belső pont, és ha 0 a szorzat, akkor a  $P$  pont a körön van rajta.

**Def.:** A  $P$  pontnak a  $k$  körre vonatkozó hatványa:  $h_k(P) = PA \cdot PB$  (előjelesen értve)

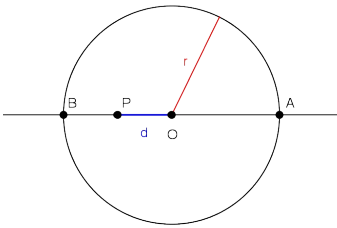
Most nézzük meg, hogy mi a helyzet, ha a szelő átmegy a kör középpontján. A 28. ábrán látjuk, ha  $P$  külső pont, majd a 29. ábrán láthatjuk, ha  $P$  belső pont.

Ekkor a  $PA$  távolságot úgy is fel lehet írni, hogy  $PA = d + r$ , a  $PB$  távolságot pedig:  $PB = d - r$ , ahol  $d = PO$  távolság természetesen itt is figyelembe vesszük az előjeleket. Így azt kapjuk, hogy

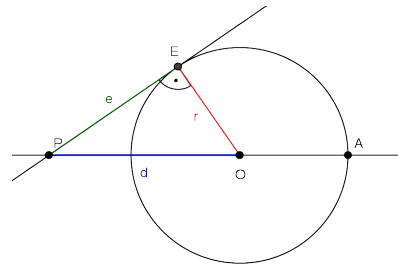
$$h_k(P) = PA \cdot PB = (d + r) \cdot (d - r) = d^2 - r^2$$



28. ábra



29. ábra



30. ábra

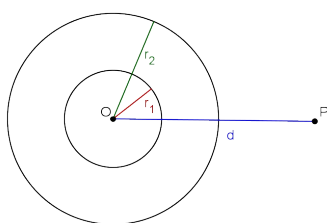
Vegyük észre, ha  $P$  külső pont, akkor  $h_k(P) = e^2$ , ahol  $e$  a  $P$  pontból húzott érintőszakasz hossza, mert a  $POE$   $\Delta$  derékszögű, és a Pitagorasz-tétel miatt  $d^2 - r^2 = e^2$ . (30. ábra)

**Kérdés:** Mi azon  $P$  pontok mértani helye a síkon, melyeknek két adott körre vonatkozó hatványa megegyezik?

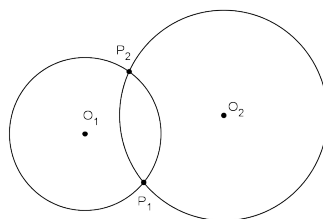
Könnyű eset, ha a két kör koncentrikus (31. ábra) (természetesen különböző sugarú), ekkor ugyanis nincs ilyen  $P$  pont, mert ha lenne, akkor erre igaz lenne:  $d^2 - r_1^2 = d^2 - r_2^2$ , ami lehetetlen.

Az is könnyen látható, hogy ha a két kör metszi egymást, akkor a metszéspontjuk jó  $P$  lesz. (32. ábra)

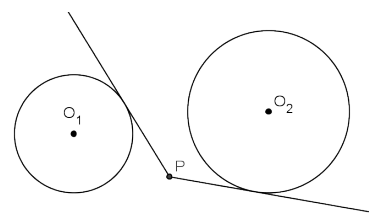
Ha a két kör nem metszi egymást, akkor olyan  $P$  pontot kell keresni, amire igaz, hogy  $h_{k_1}(P) = h_{k_2}(P)$ , azaz  $P$ -ből a két körhöz húzott érintők hossza megegyezik. (33. ábra)



31. ábra



32. ábra



33. ábra

Vajon milyen halmazt alkotnak azok a  $P$  pontok, amelyekre teljesül, hogy  $h_{k_1}(P) = h_{k_2}(P)$ ?

**Tétel:** Ha a  $k_1$  és  $k_2$  körök nem koncentrikusak, akkor ezek a  $P$  pontok egyenest alkotnak, mely merőleges a 2 kör centrálisára.

**Biz.:** A  $h_{k_1}(P) = h_{k_2}(P)$  akkor és csak akkor egyenlő, ha a  $P$  pont koordinátáit a normálegyenletekbe helyettesítve is egyenlőt kapunk.

$$x^2 + y^2 + B_1x + C_1y + D_1 = x^2 + y^2 + B_2x + C_2y + D_2$$

Ha leegyszerűsítjük az egyenletünket, akkor egy lineáris egyenletet kapunk, ami egy egyenes egyenlete, sőt pont az  $n(B_1 - B_2, C_1 - C_2) \neq 0$  normálvektorú egyenes egyenletét kapjuk, ahol  $n$  éppen a középpontok közti vektor 2-szerese.

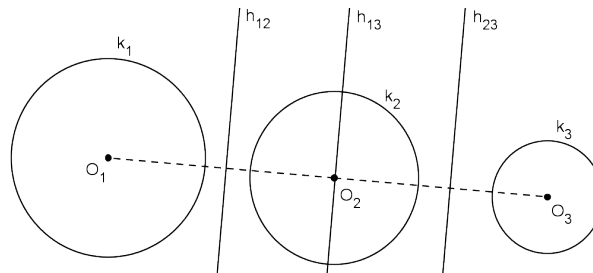
**Def.:** Az előbbi egyenes a  $k_1$  és  $k_2$  kör hatványvonala.

**Állítás:** Három kör páronként vett hatványvonalai vagy párhuzamosak, vagy 1 ponton mennek át. Ez a pont a három kör hatványpontja.

**Biz.:**

- A 3 hatványvonal közt akkor lehet 2 párhuzamos, ha mind 3 középpont kollineáris.

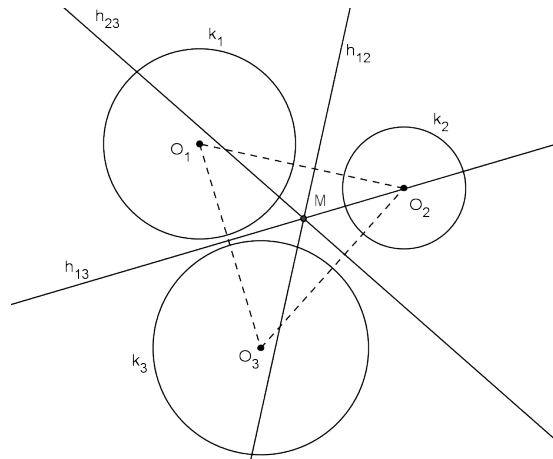
Viszont ekkor mind a 3 hatványvonal párhuzamos. (34. ábra)



34. ábra

- Ha a 3 középpont nem kollineáris, akkor legyen  $h_{12}$  a  $k_1$  és  $k_2$  körök hatványvonala,  $h_{13}$  pedig a  $k_1$  és  $k_3$  körök hatványvonala (35. ábra). Ennek a két hatványvonalnak a metszéspontja pedig legyen  $M$ . Ekkor igaz:

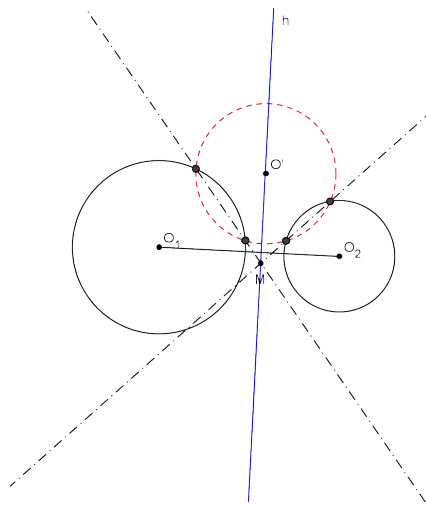
$$\left. \begin{array}{l} M \in h_{12} \Rightarrow h_{k_1}(M) = h_{k_2}(M) \\ M \in h_{13} \Rightarrow h_{k_1}(M) = h_{k_3}(M) \end{array} \right\} \Rightarrow h_{k_2}(M) = h_{k_3}(M) \Rightarrow M \in h_{23}$$



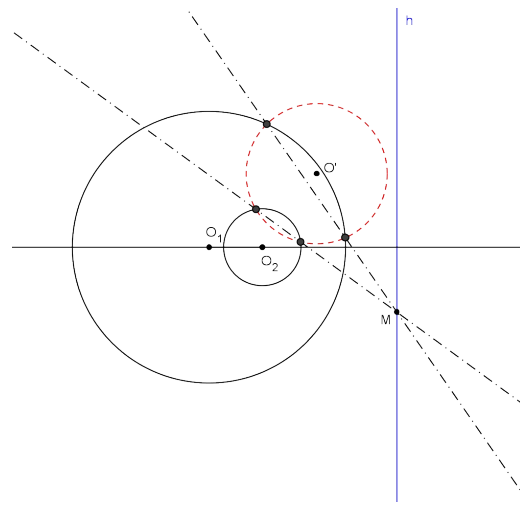
35. ábra

### Két kör hatványvonalának megszerkesztése:

- Ha a két kör érintkezik, akkor az érintési pontból kell merőleges állítani a centrálisukra.
- Ha a két kör metszi egymást, akkor a metsző egyenes lesz a hatványvonal.
- Ha a két kör nem metszi egymást, akkor felvesszünk egy olyan segédkört, aminek a középpontja ne legyen kollineáris a másik két középponttal, és metsze mindkét kört. Megszerkesszük a segédkör és az adott körök hatványvonalát, majd ezek metszéspontjából állítunk merőlegest az eredeti körök centrálisára. (36. ábra)
- Ha a két kör egymás belsejében van, de nem koncentrikusak, akkor ugyanúgy járunk el, mint az előbb, a segédkörrel. (37. ábra)



36. ábra



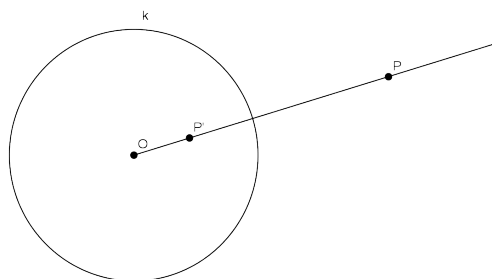
37. ábra



## 6. Inverzió

A diákok számára az inverzió egy új és érdekes transzformáció a síkban. Szerkesztési feladatok megoldására is tudjuk alkalmazni.

Legyen adva egy  $O$  középpontú,  $r$  sugarú kör. Ez a kör lesz az inverzió alapköre, ami  $k$  kör. Az  $O$  pont az inverzió pólusa,  $r^2$  pedig az inverzió hatványa. Vegyünk egy tetszőleges  $P(\neq O)$  pontot, majd ehhez a ponthoz hozzárendeljük az  $OP$  félegyenesen lévő  $P'$  pontot, amire teljesül:  $OP \cdot OP' = r^2$ . (38. ábra)



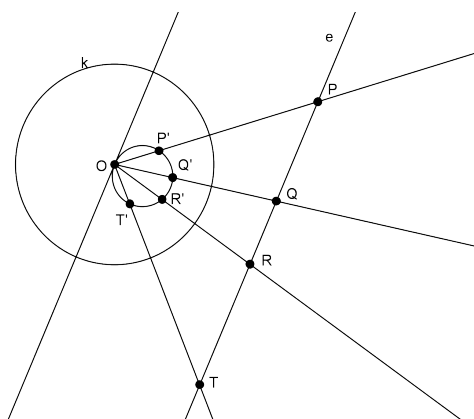
38. ábra

Láthatjuk, hogy  $k$  belső pontjainak inverzei külső pontok lesznek, és fordítva. Ha  $P$  pont az alapkörön helyezkedik el, akkor az inverze önmaga lesz, mert csak az alapkör pontjai maradnak fixen. Az is észrevehető, hogy ha a  $P$  inverze a  $P'$ , akkor a  $P'$  inverze a  $P$  lesz.

Még meg kell határozni az egyenesek és a körök inverzeit ahhoz, hogy feladatokban tudjuk használni őket.

1. Póluson átmenő egyenes inverze: saját maga.
2. Póluson át nem menő egyenes inverze: póluson átmenő kör. (39. ábra)

A kör  $O$ -beli érintője párhuzamos lesz az egyenessel. Közele egyenesek inverzei nagy körök, távoli egyenesek inverzei kis körök lesznek. Ebből az állításból rögtön adódik, hogy a póluson átmenő kör ( $O$ -tól megfosztva) inverze póluson át nem menő egyenes lesz, ami párhuzamos az  $O$ -beli érintővel.



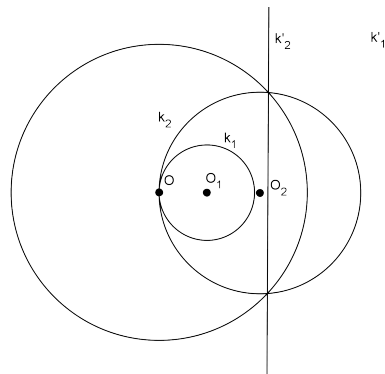
39. ábra

3. Póluson át nem menő kör inverze: póluson át nem menő kör.

Megállapíthatjuk, hogy inverziónál minden kör vagy egyenes képe kör vagy egyenes.

**Tétel:** Ha 2 kör, illetve egy kör és egy egyenes érintkeznek, akkor inverzeik is érintkeznek. Egyetlen kivétellel, ha a pólusban érintkeznek, akkor a képeik párhuzamos egyenesek.

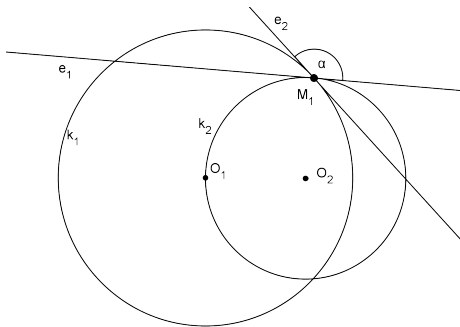
**Biz.:** Két kör, illetve egy kör és egy egyenes pontosan akkor érintkeznek, ha 1 közös pontjuk van. Az inverzió bijektív a kipontozott síkon, tehát ha 2 ponthalmaznak egyetlen közös eleme van, akkor a képeiknek is egyetlen közös eleme van. Kivétel, amikor éppen a póluson érintkeznek. (40. ábra)



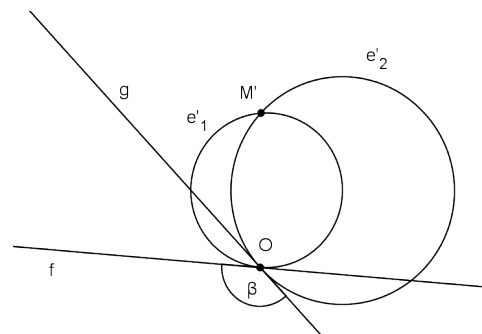
40. ábra

**Tétel:** Ha két kör, illetve egy kör és egy egyenes  $\alpha$  szögben metszik egymást, akkor az inverzeik is  $\alpha$  szögben metszik egymást.

**Biz.:** Adott  $k_1, k_2$  metsző körök, (de lehet egy kör és egy egyenes is). Az egyik metszéspontban, például  $M$ -ben megrajzoljuk az érintőket, amik  $e_1$  és  $e_2$  (41. ábra). A két érintő  $\alpha$  szögben metszi egymást. Elég belátnunk, hogy az inverz képük is  $\alpha$  szögben metszi egymást. A két egyenes inverze két metsző kör (vagy kör és egyenes) lesz, amik átmennek  $O$ -n, és másik metszéspontjuk  $M'$  (42. ábra). Az inverz körök érintői, ( $f$  és  $g$ )  $\beta$  szöget zárnak be egymással.  $f$   $e_1$ -gyel,  $g$  pedig  $e_2$ -vel párhuzamos, így a két egyenes szöge is megegyezik. Tehát  $\alpha = \beta$ .



41. ábra

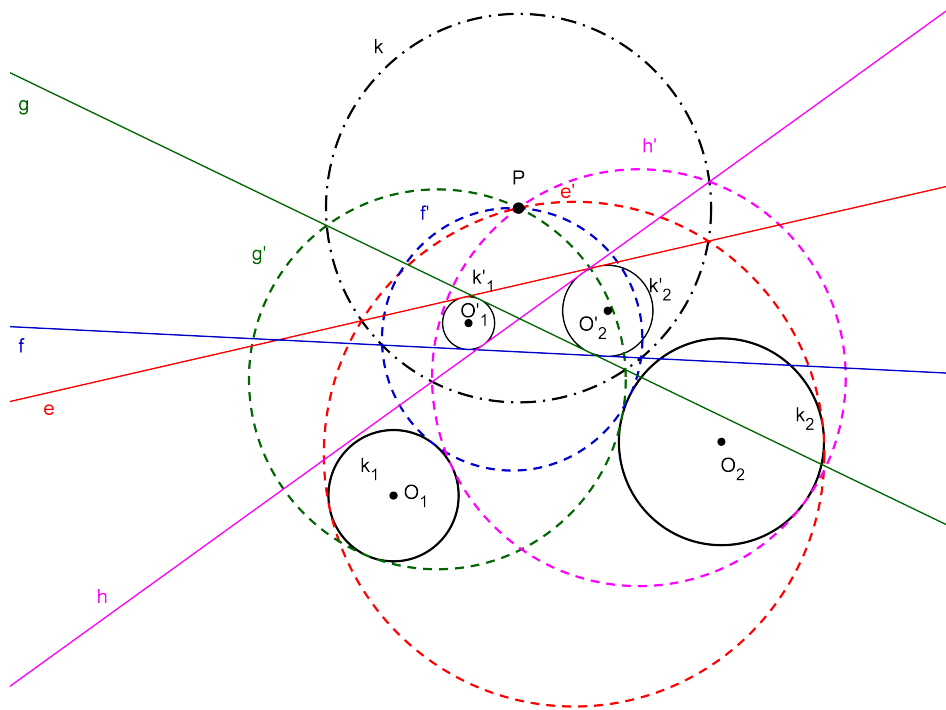


42. ábra

Egy példa az inverzió alkalmazására

Feladat: Adott 2 kör és egy pont, mely nincs rajta egyik körön sem. Szerkesszünk olyan köröket, amelyek átmennek az adott ponton és mindkét adott kört érintik.

Megoldás: Az inverzió segítségével oldjuk meg a feladatot, méghozzá úgy, hogy az adott  $P$  pontra, mint az inverzió pólusára és egy köré írt tetszőleges sugarú  $k$  körre invertálunk. A másik két adott kör ( $k_1$  és  $k_2$ ) inverze szintén két kör lesz ( $k'_1$  és  $k'_2$ ). Ezeknek a köröknek az érintőit kell megszerkeszteni, ami maximum 4 lehet, a körök elhelyezkedésétől függően. A 43. ábrán az érintők  $e, f, g$  és  $h$ . Ezeket az érintőket visszainvertáljuk, és megkapjuk azokat az  $e', f', h'$  és  $g'$  köröket, amelyek a két kört érintik és átmennek a  $P$  pontunkon. Baj csak akkor lehet, ha az egyik érintő egyenes a póluson megy át, de ilyenkor annak az érintő egyenesnek az inverz képe egyenes lenne, emiatt nem lesz érintő kör, ezért nem kell figyelembe venni.



43. ábra

## 7. Mohr-Mascheroni-féle szerkesztés

A téma feldolgozásába segítségemre volt [6] és [1].

G. Mohr dán matematikus 1672-ben és tőle függetlenül L. Mascheroni olasz matematikus 1797-ben bizonyították be a következő tételt:

**Tétel:** Minden körzővel és vonalzóval elvégezhető euklideszi szerkesztés csak körzővel is elvégezhető.

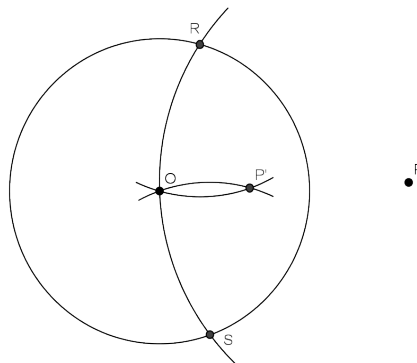
**Biz.:** Azt kell bizonyítani, hogy az elemi alapszerkesztések elvégezhetőek csak körző használatával, mert az alapszerkesztésekből minden elemi szerkesztés összetehető.

*Elemi alapszerkesztések:* I. két egyenes, II. egyenes és kör, III. két kör metszéspontjainak szerkesztése.

Az I. és II. szerkesztésekre inverziót alkalmazunk, de ehhez az kell, hogy az inverz kép is megszerkeszthető legyen csak körzővel. A III. szerkesztés körzővel nyilván adódik.

**1. Lemma:** Ha adott az inverzió pólusa és az alapköre, akkor bármely pont inverze megszerkeszthető csak körzővel.

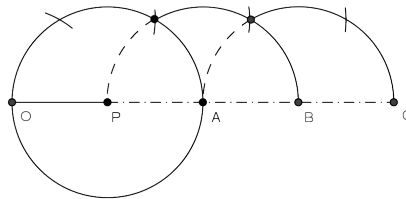
**Biz.:** Ha  $OP > \frac{r}{2}$ , akkor a  $P$  pontból  $OP$  sugárral kört rajzolunk, ami  $R$  és  $S$  pontban metszi a kört.  $R$  pontból  $OR$  sugárral és  $S$  pontból  $OS$  sugárral szintén körözünk, majd a két kör metszéspontja kiadja a  $P$  pontunk inverz képét, mert az  $OP'R$  és az  $ORP$  egyenlő szárú háromszögek hasonlóak, így  $OP:OR=OR:OP'$ . Átrendezéssel azt kapjuk, hogy  $OP \cdot OP' = OR^2$ ,  $OR^2 = r^2$ . (44. ábra)



44. ábra

Ha az  $OP \leq \frac{r}{2}$ , akkor az előbbi szerkesztés nem hajtható végre. Ekkor az  $OP$  félegyenesen

olyan  $N$  pontot szerkesztünk, amire igaz, hogy  $ON = n \cdot OP > \frac{r}{2}$ . Ezt úgy kapjuk meg, hogy a  $P$  pont körül  $OP$  sugárral megrajzolt körre  $O$ -ból kiindulva megrajzoljuk az  $OP$  sugarat, mint húr. A harmadik húr  $A$  végpontja, a körbe írt szabályos hatszög  $O$ -val szemközt fekvő szögpontja, emiatt  $O$ ,  $P$  és  $A$  egy egyenesen lesznek, és  $OA = 2 \cdot OP$ . Hasonlóan szerkeszthető meg  $OB = 3 \cdot OP$ ,  $OC = 4 \cdot OP$  és a többi szakasz is. (45. ábra)



45. ábra

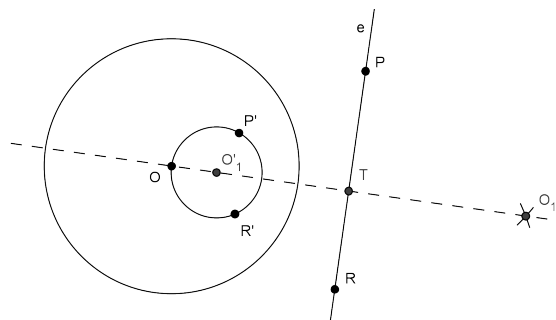
Az  $N$  pontnak az  $N'$  inverziójára a következő igaz:

$$ON \cdot ON' = n \cdot OP \cdot \frac{OP'}{n} = OP \cdot OP' = r^2.$$

Emiatt az  $OP' = n \cdot ON'$  egyenlőséget az előző eljárással megkaphatjuk. Így bármely  $P$  pontnak az inverz képét meg tudjuk szerkeszteni körzővel.

**2. Lemma:** Ha adott az inverzió pólusa és köre, akkor bármely egyenes inverz képe megszerkeszthető csak körzővel, ami nem megy át a póluson.

Két pont kell az egyenes meghatározásához, ezek legyenek  $P$  és  $R$  pontok. Ahhoz, hogy az inverz kép körének középpontját meghatározzuk,  $P$ -ből  $OP$  és  $R$ -ből  $OR$  sugárral körzőzünk. A kimetszett pontot kell a körre invertálnunk, ez az  $O_1'$  lesz az egyenes inverz képének középpontja. Azért ez lesz, mert az  $OO_1 = 2 \cdot O_1T$ , ahol  $T$  az  $O$ -ból állított merőleges talppontja az  $e$  egyenesen. (46. ábra)

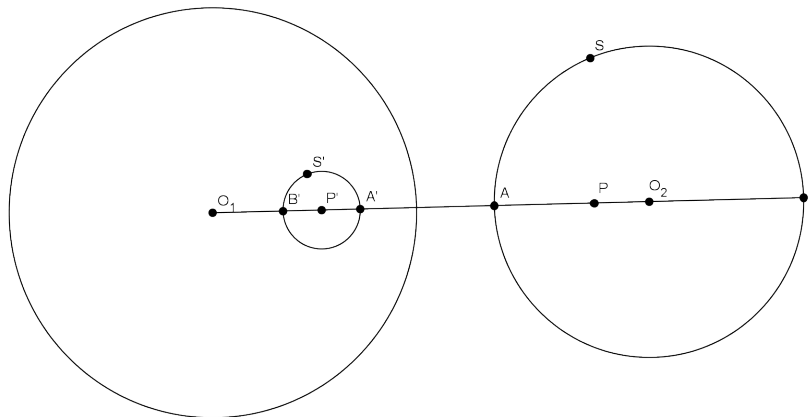


46. ábra

Mivel az előbb nem használtuk fel, hogy az egyenes nem metszi a kört, így mindkét esetben ez az eljárás elvégezhető. Ha az egyenes átmegy a póluson, akkor ne azt a kört válasszuk az inverzió körének, hanem egy másik, tetszőleges kört.

**3. Lemma:** Ha adott az inverzió pólusa és köre, akkor bármely kör inverz képe megszerkeszthető csak körzövel.

Az  $O_1$  pontot az  $O_2$  körre invertáljuk, ami  $P$ , majd ezt a  $P$  pontot visszainvertáljuk az  $O_1$  középpontú körre, akkor megkapjuk a  $P'$ -t. Ha az  $O_2$  körnek egy  $S$  pontját is invertáljuk az  $O_1$  körre, akkor megkapjuk az  $O_2$  körnek az inverzét, ami az  $S$  ponton megy át és  $P'$  a középpontja. (47. ábra)



47. ábra

Az  $O_1O_2$  egyenes metszéspontjai az  $O_2$  körrel  $A$  és  $B$  pontok. Invertáljuk ezeket a pontokat az  $O_1$  körre. Nyilvánvaló, hogy  $A'$  és  $B'$  pontok az  $O_2$  kör inverz képének átmérője. Azt kell belátni, hogy a  $P'$  pont éppen az  $A'B'$  szakasz felezőpontja. Legyen az  $O_1$  kör sugara  $R$ , az  $O_2$  kör sugara pedig  $r$ .

Az inverzió miatt:

$$O_1O_2 \cdot PO_2 = r^2 \text{ és } R^2 = O_1P' \cdot O_1P = O_1A' \cdot (O_1O_2 - r) = O_1B' \cdot (O_1O_2 + r).$$

Amiből

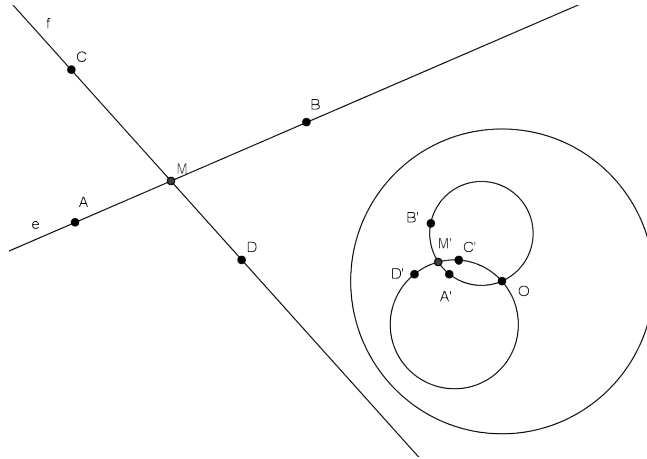
$$O_1A' + O_1B' = \frac{R^2}{O_1O_2 - r} + \frac{R^2}{O_1O_2 + r} = \frac{2R^2}{O_1O_2 - PO_2} = \frac{2R^2}{O_1P} = \frac{2R^2}{\left(\frac{R^2}{O_1P'}\right)} = 2O_1P'$$

ebből megkaptuk, hogy a  $P'$  az  $A'B'$  szakasz felezőpontja.

Most szerkesszük meg az alapszerkesztéseket.

I. *Két egyenes metszéspontjának megszerkesztése (48. ábra):*

Megszerkesztjük az  $e$  és  $f$  egyenesek  $A, B, C$  és  $D$  pontjainak inverzét egy olyan körre, amelynek a pólusán nem megy át egyik egyenes sem. Az  $e$  és  $f$  egyenesek inverz képei olyan körök, amik két ponton metszik egymást. Az egyik az  $O$ , a másik az egyenesek metszéspontjának az inverz képe.  $M'$ -t visszainvertáljuk és megkapjuk  $M$ -et.



48. ábra

II. *Egyenes és kör metszéspontjának megszerkesztése.*

Ezt a 2.Lemma szerkesztési eljárásával megkaphatjuk, ha a körre invertáljuk az egyenest.

Ezzel bebizonyítottuk a Mohr-Mascheroni-tételt.

K.Yanagihara japán matematikus bebizonyította, hogy a körzővel végezhető bármely szerkesztés akkor is elvégezhető, ha körzővel nem lehet akármilyen nagy és akármilyen kicsi sugarú kört rajzolni, hanem csak olyan  $\rho$  sugarú köröket, amelyeknek sugarára az  $r \leq \rho \leq R$  egyenlőség áll fenn, ahol  $R$  és  $r$  előre megadott nagyságú szakasz és  $R > r$ . [6]

## 8. Poncelet-Steiner szerkesztés

Csak vonalzóval való szerkesztésen olyan szerkesztéseket értünk, ahol megadott alappontokat, és alapvonalakból kiindulva tetszőleges két alappontot összekötő egyenest, az alapvonalakhoz vehetjük, és tetszőleges két alapvonal metszéspontjait az alappontokhoz vehetjük. Csak vonalzóval csak alappontokból indulva meg tudjuk szerkeszteni a következőket: teljes négyoldal és teljes négyszög segítségével a harmonikus pontokat és sugarakat, perspektivitásokkal a projektív sorokban a megfelelő elemeket, a Pascal-féle hatszög és a Brianchon-féle hatoldal segítségével öt pontját, vagy öt érintőjével megadott kúpszelet akárhány további pontját és érintőjét, az így megadott kúpszeletre vonatkozólag egy pont polárisát és egy egyenes pólusát. A téma feldolgozásába segítségemre volt [6] és [1].

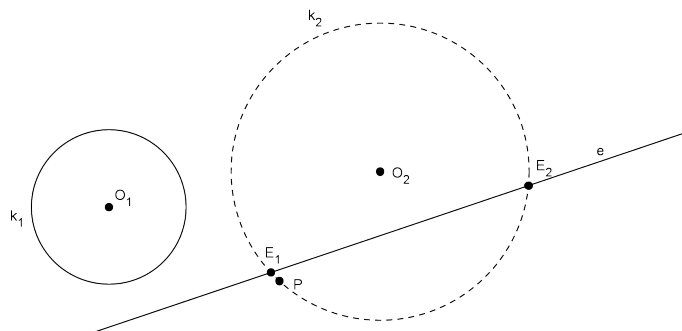
Poncelet 1822-ben és tőle függetlenül Steiner 1833-ban kimondta a következő tételt:

**Tétel:** Ha a síkon meg van rajzolva egy kör és annak középpontja is meg van adva, akkor mindazok a geometriai szerkesztések, amelyek körzővel és vonalzóval elvégezhetők, csak vonalzóval is elvégezhetőek, ha megengedjük a segédpontok felvételét.

**Biz.:** Azt kell bebizonyítanunk, hogy a három alapszerkesztés most is elvégezhető csak vonalzó segítségével.

a) *Kör és egyenes metszéspontjának megszerkesztése*

Szerkesztendő  $E_1$  és  $E_2$  csak vonalzó felhasználásával, ha adva van a  $k_1$  kör és a  $k_2$  kör középpontja és egy  $P$  kerületi pontja (49. ábra). Most tegyük fel, hogy az  $e$  egyenesünk metszi a  $k_2$  kört.

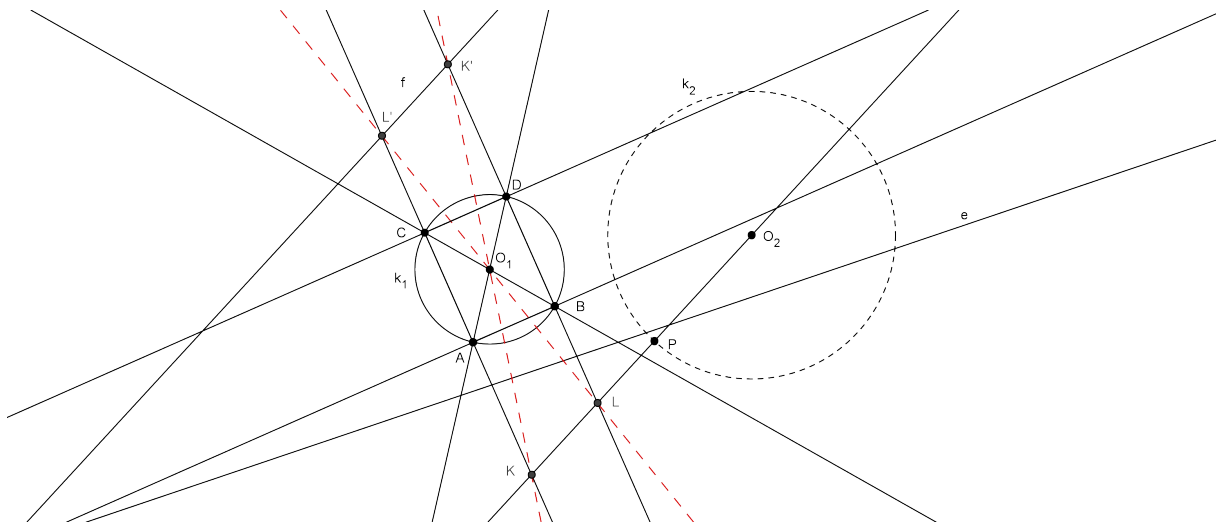


49. ábra

Először párhuzamost kell húznunk az  $O_2P$  egyenessel az  $O_1$ -en keresztül Ezt úgy szerkesztjük, hogy a  $k_1$  körbe rajzolunk két átmérőt, de úgy, hogy egyik se legyen párhuzamos  $O_2P$  egyenessel, mert ha valamelyik párhuzamos lenne, akkor már kész is lennénk. Az átmérők által meghatározott téglalap csúcsai legyenek  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$ . Az  $AC$  és  $BD$  egyenesek metszéspontjai az  $O_2P$  egyenesünkkel legyenek  $K$  és  $L$  pontok. Ha az egyenesünk átmegy az  $O_1$  ponton, akkor  $O_2P$  átmegy  $O_1$ -n, így önmaga lesz a keresett

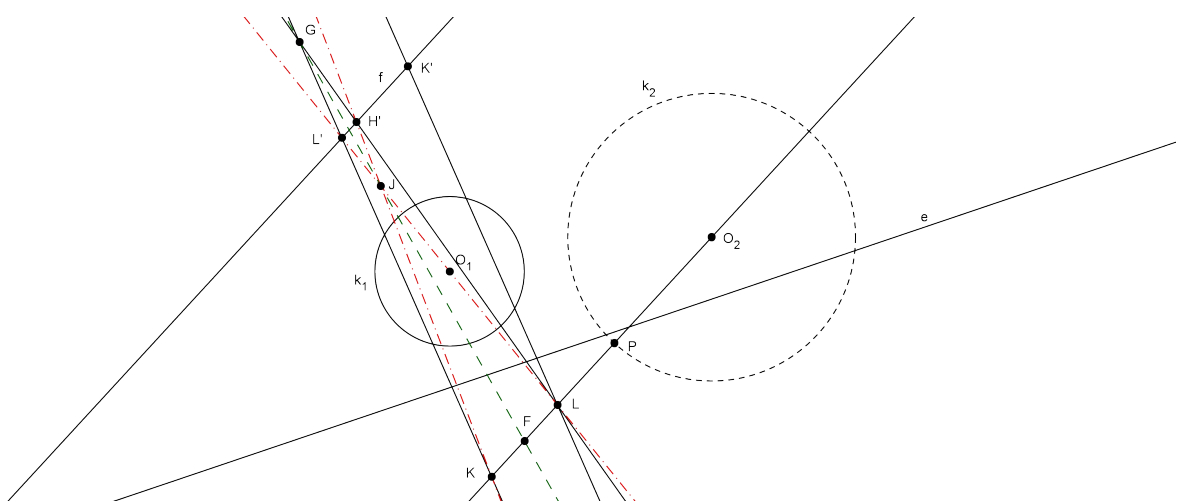


párhuzamos. Ha nem megy át, akkor megkaphatjuk a  $K$  pont  $O_1$ -re vonatkozó  $K'$  tükörképét, ami a  $KO_1$  egyenes és a  $BD$  egyenes metszéspontja. Ugyanígy megkapjuk az  $L$  pont  $O_1$ -re vonatkozó  $L'$  tükörképét, ami az  $LO_1$  és  $AC$  egyenes metszéspontja. Ha összekötjük a  $K'$  és az  $L'$  pontokat, akkor ez az  $f$  egyenes éppen párhuzamos lesz a  $PO_2$  egyenesünkkel, mert az  $f$  egyenes éppen tükörképe a  $PO_2$  egyenesnek. (50. ábra)



50. ábra

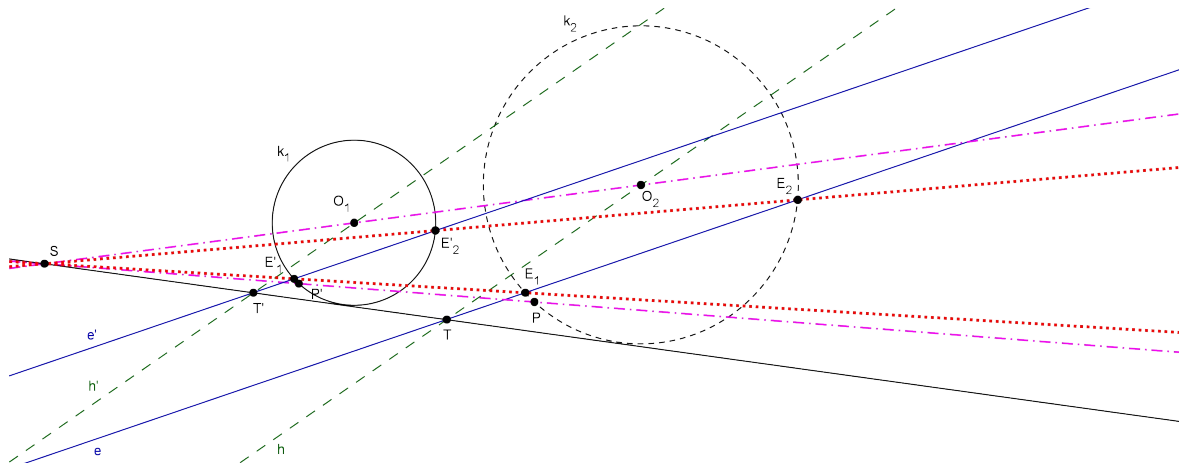
Most elfelezzük a  $KL$  szakaszt (51. ábra) úgy, hogy a  $KL'$  egyenesen vegyünk fel egy  $G$  pontot, ami a  $KL'$  szakaszon kívül van. A  $GL$  egyenes és az  $f$  egyenes metszéspontja  $H'$ . A  $KH'$  és  $LL'$  egyeneseknek a metszéspontját összekötjük a  $G$  ponttal, majd ahol ez az egyenes metszi a  $KL$  egyenest, ott lesz a  $KL$  szakasz  $F$  felezőpontja a teljes 4-oldal tétel szerint, mivel  $F$  és az  $OP$  egyenes ideális pontja átlós pontok a  $KG$ ,  $GL$ ,  $JL$  és  $JK$  által határolt teljes 4-oldalban.



51. ábra

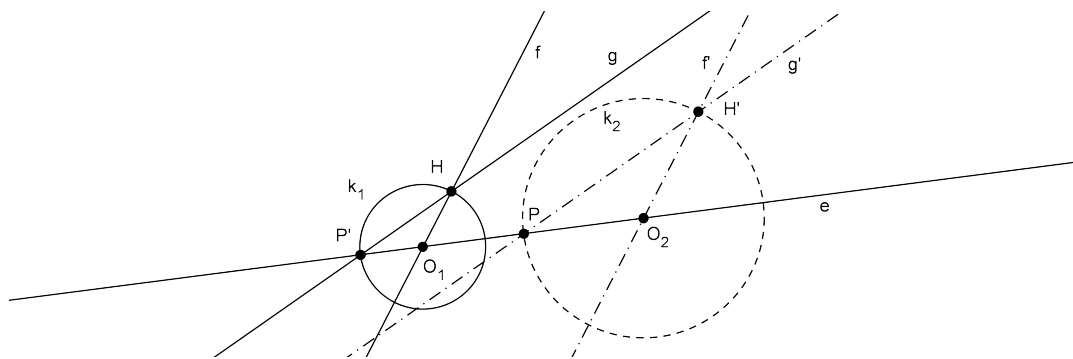
Ha már van felezőpont, akkor tudunk  $O_1$ -en át párhuzamost húzni a  $PO_2$  egyenessel (52. ábra). A  $KO_1$  egyenesen, a  $KO_1$  szakaszon kívül felvesszünk egy  $M$  pontot. Az  $MF$  és  $LO_1$





53. ábra

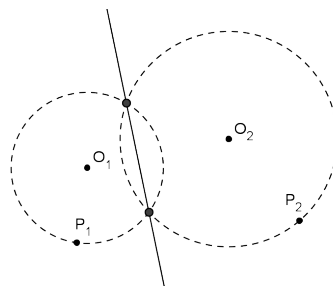
Még az az eset van hátra, amikor  $O_1$ ,  $P$  és  $O_2$  kollineárisak. Ekkor legyen  $P'$  a  $P$  két kört egymásba vivő külső hasonlóságnál vett képe.  $O_1$ -en át húzzunk egy  $O_1P$ -től különböző  $f$  egyenest, és a korábban leírtak szerint szerkesszük meg az  $f$ -fel párhuzamos  $f'$  egyenest  $O_2$ -n át. Szerkesszük még meg a  $P'$ -t az  $f$  egyenes és az adott körünk metszéspontjával összekötő  $g$  egyenessel párhuzamos  $P$ -n átmenő  $g'$  egyenest. A két egyenes metszéspontja hasonlósági okok miatt az  $O_2$  körüli körön van. Innentől a kapott ponttal, mint  $P$  ponttal már működik az előbbi módszer. (54. ábra)



54. ábra

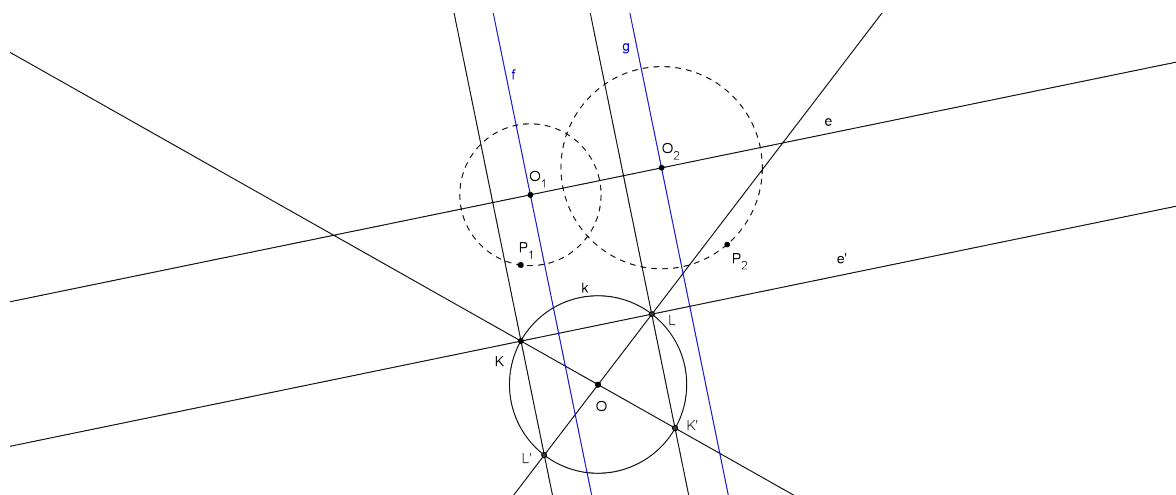
b) *Két kör metszéspontjainak megszerkesztése*

Legyen adva a körök középpontja és 1-1 kerületi pontja, ezen kívül az  $O$  középpontú  $k$  körünk. Az a) esetben megszerkesztett lépéseket ebben az esetben nem tárgyaljuk olyan részletesen.



55. ábra

Megszerkesztjük az  $O_1$  és  $O_2$  összekötő egyenesét, majd erre az egyenesre merőlegest állítunk a középpontokban, így kapjuk az  $f$  és  $g$  egyeneseket. Merőlegest úgy állítunk, hogy a  $k$  körünkön kiválasztunk egy tetszőleges  $K$  pontot, majd párhuzamost húzunk az  $e$  egyenessel a  $K$  ponton keresztül. Arra kell vigyáznunk, hogy az egyenesünk ne menjen át az  $O$  ponton. Az  $e'$  egyenesünk és a  $k$  körünk metszéspontja legyen  $L$ . Ezután megszerkesztjük a  $K$  és  $L$  pontok  $O$ -ra vonatkozó  $K'$  és  $L'$  tükörképét, ami a  $KO$  egyenes és a  $k$  kör, valamint az  $LO$  egyenes és a  $k$  kör metszéspontja. A  $KLK'L'$  egy téglalapot határoz meg, emiatt a  $KL'$  egyenes merőleges lesz az  $e'$  egyenesre. Így elég az  $O_1$  és  $O_2$  pontokon keresztül párhuzamost húzunk a  $KL'$  egyenessel.



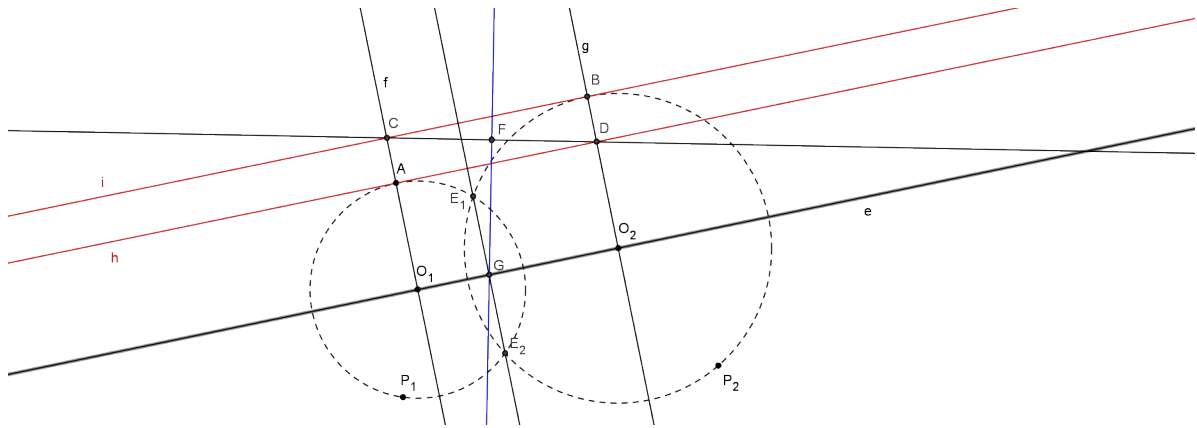
56. ábra

Az a) eset szerint megszerkesztjük az  $f$  egyenes és az  $O_1$  középpontú kör metszéspontjait (elég az egyiket), majd a  $g$  egyenes és az  $O_2$  középpontú kör metszéspontjait (itt is elég csak az egyiket, de ugyanabban a félsíkban legyenek a metszéspontok). Majd a kapott  $A$  és  $B$  ponton át párhuzamost húzunk az  $e$  egyenessel, (ezek lesznek  $h$  és  $i$ ). A  $h$  és a  $g$  egyenes metszéspontja legyen  $D$ , az  $i$  és az  $f$  egyenes metszéspontja pedig legyen  $C$ . Ezután meg kell szerkesztenünk a  $CD$  szakasz felezőmerőlegesét. Ezt a korábbi lépések alapján meg tudjuk tenni, hiszen tudunk szakaszt felezni és merőlegest állítani. A kapott egyenes és az  $e$  egyenes metszéspontja legyen a  $G$  pont. Azt kell belátni, hogy a  $G$  pont rajta van a két kör hatványvonalán.

$$h_{k_1}(G) = h_{k_2}(G) \Leftrightarrow h_{k_1}(G) - h_{k_2}(G) = 0$$

$$\left( (O_1G)^2 - r_1^2 \right) - \left( (O_2G)^2 - r_2^2 \right) = \left( (O_1G)^2 + r_2^2 \right) - \left( (O_2G)^2 + r_1^2 \right) = (CG)^2 - (DG)^2 = 0$$

Ez abból következik, hogy a  $CGDA$  egyenlőszárú, mert a  $G$  pont a  $CD$  szakasz felezőmerőlegesén van.



57. ábra

Mivel a  $G$  pont rajta van a két kör hatványvonalán, és tudjuk, hogy a hatványvonal merőleges a két kör centrálisára, ezért elég, ha merőleges állítunk a  $G$  pontból az  $e$  egyenesre, mivel a körök metszéspontjai (ha léteznek) rajta vannak a két kör  $h$  hatványvonalán. Végül vesszük a hatványvonal és az egyik kör metszéspontjait az a) eset szerint. (57. ábra)

**Tétel:** Ha a  $K$  kör meg van rajzolva, de középpontja nincs megadva, akkor  $K$  középpontját vonalzóval nem lehet megszerkeszteni.

**Biz.:** Legyen egy derékszögű koordinátarendszerben

$$K(x, y) \equiv (x - a)^2 + y^2 + 1 - a^2 = 0, \quad |a| > 1$$

a  $K$  kör egyenlete. Ennek a körnek a síkjában az

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}$$

helyettesítés kollineációt (egyenesstartó transzformációt) határoz meg, amely a

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0, \quad c_3 x' + c_2 y' + c_1 = 0$$

egyeneseket egymásnak felelteti meg. Ez a kollineáció a  $K$  kör  $(a, 0)$  középpontját az

$\left(\frac{1}{a}, 0\right)$  pontba, a  $K$  kört pedig önmagába viszi át, mivel a

$$K(x, y) \equiv \left(\frac{1}{x'} - a\right)^2 + \frac{y'^2}{x'^2} + 1 - a^2 \equiv \frac{1}{x'^2} [(x' - a)^2 + y'^2 + 1 - a^2] \equiv \frac{K(x', y')}{x'^2}$$

azonosság miatt a  $K(x, y) = 0$  egyenletből a  $K(x', y') = 0$  egyenlet következik és megfordítva.

Tegyük föl most, hogy van olyan csak vonalzóval elvégezhető szerkesztés, amely bizonyos számú, részben a  $K$  körön fekvő pontból, részben más tetszőleges pontból kiindulva a  $K$

kör középpontjához vezet. Ennek a szerkesztésnek az előbbi kollineáció a  $K$  kör ugyanannyi pontjából és ugyanannyi más pontból kiinduló és ugyanolyan tulajdonságú szerkesztést feleltet meg, mint az első szerkesztés. Ez a tisztán vonalas második

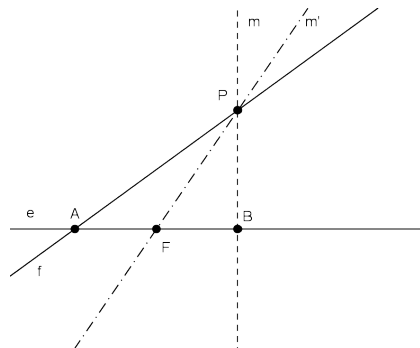
szerkesztés azonban az  $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$  ponthoz juttat, noha az  $(a, 0)$  középponthoz kellene vezetnie.

Ebből az ellentmondásból következik a tétel igazsága. [6]

A fenti tétel bizonyítása a középiskolás diákok számára bonyolult, viszont a következő állítást, már fel lehet adni középiskolában.

**Állítás:** Kör megadása nélkül nem lehet merőlegest szerkeszteni csak vonalzóval.

**Biz.:** Vegyünk egy  $e$  egyenest és egy  $P$  pontot, és egy olyan  $f$  egyenest, amely átmegy a  $P$  ponton és nem merőleges az  $e$  egyenesre. Tegyük fel, hogy azt az  $m$  egyenest, ami átmegy a  $P$  ponton és merőleges az  $e$  egyenesre, meg tudjuk szerkeszteni csak vonalzóval. Csináljunk  $\frac{1}{2}$ -es affinitást az  $f$  egyenesre az  $e$  egyenes irányában. Az affinitás után egy  $e$ -t és  $f$ -et metsző  $g$  egyenes képe az  $e$ ,  $f$  és  $g$  által határolt háromszög  $e$ -n fekvő oldalát felező  $g'$  súlyvonala lesz, egy az  $e$  egyenessel párhuzamos  $g$  egyenes képe önmaga lesz, míg egy az  $f$  egyenessel párhuzamos  $g$  egyenes képe az a  $g'$  egyenes lesz, amely az  $f$  és  $g$  egyenesektől egyforma távolságra van. (58. ábra)

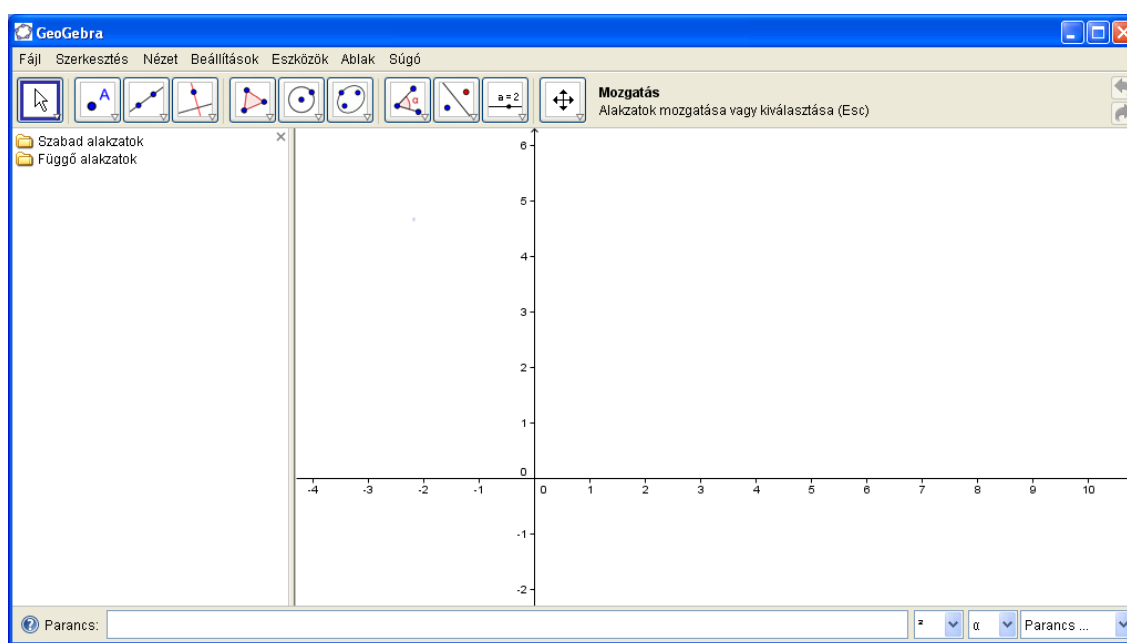


58. ábra

## 9. GeoGebra

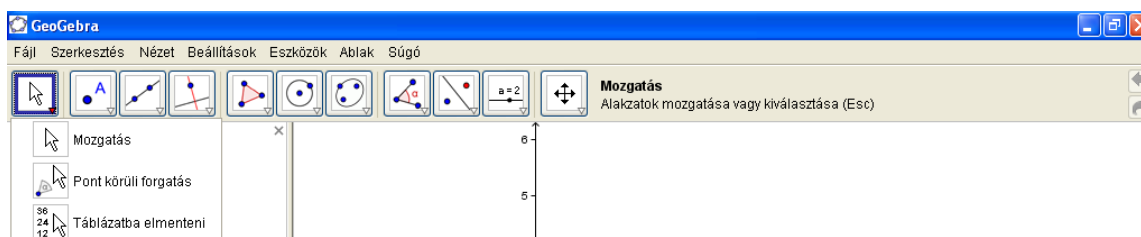
A szakdolgozatban található ábrákat a Geogebra programmal készítettem. Ez egy ingyenes, magyar nyelvre is lefordított szoftver, amely szerkesztések elvégzésére alkalmas. Vannak hasonló szerkesztő programok, mint például az Euklides vagy a Cabri. Ezek a programok alkalmasak a diákok oktatására, de még a kíváncsiságukat is felkelthetjük velük, hiszen segítségükkel érdekes megfigyeléseket tehetnek. A program hasznos a diskussziók kivitelezésére is. Természetesen nemcsak a szerkesztések témakörében lehet használni ezt a programot.

A program megnyitásakor az 59. ábrán szereplő képet látjuk.



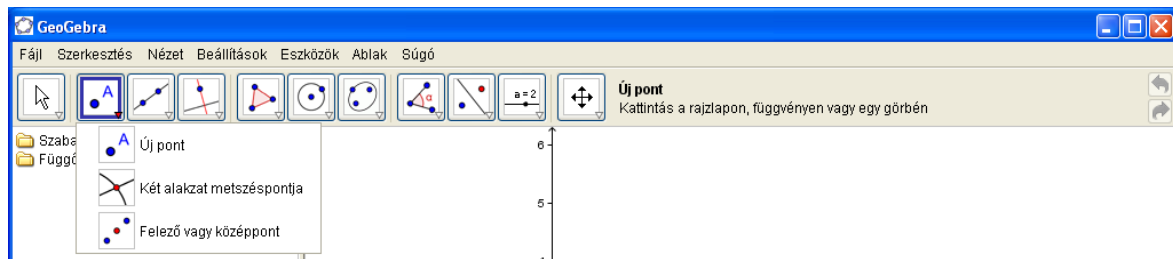
59. ábra

Az egyik feltűnő rész az ablakban a nagy gombok, ábrákkal. Mindegyik gomb jobb alsó sarkában van egy nyíl, ha arra rákattintunk, akkor további gombokat kapunk (60. ábra). Az első gomb engedi egy korábban rajzolt tárgy kiválasztását és mozgatását a rajzoló területen, ezenkívül pl. pontokat is mozgathatunk az adott körön. A második gomb ebben a menüben lehetővé teszi olyan pont kiválasztását, amely körül elforgathatjuk a kész ábránkat. A harmadik gombbal táblázatba lehet elmenteni adatokat. Segítséget nyújt nekünk a magyarul levő magyarázat, így nem kell megtanulnunk fejből, hogy melyik gomb mire jó.



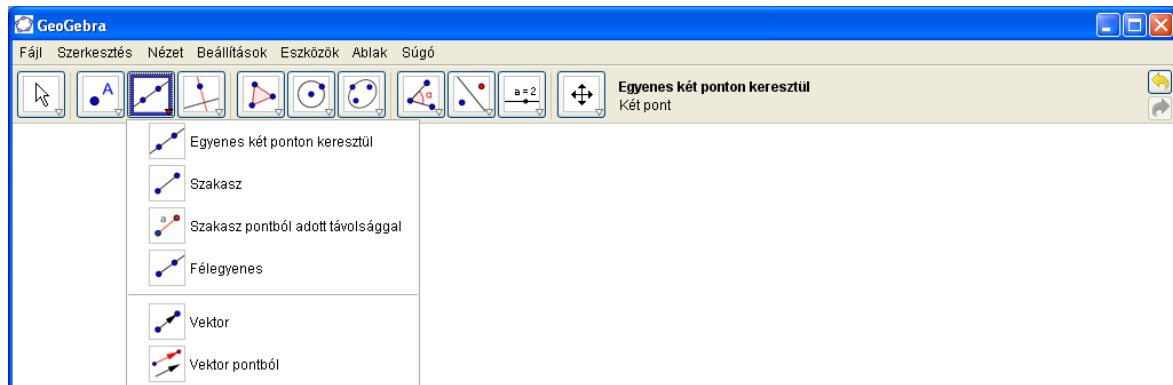
60. ábra

A következő menüben (61. ábra) szintén 3 gomb közül választhatunk. Megadhatunk a munkalapunkon bárhol egy tetszőleges új pontot, vehetjük bármely két alakzat metszéspontját (metszéspontjait), vagy két pont felezőpontját kaphatjuk meg.



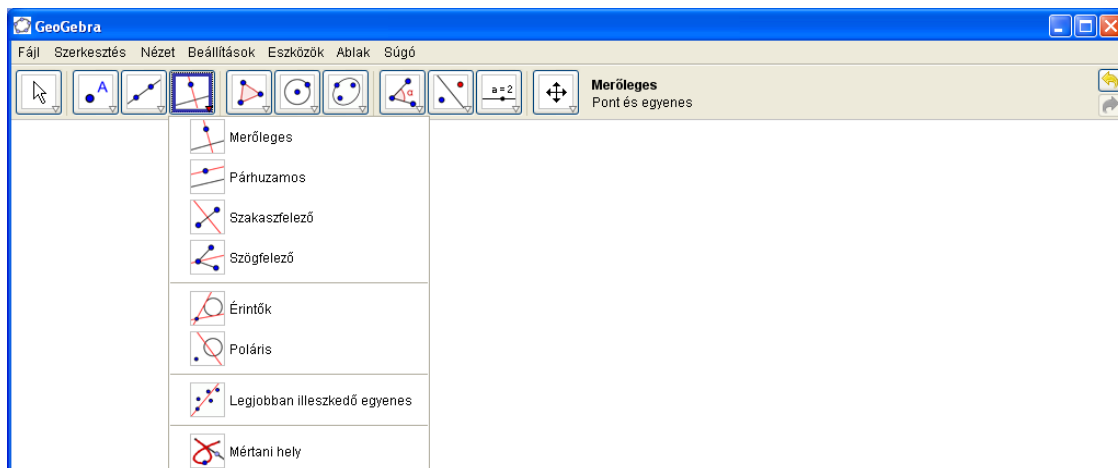
61. ábra

A harmadik gombnál (62. ábra) két ponton átmenő egyenest, félegyenest, szakaszt, vektort adhatunk meg. Itt nemcsak a két pontot, hanem egy pontot és egy  $a$  távolságot is megadhatunk.



62. ábra

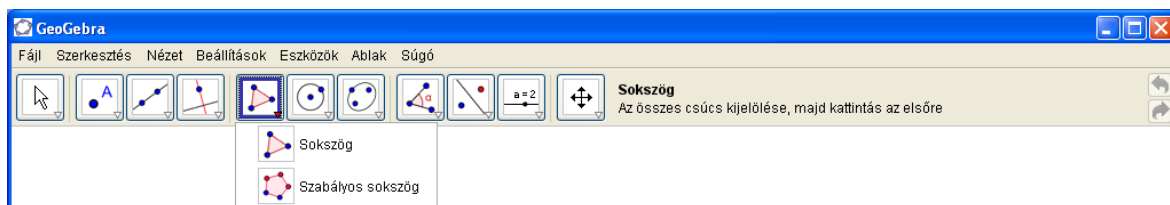
A következő gombnál (63. ábra) merőlegest és párhuzamost szerkeszthetünk adott egyenessel adott ponton át. Tudunk szakaszt és szöget felezni. Egy gombnyomással tudunk külső pontból érintőket szerkeszteni egy adott körhöz. Ezen kívül pont vagy egyenes polárisát adott kúpszeletre, pontokra a legjobban illeszkedő egyenest, illetve mértani helyet is megszerkeszthetünk könnyedén.



63. ábra

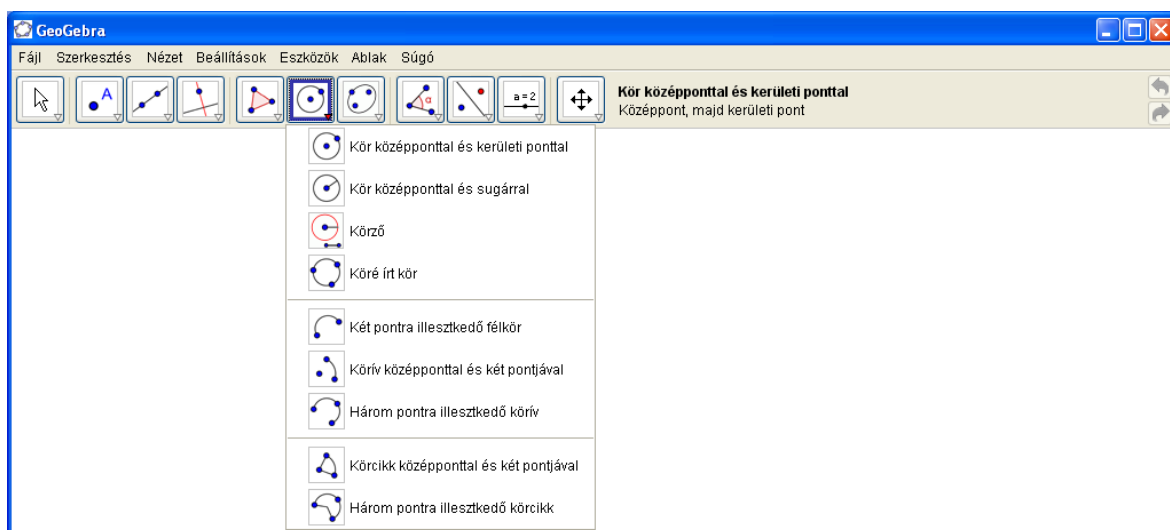


Az ötödik gombnál (64. ábra) kijelölhetjük a sokszöget úgy, hogy a sokszög csúcsaira rákattintunk. Megadhatunk két ponttal távolságot és megmondhatjuk, hogy hány szöge legyen annak a szabályos sokszögnek, amelyet szeretnénk, természetesen a megadott távolság a szabályos sokszög oldala lesz. A GeoGebra program olyan szabályos sokszögeket is meg tud szerkeszteni, amiket egyébként nem lehet az euklideszi geometriában, pl. tud szabályos 7 szöget „szerkeszteni”.



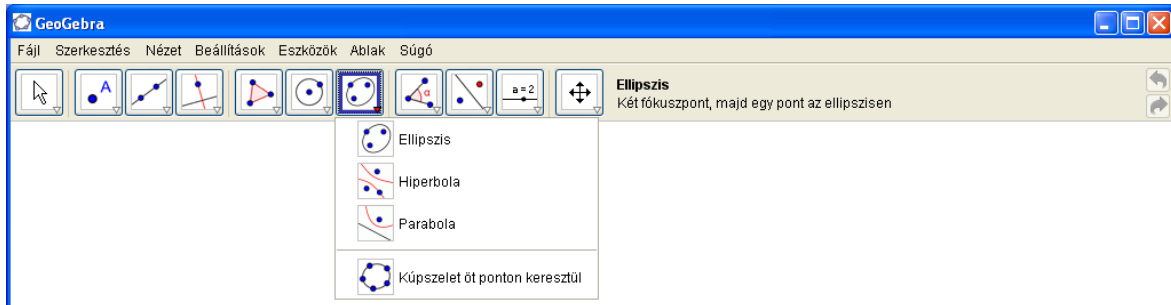
64. ábra

A következő gombnál (65. ábra) egy kört adhatunk meg különbözőféleképpen. Megadhatjuk a középpontot és egy kerületi pontot vagy a sugarát, illetve mi is megmondhatjuk, hogy mekkora legyen a sugara. Megszerkeszthetjük a 3 pont köré írt kört, illetve hasonló módon szerkeszthetünk félkört, körívet vagy körcikket.

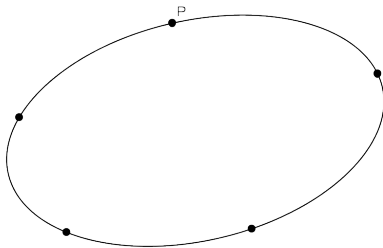


65. ábra

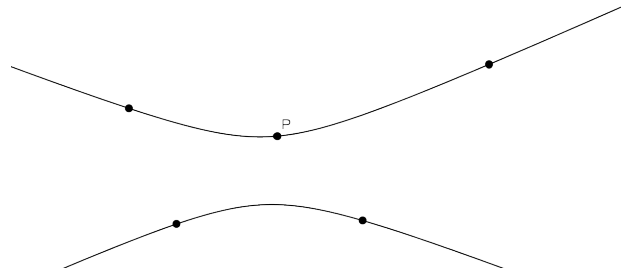
A kör után a többi kúpszelet is helyet kap a programban. Megszerkeszthetjük az ellipszist, hiperbolát, ha megadjuk a két fókuszpontját és egy olyan pontot, ami rajta van a kúpszeleten. A parabolánál a fókuszpontját és a vezéregyenesét kell megadni. Ezen kívül még megadhatunk 5 pontot úgy, hogy semelyik 3 ne legyen kollineáris, akkor a program megszerkeszti nekünk az adott kúpszeletet. (66. ábra) Pl. mozgassuk az 5 pont közül a P pontot. Így láthatjuk, hogy különböző kúpszeleteket kapunk. (67. ábra, 68. ábra)



66. ábra

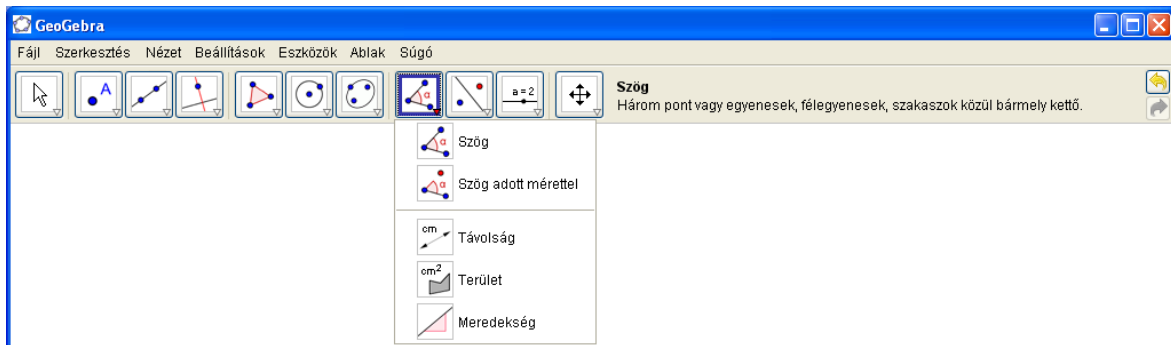


67. ábra



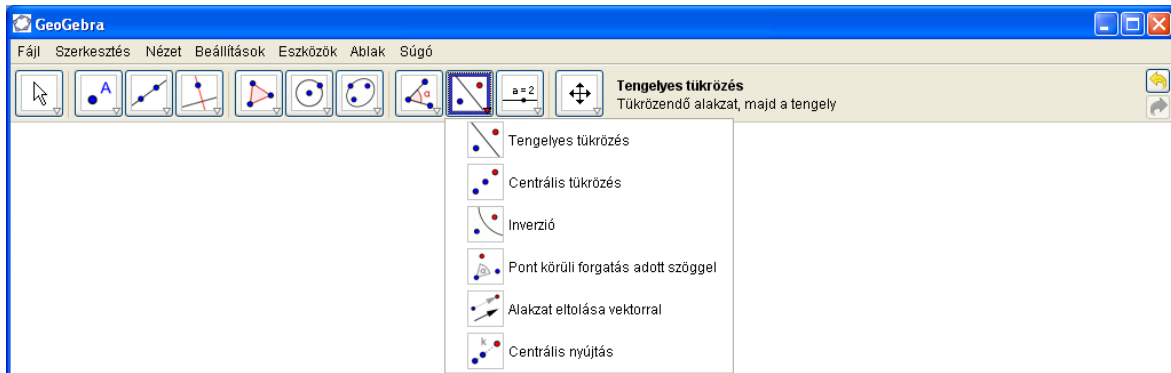
68. ábra

A nyolcadik gombnál (69. ábra) megadhatunk szöget, vagy az ábrán lévő pontok vagy egyenesek szögét megjeleníthetjük. Megkaphatjuk a szakaszok távolságát, sokszögek területét és az egyenes vagy görbe meredekségét.



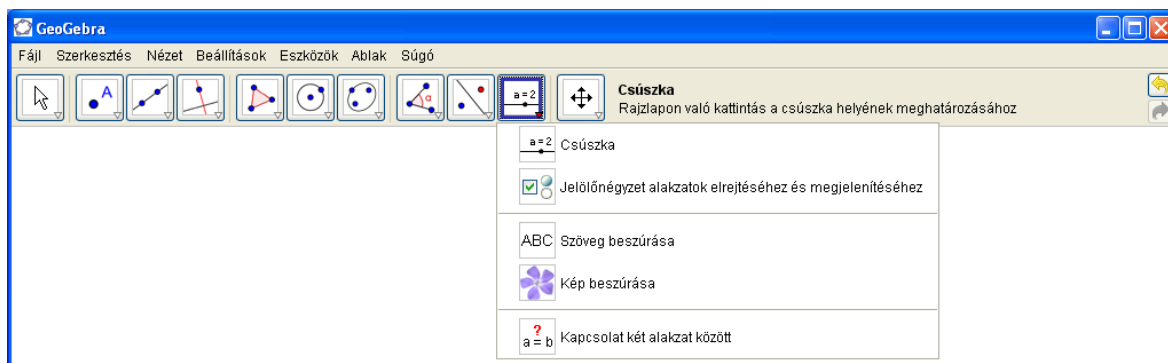
69. ábra

A következő gombnál (70. ábra) geometriai transzformációkat hajthatunk végre. Ilyen a tengelyes tükrözés, centrális tükrözés, inverzió, pont körüli forgatás adott szöggel, alakzat eltolása vektorral és a centrális nyújtás.



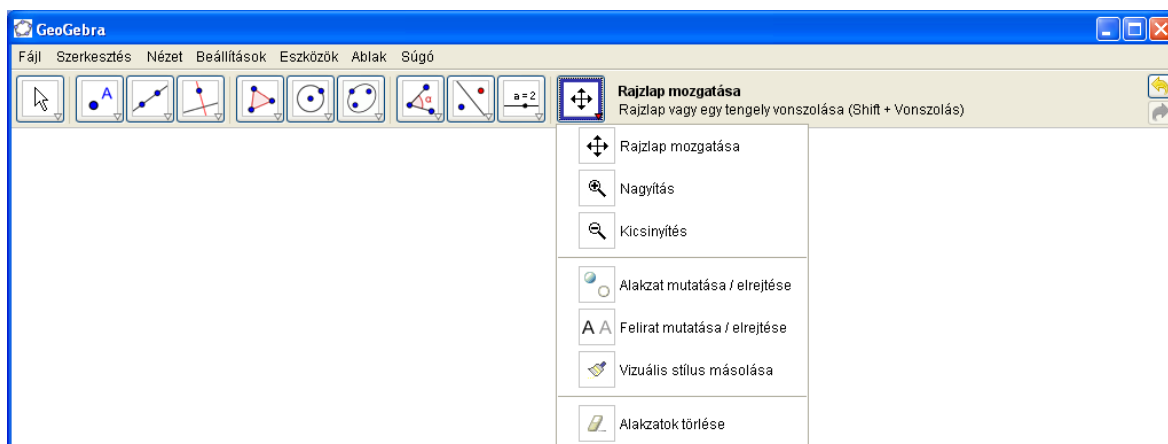
70. ábra

Az utolsó előtti gombnál (71. ábra) érdekes dolgokra bukkanhatunk. Az első az úgy nevezett csúszka, ami arra szolgál, hogy kijelölhetünk egy szakaszt vele, rajta egy ponttal, megadjuk még az intervallumot és így animációt készíthetünk, miközben a pont végig megy a szakaszon oda és vissza. Beszúrhatunk szöveget vagy képet a munkalapra. Ezen kívül két alakzat kapcsolatát is megvizsgálhatjuk, például az adott két pont egybeesik-e vagy sem.



71. ábra

Az utolsó gombnál (72. ábra) mozgathatjuk a rajzlapot, nagyíthatunk vagy akár kicsinyíthetünk is. Beállíthatjuk, hogy az adott alakzatot vagy feliratot mutassa, vagy inkább elrejtse. Az alakzatokat még törölhetjük is, ha már nincs rá szükségünk.



72. ábra

## Irodalomjegyzék:

- [1] Czédli Gábor-Szendrei Ágnes: Geometriai szerkeszthetőség, *POLYGON, Szeged (1997)*
- [2] Hajós György: Bevezetés a geometriába, *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (1999)*
- [3] Kiss Emil: Bevezetés az absztrakt algebrába, *Typotex, Budapest (2007)*
- [4] Sain Márton: Nincs királyi út, *Gondolat, Budapest (1986)*
- [5] Sain Márton: Matematika-történeti ABC, *Tankönyvkiadó, Budapest (1974)*
- [6] Szőkefalvi Nagy Gyula: A geometriai szerkesztések elmélete, *Akadémiai Kiadó, Budapest (1968)*
- [7] [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) (2009. október)
- [8] [http://hps.elte.hu/~kutrovatz/gorogmat\\_jegyzet\\_2009.pdf](http://hps.elte.hu/~kutrovatz/gorogmat_jegyzet_2009.pdf) (2010. május)
- [9] [http://www.freeweb.hu/beluard/index2\\_8.htm](http://www.freeweb.hu/beluard/index2_8.htm) (2010. május)
- [10] <http://www.uni-miskolc.hu/evml/database/downloads/kezikonyv-tanari/4-fejezet.pdf> (2010.május)