Nemasszociatív algebrák

Szakdolgozat

Készítette: Radnai Lilla

Matematika BSc, tanári szakirány

Témavezető: Fialowski Alice, egyetemi docens

ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Tanár szakosként a BSc képzés utolsó félévéhez közeledve egyre jobban elfogott az a félelem, hogy a tanulmányaimból hamarosan eltűnnek az egyetemi szintű matematikával foglalkozó kurzusok, és bezárulnak előttem a matematika további területeinek kapui. Ezért úgy döntöttem, hogy a másik szakomat, a németet a matematikával kombinálva a tanári MSc előtt kitekintésképpen elvégzek Németországban egy mesterképzést, amely során csak a matematikának szentelhetem magam.

Erre való felkészülésképpen olyan témát kerestem a szakdolgozatomhoz, amely túlmutat az eddigi tanulmányainkon és lehetőséget biztosít a későbbiekben a további vizsgálódásra.

A nemasszociatív algebrákkal való ismerkedés során számos új fogalommal találkoztam, amelyek feldolgozása sokszor nehézséget jelentett, mégis nagy öröm volt az Algebra I-III. kurzusokon felépített ismeretrendszerbe beilleszteni őket.

A témakör túl nagy ahhoz, hogy a teljesség igényével mutathassam be. A szakdolgozatom során néhány alapfogalom általános bevezetése után a nemasszociatív algebrák következő három csoportjára fókuszáltam: Az alternáló algebrákra, különös hangsúlyt fektetve a Cayley-algebrákra, ahol a Cayley-Dickson eljárással konkrét példát találunk nemasszociatív algebrákra. Továbbá a Jordan-algebrákra, amelyek nevüket Pascual Jordan fizikusról kapták, aki az 1930-as években kvantummechanikai vizsgálódásai során definiálta őket. Végül a Lie-algebrákra, amely a nemasszociatív algebrák legjobban ismert és legszélesebb körben felhasznált csoportja. Remélem a németországi mesterképzés során lehetőségem lesz a téma további feldolgozására, és a diplomamunka keretében részletesebb kifejtésére.

Itt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Fialowski Alice tanárnőnek, aki nagy türelemmel kísérte végig a témával való ismerkedésemet, számos tanáccsal látott el mind a szakdolgozat felépítését, mind a matematikai nyelvezet helyes használatát illetően. Különösen hálás vagyok, hogy szorgalmazta a LaTeX program használatát. Sok segítséget kaptam ezzel kapcsolatban hallgatótársaimtól is, nekik is köszönöm türelmüket és segítőkészségüket.

1. fejezet

Alapfogalmak

1.1. Definíciók és alapvető összefüggések

1.1. Definíció. *Legyen X véges dimenziós vektortér a T test felett. X-et egy rajta értelmezett bilineáris leképezéssel együtt* ALGEBRÁNAK *nevezünk. A bilineáris leképezést szorzásnak hívjuk.*

A szorzásra általában nem teljesül sem a kommutativitás, sem az asszociativitás. Adott $\mathfrak{U}$ algebrában rögzített u esetén a $v \to uv$ ill. $v \to vu$ lineáris transzformációkat $L(u)$-val ill. $R(u)$-val jelöljük, vagyis

$$L(u)v = uv \quad ill. \quad R(u)v = vu.$$

$L(u)$-t az $u \in \mathfrak{U}$ *balreguláris*, $R(u)$-t *jobbreguláris reprezentációjának* nevezzük. Egy $\mathfrak{U}$ algebrát *kommutatívnak* ill. *asszociatívnak* nevezünk, ha a szorzás teljesíti a megfelelő tulajdonságot.
Az $\mathfrak{U}$ algebra egy e (vagy f) elemét az algebra *bal (vagy jobb) oldali egységelemének* nevezzük, ha $eu = u$ (vagy $uf = u$) minden $u \in \mathfrak{U}$ esetén. Ha $\mathfrak{U}$ tartalmaz egy e baloldali és f jobboldali egységelemet, akkor $e = f(= ef)$ *kétoldali egységelem*, jelölése 1.
$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ esetén $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$-t a bc $b \in \mathfrak{B}$, $c \in \mathfrak{C}$ szorzatok által alkotott vektortérrel definiáljuk.

1.2. Definíció. *Legyenek $\mathfrak{U}$ és $\mathfrak{U}'$ algebrák ugyanazon T test felett. Egy $\alpha : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ T-lineáris leképezést,* HOMOMORFIZMUSNAK *nevezünk, ha*

$$\alpha([X,Y]) = [\alpha(X), \alpha(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{U}.$$

Ha α bijektív, α IZOMORFIZMUS. *Egy $\mathfrak{U}$-ból önmagába képező izomorfizmust* AUTOMORFIZMUSNAK *nevezünk.*

1.3. Definíció. *Egy $\mathfrak{U}$ algebra $\mathfrak{B}$ részhalmazát* RÉSZALGEBRÁNAK *hívjuk, ha ugyanolyan szerkezettel bír, mint $\mathfrak{U}$ az algebrai műveletek $\mathfrak{B}$-re való megszorítását tekintve.*
Egy $\mathfrak{C}$ részhalmazt $\mathfrak{U}$ (kétoldali) IDEÁLJÁNAK *nevezzük, ha*

1. *$\mathfrak{C}$ altere $\mathfrak{U}$-nak,*

2. *$c\,u \in \mathfrak{C}$ és $u\,c \in \mathfrak{C}$ $\forall c \in \mathfrak{C}$ és $u \in \mathfrak{U}$.*

Egy $\mathfrak{U}$-ból $\mathfrak{U}'$-ba képező homomorfizmus magja $\mathfrak{U}$-beli ideál.
Az $\mathfrak{U}$ algebra egy $\mathfrak{C}$ ideáljához definiálhatunk egy ekvivalenciarelációt $\mathfrak{U}$-n: Kongruensnek nevezünk két u, $v \in \mathfrak{U}$ vektort és ezt $u \equiv v \pmod{\mathfrak{C}}$ - vel jelöljük, ha $u - v \in \mathfrak{C}$. Az ideál tulajdonságai miatt a kongruenciarelációra értelmezhetjük az $\mathfrak{U}$-n definiált összeadást és szorzást, vagyis

$$u_1 + u_2 \equiv v_1 + v_2 \pmod{\mathfrak{C}}, \quad u_1 u_2 \equiv v_1 v_2 \pmod{\mathfrak{C}}, \quad \textit{ha } u_i \equiv v_i \pmod{\mathfrak{C}}.$$

Minden $u \in \mathfrak{U}$-ra definiáljuk az $\overline{u} \pmod{\mathfrak{C}}$ maradékosztályt, amely az összes u-val kongruens $\mathfrak{U}$-beli vektor halmaza. A maradékosztályok halmazát $\mathfrak{U}/\mathfrak{C}$-vel jelöljük. $\mathfrak{U}/\mathfrak{C}$-ben az összeadást és a szorzást a következőképpen definiáljuk:

$$\overline{u} + \overline{v} := \overline{u+v}, \qquad \overline{u}\,\overline{v} := \overline{uv}.$$

Könnyen láthatjuk, hogy az így definiált $\mathfrak{U}/\mathfrak{C}$ is T feletti algebra. Ezt az $\mathfrak{U}$ algebra $\mathfrak{C}$ szerinti *faktoralgebrájának* nevezzük.
A $\pi(u) := \overline{u}$-vel megadott $\pi : \mathfrak{U} \mapsto \mathfrak{U}/\mathfrak{C}$ természetes leképezés $\mathfrak{U}$-ból $\mathfrak{U}/\mathfrak{C}$-ba képező homomorfizmus, magja $\mathfrak{C}$. Vagyis egy $\mathfrak{C}$ részhalmaz pontosan akkor ideálja $\mathfrak{U}$-nak, ha $\mathfrak{C}$ fellép valamilyen $\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ homomorfizmus magjaként.

1.1. Tétel. *(i) Ha $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$ az $\mathfrak{U}$ algebra ideáljai és $\mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{B}_1$, akkor $(\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_2)/(\mathfrak{B}_1/\mathfrak{B}_2)$ és $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_1$ izomorfak.*

(ii) Ha $\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{U}$ egy ideálja és $\mathfrak{S}$ az $\mathfrak{U}$ részalgebrája, akkor $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{S}$ ideálja $\mathfrak{S}$-nek, és $(\mathfrak{B} + \mathfrak{S})/\mathfrak{B}$ izomorf $\mathfrak{S}/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{S})$-val.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ ideáljai egy $\mathfrak{U}$ algebrának és $\mathfrak{U}$, mint vektortér $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ direkt összege ($\mathfrak{U} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{o}$). Ekkor $\mathfrak{U}$-t $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$, mint algebrák $\mathfrak{U} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{C}$ *direkt összegének* nevezzük . A vektortér tulajdonságok biztosítják, hogy egy $\mathfrak{U} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{C}$ direkt összegben $a = b+c$ ($b \in \mathfrak{B},\ c \in \mathfrak{C}$) esetén b, c egyértelműen meghatározottak, és az összeadás, skalárral való szorzás komponensenként történik. Ha $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ ideálok az $\mathfrak{U} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{C}$-ben, akkor a szorzás is tagonként történik:

$$(b_1 + c_1)(b_2 + c_2) = (b_1 b_2 + c_1 c_2), \qquad b_i \in \mathfrak{B}, \quad c_i \in \mathfrak{C}.$$

Ha adott két tetszőleges $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ algebra egy T test felett, akkor konstruálhatunk T felett egy olyan $\mathfrak{U}$ algebrát, hogy $\mathfrak{U}$ az $\mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ ideálok $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}' \oplus \mathfrak{C}'$ direkt összege, melyek izomorfak $\mathfrak{B}$-vel és $\mathfrak{C}$-vel. Az $\mathfrak{U}$ konstruálása hagyományos módon történik: $\mathfrak{U}$ elemei (b, c) rendezett párok, ahol $b \in \mathfrak{B}, c \in \mathfrak{C}$. Az összeadás, skalárral való szorzás és a szorzás komponensenként történik:

$$(b_1, c_1) + (b_2, c_2) = (b_1 + b_2, c_1 + c_2),$$

$$\alpha(b, c) = (\alpha b, \alpha c),$$

$$(b_1, c_1)(b_2, c_2) = (b_1 b_2, c_1 c_2).$$

Ekkor $\mathfrak{U}$ a T test feletti algebra, amelynek elemei az összes $(b, 0)$ pár $\mathfrak{B}'$ halmaza, ahol $b \in \mathfrak{B}$ és az összes $(0, c)$ pár $\mathfrak{C}'$ halmaza, ahol $c \in \mathfrak{C}$, amik az $\mathfrak{U}$-nak $\mathfrak{B}$-vel és $\mathfrak{C}$-vel izomorf ideáljai, és $\mathfrak{U} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{C}$, vagyis a $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ algebrák direkt összege.

Adott $\mathfrak{U}$ algebrához egységelemes $\mathfrak{U}'$ algebra konstruálása:
Ha $\mathfrak{U}$ nem tartalmaz egységelemet, akkor találhatunk egy olyan $\mathfrak{U}_1$ egységelemes algebrát, mely tartalmazza $\mathfrak{U}$-t, mint ideált, és $\mathfrak{U}_1/\mathfrak{U}$ dimenziója T felett 1. Válasszuk $\mathfrak{U}_1$ -et az (α, u) rendezett párok halmazának, ahol $\alpha \in T$, $u \in \mathfrak{U}$; az összeadást, skalárral való szorzást komponensenként definiáljuk, a szorzást pedig a következőképpen:

$$(\alpha, u)(\beta, v) = (\alpha\beta, \beta u + \alpha v + uv), \quad \alpha, \beta \in T, \quad u, v \in \mathfrak{U}.$$

Ekkor $\mathfrak{U}_1$ a T test feletti egységelemes algebra, 1=(1,0). Az összes $(0, u)$, $u \in \mathfrak{U}$ pár $\mathfrak{U}'$ halmaza ideál $\mathfrak{U}_1$ -ben és izomorf $\mathfrak{U}$ -val. Az $\mathfrak{U}_1$ tér, mint vektortér, az $\mathfrak{U}'$-nek és az egydimenziós $T1 = \{\alpha 1 | \alpha \in T\}$ vektortérnek direkt összege. Azonosítsuk $\mathfrak{U}'$-t izomorf képével, $\mathfrak{U}$-val, ekkor egyértelműen felírhatjuk $\mathfrak{U}_1$ minden elemét $\alpha 1 + u$ alakban, ahol $\alpha \in T,\ u \in \mathfrak{U}$. Két $\mathfrak{U}$-beli elem szorzása a következoképpen történik:

$$(\alpha 1 + u)(\beta 1 + v) = (\alpha\beta)1 + (\beta u + \alpha v + uv).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{U}'$-t $\mathfrak{U}$-ból *egy egységelem adjungálásával* kaptuk. Ha $\mathfrak{U}$ asszociatív, akkor az így kapott $\mathfrak{U}_1$ algebra is asszociatív.

Legyen $\mathfrak{U}$ algebra a T test feletti X vektortérben. $\hat{X}$-et X-ből a T alaptest T'-vé való bővítése által kapjuk. Ha kiválasztjuk X-nek egy bázisát, az X-en való szorzást egyértelműen megadhatjuk $\hat{X}$-en is. Az $\hat{X}$-en így definiált szorzás független a bázis választásától. Az $\hat{X}$ vektortérben így keletkező $\hat{\mathfrak{U}}$ algebrára azt mondjuk, hogy $\mathfrak{U}$-ból *a T test T'-vé való bővítésével*, vagyis *alaptestbővítéssel* kaptuk.

Minden $\mathfrak{U}$ K feletti algebrához definiálhatunk a hozzátartozó X vektortérben egy új $u \cdot v$ szorzást, melyre $u \cdot v := v\ u$. Az így keletkező algebrát az $\mathfrak{U}$-val *anti-izomorf* algebrának nevezzük.
Legyen $\mathfrak{U}$ n-dimenziós algebra a T test felett és $u_1, ..., u_n$ az $\mathfrak{U}$ bázisa T felett. Ekkor az $\mathfrak{U}$-n értelmezett bilineáris szorzást egyértelműen meghatározza az az n^3 darab γ_{ijk} szorzási konstans, amelyet a következő alakban adhatunk meg:

$$u_i u_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} u_k,\ \ \gamma_{ijk} \in T.$$

Az n^2 egyenlőséget *szorzótáblának* nevezzük, és néhány esetben hasznos felírnunk a következő táblázat alakjában:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & u_1 & \dots & u_j & \dots & u_n \\
\hline
u_1 & & & & & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
u_i & & \dots & \sum \gamma_{ijk}\, u_k & \dots & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
u_n & & & & &
\end{array}
$$

Egy $\mathfrak{U}$ T test feletti egydimenziós algebra esetén a szorzótáblát az $u_1^2 = \gamma u_1$ ($\gamma = \gamma_{111}$) egyenlőséggel adjuk meg. Ekkor két eset van: $\gamma = 0$ (ebből következik, hogy minden $xy \in \mathfrak{U}$ szorzat 0, ezért $\mathfrak{U}$-t *nullalgebrának* nevezzük), és $\gamma \neq 0$. Az utóbbi esetben $e = \gamma^{-1} u_1$ az $\mathfrak{U}$ bázisa a T test felett és így az új szorzótáblában $e^2 = e$. Ekkor $\alpha \leftrightarrow \alpha e$ izomorfizmus a T test és az $\mathfrak{U}$ egydimenziós algebra között.

Láttuk, hogy minden egydimenziós algebra asszociatív. Számos, az asszociatív algebráktól különböző algebra létezik. A legismertebb csoportjuk a Lie-algebrák. Egy T test feletti $\mathfrak{L}$ *Lie-algebra* olyan algebra T felett, amelyben a szorzás antikommutatív, vagyis

$$x^2 = 0 \quad (\Rightarrow xy = -yx),$$

és teljesül a *Jacobi-egyenlőség*

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0 \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{L}.$$

Ha $\mathfrak{U}$ tetszőleges asszociatív algebra T felett, definiáljuk a *kommutátort* a következőképpen:

$$[x, y] = xy - yx.$$

Ekkor teljesül, hogy

$$[x, x] = 0 \ \text{ és } \ [[x, y], z] + [[yz], x] + [[zx], y] = 0.$$

Vagyis az így kapott $\mathfrak{U}^-$ algebra az $\mathfrak{U}$-val azonos vektortérben Lie-algebra T felett. Tehát $\mathfrak{U}$-nak bármely altere, amely zárt a kommutátorral definiált szorzásra, részalgebrája $\mathfrak{U}^-$-nak, ezért Lie-algebra T felett. Például, ha $\mathfrak{U}$ az összes $n \times n$-es mátrix asszociatív algebrája, akkor az összes ferdeszimmetrikus mátrix $\mathfrak{L}$ halmaza $\frac{1}{2}n(n-1)$ dimenziójú Lie-algebra. A Birkhoff-Witt tétel kimondja, hogy minden $\mathfrak{L}$ Lie-algebra izomorf egy (végtelen dimenziójú) $\mathfrak{U}^-$ algebra részalgebrájával, ahol $\mathfrak{U}$ asszociatív.

A Lie-algebrák egy speciális csoportja a deriválás algebrák, amelyek sok esetben kapcsolatot biztosítanak a Lie-algebrák és más nemasszociatív algebrák között.

1.4. Definíció. *Legyen $\mathfrak{U}$ tetszőleges algebra T felett. Az $\mathfrak{U}$ deriválása alatt egy olyan $\mathfrak{U}$-n értelmezett D lineáris leképezést értünk, amelyre teljesül*

$$(xy)D = (xD)y + x(yD) \quad \forall x, y \in \mathfrak{U}.$$

Ekkor az összes deriválás $\mathfrak{D}(\mathfrak{U})$ halmaza $\mathfrak{U}$-n altere az $\mathfrak{U}$-n értelmezett összes lineáris leképezés által meghatározott $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{U})$ asszociatív algebrának. Mivel két deriválás $[D, D']$ kommutátora deriválása $\mathfrak{U}$-nak, $\mathfrak{D}(\mathfrak{U})$ részalgebrája $\mathfrak{U}^-$-nak, vagyis $\mathfrak{D}(\mathfrak{U})$ Lie algebra, és $\mathfrak{U}$ *deriválás algebrájának* nevezzük.

A kommutátorhoz hasonlóan definiálhatunk egy szimmetrizáló szorzatot is:

$$x * y = xy + yx.$$

Ezáltal egy $\mathfrak{U}$ asszociatív algebrából kiindulva egy új algebrát kapunk a T test felett, ahol a vektortér műveletek megegyeznek az $\mathfrak{U}$-n definiáltakkal, a szorzást pedig az $x * y$ operátor adja. Sok esetben találkozunk nem 2 karakterisztikájú testekre való megszorításokkal, ezért módosítsuk ezt a szorzási szabályt a következőképpen:

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

Ha $\mathfrak{U}$ asszociatív, az $\mathfrak{U}^+$-n definiált szorzás nemcsak kommutatív, hanem teljesíti a következő egyenlőséget is:

$$(x \cdot y) \cdot (x \cdot x) = x \cdot [y \cdot (x \cdot x)] \quad \forall x, y \in \mathfrak{U}^+.$$

Egy $\mathfrak{J}$ *Jordan-algebra* olyan T test feletti algebra, amelyben a szorzás kommutatív, vagyis

$$xy = yx \qquad \forall x, y \in \mathfrak{J},$$

és teljesül a Jordan-egyenlőség

$$(xy)x^2 = x(yx^2) \quad \forall x, y \in \mathfrak{J}.$$

Ha tehát $\mathfrak{U}$ asszociatív, akkor $\mathfrak{U}^+$ Jordan-algebra. Így $\mathfrak{U}^+$ bármely részalgebrája, vagyis $\mathfrak{U}$ bármely altere, amelyen a szorzást a fent definiált szimmetrizáló művelet jelenti, és amely zárt erre a műveletre (például az összes $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix halmaza), Jordan-algebra. Egy T test feletti $\mathfrak{J}$ algebrát *speciális Jordan-algebrának* nevezünk, ha $\mathfrak{J}$ izomorf $\mathfrak{U}^+$ valamely részalgebrájával, ahol $\mathfrak{U}$ asszociatív. Látni fogjuk, hogy nem minden Jordan-algebra speciális.

A nem speciális Jordan-algebrákkal kapcsolatos vizsgálódások szorosan összefüggnek az algebráknak egy általánosabb csoportjára, az alternáló algebrákra vonatkozó ismeretekkel.

Az *alternáló algebrákra* a következő egyenlőségek teljesülnek:

$$x^2y = x(xy) \quad \forall x, y \in \mathfrak{U}$$

és

$$yx^2 = (yx)x \quad \forall x, y \in \mathfrak{U}.$$

Ezeket a tulajdonságokat *jobb és bal alternáló axiómáknak* nevezzük. Természetesen minden asszociatív algebra alternáló.

Ezek azok az algebrák (Lie-, Jordan- és alternáló algebrák), amelyekről a legtöbbet tudunk. A strukturális tulajdonságaik sokszor modellül szolgálnak gyengébb azonosságok által definiált rendszerek tanulmányozásakor. Az algebráknak számos csoportja ismert ezeken kívül, úgymint a *hatványasszociatív algebrák*, ahol teljesül, hogy

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad m \geq 1 \text{ és } n \geq 1;$$

a *Leibniz-algebrák*, amelyben teljesül a *Leibniz-egyenlőség*

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] + [[a, c], b];$$

a *Vinberg-algebrák*, ahol minden $x, y, z \in V$ -re teljesül

$$x \cdot (y \cdot z) - (x \cdot y) \cdot z = y \cdot (x \cdot z) - (y \cdot x) \cdot z;$$

továbbá *Poisson-algebrák*, *kvadratikus algebrák*, *graduált algebrák* stb.

Ahogy az $[x, y] = xy - yx$ kommutátor segítségével a kommutativitást és annak hiányát mérhetjük egy $\mathfrak{A}$ algebrában, úgy egy algebra bármely három elemére értelmezett

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$$

asszociátorral az asszociativitást mérhetjük. Az asszociátor lineáris minden argumentumában.
A következo azonosság minden $\mathfrak{A}$ algebrában teljesül:

$$u(x, y, z) + (u, x, y)z = (ux, y, z) - (u, xy, z) + (u, x, yz) \quad \forall u, x, y, z \in \mathfrak{A}.$$

Egy $\mathfrak{A}$ algebra olyan g elemeinek halmazát, amelyek bármely $x, y \in \mathfrak{A}$ párral asszociatívak, vagyis

$$(g, x, y) = (x, g, y) = (x, y, g) = 0 \qquad \forall x, y \in \mathfrak{A},$$

az $\mathfrak{A}$ algebra $\mathfrak{G}$ *nukleusának* nevezzük. A $\mathfrak{G}$ asszociatív részalgebrája $\mathfrak{A}$ -nak.
Az $\mathfrak{A}$ olyan $c \in \mathfrak{A}$ elemeinek halmazát, amelyek minden elemmel kommutálnak és asszociatívak, az $\mathfrak{A}$ algebra $\mathfrak{C}$ *centrumának* nevezzük. A $\mathfrak{C}$ centrum kommutatív és asszociatív részalgebrája $\mathfrak{A}$ -nak.
Egy T test feletti $\mathfrak{A}$ algebrát *egyszerűnek* nevezünk, ha nem a triviális egydimenziós algebra és nincs valódi ideálja.
Egy T feletti $\mathfrak{A}$ algebrát *centrálisan egyszerűnek* nevezünk, ha $\mathfrak{A}_k$ egyszerű T-nek minden K bővítése esetén. Minden centrálisan egyszerű algebra egyszerű.
Egy T feletti $\mathfrak{A}$ algebrát *divizor algebrának* nevezünk, ha $\mathfrak{A} \neq 0$ és az

$$ax = b, \quad ya = b \quad (a \neq 0, \ b \in \mathfrak{A})$$

egyenletnek egyértelmű $x, y \in \mathfrak{A}$ megoldása van. Minden divizor algebra egyszerű. Minden $\mathfrak{A}$ asszociatív divizor algebrának van egységeleme. Ha $\mathfrak{A}$

$n \geq 1$ véges dimenziós T felett, $\mathfrak{A}$ pontosan akkor divizor algebra, ha nullosztómentes ($x \neq 0$ és $y \neq 0 \in \mathfrak{A} \Rightarrow xy \neq 0$).

A nemasszociatív algebrák tanulmányozásához előbb ismerjünk meg néhány fogalmat az asszociatív algebrákon!
Legyen T tetszőleges test és $\mathfrak{A}$ véges dimenziós asszociatív algebra T felett. Az $\mathfrak{A}$ egy x elemét *nilpotensnek* nevezzük, ha létezik olyan $t \in \mathbb{N}$, hogy $x^t = 0$. Az $\mathfrak{A}$ algebrának egyértelműen létezik $\mathfrak{N}$ maximális nilideálja, vagyis olyan maximális ideálja, amely csak nilpotens elemeket tartalmaz. Ezt az $\mathfrak{N}$ ideált $\mathfrak{A}$ *radikáljának* nevezzük. Továbbá $\mathfrak{N}$ nilpotens, vagyis létezik olyan $t \in \mathbb{N}$, hogy $\mathfrak{N}$ bármely t elemének $z_1 z_2 \dots z_t$ szorzata nulla. Tehát $\mathfrak{N}$ az $\mathfrak{A}$ egyetlen maximális nilpotens ideálja is. Modulo radikál az algebra féligegyszerű, vagyis az $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ faktoralgebra radikálja egyenlő nullával. Továbbá minden *féligegyszerű* asszociatív algebra egyértelműen kifejezhető egyszerű kétoldali ideálok $\mathfrak{S}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{S}_\mathfrak{r}$ direkt szorzataként. Wedderburn tétele szerint bármely $\mathfrak{S}$ egyszerű asszociatív algebra kifejezhető egy T feletti divizor algebra és a T_n n^2 dimenziós teljes mátrixalgebra $\mathfrak{D}_\mathfrak{n} = \mathfrak{D} \otimes T_n$ tenzorszorzataként, ahol n egyértelmű és $\mathfrak{D}$ izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott. Így minden T feletti féligegyszerű asszociatív algebra szerkezete ismert.
Egy T test feletti $\mathfrak{A}$ véges dimenziós algebrát *szeparábilisnak* nevezünk, ha T minden K bővítése esetén $\mathfrak{A}_K$ kifejezhető egyszerű ideálok direkt összegeként. Legyen $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ szeparábilis. Ekkor $\mathfrak{A}$-nak létezik $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}$ *Wedderburn-felbontása*, ahol $\mathfrak{S}$ az $\mathfrak{A}$ algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$-nel izomorf részalgebrája és $\mathfrak{S} + \mathfrak{N}$ egy vektortér direkt összeg. Minden szeparábilis algebrán értelmezett D deriválás *belső*, vagyis létezik olyan $x \in \mathfrak{A}$ elem, hogy $aD = ax - xa \quad \forall a \in \mathfrak{A}$.
Legyen e egy tetszőleges T test feletti $\mathfrak{A}$ asszociatív algebra idempotens eleme ($e^2 = e \neq 0$). Ekkor $\mathfrak{A}$ felírható

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{10} + \mathfrak{A}_{01} + \mathfrak{A}_{00}$$

vektortér direkt összegként, ahol $\mathfrak{A}_{\mathfrak{ij}}$ olyan $x_{ij} \in \mathfrak{A}$ elemeket tartalmaz, melyekre $ex_{ij} = ix_{ij},\ x_{ij}e = jx_{ij}$ $(i,j = 0,1)$ teljesül.
Az $\mathfrak{A}$ algebra ezt a felbontását *Peirce-felbontásnak* nevezzük. Lie - algebrákban nincs idempotens elem, így ott nem tudunk ilyen felbontást készíteni.

1.2. Az $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ asszociatív szorzásalgebra

Legyen u egy T test feletti $\mathfrak{U}$ algebra tetszőleges eleme. Az u által meghatározott R_u *jobb oldali szorzás*

$$R_u : x \mapsto xu \quad \forall x \in \mathfrak{U}$$

lineáris operátor $\mathfrak{U}$ -n. Az összes $\mathfrak{U}$ -n értelmezett jobb oldali szorzás $R(\mathfrak{U})$ halmaza altere az $\mathfrak{U}$ -n értelmezett összes lineáris operátor $\mathfrak{E}$ asszociatív algebrájának, mivel $u \mapsto R_u$ $\mathfrak{E}$ -be képező lineáris leképezés $\mathfrak{U}$ -n. (Ha $\mathfrak{U}$ asszociatív, akkor $R(\mathfrak{U})$ részalgebrája $\mathfrak{E}$ -nek.) Hasonlóan,

$$L_u : x \mapsto ux \quad \forall x \in \mathfrak{U},$$

jobb oldali szorzás lineáris operátor $\mathfrak{U}$-n, az $u \mapsto L_u$ leképezés lineáris, és az összes $\mathfrak{U}$-n értelmezett bal oldali szorzás $L(\mathfrak{U})$ halmaza altere $\mathfrak{E}$ -nek.
Jelöljük $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$-val az $R(\mathfrak{U}) \cup L(\mathfrak{U})$ *fedőalgebráját*, vagyis $\mathfrak{E}$-nek az $\mathfrak{U}$-n értelmezett, jobb és bal oldali szorzások által generált asszociatív részalgebráját. Az $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ algebra $\mathfrak{E}$ összes $R(\mathfrak{U})$-t és $L(\mathfrak{U})$-t is tartalmazó részalgebrájának a metszete. Elemei $\sum S_1 \ldots S_h$ alakban írhatók fel, ahol S_i az $\mathfrak{U}$-n értelmezett jobb vagy bal oldali szorzás. Az $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ asszociatív algebrát $\mathfrak{U}$ *szorzásalgebrájának* nevezzük. Az $\mathfrak{U}$ egy tetszőleges $\mathfrak{B}$ részhalmaza esetén, a $\mathfrak{B}$ elemei által meghatározott $\mathfrak{U}$-n értelmezett jobb és bal oldali szorzásokat lefedő algebrát $\mathfrak{B}^*$-gal jelöljük. Vagyis az összes $\sum S_1 \ldots S_h$ $\mathfrak{B}^*$ halmaza $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ részalgebrája, ahol S_i vagy az $\mathfrak{U}$ -n értelmezett $b_i \in \mathfrak{B}$ által meghatározott R_{b_i} jobb oldali szorzás, vagy L_{b_i}.

Tetszőleges T feletti $\mathfrak{U}$ algebra tartalmazza a részalgebráinak egy $\mathfrak{U}^{(1)} \supseteq \mathfrak{U}^{(2)} \supseteq \mathfrak{U}^{(3)} \supseteq \ldots$ derivált sorozatát , ahol $\mathfrak{U}^{(1)} = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^{(i+1)} = (\mathfrak{U}^{(i)})^2$. Az $\mathfrak{U}$ algebrát *feloldhatónak* nevezzük, ha $\mathfrak{U}^{(r)} = 0$ valamilyen r egész esetén.

1.1. Állítás. *Ha az $\mathfrak{U}$ algebra tartalmaz egy $\mathfrak{B}$ feloldható ideált, és $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}$ feloldható, akkor $\mathfrak{U}$ feloldható.*

1.2. Állítás. *Ha $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ feloldható ideáljai egy $\mathfrak{U}$ algebának, akkor $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ is feloldható ideálja $\mathfrak{U}$ -nak. Ezért, ha $\mathfrak{U}$ véges dimenziós, akkor egyértelműen* *létezik $\mathfrak{N}$ maximális feloldható ideálja. Továbbá, az egyetlen feloldható ideál $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ -ben* 0.

Egy $\mathfrak{A}$ algebrát *nilpotensnek* nevezünk, ha létezik olyan t egész, hogy $\mathfrak{A}$ elemeinek bármely t tagú szorzata $z_1 z_2 \dots z_t$, bárhogyan zárójelezve, 0. Minden nilpotens algebra feloldható.

1.2. Tétel. *Egy $\mathfrak{A}$ algebra $\mathfrak{B}$ ideálja pontosan akkor nilpotens, ha az $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ szorzásalgebra $\mathfrak{B}^*$ (asszociatív) részalgebrája nilpotens.*

1.3. Nyomformák

1.5. Definíció. *Egy tetszőleges $\mathfrak{A}$ algebrán definiált szimmetrikus (x, y) bilineáris alakot* NYOMFORMÁNAK*(asszociatív vagy invariáns szimmetrikus bilineáris alaknak) nevezünk $\mathfrak{A}$ -n, ha*

$$(xy, z) = (x, yz) \quad \forall\ x, y, z \in \mathfrak{A}.$$

Ha $\mathfrak{B}$ tetszőleges ideál egy $\mathfrak{A}$ algebrában, amelyen értelmezve van egy ilyen bilineáris alak, akkor $\mathfrak{B}^\perp = \{y|(x, y) = 0\ \forall x \in \mathfrak{B}\}$ is ideál $\mathfrak{A}$ -ban, mivel $x \in \mathfrak{B},\ y \in \mathfrak{B}^\perp,\ a \in \mathfrak{A}$ esetén xa és $ax \in \mathfrak{B}$, és

$$(x, ay) = (xa, y) = 0 \quad \text{és} \quad (x, ya) = (ya, x) = (y, ax) = 0.$$

Sőt, a nyomforma $\mathfrak{A}^\perp$ radikálja is ideál $\mathfrak{A}$ -ban.
Egy $\mathfrak{A}$ véges dimenziós algebrán értelmezett (x, y) bilineáris alakot *nemelfajulónak* nevezünk, ha teljesül, hogy a $(x, y) = 0$ minden $y \in \mathfrak{A}$ feltételből következik, hogy $x = 0$.

1.3. Tétel. *(Dieudonné) Legyen $\mathfrak{A}$ egy tetszőleges karakterisztikájú T test feletti véges dimenziós algebra, melyre teljesül*

(i) létezik egy nemelfajuló (asszociatív) (x, y) nyomforma $\mathfrak{A}$ -n, és

(ii) $\mathfrak{A}$ minden $\mathfrak{B} \neq 0$ ideáljára $\mathfrak{B}^2 \neq 0$.

Ekkor $\mathfrak{A}$ egyértelműen kifejezhető $\mathfrak{S}_i$ egyszeru ideálok $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{S}_t$ direkt összegeként.

A Lie-algebrák sokszor igen hasznos bilineáris formája a Killing-forma:

$$(x, y) = trR_xR_y \quad [= tr(ad(x))(ad(y))] \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}.$$

Egy $\mathfrak{L}$ Lie-algebra Killing-formája nyomforma $\mathfrak{L}$-n, és pontosan akkor nemelfajuló, ha $\mathfrak{L}$ féligegyszerű.

2. fejezet

Alternáló algebrák

2.1. Definíció és alapvető tulajdonságok

2.1. Definíció. *Egy T test feletti $\mathfrak{A}$ algebrát* ALTERNÁLÓ ALGEBRÁNAK *nevezünk, ha*

$$x^2y = x(xy), \quad yx^2 = (yx)x \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}.$$

Az asszociátor fogalmát felhasználva:

$$(x, x, y) = (y, x, x) = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}.$$

2.1. Állítás. *Az (x_1, x_2, x_3) asszociátor "alternál", vagyis 1, 2, 3 bármely σ permutációja esetén $(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, x_{3\sigma}) = (\mathrm{sgn}\sigma)(x_1, x_2, x_3)$.*

BIZONYÍTÁS. Elég bizonyítanunk, hogy

$$(x, y, z) = -(y, x, z) = (y, x, z) \quad \forall\ x, y, z \in \mathfrak{A} :$$

$$\begin{aligned}(x + y, x + y, z) &= (x, x, z) + (x, y, z) + (x, y, z) + (y, x, z) + (y, y, z) \\ &= (x, y, z) + (y, x, z) = 0,\end{aligned}$$

tehát $(x, y, z) = -(y, x, z)$. Hasonlóan, $(y, z, x) = -(y, x, z)$. □

Egy $\mathfrak{A}$ alternáló algebra tetszőleges $\mathfrak{A}_k$ skaláris bővítése is alternáló. Az asszociátorokkal kimondott egyenlőségekből következik, hogy egy $\mathfrak{A}$ alternáló algebrában

$$(x, y, x) = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}, \quad \text{vagyis} \quad (xy)x = x(yx) \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}.$$

Ezeket az egyenlőségeket FLEXIBILITÁSI AZONOSSÁGOKNAK nevezzük, linearizált alakja

$$(x, y, z) + (z, y, x) = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{A}.$$

A Bevezetésben definiált Lie-, Jordan - algebrák is flexibilisek.
Az alternáló algebrákban teljesülnek a *Moufang-egyenlőségek*:

$$(xax)y = x[a(xy)], \tag{2.1}$$

$$y(xax) = [(yx)a]x, \tag{2.2}$$

$$(xy)(ax) = x(ya)x \tag{2.3}$$

$\forall x, y, a \in \mathfrak{A}$.

Az alaptulajdonságok áttekintése után az alternáló algebrák két fontos típusát vezetem be:
Egy T feletti $\mathfrak{A}$ algebrát *hatvány-asszociatívnak* nevezünk, ha bármely $x \in \mathfrak{A}$ eleme által generált $T[x]$ részalgebrája asszociatív. Ez ekvivalens azzal, hogy minden $x \in \mathfrak{A}$ elem hatványát rekurzív módon $x^1 = x$, $x^{i+1} = xx^i$ -nek definiáljuk, és megköveteljük, hogy $x^i x^j = x^{i+j}$ $\forall\, x, y \in \mathfrak{A}$ $(i, j = 1, 2, 3, \dots)$.

2.1. Tétel. *(Artin tétele) Egy $\mathfrak{A}$ alternáló algebra bármely két eleme által generált részalgebrája asszociatív.*

Artin tételéből következik, hgy minden alternáló algebra hatvány-asszociatív, továbbá $R_x{}^j = R_{x^j}$, $L_x{}^j = L_{x^j}$ $\forall x \in \mathfrak{A}$.
Egy $\mathfrak{A}$ hatvány-asszociatív algebra x elemét *nilpotensnek* nevezzük, ha létezik egy olyan r egész, hogy $x^r = 0$. Egy csupa nilpotens elemeket tartalmazó algebrát (ideált) *nilalgebrának (nilideálnak)* nevezünk.

2.2. Tétel. *Minden T test feletti véges dimenziós $\mathfrak{A}$ alternáló algebra nilpotens.*

2.2. Alternáló algebrák radikálja, féligegyszerű alternáló algebrák

Minden nilpotens algebra feloldható, és minden feloldható hatvány-asszociatív algebra nilalgebra. Az előző tételből következik, hogy véges dimenziós al-

ternáló algebrák esetében a nilpotens algebra, feloldható algebra, és a nilalgebra fogalma megegyezik. Így minden véges dimenziós $\mathfrak{U}$ alternáló algebrában egyértelműen létezik egy $\mathfrak{N}$ maximális nilpotens ideál (=feloldható ideál = nilideál), amit *radikálnak* nevezünk.
Az $\mathfrak{U}$ algebrát *féligegyszerűnek* nevezzük, ha radikálja 0.
Tetszőleges $\mathfrak{U}$ algebra egy e elemét *idempotensnek* neveztük, ha $e^2 = e \neq 0$.

2.2. Állítás. *Minden $\mathfrak{U}$ véges dimenziós hatvány-asszociatív algebra, amely nem nilpotens, tartalmaz $e(\neq 0)$ idempotens elemet.*

Egy $\mathfrak{U}$ alternáló algebra egy z eleme *valódi nilpotens* ($\mathfrak{U}$-ban), ha zu nilpotens minden $u \in \mathfrak{U}$-ra. Ez pontosan akkor teljesül, ha uz is nilpotens minden $u \in \mathfrak{U}$ esetén, mivel Artin tétele miatt $(uz)^{m+1} = u(zu)^m z$, stb. Ha z valódi nilpotens, akkor z nilpotens (mivel z^2 is az).
Jelöljük egy $\mathfrak{U}$ algebra valódi nilpotens elemeinek halmazát $\mathfrak{P}$ -vel. Könnyen láthatjuk, hogy $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{P}$, mivel $z \in \mathfrak{N}$ esetén zu is $\in \mathfrak{N}$ minden $u \in \mathfrak{U}$-ra, tehát zu nilpotens minden $u \in \mathfrak{U}$ esetén.
Tetszőleges $\mathfrak{U}$ egységelemes algebrában egy x elemnek létezik *inverze*, ha található olyan $x^{-1} \in \mathfrak{U}$, melyre $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Egy alternáló algebrában, ha x -nek van inverze, akkor az egyértelmű, és $(x, x^{-1}, y) = 0$ teljesül. Ha egy $\mathfrak{U}$ egységelmes, alternáló algebrában minden nemnulla elemnek van inverze, akkor $\mathfrak{U}$ divizor algebra.

2.1. Lemma. *Legyen $\mathfrak{U}$ a T test feletti véges dimenziós egységelemes alternáló algebra, és legyen 1 az egyetlen idempotens elem $\mathfrak{U}$ -ban. Ekkor $\mathfrak{U}$ minden z eleme vagy valódi nilpotens vagy van $z^{-1} \in \mathfrak{U}$ inverze. Az $\mathfrak{U}$ valódi nilpotens elemeinek $\mathfrak{P}$ halmaza $\mathfrak{U}$ ideálja.*

Egy tetszőleges $\mathfrak{U}$ algebra egy e idempotens eleme *primitív*, ha nem léteznek olyan $u, v \in \mathfrak{U}$ $(uv = vu = 0)$ ortogonális idempotens elemek, melyekre $e = u + v$.
Véges dimenziós $\mathfrak{U}$ algebrában bármely e idempotens elem felírható páronként ortogonális e_i primitív idempotens elemek $e = e_1 + \cdots + e_t$ öszegeként.
Egy T feletti $\mathfrak{U}$ algebra e idempotens eleme *elsődleges*, ha nem létezik olyan $u \in \mathfrak{U}$ idempotens elem, amely orthogonális e-re $(u^2 = u \neq 0,\ ue = eu = 0)$.

A 2.1 Állítás szerint véges dimenziós $\mathfrak{A}$ alternáló algebrában e pontosan akkor elsődleges idempotens eleme, ha az e-re vonatkozó Peirce-felbontásban szereplo $\mathfrak{A}_{00}$ részalgebra nilalgebra. Ha e nem elsődleges, akkor létezik egy olyan $u \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{oo}}$ idempotens elem, melyre $e' = e + u$ is idempotens, és $\mathfrak{A}_{\mathfrak{11},\mathfrak{e}'}$ (az e'-re vonatkozó $\mathfrak{A}_{\mathfrak{11}}$) részalgebrája az $\mathfrak{A}_{\mathfrak{11},\mathfrak{e}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{11}}$ -nek. Mivel $x_{11} \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{11}}$, következik

$$x_{11}e' = x_{11}(e + u) = x_{11}e + x_{11}u = x_{11},$$

és hasonlóan $e'x_{11} = x_{11}$, vagyis $x_{11} \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{11},\mathfrak{e}'}$. Így $\mathfrak{A}_{\mathfrak{11},\mathfrak{e}} \subseteq \mathfrak{A}_{\mathfrak{11},\mathfrak{e}'}$. De $u \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{11},\mathfrak{e}'}$, $u \notin \mathfrak{A}_{\mathfrak{11},\mathfrak{e}}$. Ezért $\dim\mathfrak{A}_{\mathfrak{11},\mathfrak{e}} < \dim \mathfrak{A}_{\mathfrak{11},\mathfrak{e}'}$. Ez az egymásba skatulyázó folyamat egyszer véget ér, és így megkapjuk az elsődleges idempotens elemet.
Ha u egy $\mathfrak{A}$ véges dimenziós alternáló algebra tetszőleges idempotens eleme, akkor léteznek olyan $e_1, \ldots, e_r, \ldots, e_t \in \mathfrak{A}$ $(1 \leq r \leq t)$ páronként ortogonális primitív idempotens elemek, hogy $u = e_1 + \cdots + e_r$, míg $e = e_1 + \cdots + e_t$ $\mathfrak{A}$-nak elsődleges idempotens eleme.

2.3. Tétel. (Zorn) *Tetszőleges $\mathfrak{A}$ véges dimenziós alternáló algebra $\mathfrak{N}$ radikálja (=maximális nilideálja) az $\mathfrak{A}$ valódi nilpotens elemeinek $\mathfrak{P}$ halmaza.*

2.1. Következmény. *Legyen e egy $\mathfrak{A}$ véges dimenziós alternáló algebra idempotens eleme és $\mathfrak{N}$ az $\mathfrak{A}$ radikálja. Tekintsük $\mathfrak{A}$ -nak az e-re vonatkozó Peirce -felbontását. Ekkor $\mathfrak{A}_{\mathfrak{ii}}$ radikálja $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}_{\mathfrak{ii}}$ $(i = 0, 1)$.*

2.2. Következmény. *Legyen e egy $\mathfrak{A}$ véges dimenziós alternáló algebra elsődleges idempotens eleme és tekintsük $\mathfrak{A}$ -nak az e-re vonatkozó Peirce-felbontását. Ekkor az $\mathfrak{A}$ algebra $\mathfrak{N}$ radikálja tartalmazza $\mathfrak{A}_{\mathfrak{1o}} + \mathfrak{A}_{\mathfrak{o1}} + \mathfrak{A}_{\mathfrak{oo}}$ -t.*

2.4. Tétel. *Minden $\mathfrak{A} \neq 0$ véges dimenziós féligegyszerű alternáló algebrának létezik kétoldali egységeleme,1.*

BIZONYÍTÁS. Mivel $\mathfrak{A}$ nem nilalgebra, $\mathfrak{A}$ tartalmaz e elsődleges idempotens elemet. Tekintsük $\mathfrak{A}$ -nak az e-re vonatkozó Peirce-felbontását. A 2.2 Következmény miatt $\mathfrak{A}_{\mathfrak{1o}} + \mathfrak{A}_{\mathfrak{o1}} + \mathfrak{A}_{\mathfrak{oo}} \subseteq \mathfrak{N} = 0$, így $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{11}} = e\mathfrak{A}e$. Vagyis, $e = 1$. □

2.3. Következmény. *Minden $\mathfrak{A}$ véges dimenziós egyszerű alternáló algebrának van 1 egységeleme. Az $\mathfrak{A}$ algebra $\mathfrak{C}$ centruma test, és $\mathfrak{A}$ véges dimenziós (centrálisan egyszerű, alternáló) algebra $\mathfrak{C}$ felett.*

2.5. Tétel. (Zorn) *Egy $\mathfrak{A} \neq 0$ véges dimenziós alternáló algebra pontosan akkor féligegyszerű, ha $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{S}_t$, ahol $\mathfrak{S}_i$ egyszerű ideál minden $i = 1, \ldots, t$-re.*

Ha e_i egységeleme $\mathfrak{S}_i$ -nek ($i = 1, \ldots, t$), akkor 1 felírható $1 = e_1 + \cdots + e_t$ páronként ortogonális idempotens elemek összegeként, amelyek primitívek az $\mathfrak{A}$ algebra $\mathfrak{C}$ centrumában. $\mathfrak{C}$ pedig felírható $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{C}_t$ alakban, ahol $\mathfrak{C}_i$ az $\mathfrak{S}_i$ centruma ($i = 1, \ldots, t$). Ha a 2.5 Tételt megszorítjuk 0 karakterisztikájú testekre, Dieudonné tételének segítségével könnyen beláthatjuk:

2.3. Állítás. *Tetszőleges 0 karakterisztikájú T test feletti $\mathfrak{A}$ véges dimenziós alternáló algebra $\mathfrak{N}$ radikálja az $(x, y) = trR_xR_y$ nyomforma $\mathfrak{A}^\perp$radikálja.*

Bizonyítás. Az (x, y) nyilvánvalóan bilineáris forma $\mathfrak{A}$ -n. A fejezet elején beláttuk, hogy az alternáló algebrákban az asszociátor alternáló, vagyis

$$\begin{aligned} R_xR_y - R_{xy} &= L_{xy} - L_yL_x = L_yR_x - R_xL_y \\ &= L_xL_y - L_{yx} = R_yL_x - L_xR_y = R_{yx} - R_yR_x \end{aligned}$$

minden $x, y \in \mathfrak{A}$-ra. Ebből következik, hogy

$$R_{xy}R_z - R_xR_{yz} = [R_x, L_y]R_z + R_x[R_z, L_y] = [R_xR_z, L_y],$$

így

$$(xy, z) - (x, yz) = trR_{xy}R_z - trT_xR_{yz} = 0$$

minden $x, y, z \in \mathfrak{A}$ esetén. Ezért $\mathfrak{A}^\perp$ ideál. Ha létezne e idempotens elem $\mathfrak{A}^\perp$ -ben, akkor

$$0 = (e, e) = tr{R_e}^2 = trR_e = \dim(\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{01}) \neq 0,$$

ami ellentmondás. Ezért $\mathfrak{A}^\perp$ nilideál $\subseteq \mathfrak{N}$. Ha $x \in \mathfrak{N}$, akkor xy nilpotens minden $y \in \mathfrak{A}$-ra. Ekkor tudjuk, hogy R_{xy} is nilpotens, mivel ${R_x}^j = R_{x^j}$, ${L_x}^j = L_{x^j}$ minden $x \in \mathfrak{A}$ esetén. Így

$$(x, y) = trR_xR_y = trR_{xy} + tr[L_y, R_x] = 0.$$

Vagyis $x \in \mathfrak{A}^\perp$, és így $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}^\perp$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}^\perp$. □

Tehát $\mathfrak{A}$ (0 karakterisztikájú) pontosan akkor féligegyszerű, ha (x, y) nemelfajuló.

2.3. A Cayley - algebrák

2.2. Definíció. *Egy $\mathfrak{A}$ algebra* INVOLÚCIÓJA *olyan $\mathfrak{A}$ -n értelmezett $x \to \bar{x}$ lineáris operátor, melyre*

$$\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}, \quad \bar{\bar{x}} = x \quad \forall\ x, y\ \in \mathfrak{A}.$$

Tekintsük azokat az involúciókat, melyekre teljesül

$$x + \bar{x} \in T1, \quad x\bar{x}(= \bar{x}x) \in T1 \quad \forall\ x \in \mathfrak{A}.$$

Ekkor

$$x^2 - t(x)x + n(x)1 = 0, \quad t(x), \quad n(x)\ \in T, \tag{2.4}$$

ahol

$$x + \bar{x} = t(x)1, \quad x\bar{x}(= \bar{x}x) = n(x)1 \ \ \forall\ x\ \in \mathfrak{A}. \tag{2.5}$$

Mivel $x \to \bar{x}$ lineáris, az x elem $t(x)$ *nyoma* lineáris. Az $n(x)$ függvényt az x *normájának* nevezzük. Mivel $\bar{1} = 1$, minden $\alpha \in T$ -re $t(\alpha 1) = 2\alpha$ és $n(\alpha 1) = \alpha^2$. Legyen $\mathfrak{B}$ egy T feletti, n dimenziós, egységelemes algebra, melyen értelmezve van egy $b \to \bar{b}$ involúció a fent megadott $t(x)$ és $n(x)$ -szel. Ekkor a *Cayley-Dickson eljárás* szerint konstruálunk egy olyan T feletti $2n$-dimenziós $\mathfrak{A}$ algebrát, mely ugyanezeket a feltételeket teljesíti, és $\mathfrak{B}$ -t, mint részalgebrát tartalmazza ($1 \in \mathfrak{B}$): $\mathfrak{A}$ tartalmazza az összes $x = (b_1, b_2)$, $b_i \in \mathfrak{B}$ rendezett párt, ahol az összeadást és a skalárral való szorzást komponensenként, a szorzást pedig így definiáljuk:

$$(b_1, b_2)(b_3, b_4) = (b_1 b_3 + \mu b_4 \bar{b}_2, \bar{b}_1 b_4 + b_3 b_2) \quad \forall b_i \in \mathfrak{B}, \quad \mu \neq 0 \in T. \tag{2.6}$$

Ekkor $1 = (1, 0)$ az $\mathfrak{A}$ egységeleme, $\mathfrak{B}' = \{(b, 0) | b \in \mathfrak{B}\}$ az $\mathfrak{A}$ algebra $\mathfrak{B}$-vel izomorf részalgebrája, $v = (0, 1)$ olyan eleme $\mathfrak{A}$ -nak, melyre $v^2 = \mu 1$, és $\mathfrak{A}$ a az n -dimenziós $\mathfrak{B}'$ és $v\mathfrak{B}'$ vektorterek $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}' + v\mathfrak{B}'$ direkt összege. Ha $\mathfrak{B}'$ -t azonosítjuk $\mathfrak{B}$ -vel, akkor $\mathfrak{A}$ elemei felírhatók $x = b_1 + vb_2$ alakban, ahol x egyértelműen meghatározza $b_i \in \mathfrak{B}$ -t, és a szorzás $\forall b_i \in \mathfrak{B}$ és valamely $\mu \neq 0 \in T$ esetén

$$(b_1 + vb_2)(b_3 + vb_4) = (b_1 b_3 + \mu b_4 \bar{b}_2) + v(\bar{b}_1 b_4 + b_3 b_2). \tag{2.7}$$

Definiáljuk $\bar{x} = \bar{b}_1 - vb_2$ -t, ekkor $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$, mivel $b \to \bar{b}$ involúció $\mathfrak{B}$ -n, így $x \to \bar{x}$ involúció $\mathfrak{U}$ -n. Teljesül (2.3) és itt

$$t(x) = t(b_1), \quad n(x) = n(b_1) - \mu n(b_2).$$

Mikor lesz $\mathfrak{U}$ alternáló? Mivel $\mathfrak{U}$ önmaga reciproka, elegendő a bal alternáló axiómát igazolnunk, amely ekvivalens $(x, \bar{x}, y) = 0$ azonossággal, mivel

$$(x, \bar{x}, y) = (x, t(x)1 - x, y) = -(x, x, y).$$

2.4. Állítás. *Az $\mathfrak{U}$ algebra pontosan akkor alternáló, ha $\mathfrak{B}$ asszociatív.*

BIZONYÍTÁS. Artin tétele miatt

$$\begin{aligned}(x, \bar{x}, y) &= n(x)y - (b_1 + vb_2)[(\bar{b}_1 b_3 - \mu b_4 \bar{b}_2) + v(b_1 b_4 - b_3 b_2)] \\ &= n(x)y - [b_1(\bar{b}_1 b_3) - \mu b_1(b_4 \bar{b}_2) + \mu(b_1 b_4)\bar{b}_2 - \mu(b_3 b_2)\bar{b}_2] \\ &\quad - v[\bar{b}_1(b_1 b_4) - \bar{b}_1(b_3 b_2) + (\bar{b}_1 b_3)b_2 - \mu(b_4 \bar{b}_2)b_2] \\ &= n(x)y - [n(b_1) - \mu n(b_2)](b_3 + vb_4) - \mu(b_1, b_4, \bar{b}_2) - v(\bar{b}_1, b_3, b_2) \\ &= -\mu(b_1, b_4, \bar{b}_2) - (v(\bar{b}_1, b_3, b_2)\end{aligned}$$

A Moufang-egyenlőségek segítségével belátható, hogy ha $\mathfrak{U}$ egységelemes alternáló algebra és $\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{U}$-nak olyan részalgebrája, melyben adott egy $b \to \bar{b}$ involúció és $v \in \mathfrak{U}$ -ra $bv = vb \ \ \forall b \in \mathfrak{B}$ és $v^2 = \mu 1$ ($\mu \in T$), akkor $\mathfrak{B} + v\mathfrak{B}$ -ben a szorzásra teljesül a (2.3) egyenlőség.

Legyen a T test feletti $\mathfrak{Z}$ olyan 2-dimenziós algebra, melyre vagy $\mathfrak{Z} = T \oplus T$, vagy a $\mathfrak{Z} = T(s)$ T feletti szeparábilis négyzetes test. Mindkét esetben, $\mathfrak{Z} = T1 + Ts$, ahol $s^2 = s + \alpha 1$, $4\alpha + 1 \neq 0$. A második esetben $X^2 - X - \alpha$ irreducibilis $T[X]$-ben. Ekkor egyértelműen létezik egy az identitástól különböző involúció $\mathfrak{Z}$ -n, mely teljesíti (2.3)-at. Így $\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}$-ből kiindulva ezzel az iteráló eljárással T feletti 2^t dimenziójú algebrákat kaphatunk, melyeket kizárólag α és az egymás után következő lépésekben használt $t - 1$ darab $\mu_2, \ldots, \mu_t$ nemnulla skalár határoz meg.

Az így kapott 4-dimenziós $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z} + v_2\mathfrak{Z}$ algebrák asszociatív centrálisan egyszerű algebrák (*kvaternió algebrák*) T felett. $\mathfrak{Q}$ izomorf az összes T feletti 2×2 -es mátrix algebrájával.

A 8-dimenziós $\mathfrak{C} = \mathfrak{Q} + v_3\mathfrak{Q}$ algebrákat a T feletti *Cayley-algebráknak* nevezzük. Mivel $\mathfrak{Q}$ asszociatív, a Cayley- algebrák alternálók. Ugyanakkor, a Cayley-algebrák nem asszociatívak, ugyanis $\mathfrak{Q}$ nem kommutatív és léteznek olyan $q_1, q_2 \in \mathfrak{Q}$, melyekre $[q_1, q_2] \neq 0$; ezért

$$(v_3, q_2, q_1) = (v_3q_2)q_1 - v_3(q_2q_1) = v_3[q_1, q_2] \neq 0.$$

Ez abból következik, hogy minden $a, b \in \mathfrak{B}$-re, ahol $\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{U}$ -nak egy fent meghatározott részalgebrája:

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{a}, \bar{b}, v) + (\bar{a}, v, \bar{b}) = (\bar{a}\bar{b})v - \bar{a}(\bar{b}v) + (\bar{a}v)b - \bar{a}(v\bar{b}) \\ &= v(ba) + (\bar{a}v)[\bar{b} - t(b)1] = v(ba) - (va)b. \end{aligned}$$

Így ez az iteráló eljárás a harmadik lépés után nem folytatható tovább. Tetszőleges, nem 2 karakterisztikájú $\mathfrak{C}$ algebra szorzótáblája:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_2	u_2	μ_1u_1	$-u_4$	$-\mu_1u_3$	$-u_6$	$-\mu_1u_5$	u_8	μ_1u_7
u_3	u_3	u_4	μ_2u_1	μ_2u_2	$-u_7$	$-u_8$	$-\mu_2u_5$	$-\mu_2u_6$
u_4	u_4	μ_1u_3	$-\mu_2u_2$	$-\mu_1\mu_2u_1$	$-u_8$	$-\mu_1u_7$	μ_2u_6	$\mu_1\mu_2u_5$
u_5	u_5	u_6	u_7	u_8	μ_3u_1	μ_3u_2	μ_3u_3	μ_3u_4
u_6	u_6	μ_1u_5	u_8	μ_1u_7	$-\mu_3u_2$	$-\mu_1\mu_3u_1$	$-\mu_3u_4$	$-\mu_1\mu_3u_3$
u_7	u_7	$-u_8$	μ_2u_5	$-\mu_2u_6$	$-\mu_3u_3$	μ_3u_4	$-\mu_2\mu_3u_1$	$\mu_2\mu_3u_2$
u_8	u_8	$-\mu_1u_7$	μ_2u_6	$-\mu_1\mu_2u_5$	$-\mu_3u_4$	$\mu_1\mu_3u_3$	$-\mu_2\mu_3u_2$	$\mu_1\mu_2\mu_3u_1$

Egy $\mathfrak{C}$ Cayley-algebra pontosan akkor divizor algebra, ha $n(x) \neq 0$ minden $x \neq 0 \ \in \mathfrak{C}$ esetén.

Megjegyzés: Léteznek 1, 2, 4, 8-dimenziós valós alternáló divizor algebrák. Ha T a valós számok által alkotott test, $x = \sum \alpha_i u_i$ esetén legyen $n(x) = \sum {\alpha_i}^2$. Ez teljesíti az előbb megadott feltételt. Ekkor $T1$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{C}$ ezzel a normával alternálók (válasszuk μ_i-t minden lépésnél (-1)-nek).
1958 -ban Michel Kervaire és John Milnor bizonyították, hogy véges dimenziós valós divizor algebra csak 1, 2, 4 vagy 8-dimenziójú lehet. Nem igaz

azonban, hogy csak a fent felsorolt négy csoport tartozik ide, mivel csak a véges dimenziós valós alternáló divizor algebrákat soroltuk fel.

A $T1$ részalgebra egy Cayley-algebra nukleusa és centruma is egyben. Minden Cayley-algebra egyszerű (és T felett centrálisan egyszerű).
Tetszőleges T test felett létezik olyan Cayley-algebra, amelyben van nullosztó (válasszuk $\mu = 1$ és $v^2 = 1$ -t). Ezt a Cayley -algebrát *szétváló (split) Cayley-algebrának* nevezzük.

2.6. Tétel. (Zorn) *Egy T test feletti véges dimenziós centrálisan egyszerű alternáló algebrák éppen a T feletti 8-dimenziós Cayley-algebrák és az $(mn)^2$-dimenziós $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{D} \otimes T_n$ algebrák, ahol $\mathfrak{D}$ a T feletti m^2 dimenziós centrálisan asszociatív divizor algebra és T_n az n^2 dimenziós teljes mátrixalgebra.*

2.4. Egyszerű alternáló algebrák

Feltesszük, hogy $\mathfrak{U}$ véges dimenziós egyszerű alternáló algebra tetszőleges T test felett. Ekkor $\mathfrak{U}$ tartalmaz 1 egységelemet. Ha 1 primitív idempotens eleme $\mathfrak{U}$ -nak, akkor a 2.1 Lemma miatt $\mathfrak{U}$ divizor algebra.

2.2. Lemma. *Legyen $\mathfrak{U}$ véges dimenziós egyszerű alternáló algebra, és $e \neq 1$ egy idempotens eleme. Tekintsük $\mathfrak{U}$-nak e-re vonatkozó Peirce-felbontását. Ekkor $e\mathfrak{U}e = \mathfrak{U}_{10}\mathfrak{U}_{01}$ asszociatív.*

2.3. Lemma. *Legyen $\mathfrak{U}$ véges dimenziós egyszerű alternáló algebra, és legyen $1 = e_1 + \cdots + e_t$, ahol e_i páronként ortogonális idempotens elemek $(i = 1, \ldots, t)$. Ha $t \geq 3$, akkor $\mathfrak{U}$ asszociatív.*

2.4. Lemma. *Legyen $\mathfrak{U}$ tetszőleges T test feletti véges dimenziós egyszerű alternáló algebra, melyre teljesül:*

(i) $1 = e_1 + e_2$, *ahol e_i (orthogonális) primitív idempotens elemek;*

(ii) $\mathfrak{U}_{ii}\ (= e_i\mathfrak{U}e_i) = Te_i \quad (i = 1, 2)$;

(iii) $\mathfrak{U}$ *nem asszociatív.*

Ekkor $\mathfrak{U}$ *az egyetlen szétváló Cayley-algebra* T *felett:* $\mathfrak{U} = \mathfrak{Q} + v\mathfrak{Q}$*, ahol* $\mathfrak{Q} \cong F_2$ *(a* T *feletti* 2×2 *-es mátrixok algebrája),* $\mathfrak{U}$*-n a szorzást a (2.5) szerint definiáljuk és* $\mu = 1$.

3. fejezet

Jordan-algebrák

3.1. Definíció. *A T test feletti (kommutatív) $\mathfrak{J}$* Jordan-algebra *olyan kommutatív algebra, amelyben teljesül még a Jordan-egyenloség is:*

$$(xy)x^2 = x(yx^2) \quad \forall\ x, y \in \mathfrak{J}. \tag{3.1}$$

A fejezet során feltesszük, hogy $\mathfrak{J}$ nem 2 karakterisztikájú.
Nyilvánvaló, hogy minden kommutatív asszociatív algebra Jordan-algebra. Ha behelyettesítjük $x' := x + \lambda z$ ($\lambda \in T$)-et az$(x, y, x^2) = 0$ azonosságba, másodfokú polinomot kapunk, amely tetszőleges $\lambda \in T$ esetén 0. Ezért ez a polinom háromnál nagyobb elemszámú testek esetén a nullpolinom, vagyis λ együtthatójának 0-nak kell lennie:

$$2(x, y, zx) + (z, y, x^2) = 0 \quad \forall\ x, y, z \in \mathfrak{J} \tag{3.2}$$

Helyettesítsük most (4.2)-be $x'' = x + \lambda w$ ($\lambda \in F$)-et, ekkor (2-vel való osztás után) kapjuk

$$(x, ywz) + (w, y, zx) + (z, y, xw) = 0 \quad \forall\ w, x, y, z \in \mathfrak{J}. \tag{3.3}$$

Mivel $\mathfrak{J}$ kommutatív, $L_a = R_a$, így (3.3) ekvivalens a következő két egyenlőséggel: Minden $x, y, z \in \mathfrak{J}$-re

$$[R_x, R_{wz}] + [R_w, R_{zx}] + [R_z, R_{xw}] = 0 \quad \forall\ w, x, z \in \mathfrak{J} \tag{3.4}$$

$$R_z R_{xy} - R_z R_y R_x + R_y R_{zx} - R_{y(zx)} + R_x R_{zy} - R_x R_y R_z = 0. \tag{3.5}$$

Cseréljük fel x-et és y-t (3.5)-ben és vonjuk ki (3.5)-bol. Így kapjuk

$$[R_z, [R_x, R_y]] = R_{(x,z,y)} = R_{z[R_x,R_y]} \quad \forall\ x, y, z\ \in \mathfrak{J}. \tag{3.6}$$

A (3.6) szerint az $[R_x, R_y]$ operátor deriválás $\mathfrak{J}$-n minden $x, y, \in \mathfrak{J}$ esetén, mivel egy tetszőleges $\mathfrak{U}$ algebrán értelmezett D deriválást definiáló feltétel felírható a következő alakban is:

$$[R_z, D] = R_{zD} \quad \forall\ z \in \mathfrak{U}.$$

Igazolni szeretnénk, hogy minden $\mathfrak{J}$ Jordan-algebra hatvány-asszociatív. Definiáljuk x hatványait $x^1 = x,\ x^{i+1} = xx^i$-nek, és igazoljuk, hogy

$$x^i x^j = x^{i+j} \quad \forall\ x\ \in \mathfrak{J}. \tag{3.7}$$

Tetszőleges $x \in \mathfrak{J}$ esetén legyen $\mathfrak{G}_x = \{R_x\} \cup \{R_{x^2}\}$. Ekkor az $\mathfrak{G}_x^*$ fedőalgebra kommutatív, mivel az $R_x,\ R_{x^2}$ generátorok (3.1) szerint kommutálnak.
Ha $i \geq 2$, (3.5) -be írjunk $y = x,\ z = x^{i-1}$-et. Ekkor

$$R_{x^{i+1}} = R_{x^{i-1}} R_{x^2} - R_{x^{i-1}} {R_x}^2 - {R_x}^2 R_{x^{i-1}} + 2 R_x R_{x^i} \tag{3.8}$$

Indukcióval láthatjuk, hogy $R_{x^i} \in {\mathfrak{G}_x}^*$ minden $i = 3, 4, \ldots$-re. Így

$$R_{x^i} R_{x^j} = R_{x^j} R_{x^i} \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Tegyük fel, hogy $x^i x^{j+1} = x^{i+j+1}$. Ekkor

$$x^{i+1} x^j = (xx^i) x^j = x R_{x^i} R_{x^j} = x R_{x^j} R_{x^i} = x^{j+1} x^i = x^{i+j+1}.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\{abc\} = (ab)c + (bc)a - (ac)b.$$

Ha $\mathfrak{U}$ asszociatív, akkor $\mathfrak{U}^+$-ban teljesül $\{aba\} = 2(b \cdot a) \cdot a - b \cdot a^2 = aba$, és így $\{aba\}^2 = aba^2ba = \{a\{ba^2b\}a\}$. Tehát $\{aba\}^2 = \{a\{ba^2b\}a\}$ fennáll minden speciális Jordan-algebrában. Azonban bizonyított, hogy bármely két elem által generált szabad Jordan-algebra speciális. Ezért ez a kétváltozós azonosság tetszőleges Jordan-algebrára igaz. Az

$$\{\{aba\}c\{aba\}\} = \{a\{b\{aca\}b\}a\}$$

egyenlőség is teljesül minden Jordán - algebrában.

A 2.2 Tételhez hasonlóan, Jordan-algebrákra a következő tételt mondhatjuk ki:

3.1. Tétel. (Albert) *Minden véges dimenziós (nem 2 karakterisztikájú)* $\mathfrak{J}$ *Jordan-nilalgebra nilpotens.*

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges véges dimenziós $\mathfrak{J}$ Jordan-algebrának egyértelműen létezik egy maximális $\mathfrak{N}$ nilpotens (= feloldható = nil) ideálja, amelyet $\mathfrak{J}$ *radikáljának* nevezzük. $\mathfrak{J}$ -t *féligegyszerunek* nevezzük, ha $\mathfrak{N} = 0$. A $\mathfrak{J}/\mathfrak{N}$ faktoralgebra féligegyszerű.

3.1. Állítás. *Legyen* $\mathfrak{J}$ *egy nem 2 karakterisztikájú Jordan-algebra, és* x *egy nilpotens eleme. Ekkor* R_x *nilpotens.*

Legyen e a $\mathfrak{J}$ Jordán - algebra idempotens eleme. Írjuk fel (3.8)-at $i = 2$ és $x = e$ -re:

$$R_e{}^3 - 3R_e{}^2 + R_e = 0;$$

vagyis, R_e gyöke az $f(\lambda) = (\lambda - 1)(2\lambda - 1)\lambda$ polinomnak. Ezért R_e minimálpolinomja osztja $f(\lambda)$-t, így R_e lehetséges sajátértékei 1, $\frac{1}{2}$, 0 (1 mindenképp sajátérték, mivel e az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor: $eR_e = e^2 = e \neq 0$). Az R_e minimálpolinomjának egyszeresek a gyökei. Ezért $\mathfrak{J}$ felírható

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{J}_0, \tag{3.9}$$

vektortér direkt összegként, ahol

$$\mathfrak{J}_i = \{x_i | x_i e = i x_i\}, \quad i = 1,\ \frac{1}{2},\ 0.$$

Válasszunk $\mathfrak{J}$-nek egy a (3.13)-ban definiált Peirce-felbontásnak megfelelő bázist. Ekkor R_e-nek ebben a bázisban felírt mátrixa a
$\mathrm{diag}\{1, 1, \ldots, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0\}$ diagonális mátrix, ahol $\dim\mathfrak{J}_1 (> 0)$ darab 1 és $\dim\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ darab $\frac{1}{2}$ szerepel. Ezért

$$\mathrm{tr}R_e = \dim\mathfrak{J}_1 + \frac{1}{2}\dim\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}. \tag{3.10}$$

Ha T 0 karakterisztikájú, akkor $trR_e \neq 0$.

3.2. Tétel. (Albert) *Bármely 0 karakterisztikájú T test feletti véges dimenziós $\mathfrak{J}$ Jordan-algebra $\mathfrak{N}$ radikálja a nyomforma $\mathfrak{N}^\perp$ radikálja*

$$(x,y) = trR_{xy} \quad \forall\ x,y \in \mathfrak{J}. \tag{3.11}$$

Bizonyítás. Tetszőleges karakterisztikájú T-re (3.6)-ból következik , hogy (x,y) nyomforma:

$$(xy,z) - (x,yz) = trR_{(x,y,z)} = tr[R_z,[R_x,R_y]] = 0,$$

mivel minden kommutátor nyomformája 0. Így $\mathfrak{J}^\perp$ ideálja $\mathfrak{J}$-nek. Ha $\mathfrak{J}^\perp$ nem lenne nilideál, akkor a 2.1 állítás miatt $\mathfrak{J}^\perp$ tartalmazna egy e ($\neq 0$) idempotens elemet és feltéve, hogy T 0 karakterisztikájú, (3.10) miatt $(e,e) = trR_e \neq 0$, ami ellentmondás. Ezért $\mathfrak{J}^\perp$ nilideál és $\mathfrak{J}^\perp \subseteq \mathfrak{N}$.
Másrészt, ha $x \in \mathfrak{N}$, akkor $xy \in \mathfrak{N}\ \forall y \in \mathfrak{J}$, és a 3.1 Állítás miatt R_{xy} nilpotens. Így $(x,y) = trR_{xy} = 0\ \forall\ y \in \mathfrak{J}$; vagyis $x \in \mathfrak{J}^\perp$.
Ekkor $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{J}^\perp$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{J}^\perp$. □

Ezt a tételt és a Dieudonné-tételt alkalmazva kapjuk:

3.1. Következmény. *Minden T feletti (véges dimenziós) féligegyszerű, nem 2 karakterisztikájú $\mathfrak{J}$ Jordan-algebra egyértelműen felírható $\mathfrak{S}_i$ egyszeru ideálok $\mathfrak{J} = \mathfrak{S}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{S}_t$ direkt összegeként.*

3.3. Tétel. *Minden 0 karakterisztikájú T test feletti véges dimenziós féligegyszerű $\mathfrak{J} \neq 0$ Jordan-algebrának van egységeleme.*

Primitívnek neveztük $\mathfrak{J}$ egy e elemét, ha e nem írható fel két ortogonális idempotens elem összegeként; vagyis e az egyetlen idempotens elem $\mathfrak{J}_1$-ben. Az e elemet *abszolút primitívnek* nevezzük, ha e primitív $\mathfrak{J}$-nek minden $\mathfrak{J}_K$ skaláris bővítésében. Egy véges dimenziós centrálisan egyszerű $\mathfrak{J}$ Jordan-algebrát *redukáltnak* nevezünk, ha $1 = e_1 + \cdots + e_t$, ahol e_i $\mathfrak{J}$-nek páronként ortogonális abszolút idempotens eleme. Ekkor megmutatható, hogy $\mathfrak{J}$ Peirce-felbontásában a $\mathfrak{J}_{ii}$ részalgebra ($\mathfrak{J}_{ii} = \{x|x \in \mathfrak{J},\ xe_i = x\}$) egydimenziós ($\mathfrak{J}_{ii} = Fe_i$). Ha $\mathfrak{J}$ véges dimenziós centrálisan egyszerű algebra T felett, létezik egy olyan $\mathfrak{J}_K$ skaláris bővítése, amely redukált, és megmutatható,

hogy ha t az $e_i \in \mathfrak{J}_K$ páronként ortogonális abszolút primitív idempotens elemek száma, akkor az $1 = e_1 + \cdots + e_t$ felírás egyértelmű; t-t a $\mathfrak{J}$ *fokának* nevezzük.
Ekkor fel tudjuk sorolni az összes nem 2 karakterisztikájú T feletti (véges dimenziós) centrálisan egyszerű t fokú $\mathfrak{J}$ Jordan-algebrát. Ezeket az algebrákat A, B, C, D vagy E *típusúnak* nevezzük:

A_I: $\mathfrak{J} \cong \mathfrak{U}^+$, ahol $\mathfrak{U}$ tetszőleges centrálisan egyszerű asszociatív algebra (szükségszeruen t^2-dimenziójú T felett).
A_{II}: Legyen $\mathfrak{U}$ egy tetszőleges T feletti egyszerű asszociatív algebra, amelyen értelmezve van egy második típusú involúció (vagyis az $\mathfrak{U}$ algebra $\mathfrak{Z}$ centruma a T test négyzetes bővítése és a megadott eljárás szerint az involúció $\mathfrak{Z}$-n egy nemtriviális automorfizmust eredményez). Ekkor $\mathfrak{J} \cong \mathfrak{H}(\mathfrak{U})$, ahol $\mathfrak{H}(\mathfrak{U})$ a $2t^2$-dimenziós $\mathfrak{U}^+$-nak önadjungált elemeiből ($\bar{x} = x$) álló t^2-dimenziós részalgebrája. Ha a$\mathfrak{J}$ algebra A_I vagy A_{II} típusú, és ha K a T test algebrai lezártja, akkor $\mathfrak{J}_K \cong {K_t}^+$, ahol K_t az összes K feletti $t \times t$-es mátrix algebrája.

B, C: Legyen $\mathfrak{U}$ egy T feletti tetszőleges centrálisan egyszerű asszociatív algebra, amelyen értelmezve van egy első típusú involúció. Ekkor $\mathfrak{J} \cong \mathfrak{H}(\mathfrak{U})$, ahol $\mathfrak{H}(\mathfrak{U})$ az $\mathfrak{U}^+$ önadjungált elemeinek részalgebrája. Két típust (B és C)-t különböztethetünk meg. Tekintsük az $\mathfrak{U}_K$ teljes mátrixalgebrát, ahol K a T algebrai lezártja. A B típus esetében az $\mathfrak{U}_K$-ra kiterjesztett involúció ($a \to a'$) transzpozíció, vagyis $\mathfrak{U}$ dimenziója t^2 és $\mathfrak{J}$ dimenziója T felett $\frac{1}{2}t(t+1)$. A C típus esetében az $\mathfrak{U}_K$-ra kiterjesztett involúció $a \to g^{-1}a'g$, ahol $g = \begin{pmatrix} 0 & 1_t \\ -1_t & 0 \end{pmatrix}$, vagyis $\mathfrak{U}$ dimenziója $4t^2$ és $\mathfrak{J}$ dimenziója T felett $2t^2 - t$.

D: Legyen (x, y) tetszőleges nemelfajuló szimmetrikus bilineáris alak az $n \geq 2$ dimenziójú $\mathfrak{M}$ vektortéren. Ekkor $\mathfrak{J}$ az $F1 + \mathfrak{M}$ vektortér direkt összeg, és az $(n + 1)$ -dimenziós $\mathfrak{J}$ algebrában a szorzást $xy = (x, y)1$-nek definiáljuk $\forall x, y \in \mathfrak{M}$ esetén. Itt $t = 2(\mathrm{dim}\mathfrak{J} \geq 3)$.

E: Az összes olyan 3×3-as mátrix algebrája, melyek elemei a T feletti $\mathfrak{C}$

Cayley-algebrából valók és értelmezve van rajta az $x \to \bar{x}'$(konjugált transzponált) *standard involúció*. Az önadjungált elemek 27-dimenziós

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 & c & \bar{b} \\ \bar{c} & \xi_2 & a \\ b & \bar{a} & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \xi_i \in T, \quad a, b, c \in \mathfrak{C},$$

$\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3)$ részalgebrája (centrálisan egyszerű) $t = 3$ fokú Jordan-algebra, a szorzást $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$-nak definiáljuk, ahol xy a $\mathfrak{C}_3$-beli szorzás. Ebben az esetben $\mathfrak{J}$ tetszőleges olyan algebra, melynek valamely $\mathfrak{J}_K$ skaláris bővítése $\mathfrak{J}_K \cong \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3)_K$ $(= \mathfrak{H}((\mathfrak{C}_K)_3))$.
Az A, B, C típusú algebrák definíciójuknál fogva speciális Jordan-algebrák. Nem igaz azonban, hogy minden centrálisan egyszeru Jordan-algebra speciális.

3.4. Tétel. (Albert) *Az E típusú centrálisan egyszerű Jordan-algebrák nem speciálisak.*

4. fejezet

Lie-algebrák

Jelölje ebben a fejezetben T a valós számok vagy a komplex számok testét.

4.1. Definíció és példák

4.1. Definíció. *Egy T test feletti $\mathfrak{L}$ algebrát* LIE-ALGEBRÁNAK *nevezünk, ha teljesül*

(i) $[x, y] = -[y, x] \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{L}$

(ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall\, x, y, z \in \mathfrak{L}$ *(Jacobi-egyenlőség).*

Az $[\cdot, \cdot]$ operátort LIE-ZÁRÓJELNEK *nevezzük.*

4.1 Példa. (i) Minden T feletti $\mathfrak{A}$ asszociatív algebra a

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

Lie-zárójellel együtt T feletti Lie-algebra.

(ii) (i speciális esete:)Legyen V egy T feletti vektortér és End(V) a V-ből V-be képező homomorfizmusok tere. Ekkor End(V) az

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A$$

Lie-zárójellel együtt Lie-algebra, és $gl(V)$-vel jelöljük. Ha a V vektortér T^n alakú és End(V)-t a T feletti $n \times n$-es mátrixokkal reprezentáljuk, $gl(V)$ helyett $gl(n, T)$-t írunk.

Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti Lie-algebra. Az $\mathfrak{L}$-nek T feletti $\mathfrak{B}$ alterét $\mathfrak{L}$ *részalgebrájának* nevezzük, ha

$$[x,y] \in \mathfrak{B} \ \ \forall\, x,y \ \in \mathfrak{B}.$$

Ha ezenkívül $[x,y] \in \mathfrak{B} \ \ \forall\, x \in \mathfrak{B},\ y \in \mathfrak{L}$ teljesül, akkor $\mathfrak{B}$ *ideálja* $\mathfrak{L}$-nek.

4.2 Példa. (i) Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti Lie-algebra. Ekkor $\mathfrak{L}$ centruma

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{L}) := \{x \ \in \mathfrak{L} : (\forall\, y \in \mathfrak{L})[x,y] = 0\}$$

ideál $\mathfrak{L}$-ben.

(ii) Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti Lie-algebra és $\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}$ részhalmazai. Jelölje $[\mathfrak{B},\mathfrak{C}]$ a $[b,c]$, $b \in \mathfrak{B},\ c \in \mathfrak{C}$ alakú elemek halmazát. Ezt az ideált $\mathfrak{L}$ *kommutátoralgebrájának* nevezzük.

(iii) Egy Lie-algebra minden egydimenziós altere részalgebra, mivel a Lie-zárójel ferdeszimmetrikus.

(iv) Az $n \times n$-es antiszimmetrikus mátrixok $O(n,T) = \{X \in gl(n,T) : X = -X^T\}$ tere részalgebrája $gl(n,T)$-nek; $O(n,T)$-t *ortogonális algebrának* nevezzük.

(v) Az antiönadjungált komplex mátrixok $U(n) = \{X \in gl(n,\mathbb{C}) : X = -X^*\}$ tere valós részalgebrája $gl(n,T)$-nek; $U(n)$-t *unitér algebrának* nevezzük.

(vi) $SL(n,T) = \{X \in gl(n,T) : tr(X) = 0\}$ ideál $gl(n,T)$-ben, $SL(n)$-t *speciális lineáris algebrának* nevezzük.

(vii) Ha $n = 2m$, az

$$Sp(m,T) = \{X \in gl(n,T) :\ X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, A,B,C,D \in gl(m,T),$$
$$B = B^T, C = C^T, A^T = -D\}$$

tér részalgebrája $gl(n,T)$ -nek, $Sp(m,T)$-t *szimplektikus algebrának* nevezzük.

(viii) Az

$$\mathfrak{n} = \{X \in gl(n,T) : (\forall i \geq j) X_{ij} = 0\}$$

és az

$$\mathfrak{an} = \{X \in gl(n,T) : (\forall i > j) X_{ij} = 0\}$$

terek részalgebrái $gl(n,T)$-nek.

(ix) Legyen V egy $\mathfrak{L}$ Lie-algebra altere. A V altér

$$N_{\mathfrak{L}}(V) = \{X \in \mathfrak{L} : (\forall Y \in V)[X,Y] \in V\}$$

normalizátora részalgebrája $\mathfrak{L}$ -nek.

Egy T feletti $\mathfrak{L}$ Lie-algebrán a D:$\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ T -lineáris leképezést *deriválásnak* neveztünk, ha

$$D([x,y]) = [D(x),y] + [x,D(y)] \ \ \forall\ x,y \in \mathfrak{L}$$

teljesül. Az összes deriválás halmazát $Der(\mathfrak{L})$-val jelöljük.

4.3 Példa. Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti Lie-algebra és $x \in \mathfrak{L}$, ekkor az

$$ad(x) : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L} \ \ y \to [x,y]$$

T-lineáris leképezés deriválás. Az ilyen típusú deriválásokat *belső deriválásnak* nevezzük. Az $ad : \mathfrak{L} \to gl(\mathfrak{L})$ *adjungált leképezés.* □

4.1. Állítás. *Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti Lie-algebra. Ekkor*

(i) $der(\mathfrak{L}) < gl(\mathfrak{L})$.

(ii) Az $ad : \mathfrak{L} \to Der(\mathfrak{L})$ leképezés homomorfizmus, képe a belső deriválások algebrája, a magja pedig $\mathfrak{L}$ centruma.

A direkt összeg mellett definiálhatjuk Lie-algebrák *szemidirekt összegét* is.

4.2. Állítás. *Legyenek $\mathfrak{L}_1$ és $\mathfrak{L}_2$ Lie-algebrák és $\alpha : \mathfrak{L}_2 \to der(\mathfrak{L}_1)$ egy homomorfizmus. Ekkor az $\mathfrak{L}_1$ és $\mathfrak{L}_2$ vektorterek $\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$ direkt összege Lie-algebra, ahol a Lie-zárójel*

$$[(x,y),(x',y')] = (\alpha(y)x' - \alpha(y')x + [x,x'],[y,y']) \ \ \forall x,x' \in \mathfrak{L}_1, y,y' \in \mathfrak{L}_2.$$

Ezt a Lie-algebrát az $\mathfrak{L}_1$ és $\mathfrak{L}_2$ α-ra vonatkozó SZEMIDIREKT ÖSSZEGÉNEK *nevezzük és $\mathfrak{L}_1 \rtimes \mathfrak{L}_2$-vel jelöljük. Ha $\alpha = 0$, akkor $\mathfrak{L}_1 \rtimes \mathfrak{L}_2$ éppen az $\mathfrak{L}_1$ és $\mathfrak{L}_2$ direkt összege. Az $\{(x,0) \in \mathfrak{L}_1 \rtimes \mathfrak{L}_2\}$ altér ideál $\mathfrak{L}_1 \rtimes \mathfrak{L}_2$-ben, és mint Lie-algebra izomorf $\mathfrak{L}_1$-gyel. Az $\{(y,0) \in \mathfrak{L}_1 \rtimes \mathfrak{L}_2\}$ altér részalgebrája $\mathfrak{L}_1 \rtimes \mathfrak{L}_2$-nek és izomorf $\mathfrak{L}_2$ -vel.*

4.4 Példa. Legyen $\mathfrak{L}_1 = \mathbb{R}x + \mathbb{R}x' + \mathbb{R}e$, ahol $[x, x'] = e$ és minden más zárójel 0. Ekkor $\mathfrak{L}_1$ Lie-algebra, és *Heisenberg-algebrának* nevezzük. Az $\mathfrak{L}_1$ algebra izomorf a (4.2)(viii) példa $\mathfrak{n}$ algebrájával, ahol $n = 3$. Legyen most $\mathfrak{L}_2 = \mathbb{R}y$ és $\alpha : \mathfrak{L}_2 \to der(\mathfrak{L}_1)$-t definiáljuk a következőképpen:

$$\alpha(y)(x) = x',\ \alpha(y)(x') = -x,\ \alpha(y)(e) = 0.$$

Ekkor az $\mathfrak{L}_1 \rtimes \mathfrak{L}_2$ szemidirekt összeget a következő zárójel határozza meg:

$$[x, x'] = e,\ [y, x] = x',\ [y, x'] = -x.$$

Ezt a Lie-algebrát *oszcillátor-algebrának* nevezzük. □

4.2. Nilpotens és feloldható Lie-algebrák

A következő definíciókat és állításokat véges dimenziós vektorterekre és Lie-algebrákra mondjuk ki. Ez azonban nem jelenti azt, hogy ezeket a fogalmakat csak véges dimenzió esetén tudjuk értelmezni.

4.2. Definíció. *Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti Lie-algebra és $\mathfrak{L}^{(1)} = \mathfrak{L}^1$ az $\mathfrak{L}$ kommutátor-algebrája.*

(i) *Ha $n \geq 2$, jelölje $\mathfrak{L}^n = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^{n-1}]$, ekkor $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$-t $\mathfrak{L}$* NÖVEKVŐ CENTRÁLIS SOROZATÁNAK *nevezzük.*

(ii) *Ha $n \geq 2$, jelölje $\mathfrak{L}^{(n)} = [\mathfrak{L}^{(n-1)}, \mathfrak{L}^{(n-1)}]$, ekkor $(\mathfrak{L}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$-t $\mathfrak{L}$* DERIVÁLT SOROZATÁNAK *nevezzük.*

(iii) $\mathfrak{L}$ NILPOTENS, *ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\mathfrak{L}^n = 0$.*

(iv) $\mathfrak{L}$ FELOLDHATÓ, *ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\mathfrak{L}^{(n)} = 0$.*

A Jacobi-egyenlőség segítségével indukcióval beláthatjuk, hogy $\mathfrak{L}^n$ és $\mathfrak{L}^{(n)}$ ideáljai $\mathfrak{L}$ -nak.

4.5 Példa. (i) A Heisenberg-algebra nilpotens.

(ii) Az oszcillátor-algebra feloldható, de nem nilpotens.

(iii) Minden kommutatív Lie-algebra nilpotens. Minden nilpotens Lie-algebra feloldható.

(iv) Legyen $\mathfrak{G}$ az $\{(a_{ij})\}$ felső háromszögmátrixok részalgebrája, ahol $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$; $\mathfrak{G}$ nilpotens.

(v) Tekintsük az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testeket, mint kommutatív valós Lie-algebrákat. Ekkor a

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$t \mapsto it$$

lineáris leképezés $\alpha : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{C})$ homomorfizmus. A $\mathbb{C} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ Lie-algebra feloldható, de nem nilpotens. Ha $\mathfrak{L}$ az oszcillátor-algebra, $\mathbb{C} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ izomorf $\mathfrak{L}/\mathfrak{C}(\mathfrak{L})$-vel.

4.3. Állítás. *Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti Lie-algebra és $\mathfrak{A} < \mathfrak{C}(\mathfrak{L})$.*

(i) Ha $\mathfrak{L}$ nilpotens, akkor $\mathfrak{L}$ minden részalgebrája és homomorf képe is nilpotens.

(ii) Ha $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ nilpotens, akkor $\mathfrak{L}$ nilpotens.

(iii) Ha $\mathfrak{L} \neq 0$ nilpotens, akkor $\mathfrak{C}(\mathfrak{L}) \neq \{0\}$.

(iv) Ha $\mathfrak{L}$ nilpotens, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $ad(x)^n = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{L}$.

(v) Ha $\mathfrak{I} \lhd \mathfrak{L}$, akkor $\mathfrak{I}^n$ és $\mathfrak{I}^{(n)}$ is ideálja $\mathfrak{L}$ -nek.

Bizonyítás. (i) Legyen $\mathfrak{H} < \mathfrak{L}$, ekkor $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$, és indukcióval $\mathfrak{H}^n \subseteq \mathfrak{L}^n$. Legyen $\alpha : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}_1$ homomorfizmus, ekkor $[\alpha(\mathfrak{L}), \alpha(\mathfrak{L}] = \alpha([\mathfrak{L}, \mathfrak{L}])$ és indukcióval $\alpha(\mathfrak{L})^n = \alpha(\mathfrak{L}^n)$. Tehát ha $\mathfrak{L}^n = \{0\}$, akkor $\mathfrak{H}^n = \{0\}$ és $\alpha(\mathfrak{L})^n = \{0\}$.

(ii) Ha $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ nilpotens, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A})^n = \{\mathfrak{A}\}$. De mivel $\mathfrak{L}/\mathfrak{A} = \pi(\mathfrak{L})$, ahol $\pi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ homomorfizmus, az 1.1 Tétel miatt

$$(\mathfrak{L}/\mathfrak{A})^n \cong \pi(\mathfrak{L})^n = \pi(\mathfrak{L}^n) \cong \mathfrak{L}^n/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{L}^n) \cong (\mathfrak{L}^n + \mathfrak{A})/\mathfrak{A}.$$

Tehát $\mathfrak{L}^n \subseteq \mathfrak{A}$, vagyis $[\mathfrak{A}, \mathfrak{L}^n] = \{0\}$, így $\mathfrak{L}^{n+1} = \{0\}$.

(iii) Ha $\mathfrak{L} \neq \{0\}$ nilpotens, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\mathfrak{L}^n = \{0\}$ és $\mathfrak{L}^{n-1} \neq \{0\}$. De $[\mathfrak{L}^{n-1}, \mathfrak{L}] = \mathfrak{L}^n = \{0\}$, vagyis $\mathfrak{L}^{n-1} \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{L})$.

(iv) Legyen $\mathfrak{L}^n = \{0\}$ és $y \in \mathfrak{L}$ tetszőleges. Ekkor az $ad(x)^n y = [x, [\ldots [x, y] \ldots]]$ eleme $\mathfrak{L}^n = \{0\}$ -nak, vagyis $ad(x)^n = 0$.

(v) Indukcióval, a Jacobi-egyenlőséget felhasználva kapjuk:

$$\begin{aligned}[\mathfrak{L}, \mathfrak{I}^n] &= [\mathfrak{L}, [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}^{n-1}]] \\ &\subseteq [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}^{n-1}] + [\mathfrak{I}, [\mathfrak{L}, \mathfrak{I}^{n-1}]] \\ &\subseteq \mathfrak{I}^n + [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}^{n-1}] = \mathfrak{I}^n.\end{aligned}$$

$\mathfrak{I}^{(n)}$-re hasonlóan igazolható az állítás.

Láttuk, hogy egy nilpotens Lie-algebrában minden $ad(x)$ $x \in \mathfrak{L}$ leképezés nilpotens. Meg szeretnénk mutatni, hogy a fordítottja is igaz, vagyis ha egy $\mathfrak{L}$ Lie - algebrában minden $ad(x)$ $x \in \mathfrak{L}$ nilpotens, akkor $\mathfrak{L}$ nilpotens.

4.1. Lemma. *(i) Legyen $V \neq \{0\}$ egy T feletti vektortér, $\mathfrak{L} < gl(V)$ és $X \in \mathfrak{L}$. Ha $X \in gl(V)$ nilpotens, akkor $ad(X) : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ is nilpotens.*

(ii) Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti Lie-algebra és $\mathfrak{H} < \mathfrak{L}$. Ekkor az

$$\alpha : \mathfrak{H} \to gl(\mathfrak{L}/\mathfrak{H})$$

$$X \mapsto (Y + \mathfrak{H} \mapsto [X, Y] + \mathfrak{H})$$

leképezés homomorfizmus.

4.1. Tétel. *Legyen $V \neq \{0\}$ egy T feletti vektortér és $\mathfrak{L} < gl(V)$. Ha minden $X \in \mathfrak{L}$ nilpotens, akkor létezik egy nullától különbözo $v_0 \in V$ vektor, melyre $X(v_0) = 0$ $\forall X \in \mathfrak{L}$.*

Erre a tételre alapozva kimondhatjuk a kívánt kritériumot Lie-algebrák nilpotenciájára:

4.2. Tétel. (Engel) *Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti Lie-algebra és $ad(x)$ nilpotens minden $x \in \mathfrak{L}$ esetén. Ekkor $\mathfrak{L}$ nilpotens.*

BIZONYÍTÁS. Az $ad(\mathfrak{L}) < gl(\mathfrak{L})$ Lie-algebra teljesíti a 4.1 Tétel feltételeit, tehát létezik egy a nullától különböző $x \in \mathfrak{L}$, melyre $[\mathfrak{L}, x] = \{0\}$. Így $\mathfrak{L}$ centruma nullától különböző. Az $\mathfrak{L}/\mathfrak{C}(\mathfrak{L})$ Lie-algebra ad-nilpotens elemekből áll és $dim(\mathfrak{L}/(\mathfrak{C}(\mathfrak{L})) < dim(\mathfrak{L})$. A dimenzióra folytatott indukcióval belátható, hogy $\mathfrak{L}/\mathfrak{C}(\mathfrak{L})$ nilpotens. Tehát a 4.3 Állítás (ii) pontja szerint $\mathfrak{L}$ nilpotens. □

4.3. Definíció. *Legyen V a T feletti n-dimenziós vektortér. A V altereinek egy*

$$\{0\} = V_0 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

sorozatát KOMPOZÍCIÓLÁNCNAK *nevezzük, ha $dim_T V_k = k$. Egy $X \in End(V)$ leképezés a kompozícióláncot* INVARIÁNSAN *hagyja, ha $X(V_k) \subseteq V_k$ $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$.*

4.1. Következmény. *Legyen V egy T feletti vektortér és $\mathfrak{L} < gl(V)$, melyre minden $X \in \mathfrak{L}$ nilpotens. Ekkor V-ben létezik olyan (V_k) kompozíciólánc, ahol $X(V_k) \subseteq V_{k-1}$ minden $k \in \{1, \ldots, n\}$. A V vektortérnek létezik olyan bázisa, melyben minden $X \in \mathfrak{L}$ elemet egy (ferde) felső háromszögmátrixszal adhatunk meg. Emiatt $\mathfrak{L}$ nilpotens.*

Vizsgáljuk meg, teljesülnek-e ezek az állítások feloldható Lie-algebrákra is!

4.4. Állítás. *Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti Lie-algebra, ekkor teljesül:*

(i) Ha $\mathfrak{L}$ feloldható, akkor minden részalgebrája és homomorf képe is feloldható.

(ii) Ha $\mathfrak{I}$ az $\mathfrak{L}$ egy olyan ideálja, melyre $\mathfrak{I}$ és $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ is feloldható, akkor $\mathfrak{L}$ feloldható.

(iii) Ha $\mathfrak{I}$ és $\mathfrak{J}$ feloldható ideáljai $\mathfrak{L}$-nak, az $\mathfrak{I} + \mathfrak{J}$ ideál is feloldható.

BIZONYÍTÁS. (i) Ezt az állítást a 4.3 Állítás (i) pontjához hasonlóan bizonyítjuk.

(ii) Tekintsük a $\pi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ faktorleképezést, ekkor

$$\pi(\mathfrak{L}^{(n)}) = (\pi(\mathfrak{L}))^{(n)}.$$

Ha $(\pi(\mathfrak{L}))^{(n)} = \{0\}$, akkor $\mathfrak{L}^{(n)} \subseteq ker\pi = \mathfrak{I}$. De mivel $\mathfrak{I}$ feloldható, létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, melyre $\mathfrak{I}^{(m)} = \{0\}$, vagyis

$$\mathfrak{L}^{(n+m)} \subseteq \mathfrak{I}^{(m)} \subseteq \{0\}.$$

(iii) Tudjuk, hogy $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$ és $\mathfrak{I}/(\mathfrak{I} \cap \mathfrak{J})$ feloldhatók. Ekkor (ii) és az 1.1 Tétel miatt $\mathfrak{I} + \mathfrak{J}$ is feloldható.

A 4.4 Állítás (iii) pontjának analógiája kimondható nilpotens Lie-algebrákra. Ezzel szemben az (ii) pont nem minden nilpotens Lie-algebrára teljesül (vö.: 4.5 Példa (v)).
A 4.4 Állítás (iii) pontjából láthatjuk, hogy minden véges dimenziós $\mathfrak{L}$ Lie-algebrában található egy legnagyobb ideál. Ezt az ideált az $\mathfrak{L}$ *radikáljának* nevezzük és $rad(\mathfrak{L})$-vel jelöljük. Ki szeretnénk mondani a 4.1 Tétel analógiáját feloldható Lie-algebrákra. Nem igaz, hogy $gl(V)$ feloldható részalgebráinak létezik a 0 sajátértékhez tartozó közös sajátvektoruk. Viszont teljesül:

4.3. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{C}$ feletti vektortér és $\mathfrak{L}$ a $gl(V)$ egy feloldható részalgebrája. Ha $V \neq 0$, akkor létezik olyan $v \neq 0 \in V$, melyre $\mathfrak{L}(v) \subseteq \mathbb{C}v$.*

4.2. Következmény. (Lie tétele) *Legyen V egy $\mathbb{C}$ feletti vektortér és $\mathfrak{L}$ a $gl(V)$ egy feloldható részalgebrája. Ekkor a V vektortérben létezik olyan kompozícióláncot, amelyet $\mathfrak{L}$ invarinánsan hagy.*

BIZONYÍTÁS. A 4.3 Tétel szerint létezik olyan $v \in V$ $v \neq 0$, melyre $\mathfrak{L}(v) \subseteq \mathbb{C}v = V_1$. Az

$$\alpha : \mathfrak{L} \to gl(V/V_1)$$
$$X \mapsto (v + V_1 \mapsto X(v) + V_1)$$

leképezés jól definiált homomorfizmus és ezért $\alpha(\mathfrak{L})$ feloldható. A $dim_{\mathbb{C}}V$-re vonatkozó indukcióval látható, hogy V/V_1-ben létezik egy $\alpha(\mathfrak{L})$-invariáns kompozíciólánc, amely V-beli ősképe V_1-gyel együtt a keresett kompozíciólánc.$\square$

Alkalmazzuk a 4.2 Következményt $V = \mathfrak{L}$-ra és $ad(\mathfrak{L})$-ra, ahol $\mathfrak{L}$ feloldható. Ekkor $\mathfrak{L}$-ban található ideáloknak egy olyan

$$\{0\} = \mathfrak{L}_0 < \mathfrak{L}_1 < \cdots < \mathfrak{L}_n = \mathfrak{L}$$

lánca, ahol $dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{L}_k = k$. Egy ilyen láncot *Hölder-sorozatnak* nevezünk.

4.3. Következmény. *Egy T feletti $\mathfrak{L}$ Lie-algebra pontosan akkor feloldható, ha $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ nilpotens.*

Bizonyítás. Lie-tételét szeretnénk használni, ehhez azonban ellenőriznünk kell, hogy a feltételek valóban teljesülnek-e. Vezessünk be ehhez egy új fogalmat: Legyen V egy $\mathbb{R}$-vektortér. Ekkor a $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$ tenzorszorzatot a V vektortér $V_{\mathbb{C}}$ *komplexifikációjának* nevezzük. A komplexifikáció elemei a $z \otimes v$, $z \in \mathbb{C}$ és $v \in V$ alakú elemek lineáris kombinációi.

4.5. Állítás. *Az $[\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{L}_{\mathbb{C}}]$ és az $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]_{\mathbb{C}}$ Lie-algebrák megegyeznek.*

Vagyis egy valós $\mathfrak{H}$ Lie-algebra pontosan akkor feloldható (nilpotens), ha $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ feloldható (nilpotens). Legyen tehát $\mathfrak{L}$ egy tetszőleges valós Lie-algebra. Ha $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] = \mathfrak{L}^{(1)}$ nilpotens, a definíció szerint $\mathfrak{L}$ feloldható. Megfordítva, ha $\mathfrak{L}$ feloldható, akkor $\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}$ is feloldható. Ekkor Lie-tétele szerint $ad(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}})$ felső háromszögmátrixokból áll. Vagyis

$$ad([\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{L}_{\mathbb{C}}]) = [ad(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}), ad(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}})] \cong [\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{L}_{\mathbb{C}}]/(\mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}) \cap [\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{L}_{\mathbb{C}}])$$

ferde felső háromszögmátrixokból áll, tehát nilpotens. Ekkor 4.3 Állítás szerint $[\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{L}_{\mathbb{C}}] = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]_{\mathbb{C}}$ nilpotens. $\square$

A Lie-algebrák feloldhatóságára szeretnénk az elemei tulajdonságaival kritériumot adni. Ehhez szükségünk van egy lemmára, melyet bizonyítás nélkül mondok ki.

4.2. Lemma. *Legyen V egy T feletti vektortér és $E \subseteq F$ a $gl(V)$ alterei. Továbbá legyen*

$$X \in M = \{Y \in gl(V) : [Y, F] \subseteq E\}.$$

Ha $tr(XY) = 0$ minden $Y \in M$-re, akkor X nilpotens.

4.4. Tétel. (Cartan-kritérium) *Legyen V egy T feletti vektortér és $\mathfrak{L} < gl(V)$, ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathfrak{L}$ feloldható.

(ii) $tr(XY) = 0$ minden $X \in [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ és $Y \in \mathfrak{L}$-re.

BIZONYÍTÁS. $(ii) \Rightarrow (i)$: A 4.3 Következmény szerint elegendő megmutatnunk, hogy $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ nilpotens. Ehhez, Engel tételét felhasználva csak azt kell belátnunk, hogy minden $X \in [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ nilpotens. Alkalmazzuk a 4.2 Lemmát $E = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ és $F = \mathfrak{L}$-re, vagyis legyen

$$M = \{Y \in gl(V) : [Y, \mathfrak{L}] \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]\}.$$

Mivel a nyom lineáris, elég megmutatnunk, hogy $tr([X, X']Y) = 0$ minden $X, X' \in \mathfrak{L}$ és $Y \in M$ esetén. Ez pedig következik (ii)-ből, mert tudjuk, hogy $[X', Y] \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$, és így:

$$\begin{aligned} tr([X, X']Y) &= tr(XX'Y - X'XY) = tr(XX'Y - XYX') \\ &= tr(X[X'Y]) = 0. \end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Mivel a nyomleképezés komplex lineáris, feltehetjük, hogy $T = \mathbb{C}$. Ekkor Lie tétele miatt V-nek létezik olyan bázisa, amelyben minden $X \in \mathfrak{L}$ felső háromszögmátrix, $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ elemei ferde felső háromszögmátrixok. Ha összeszorzunk egy felső háromszögmátrixot egy ferde felső háromszögmátrixszal, ferde felső háromszögmátrixot kapunk, így a nyoma 0. □

4.4. Következmény. *Legyen $\mathfrak{L}$ egy T test feletti Lie-algebra. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathfrak{L}$ feloldható.

(ii) $tr(ad(X)ad(Y)) = 0$ *minden* $X \in [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ *és* $Y \in \mathfrak{L}$*-re.*

BIZONYÍTÁS. $(ii) \Rightarrow (i)$: A Cartan-kritérium szerint $ad(\mathfrak{L})$ feloldható. Mivel $ad(\mathfrak{L}) \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{C}(\mathfrak{L})$, a 4.4 Állítás (ii) pontja miatt $\mathfrak{L}$ feloldható.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Ha $\mathfrak{L}$ feloldható,akkor $ad(\mathfrak{L})$ is feloldható, és ekkor a Cartan-kritériumból rögtön következik az állítás. □

4.3. Féligegyszerű Lie-algebrák

A véges dimenziós féligegyszerű algebrák a Lie-algebrák azon csoportja, amely szerkezete a legjobban ismert. Ebben a szakaszban a mi vizsgálódásunk is a véges dimenziós vektorterek feletti féligegyszerű Lie-algebrákra korlátozódik.

4.4. Definíció. *Legyen* $\mathfrak{L}$ *egy* T *feletti Lie-algebra;* $\mathfrak{L}$ FÉLIGEGYSZERŰ*, ha* $rad(\mathfrak{L}) = \{0\}$*. Az* $\mathfrak{L}$ *Lie-algebrát* EGYSZERŰNEK *nevezzük, ha nem kommutatív és nincs valódi ideálja.*

Mivel a $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ kommutátor-algebra ideál $\mathfrak{L}$-ben, egyszerű algebrák esetén megegyezik az egész algebrával. Vagyis $\mathfrak{L}$ nem lehet feloldható. Ezért $\mathfrak{L}$ radikálja, egy $\mathfrak{L}$-tól különböző ideál, 0. Így minden egyszerű Lie-algebra féligegyszerű.

Az első fejezetben már említést tettünk a Killing-formáról: Az $\mathfrak{L}$ Lie-algebra Killing-formája az

$$K_{\mathfrak{L}} : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to T$$

$$(x, y) \mapsto tr(ad(x)ad(y))$$

bilineáris alak. Megmutatható, hogy féligegyszerű Lie-algebrák esetén nemelfajuló, emiatt nagy szerepe van a Lie-algebrák szerkezetének vizsgálata során. Kihasználva, hogy $tr(AB) = tr(BA)$, a Killing-formára teljesül:

$$K_{\mathfrak{L}}([x, y], z) = K_{\mathfrak{L}}(x, [y, z]) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{L}.$$

4.6 Példa. Tekintsük $sl(2, \mathbb{R})$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bázisát. Ekkor $ad(H)$, $ad(U)$, $ad(T)$ reprezentációja:

$$ad(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; ad(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; ad(T) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így $sl(2,\mathbb{R})$ erre a bázisra vonatkozó Killing-formájának mátrixa

$$K = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

4.3. Lemma. *Legyen $\mathfrak{I}$ az $\mathfrak{L}$ Lie-algebra ideálja és K az $\mathfrak{L}$, $K_{\mathfrak{I}}$ pedig az $\mathfrak{I}$ ideál Killing-formája. Ekkor $K_{\mathfrak{I}} = K|_{\mathfrak{I}\times\mathfrak{I}}$.*

Ha V egy T feletti vektortér és β egy rajta értelmezett $\beta : V \times V \to T$ bilineáris alak, akkor egy W altér β-ra vonatkozó

$$\{v \in V : (\forall w \in W)\beta(v, w) = 0\}$$

ortogonális terét $W^{\perp,\beta}$-vel jelöljük. Ha β egy Lie-algebra Killing-formája, $\perp$, a β helyett csak $\perp$-t írunk. A $rad(\beta) := V^{\perp,\beta}$ alteret β *radikáljának* nevezzük. A Killing-forma *elfajuló*, ha $rad(\beta) \neq \{0\}$. Ezzel a jelöléssel a 4.4 Cartan-kritériumot a következőképpen írhatjuk fel: Egy T feletti Lie-algebra pontosan akkor feloldható, ha $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq rad(K_{\mathfrak{L}})$.
Mint azt már jeleztük, a féligegyszerűség is kifejezhető a Killing-forma segítségével:

4.5. Tétel. *A T feletti $\mathfrak{L} \neq 0$ Lie-algebra pontosan akkor féligegyszerű, ha $K_{\mathfrak{L}}$ nemelfajuló, vagyis $rad(K_{\mathfrak{L}}) = \{0\}$.*

Bizonyítás. Először megállapítjuk, hogy minden $\mathfrak{I} \lhd \mathfrak{L}$ esetén $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}^{\perp} \subseteq rad(\mathfrak{L})$. Ugyanis, ha $x \in \mathfrak{I}^{\perp}$, $y \in \mathfrak{L}$ és $z \in \mathfrak{I}$, akkor

$$K_{\mathfrak{L}}([x, y], z) = K_{\mathfrak{L}}(x, [y, z]) = 0,$$

vagyis $\mathfrak{J}^\perp$ és $\mathfrak{I} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp$ ideálok $\mathfrak{L}$-ben. Mivel $K_\mathfrak{L}$ az $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ ideálon eltűnik, 4.3 Lemma miatt $rad(K_\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}$. Ekkor $\mathfrak{I}$ a Cartan-kritérium szerint feloldható. Tekintsük $rad(K_\mathfrak{L}) = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^\perp$-t, erre teljesül

$$rad(K_\mathfrak{L}) \subseteq rad(\mathfrak{L}).$$

Vagyis ha, $\mathfrak{L}$ féligegyszerű, akkor $K_\mathfrak{L}$ nem elfajuló.
Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathfrak{R} = rad(\mathfrak{L}) \neq \{0\}$. Ekkor található olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\mathfrak{R}^{(n)} = \{0\}$ és $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}^{(n-1)} \neq \{0\}$. Legyen $x \neq 0 \in \mathfrak{H}$ és $y, z \in \mathfrak{L}$. Ekkor

$$(ad(x)ad(y))^2(z) = [x,[y,[x,[y,z]]]] = 0,$$

mivel $[y,[x,[y,z]]] \in \mathfrak{H}$ és $\mathfrak{H}$ kommutatív. Vagyis $ad(x)ad(y)$ nilpotens, és így a nyoma 0. Mivel y-t tetszőlegesen választottuk $\mathfrak{L}$-ból, $x \in rad(K_\mathfrak{L})$, tehát $K_\mathfrak{L}$ elfajuló. □

4.6. Tétel. *Legyen $\mathfrak{L}$ egy T feletti féligegyszerű Lie-algebra. Ekkor $\mathfrak{L}$-nek léteznek olyan $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_k$ ideáljai, melyekre*

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}_k.$$

Az $\mathfrak{L}$ minden ideálja kifejezhető az $\mathfrak{L}_i$ ideálok $\sum_{j\in I} \mathfrak{L}_j$, $I \subseteq \{1,\ldots,k\}$ direkt összegeként.

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{J} \triangleleft \mathfrak{L}$. A 4.5 Tétel bizonyításában láttuk, hogy $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp \subseteq rad(\mathfrak{L}) = \{0\}$. Vagyis $K_\mathfrak{J}$ nemelfajuló és $\mathfrak{J}$ féligegyszerű. Mivel $K_\mathfrak{J}$ szimmetrikus, $\mathfrak{J}$-nek található $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ortogonális bázisa. Mivel minden $x \in \mathfrak{L}$-re teljesül

$$x - \sum_{i=1}^{m} \frac{K_\mathfrak{L}(x, x_i)}{K_\mathfrak{L}(x_i, x_i)} x_i \in \mathfrak{J}^\perp,$$

$\mathfrak{L} = \mathfrak{J} + \mathfrak{J}^\perp$. Tudjuk, hogy $[\mathfrak{J}, \mathfrak{J}^\perp] \subseteq \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp = \{0\}$, így $\mathfrak{L}$, mint Lie-algebra, a $\mathfrak{J}$ és $\mathfrak{J}^\perp$ ideálok direkt összege. Indukcióval ugyanígy fel tudjuk bontani $\mathfrak{J}$-t és $\mathfrak{J}^\perp$-t egyszerű ideálok direkt összegére, így kapjuk az $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}_k.$$

felbontását.
Végül legyen $\mathfrak{I}$ az $\mathfrak{L}$ egy ideálja. Tekintsük a $\pi_k : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}_k$ leképezéseket. Legalább egy k-ra teljesül, hogy $\pi_k(\mathfrak{I}) \neq 0$. De mivel π_k szürjektív, $\pi_k(\mathfrak{I})$ is ideál lesz $\mathfrak{L}_k$-ban, és így az egész $\mathfrak{L}_k$ is. Vagyis $\mathfrak{L}_k = [\mathfrak{L}_k, \mathfrak{I}] \subseteq \mathfrak{I}$. Megmutattuk, hogy $\mathfrak{I}$ tartalmazza az összes olyan $\mathfrak{L}_k$-t, melyre $\pi_k(\mathfrak{I}) \neq 0$. Ekkor $\mathfrak{I}$ pontosan ezen $\mathfrak{L}_k$-k direkt összege. □

4.5. Következmény. *Legyen $\mathfrak{L}$ egy T test feletti féligegyszerű Lie-algebra. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek:*

(i) $\mathfrak{L} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$.

(ii) Az $\mathfrak{L}$ minden homomorf képe és ideálja féligegyszerű.

Irodalomjegyzék

[1] Richard D. Schafer, *An introduction to nonassociatve algebras*, Academic Press, New York, 1966

[2] J. Hilgert/ K.-H. Neeb, *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Vieweg, Braunschweig, 1991

[3] J. Tits, *Liesche Gruppen und Algebren* kézirat, Bonn, 1965

[4] H. Braun/ M. Koecher, *Jordan-Algebren*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966

[5] I. L. Kantor/ A. Sz. Szolodovnyikov, *Hiperkomplex számok*, Gondolat, Budapest, 1985

[6] Kiss Emil, *Bevezetés az algebrába*, Typotex, Budapest, 2007

[7] E. Kleinfeld, *"Simple alternative rings"* Ann. of Math. (2), 58/3, 544-547. 1953

[8] N. Jacobson, *"Jordan algebras"* Report of a conference in linear algebra, National Research Counsil, 1957