Szakdolgozat

Motiváció a Matematikára

Készítette: Schmidt Diána Regina

Matematika BSc - Matematika major tanári szakirány

Témavezető: Somfai Zsuzsa

Óraadó

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikatanítási és Módszertani Központ

2010

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A matematika az egyik legrégebbi tantárgy. Nincs olyan területe az életünknek, ahol ne jelenne meg valamilyen mértékben a matematika. Ennek ellenére talán nem hamis a következő állításom, miszerint a Magyarországon élők többsége nem szereti, vagy inkább helyesebben kifejezve nem érzi magáénak a matematikát. Ez a kijelentésem szerintem épp úgy érvényes néhány hallgatótársamra, persze nyilván az állításom második része. Biztosan vannak egy páran, akik azért jöttek/jönnek matematika szakra, mert ebből voltak a legjobbak az addigi tanulmányaik során, és úgy gondolják, tudnának vele boldogulni majd az elkövetkező életükben. Majd közülük akad néhány, akik itt az egyetemen egy olyan világgal találkoznak, ami elkezdi őket érdekelni, és ezután már nem azért járnak be órára, mert be kell, hanem mert szeretnének minél több lehetőséget felhasználni arra, hogy újabb és újabb dolgokat tudhassanak magukénak. Bevallom, egy vagyok közülük. Sajnos nem adatott meg a lehetőség, hogy olyan iskolába járjak, ahol próbálják érdekessé tenni a matematikát.

Épp ezért választottam szakdolgozatom témájául a motiválást a matematikára és azon belül is a geometriára, ahogy azt látni is fogják. A matematikán belül azért épp a geometriát választottam, mivel úgy veszem észre, hogy egyre kevesebb helyet kap az oktatásban. Célom, hogy bemutassam, hogy egy matematika tanárnak milyen eszközei vannak egy emelt óraszámú, a matematika iránt érdeklődő diákokból álló csoport motiválására, és miért érdemes ezzel foglalkozni. Sajnos jelen körülmények között nincs lehetőségem általános óraszámú csoporttal foglalkozni, bár azt hiszem egy-két dolog náluk is elmondható a dolgozatom tartalmából. Ugyanakkor nyilvánvalóan teljesen máshogy kell megközelíteni egy emelt óraszámos, érdeklődő csoportot, mint egy általános óraszámút és esetleg még csak nem is érdeklődőt.

A dolgozatom elején szólok pár szót a motivációról általában, de itt is leginkább a tanítással kapcsolatos részletekre térek ki és csak röviden. Ez után szeretném bemutatni, hogy *mivel* gondolom, hogy lehetne egy a matematika iránt már érdeklődő csoport érdeklődését tovább fokozni illetve szinten tartani, majd arra kívánok választ adni, hogy *miért* tartom fontosnak, hogy a geometria jó megtanulására ösztönözzük a diákokat. Dolgozatomban nem kívánok kitérni a középiskolás tananyagra, így csak említés szintjén fognak szerepelni az egyes témakörök. A geometriai témaköröket a Sokszínű Matematika, Mozaik kiadó tankönyvsorozat alapján veszem sorra, az ebben taglalt fogalmakra illetve tételekre és azoknak a bizonyításaira támaszkodom.

2. fejezet

Motiváció a geometria tanulására

2.1. A motivációról általában

A *motiváció* egy olyan szó, amit egyre gyakrabban használunk a hétköznapi életben, és főként a tanárok körében egy igen kihangsúlyozott fogalom. Az oktatás egyre inkább odafigyel arra, hogy a diákokat ösztönözzék, motiválják a tanulásra és ehhez igyekeznek különféle módszereket kitalálni és bevezetni a tanári munkában. De mit is jelent a motiváció? „A motiváció legáltalánosabban fogalmazva az ember cselekvéseinek hátterét és mozgatórugóit jelölő gyűjtőfogalom.”[1]

A motiváció fogalmát két szempontból vizsgálhatjuk. Az egyik szempont a biológiai háttér, amire dolgozatomban nem térnék ki, illetve a humánspecifikus motivációk. Mint, ahogy a hétköznapi életben is tapasztaljuk, van külső illetve belső motiváció, vagyis extrinzik illetve intrinzik motiváció, amelyek a humánspecifikus motivációk két alaptípusa. [1] Az extrinzik motiváció talán a legkönnyebben úgy fogalmazható meg, hogy az ember valamilyen „jutalom” eléréséért vagy egy „büntetés” elkerülése érdekében cselekszik. Ezzel ellentétben az intrinzik motiváció során az egyén a saját belső érzései miatt tevékenykedik. Ezek a motivációk olykor keverednek, vagyis ami kezdetben belső motiváció volt, később lehet külső és fordítva. Az intrinzik motiváció típusai közül az alábbi három típust szeretném megemlíteni, mivel úgy gondolom, ezek fontosak a tanári munka szempontjából. Ez a három típus a kompetencia, az érdeklődés és a teljesítménykésztetés.[1] A kompetencia, mint „a tudás elsajátítására irányuló törekvés"[1] az egyik legalapvetőbb motiváció. Ez a típus már gyermekkortól kezdve kíséri az embert. Az érdeklődés a tanári munka szempontjából az egyik legfontosabb belső motiváció. Az érdeklődésnek is két típusa van, a szituációs és a személyes érdeklődés.[1] A szituációs érdeklődés, mikor valaki az adott pillanatban érez egy belső késztetést, hogy egy adott témakörben vagy témában jobban elmerüljön, míg a személyes során ez a belső késztetés folyamatos, nemcsak egy adott témára terjed ki. Teljesítménymotivációnak azt a belső ösztönzést hívjuk, ami saját magunkkal szembeni elvárásokat mozgatja. Ahogy N. Kollár Katalin és Szabó Éva fogalmaz:„Sajátosan emberi jellemző a jó teljesítményre, a sikerre való törekvés."[1] A tejesítménymotiváció kapcsán meg kell említenem az igényszint fogalmát. Az igényszint egy folyamatosan alakuló elvárás magunkkal szemben. Változása sikereinkből és kudarcainkból ered. Ezek a humánspecifikus motivációk, amelyekre úgy gondolom, egy tanárnak oda kell figyelnie a tanítás során. Sokszor az oktatókon múlik, hogy egy diáknak hogyan alakul az igényszintje, mekkora érdeklődést mutat egy-egy téma, témakör illetve maga a tantárgy felé. Itt beszélhetünk a jutalmazás-büntetés rendszeréről, a tanár személyiségéről, de amire alapjában véve a dolgozatom épül az a szaktárgyi tudás, szakmai hitelesség. Ahhoz hogy megfelelően motiválhasson egy tanár, otthonosan kell mozognia a szakmájában, tudnia kell, hogy a szaktárgya milyen lehetőségeket rejt, amiket sikeresen felhasználhat.

2.2. Mivel?

Most szeretném bemutatni, hogyan, azaz *mivel* szeretnék motiválni a középiskolai diákok körében. Az első részben arról a kiegészítő tartalomról fogok szót ejteni, ami szerintem egy emelt óraszámú csoportban érdekességként elmondható a tananyagon felül. Felhívnám rá a figyelmet, hogy a kiegészítő tartalmat nem feltétlenül ebben a sorrendben mondanám el. Ezt a részt úgy építettem fel, hogy a középiskolai tananyag mely témaköréhez mit lehet kapcsolni, mivel kapcsolatosan lehet elmondani, ha a megfelelő háttértudás már a kezükben van. A második részben pedig olyan feladatokat taglalok, amiknek a segítségével egy geometriai gondolkodás kialakítható, illetve amelyek nagyobb érdeklődést kelthetnek fel a geometria iránt a diákokban.

2.2.1. Kiegészítő tartalom

A 9. osztályban legelőször a pontok, egyenesek, síkok és ezek kölcsönös helyzetét tárgyalják. Itt 9.-ben már úgy tárgyalják a pont, az egyenes, a sík és az illeszkedés fogalmát, mint alapfogalom[2]. Talán már ekkor érdekességként meg lehet említeni a diákoknak az axióma fogalmát, hogy a matematika axiómákból illetve alapfogalmakból építkezik. Minden további fogalom, illetve tétel ezekből van levezetve. Így például Euklidésznél az alapfogalmak közé tartozik a pont, egyenes, kör, derékszög és a következő axiómákat mondta ki:

- Bármely két pont összeköthető egyenessel.
- Bármely egyenes korlátlanul meghosszabbítható.
- Bármely pont körül bármekkora sugárral lehet kört rajzolni.
- Bármely két derékszög egyenlő.
- „Ötödik posztulátum”: Ha egy egyenesre illeszkedő két szög összege kisebb, mint az egyenesszög, akkor a nem az egyenesre illeszkedő két szögszárnak van metszéspontja.

Az utolsó axiómával kapcsolatban számos kifogás vetette fel a fejét. Ezek közül egy például, hogy az első négy axiómához képest az ötödik „nehéz”. Több

korabeli illetve későbbi matematikus abban reménykedett, hogy az ötödik levezethető az első négyből, és ezért sokan foglalkoztak ezzel a problémával évszázadokon át. Vizsgálták az axiómarendszer ellentmondás-mentességét illetve az axiómák függetlenségét.
(1) Egy axiómarendszer ellentmondásmentes, ha nincs olyan állítás, hogy azt is és annak a tagadását is le lehet vezetni az axiómarendszerből.
(2) Egy állítás független egy axiómarendszertől, ha nem lehet levezetni belőle.
Ebből a következő észrevételt tették: Tegyük fel, hogy az A axiómarendszer ellentmondásmentes. Egy B állítás független az A axiómarendszertől $\Longleftrightarrow$ ha az $(A + \neg B)$ axiómarendszer ellentmondásmentes. (ez tulajdonképp az indirekt bizonyítás elve). Ezzel az észrevétellel dolgoztak azok, akik az ötödik posztulátum függetlenségét szerették volna bebizonyítani, azaz feltették a többi axiómát és az ötödik posztulátum tagadását, és ebből akartak ellentmondásra jutni. Bolyai, Gauss illetve Lobacsevszkij vették észre, hogy itt valószínűleg nincs is ellentmondás, és később Klein bizonyította be először, hogy valóban nincs.[7]
Euklidész neve kapcsán még érdemes mesélni az euklideszi szerkesztésekről és így az euklideszi geometriáról.
Euklideszi szerkesztéssel, azaz csak körzővel és vonalzóval megszerkeszthető adott síkbeli pontok, egyenesek és körvonalak segítségével valamely pontokból, egyenesekből és körvonalakból álló alakzat, ha a következő lépések elvezetnek az eredményre:

- Egy adott vagy már megszerkesztett ponttal, mint középponttal és tetszőleges sugárral körvonalat húzunk.
- Két adott vagy megszerkesztett ponton át egyenest húzunk.
- Két adott vagy már megszerkesztett egyenes illetve körvonal metszéspontját vesszük.

Így a következők szerkeszthetők euklideszi szerkesztéssel:

- Ismert szakasz felezőpontja, felezőmerőlegese.
- Ismert pontból ismert egyenesre merőleges egyenes.

- Ismert l egyenessel párhuzamos, az ismert $A \notin l$ ponton átmenő l_0 egyenes.
- Ismert szakasz osztópontja racionális arányban.
- Körhöz külső pontból érintőszakasz, ahol adott a P pont és a kör annak középpontjával.
- Belső szögfelező, ahol adott az l_1 és l_2 szögszár és a Q csúcs.
- Szögmásolás, ahol adott egy $QPR\angle$ és a P' kezdőpontú l félegyenes.
- Szakaszok mértani közepe, ahol adott a két szakasz.

Továbbá megemlíthető még az euklideszi szerkesztésekkel kapcsolatosan két lemma és egy tétel, amiknek a bizonyítását is el lehet mondani, vagy akár feladni. Ezek a következők:
Lemma Tetszőleges $a = \bar{AB}$ távolságra szerkeszthető:

- a oldalú szabályos háromszög
- a oldalú szabályos négyzet
- a oldalú szabályos hatszög

Bizonyítás

- Ha C az A középpontú, AB sugarú körvonal és a B középpontú AB sugarú körvonal metszete, akkor ABC szabályos.
- Szerkesszünk D és C pontokat, hogy DA és CB egyenese merőleges AB egyenesére és $DA = CB = AB$.
Indoklás: Itt $[D, A]$ és $[C, B]$ párhuzamos és egyenlő, így $ABCD$ paralelogramma, mely minden oldalra egyenlő és $\forall\angle = \frac{\pi}{2}$.
- A B középpontú C_i $(i = 1..6)$ szabályos hatszög, ahol $A = C_1$ a következőképpen szerkeszthető. Ha $i = 1..6$-ra C_{i-1} már adott, akkor a szabályos háromszög szerkesztése alapján szerkesszük meg C_i-t, hogy $C_i \neq C_{i-2}$ és $C_{i-1}C_iB$ szabályos háromszög.
Indoklás: $\forall C_i$-nél $\frac{2\pi}{3}$ lesz a szög, és minden oldal AB hosszú.

Lemma Ha egy szabályos tízszög oldala a és körülírt sugara r, akkor $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$ és $r = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a$.
Bizonyítás Legyen O a körülírt kör középpontja, $[A, B]$ egy oldal. $AOB\angle = \frac{\pi}{5}$ tehát $OAB\angle = OBA\angle = \frac{2\pi}{5}$ az AOB háromszögben. Legyen $P \in [O, B]$, hogy $[A, P]$ felezi $OAB\angle$-t. $PAO\angle = \frac{\pi}{5} = AOP\angle \to AP = PO$. $ABP\triangle$-ben $ABP\angle = ABO\angle$ és $BAP\angle = \frac{\pi}{5} = BOA\angle$ így a $BAP\triangle \sim BOA\triangle \to a = BA = PA = PO$. Hasonlóság miatt $\frac{BP}{BA} = \frac{BA}{BO} \to \frac{r-a}{a} = \frac{a}{r} \to r^2 - ar = a^2 \to a^2 + ar - r^2 = 0 \to a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r \to r = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a$.
Tétel Adott O és $O \neq A$ pontokra, megszerkeszthető az a szabályos ötszög vagy tízszög, melynek egyik csúcsa A, körülírt körének középpontja pedig O.
Bizonyítás

1. O-ban merőlegest állítok az OA egyenesre, ez az l egyenes.
2. $B \in l$, melyre $OB = OA \cdot \frac{1}{2}$
3. $C \in l$, hogy $O \in [C, B]$ és $BC = BA$
4. Az O középpontú, A-n áthaladó K körvonalra szerkesszük az $A_i (i = 1..10)$ szabályos tízszöget, ahol $A = A_1$ és $A_i A_{i+1} = OC = a$. Itt minden második csúcsot kiválasztva szabályos ötszöget kapunk.

Érdemes megemlíteni, hogy ha például adott b oldalú szabályos ötszöget szeretnénk szerkeszteni, akkor először egy tetszőleges körülírt kör sugárhoz szerkesztünk egy szabályos ötszöget, és ezek után hasonlósági transzformációval szerkesztjük meg az adott b oldalú szabályos ötszöget.
Érdekes még az a tény, hogy annak ellenére, hogy tudunk szerkeszteni szabályos ötszöget, nem tudunk például, szöget harmadolni illetve szabályos hét-, kilenc- és tizenegyszöget szerkeszteni, másrészt szabályos tizenhétszöget már lehet szerkeszteni. [6]

A szerkesztések kapcsán még érdekességként mesélhetünk a csak körzővel történő szerkesztésekről. Az itt tanult lemmák közül csak azt említeném meg, amelyik nem foglalkozik az inverzió fogalmával. Az inverzió fogalmát, mint transzformációt meg lehet említeni érdekességként, de úgy gondolom, hogy az inverzióval kapcsolatos lemmák, tételek már nem az érdekesség határát súrolják. Persze a tovább érdeklődő diáknak lehet említeni ezeket is.

Csak körzővel történő szerkesztés esetén egy egyenest akkor tekintünk adottnak, ha két pontja adott, illetve körvonalat, ha a középpontja és egy pontja adott. Ekkor a lehetséges műveletek:

- Adott középponttal és 2 adott pont távolságával, mint sugárral körvonalat húzok.
- két metsző körvonalnak veszem a metszéspontjait.

Így a lehetséges szerkesztések:
Lemma Adott $A \neq B$, és $k \geq 2$ egész. Csak körzővel szerkeszthető a C pont, ha $B \in [A, C]$ és $CA = k \cdot BA$.
Bizonyítás Indukcióval k-ra, tegyük fel, hogy megvan C_1, C_2, ahol $AC_1 = (k-1)AB$, $AC_2 = (k-2)AB$ (például $k = 2 \rightarrow C_2 = A, C_1 = B$). Megszerkesztem D-t, melyre $DC_2 = DC_1 = C_1C_2 = AB$. Majd E-t, melyre $ED = EC_1 = C_1C_2$. Végül C-t, melyre $CE = CC_1 = C_1C_2$.
Következmény Ha adottak A, B, C nem kollineáris pontok, akkor a körülírt kör középpontja csak körzővel megszerkeszthető.
Utóbbit nem bizonyítanám, mivel a bizonyítás erősen az inverzió tulajdonságaira támaszkodik, de érdekességként elmondható.

Az euklideszi geometria kapcsán megemlíteném a Hilbert-féle axiómarendszert. Eszerint öt axiómacsoportra építkezik az euklideszi geometria, és ezek az illeszkedési axiómák, a rendezési axiómák, egybevágósági axiómák, a folytonossági axióma illetve a párhuzamossági axióma. Az illeszkedési axiómák kapcsán megemlíteném az alapfogalmakat: a tér, pont, egyenesek és a síkok; illetve magukat az axiómákat is.

- Bármely egyenesre legalább két pont illeszkedik.
- Bármely két különböző ponthoz létezik egy és csak egy rájuk illeszkedő egyenes.
- Bármely síknak létezik három nem kollineáris pontja.
- Bármely három nem kollineáris ponthoz létezik pontosan egy rájuk illeszkedő sík.
- Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egész egyenes része a síknak.

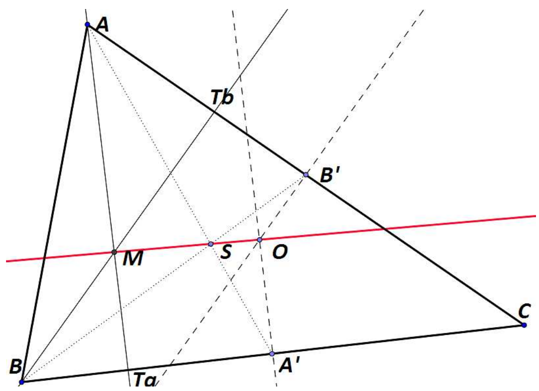
- Ha két síknak van közös pontja, akkor van legalább két közös pontjuk.
- Létezik négy olyan pont, ami nincs egy síkban és nincs egy egyenesen.

Ezekből az axiómákból megmutatható olyan könnyebb levezetés, mint: ha két különböző síknak van közös pontja, akkor a közös részük egyenes.

Elmondható továbbá, hogy a rendezési axiómák kapcsán alapfogalom például három kollineáris pont között az elválasztás fogalma, az egybevágósági axiómák kapcsán a szakaszok illetve szögtartományok egybevágósága. Említhető, hogy a folytonossági axióma eredményezi, hogy minden egyenes azonosítható a valós számegyenessel, és hogy a párhuzamossági axióma szerint, ha adott egy e egyenes és a rá nem illeszkedő P pont, akkor (e, P) síkban legfeljebb egy olyan egyenes létezik P-n át, amely nem metszi e-t.

Mindezek elmondásával úgy gondolom, kialakítható egy kicsit absztraktabb gondolkodásmód, látásmód mind a geometriával, mind a matematikával kapcsolatban.

A háromszögekkel kapcsolatosan lehet mesélni az Euler vonalról, el lehet mondani annak a bizonyítását:
Igazoljuk, hogy egy háromszögben a körülírt kör középpontja, a háromszög súlypontja és magasságpontja egy egyenesen van![8]



Bizonyítás Legyen O a körülírt kör középpontja, S a súlypont és M a magasságpont. A BC oldal felezőpontja legyen A', míg az AC oldalé B', ekkor az $A'B'$ szakasz az AB oldallal párhuzamos, és annak épp a fele, mivel ő az ABC háromszög egyik középvonala. Az A csúcsból húzott magasság (talppontja T_A) és a BC oldal oldalfelező merőlegese párhuzamosak, így a

$T_A AB\angle = OA'B'\angle$. Legyen a B csúcsból húzott magasság talppontja T_B, és ekkor ugyanúgy következik, hogy $A'B'O\angle = T_B BA\angle$. Tehát az $ABM\triangle \sim A'B'O\triangle$, és a hasonlóságuk aránya $2:1$. A súlypontról tudjuk, hogy harmadolja a súlyvonalakat. Ekkor észrevehetjük, hogy $MAS\angle = OA'S\angle$, mivel ők váltószögek, tehát az $AMS\triangle \sim A'OS\triangle$, mivel tudjuk két oldalának arányát, illetve, hogy az általuk közbezárt szög megegyezik, ahol az oldalak aránya, szintén $2:1$. Eszerint $ASM\angle = OSA'\angle$, tehát O, M és S valóban egy egyenesre esnek, és az is kiderült, hogy $\frac{OS}{SM} = 1:2$.

Másik érdekes példa, amivel le lehet nyűgözni a diákokat, és egyrészt egy matematikai gondolkodásra felhívni a figyelmüket, a minden háromszög egyenlőszárú rossz bizonyítás.

Vegyük az ABC általános háromszöget. Az A csúcsnál levő szögfelező egyenes és a BC oldalfelező merőlegese messe egymást a Q pontban, a háromszög belsejében. Ezután bocsássunk merőlegest a Q pontból az AB illetve a CA oldalra, a metszéspontokat ebben a sorrendben jelölje D és E. Ebből következik, hogy az $AD = AE$, mert $ADQ\triangle \cong AEQ\triangle$, továbbá $QB = QC$, mivel Q a BC oldal felezőmerőlegesén található. Ebből viszont az következik, hogy $QD = QE$, amiből $DB = EC$ és végül $AB = AC$. Tehát minden háromszög egyenlőszárú?! Ez nyilvánvalóan nem igaz. A hiba a bizonyítás legelején található, ami szerint kimondtuk, hogy bármely háromszögben az említett szögfelező és oldalfelező merőleges a háromszög belsejében fogja metszeni egymást. Már pedig ha egy állítás hamis, akkor a belőle levont következtetések sem igazak.

Ez a bizonyítás egyrészt felhívhatja a figyelmet arra, hogy geometriai tanulmányaink során, bár a feladatokat rajzok alapján oldjuk meg, de figyeljünk oda arra, hogy a meglévő tudásra alapozva hozzunk helyes következtetéseket, és ne a rajzunk alapján. Másrészt arra helyez nagy hangsúlyt, hogy a matematikában minden egyes részlet számít, épp ezért legyünk nagyon precízek.

Az egybevágósági és hasonlósági transzformációk kapcsán érdemes megemlíteni az irányítás fogalmát. Itt szerencsések vagyunk, ha a diákoknak meg tudtuk már mutatni a mátrix fogalmát, és egy determináns kiszámolását. Ha nem, akkor a betűk sorrendjével lehet talán leginkább prezentálni, hogy egy transzformáció mikor irányítástartó illetve -váltó. Talán a helyesebb képalkotásért szögezzük le, hogy a síkban egy egyenesre való tükrözés irányításváltó transzformáció, míg az eltolás illetve a pont körüli forgatás irányítástartó. Érdekességként megemlíthetőek és a bizonyításuk is megmutathatóak a témakörrel kapcsolatos lemmáknak illetve tételeknek, hogy csak párat említsek (én a bizonyításokra most nem térnék ki):

Tétel Ha síkban vagy térben adott A_1,A_2,..., A_k és A'_1, A'_2, ..., A'_k pontok, melyekre $A_iA_j = A'_iA'_j \forall 1 \leq i < j \leq k$ esetén, akkor található legfeljebb k darab egyenesre(síkban) illetve síkra(térben) vett tükrözés, melyek szorzata A_i-t A'_i-be viszi, $i = 1..k$.

Tétel A sík bármely egybevágósága legfeljebb 3 egyenesre való tükrözés szorzata.

Lemma Tetszőleges síkbeli/térbeli egybevágóság egy egyenest egyenesbe visz.

Utóbbi lemmát azért tartom fontosnak, mert például ennek kapcsán meg lehet említeni, hogy nem minden transzformációnál lesz egy egyenes képe egyenes.

Tétel A sík bármely irányítástartó leképezése egy eltolás vagy egy pont körüli forgatás.

Tétel A sík bármely irányítást váltó egybevágósága egy csúsztatva tükrözés (ami egy eltolás és egy egyenesre való tükrözés kompozíciója, ahol az eltolás vektora párhuzamos a tükrözés egyenesével).

A hasonlósági transzformációt érdemes párhuzamba állítani az egybevágóságokkal, persze úgy, hogy a különbségekre felhívjuk a figyelmet.

Ezután lehet említést tenni az affin transzformációkról, vagyis hogy a sík vagy tér transzformációja affinitás, ha egyenestartó, azaz bármely egyenest bijektíven és folytonosan képez le valamely egyenesre. Ezen kívül még elmondhatónak tartok két lemmát, hogy azok segítségével egy megfoghatóbb képet kapjanak a diákok. Mégpedig:

Lemma Tetszőleges síkbeli vagy térbeli affinitás injektív, és tartja az egyenesek párhuzamosságát és a paralelogrammákat.

Lemma Tetszőleges síkbeli vagy térbeli affinitás tartja az osztóviszonyt.

Utóbbihoz definiáljuk az osztóviszonyt, vagyis A,B,C egy egyenesen lévő pontok osztóviszonya $(ABC) = \lambda$, ha $\vec{c} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{c})$.

Továbbá megemlíthető, hogy például a kör affin képe az ellipszis.

Ha tovább érdeklődnek a diákok ilyen transzformációk után, akkor ott van még az inverzió, aminek az alapgondolata felvethető.
Legyen O egy síkbeli vagy térbeli pont és $r > 0$, ekkor az O közepű r sugarú körre (gömbre) vett inverziónál egy $P \neq O$ képe az O-ból kiinduló P-n átmenő félegyenesen fekvő P' pont, melyre $OP \cdot OP' = r^2$.

A körökkel kapcsolatosan felhozható a hatvány fogalma a geometriában, és megmutatható, hogy mikor beszélünk hatványvonalról illetve hatványpontról.

12. osztályban a térgeometria tárgyalásánál vissza lehet térni az ellipszis, hiperbola és parabola vizsgálatához, amit 11.-ben a koordinátageometria kapcsán elkezdtek. Egy kis térgeometriai szemléltetés után, ki lehet térni rá, hogy az ellipszist, a hiperbolát illetve a parabolát mért is hívjuk kúpszeleteknek, és meg lehet mutatni a Dandelin gömbös bizonyítást.

Adott t egyenes (tengely), $O \in t$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, az α nyílásszögű kettős körkúp, ahol C az azon e egyenesek uniója, amelyek α szöget zárnak be t-vel és az $O \in e$. Itt O csúcs, $C \backslash O$ két részre esik szét, amelyek a kúp palástjai és a C-beli O-n átmenő egyenesek az alkotók. Ekkor:
Tétel Legyen C egy O csúcsú kettős körkúp. Ha Σ egy sík a térben, amely nem tartalmazza O-t, akkor $\Sigma \cap C$:

1. ellipszis, ha a Σ csak egy palástot metsz és nem párhuzamos az alkotókkal

2. parabola, ha Σ párhuzamos egy alkotóval

3. hiperbola, ha metszi mind a két palástot.

Bizonyítás Legyen t' a t tengely merőleges vetülete Σ-ra és legyen t és t' síkja S, továbbá e és f a két alkotó $S \cap C$-ben.

1. Legyen G_1 és G_2 olyan gömbök, melyek érintik a Σ-t és C-t (tehát a középpontjuk a t-n van). Legyen $F_i = G_i \in \Sigma$ az érintési pont Σ-n, $K_i = G_i \cap C$ a körvonal, ahol G_i érinti C-t. A t körüli forgásszimmetria miatt tetszőleges g alkotónak a K_1 és K_2 közé eső szakasza ugyanolyan hosszú, ez legyen $2a$. Legyen $P \in \Sigma \cap C$, legyen $g = PO$ alkotó C-n,

$g \cap K_i = S_i$ pont. Ekkor PF_i és PS_i egyaránt érintőszakaszok a G_i-hez, ebből következik, hogy $PF_i = PS_i$, tehát $PF_1 + PF_2 = PS_1 + PS_2 = 2a$, hiszen az egyik gömb, például G_2 a Σ „fölött”, a másik a G_1 a Σ „alatt” van, tehát a P az $[S_1, S_2]$ szakaszon van.

2. Tegyük fel, hogy Σ párhuzamos f alkotóval. Legyen G gömb érintő gömbje C-nek és Σ-nak, és $K = G \cap C$ körvonal, $F = G \cap \Sigma$ és legyen L a $\Sigma \cap (K$ síkjával). Állítom, hogy $\Sigma \cap C$ az F fókuszú, L vezéregyenesű parabola. Ehhez legyen K' a P-n átmenő, K-val párhuzamos sík és C metszete és legyen $P' = f \cap K'$. Ha g a PO alkotó, akkor $S = g \cap K$ és $S' = f \cap K$, ebből adódik, hogy $P'S' = PS$, mert a g és f alkotóknak a K és K' közé eső szakaszai. Itt $P'S' = P$ távolságával az L-től, ami így $= PS$.

3. G_1, G_2 gömbök érintik a C-t és a Σ-t $\Sigma \cap G_1 = F_1$, $C \cap G_1 = K_1$ körvonal. Tetszőleges g alkotóra g-nek K_1 és K_2 közé eső szakasza egyenlő, ez $2a$. Tetszőleges $P \in \Sigma \cap C$ pontra (tegyük fel, hogy PK_1-et tartalmazó paláston van) legyen $g = OP$ alkotó $S_i = g \in K_i$, PS_i és PF_i érintőszakaszok (Σ érinti G_i-t, C érinti G_i-t), tehát $PS_i = PF_i$, vagyis $S_1 \in [P, S_2]$, amiből következik, hogy $PF_2 - PF_1 = PS_2 - PS_1 = 2a$.

Az érdeklődő diákoknak még lehet mesélni a Dandelin gömbökről.

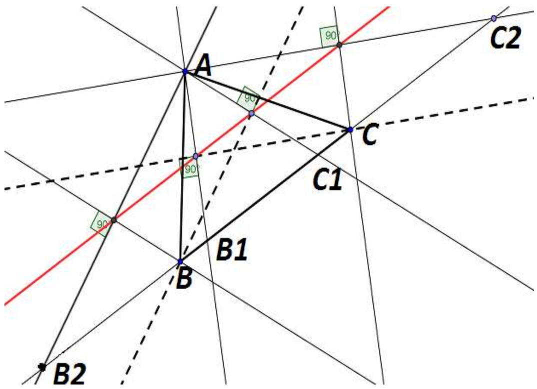
A térgeometria kapcsán a gömb tárgyalásánál ki lehet térni a gömbi geometria egy-két részletére, mint például a gömbi háromszögben a belső szögek összege vagy a gömbi koszinusz- illetve szinusz-tétel, összehasonlítva a síkban tanultakkal.

2.2.2. Feladatok

A feladatokat, melyeket kiválasztottam témakörök szerint fogom taglalni, bár ez olykor igen nehéz, hiszen a matematika egyik szépsége, hogy vannak feladatok, amiket többféleképpen is meg tudunk oldani, és egy feladat több témakörbe is illik egyszerre. Azokat a feladatokat, amelyeket többféleképpen is megoldhatunk, külön fogom említeni és a lehetséges megoldási módokat bemutatni. A feladatok között régebbi verseny feladatok, érettségi feladatok és középiskolában is levezethető egyetemi feladatok szerepelnek.

A sík illetve a sík elemei közötti kapcsolat bemutatására az alábbi feladatokat találtam érdekesebbnek:

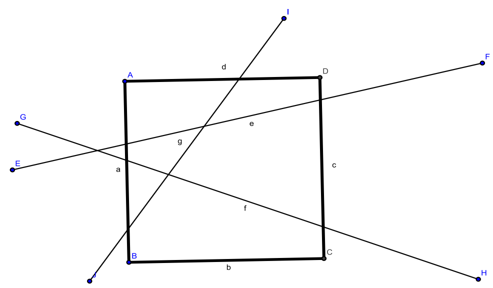
- Az ABC háromszög A csúcsából állítsunk merőlegeseket a B és a C csúcsához tartozó külső illetve belső szögfelezőkre! Bizonyítsuk be, hogy a merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak![3]



  Megoldás:
  Tükrözzük az A csúcsot a merőlegesek talppontjaira. Az így kapott tükörképek a szögfelező szimmetria tulajdonsága miatt mind a BC egyenesre fognak esni. Az A képe legyen B külső szögfelezőjére tükrözve B_2, a belsőre pedig B_1 és ugyanígy C esetében is. Ekkor, ha a BC egyenesről A képei közül kettőt kiválasztunk, akkor az A-val így kapott háromszögben, a képekhez tartozó merőleges talppontok a háromszög középvonalát fogják alkotni. Ezek párhuzamosak lesznek a BC oldallal, és így egybe esnek. Tehát valóban egy egyenesre illeszkednek.

- Vágjunk szét egy négyzetet 3 egyenessel hét részre úgy, hogy a keletkező sokszögek között egyetlen háromszög legyen! Hány ötszög keletkezhet ebben az esetben? [3]
  Megoldás:
  Először is azt kell vizsgálni, hogy 3 egyenessel hány részre oszthatjuk

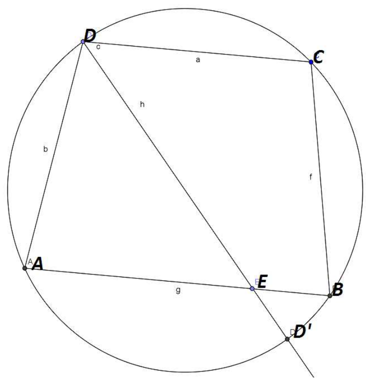
a négyzetet. Ehhez vizsgáljuk a 3 egyenes metszéspontjainak számát. Ha a 3 egyenes 1 pontban metszi egymást, akkor ők csak 6 részre tudják osztani a négyzetet, tehát ez az eset nem áll fent.
Ha 3 egyenes nem 1 pontban metszi egymást, akkor azt kell vizsgálni, hogy az egyenesek milyen állásánál keletkezik csak 1 háromszög.
Ha mindhárom metszéspont a négyzeten kívül esik, akkor több, mint egy háromszög keletkezik. Ugyanez a helyzet, ha pontosan egy metszéspont esik a négyzeten belülre. Tehát pontosan egy háromszöget akkor kapunk, ha mindhárom metszéspont a háromszögön belülre esik, és ekkor 1 ötszöget kapunk, vagy, ha pontosan 2 metszéspont esik a négyzeten belülre. Utóbbi esetben további két lehetőség áll fent. Az első esetben a harmadik metszéspont a négyzet határára esik, míg a másikban a négyzeten kívülre. Az első esetnél nem keletkezik ötszög, míg a másiknál pontosan 1.



Tehát a megoldásunk: 0 vagy 1 ötszög keletkezhet ebben az esetben.

Talán a legtöbb feladatot a következő témakörből sorolhatnám fel. A háromszögek egy igen sokrétű, rengeteg lehetőséget magával hordozó témakör. Számos geometriai feladat megoldásánál a háromszögek azonosságait használjuk fel, mint egybevágóság, hasonlóság, körül írt körük, beírt körük, Thalész kör. Ennek ellenére, próbáltam itt olyan feladatokat felsorakoztatni, amik ténylegesen háromszögekről szólnak.

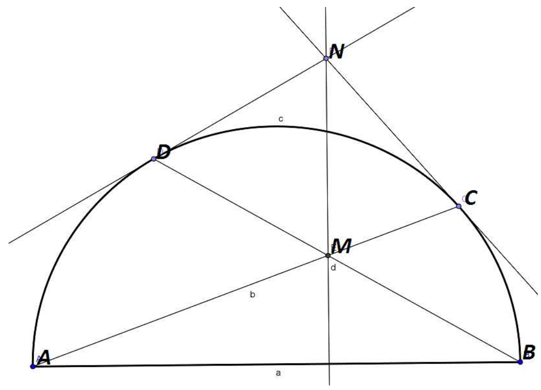
- Egy körbe írt $ABCD$ szimmetrikus trapéz nem párhuzamos oldalai egyenlőek az egyik alappal ($AD = DC = CB$). A kör DD' átmérője az AB egyenest az E pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az ADE háromszög egyenlőszárú.[3]



Megoldás:

Az $AECD$ trapéz szimmetrikus a DD' egyenesre, hiszen $CD = DA$. De ha egy négyszög két szomszédos oldala egyenlő és van szimmetria tengelye a két oldal között, akkor az deltoid, ebből következik, hogy $ECD\angle = DAE\angle$. Ugyanakkor a trapéz tulajdonsága miatt $DC \parallel AE$, és ebből következik, hogy az $AEC\angle = CDA\angle$. Ezek szerint 2-2 páronként párhuzamos oldalunk van, és ezek közül két szomszédos egyenlő is, tehát ez egy rombusz. Így a $DA = AE$, tehát az $AED\triangle$ valóban egyenlőszárú.

- Az AB szakasz, mint átmérő fölé írt félköríven jelöljünk ki egy C és egy D pontot úgy, hogy az A, B, C, D pontok különbözőek legyenek és a sorrendjük a köríven A, D, C, B! Az AC és BD szakaszok metszéspontja legyen M; a D, illetve a C pontban a körhöz húzott érintők metszéspontja pedig N. Bizonyítsuk be, hogy az M és N pontokat összekötő egyenes merőleges az AB szakaszra! [3]



Megoldás:

Ha az AD és BC szakaszokat meghosszabbítjuk, akkor azoknak metszeniük kell egymást, hiszen A-nál és B-nél is hegyesszög van, mivel mindkettő szög egy derékszögű háromszög egyik szöge, Thalész tétele miatt. Legyen ez a metszéspont P. Mivel D-nél és C-nél derékszög van, így az ABP háromszöget tekintve, M ennek a háromszögnek a magasságpontja lesz, tehát a PM egyenes merőleges lesz az AB szakaszra.

Már csak azt kell belátnunk, hogy N ezen rajta van.

Tekintsük a PM szakasz Thalész körét. Ezen, a derékszögek miatt, D és C ugyanúgy rajta vannak. Tekintsük ennek a felezőpontját F-et. Ha F és N megegyeznek, akkor készen vagyunk. Ehhez azt kell belátni, hogy $ODF\angle = \frac{\pi}{2}$. Ehhez elég belátni, hogy az $ODB\angle = FDP\angle$.

$OD = OB$ az AB szakasz Thalész köre miatt, és ugyanígy $DF = FP$. Ugyanakkor a háromszög belső szögeinek összege összefüggés miatt $FPD\angle + PAB\angle = \frac{\pi}{2}$ és $DAB\angle + ABD\angle = \frac{\pi}{2}$, és ebből következik, hogy $FPD\angle = OBD\angle$. Tehát az $ODF\angle = \frac{\pi}{2}$, és ebből következik, hogy $N = F$, vagyis az N rajta van az AB-re merőleges PM egyenesen.

A következő nagyobb témakör az egybevágósági transzformációk. Az első feladat síkbeli változata is érdekességként szokott előfordulni a diákok körében általában olyan formában, mint: a folyó érintésével, mi a legrövidebb út a juhainktól a házunkig, ha a juhok és a házunk a folyó ugyanazon partján fekszik. Így az első feladattal csupán annyi a célom, hogy megmutassam, ez térben sem megy sokkal másképp.

- Adott egy sík ugyanazon oldalán az A és B pont. Keressük a sík olyan P pontját, amelyre $AP + PB$ a lehető legkisebb.[5]
  Megoldás:
  Az AP, PB egy törött vonal két szakasza, és mint tudjuk két pont között a legrövidebb távolság az egyenes.
  Ötlet: Tükrözzük az A pontot az adott síkra, és az így kapott A' pontot kössük össze a B ponttal. Ekkor az $A'B$ egyenes átdöfi a síkot egy pontban, ami a keresett P pontunk lesz, hiszen A' és B között valóban a legrövidebb út az $A'B$ egyenes, és az $A'P$ és AP szakaszok hossza egyenlő a tükrözés tulajdonságai miatt. Így a kapott P pontra az $AP + PB$ valóban a legkisebb lesz.

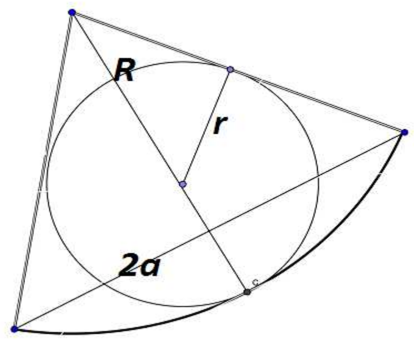
- Tükrözzünk kört egy a középpontját nem tartalmazó adott t egyenesre. Mutassuk meg, hogy a szerkesztés elvégzéséhez nincs szükségünk vonalzóra, csupán körzővel is elvégezhető.[5]
  Megoldás:
  Az adott egyenes és a kör középpontjának távolságánál nagyobbat veszünk körzőnyílásba, ezzel két helyen elmessük az adott egyenest, és a két pontból ugyanezzel a távolsággal az egyenes másik felére metszéspontot szerkesztünk, mivel itt a felezőmerőleges szerkesztésének lépéseit alkalmaztuk, így a kapott pont valóban a kör középpont tükörképe lesz. Ezután körzőnyílásba vesszük az adott kör sugarát, és ezzel meg tudjuk rajzolni a tükrözött kör középpontból a kör tükörképét, és valóban nem kellett vonalzót használnunk hozzá.

Az utóbbi példát érdekességként lehet felhozni, ha a diákok körében tárgyalásra került már a különböző geometriai szerkesztések lehetősége, így az Euklideszi szerkesztés, illetve a csak körzővel történő szerkesztés, ahogy arra már a kiegészítő tartalom kapcsán kitértem.

A kör témaköre egy elég tág kontextus. Több, különböző típusú feladat lehetőségét nyújtja.

- Legyen az R sugarú kör egy félkörnél kisebb körcikkébe beírt kör sugara r, a körcikk húrjának a hossza $2a$. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.[6]

Megoldás:



Tudjuk, hogy a körcikkbe beírt kör középpontja a körcikk szögfelező merőlegesén helyezkedik el, a háromszögek beírható köre miatt. A beírt kör sugara merőleges a körcikk két szárára, míg a szögfelező merőleges a körcikk húrjára. Így keletkezett két derékszögű, hasonló háromszögünk, ahol a kisebbik átfogója $R - r$(a körcikk sugara $-$ a beírt kör sugara). A hasonlóság aránya:

$$\frac{R-r}{r} = \frac{R}{a}$$

ez átalakítva

$$\frac{R}{r} - 1 = \frac{R}{a}$$

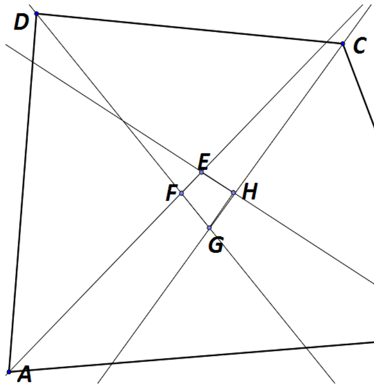
ezt le tudjuk osztani R-rel, hiszen $R \neq 0$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{1}{a}$$

itt ha $\frac{1}{R}$-t áthozzuk, akkor éppen a kívánt egyenlőséget kapjuk.

- Igazoljuk, hogy minden négyszög szögfelezői húrnégyszöget zárnak közre (ha négy metszéspont keletkezik).[5]

  Megoldás:



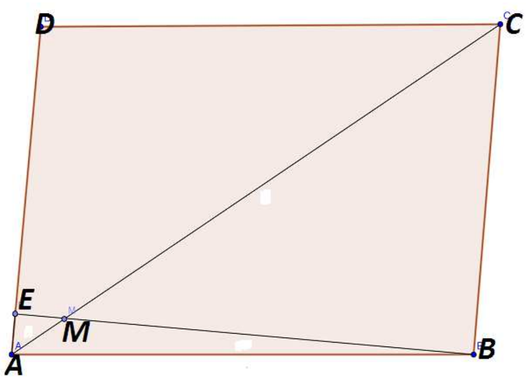
A négyszög szögeit elnevezve α, β, δ és γ-val és vizsgálva, hogy a szögfelezők háromszögeket határoznak meg, így felírhatóak a váltószögek, és a belső négyszög két szemközti szögét összeadva a következőt kapjuk:

$$\pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \pi - \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 2\pi - (\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}) = \pi$$

hiszen $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$. Ez ugyanígy igazolható a másik két szemközti szög összegére is, tehát valóban húrnégyszöget kaptunk.

A hasonlósági transzformációk témaköre nyújtja talán a legtöbb feladat lehetőségét és szinte mindegyik másik témakörnél lehet említeni olyan feladatot, amit hasonlósággal kapcsolatos tételek, definíciók kapcsán tudunk megoldani.

- Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalát n egyenlő részre osztjuk és az A-tól számított első osztópontot összekötjük a B csúccsal. Igazoljuk, hogy ez az összekötő szakasz az AC átló $(n+1)$-ed részét vágja le.[7]
  Megoldás:



Észrevehetjük, hogy az $EAM\triangle \sim BCM\triangle$ és ebből a megfelelő arányokat felírva ($AM = x$ és $MC = AC - x$) kapjuk:

$$\frac{\frac{AD}{n}}{AD} = \frac{x}{AC - x}$$

$$\frac{AD}{n}(AC - x) = x \cdot AD$$

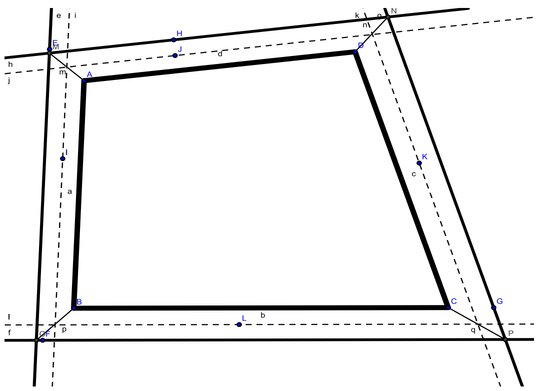
$$\frac{AD \cdot AC}{n} - \frac{x \cdot AD}{n} = x \cdot AD$$

$$AD \cdot AC - x \cdot AD = n \cdot x \cdot AD$$

$$AC = (n+1)x$$

Tehát valóban az átló $(n+1)$-ed részét vágja le.

- Az alábbi ábrán látható két négyszög egy-egy oldala párhuzamos. Kössük össze a megfelelő csúcsokat. Az egyik ilyen összekötő vonal egy tetszés szerinti pontjából induljunk az oldallal párhuzamosan, míg a legközelebbi összekötő vonalig nem érünk. Innen a következő oldallal és így tovább. Bizonyítsuk be, hogy ilyen módon a kiindulási ponthoz jutunk vissza.[5]



Megoldás:
Ez az a példa, amire a diákok előszeretettel mondhatják be, de hiszen látszik. Olykor azt ami nyilvánvaló a legnehezebb bebizonyítani, illetve itt kel felhívni a figyelmüket, a már szintén a kiegészítő anyagban említett példára, miszerint minden háromszög egyenlőszárú.

Tudjuk, ha két azonos állású szögtartomány egy - egy szára párhuzamos, akkor azok a szögtartományok egyenlőek, őket egyállású szögeknek hívjuk. Továbbá ha két sokszög szögei páronként megegyeznek, akkor az a két sokszög hasonló. Tehát a külső és a belső négyszög hasonló egymáshoz. Kell, hogy a szaggatott vonallal jelzett négyszög is hasonló a két négyszöghöz, és akkor valóban egy olyan utat kapunk, amin végig érve a kezdőpontba jutunk.

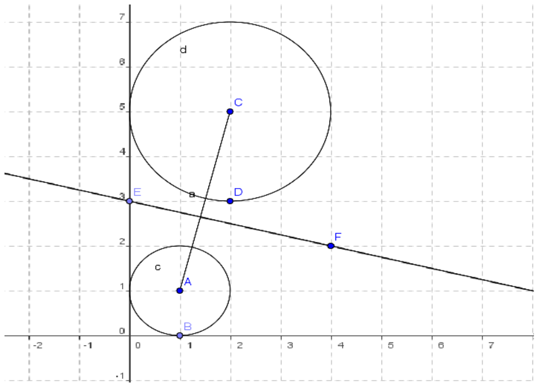
Tekintsük a belső és külső négyszög egy-egy párhuzamos oldalát és az ezeken lévő csúcsokat összekötő szakaszokat. Ezek a szakaszok együtt trapézt alkotnak, aminek az alapjai a négyszögek egy-egy oldala. Mivel az út ezekkel az alapokkal párhuzamos, így felírható egy arány az útra illetve az egyik oldalra. Ezt az eljárást mindegyik oldalon végrehajtva kapjuk, hogy az út „oldalai" és a belső négyszög oldalai között, és így a külső négy szög oldalaira is, felírható arányok megegyeznek, amiből szintén következik, hogy az út egy hasonló négyszöget alkot, tehát a kezdő pontba fogunk érkezni az út végén.

A koordinátageometria az a témakör, amiről elmondható, hogy igen hosszasan foglalkoznak vele a középiskolában. Egy igen nagy témakör, ami tulajdonképp a már meglévő geometriai és algebrai tudásra támaszkodik.

- Adott a térben egy egész oldalhosszúságú kocka, amelyről tudjuk, hogy az egyik lapján levő négy csúcs koordinátái valamennyien egész számok. Bizonyítandó, hogy a másik négy csúcs koordinátái is egész számok! [3]
  Megoldás: Az adott lapján lévő irányvektorok azonosak az erre a lapra merőleges lapokon lévő normálvektorokkal. Mivel az adott lapon a koordináták egész számok voltak, így az irányvektor koordinátái is egészek, ezáltal a rá merőleges lapokon szereplő normálvektorok is, így az egész koordinátákból ismét egész koordinátákat kapunk. (felhasználtuk: a vektorok koordinátás összeadását)

- Határozzuk meg azon pontok halmazát a síkon, amelyekből az $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ és az $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 25 = 0$ egyenletű körökhöz húzott érintőszakaszok hossza megegyezik![4]

Megoldás:



Alakítsuk át az egyenleteket:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$$

Ebből meg tudjuk határozni a két kör középpontját és sugarát. $K_1(1,1)$ és $r_1 = 1$, míg $K_2(2,5)$ és $r_2 = 2$.
Legyen egy $P(x,y)$ pontra igaz, hogy a belőle húzott két érintőszakasz az 1-1 körhöz azonos hosszúságúak. Ekkor felírható a következő egyenlőség Pitagorasz-tételt használva:

$$(1-x)^2 + (1-y)^2 - 1 = (2-x)^2 + (5-y)^2 - 4$$

Rendezve az egyenletet, azt kapjuk, hogy:

$$x + 4y = 12$$

Tehát egy egyenes egyenletét kaptuk meg. Erről az egyenesről a kiegészítő anyagból tudjuk, hogy ő a két kör hatványvonala. Visszahelyettesítve a hatványvonal definíciójába, vagyis $(PK_1)^2 - r_1^2$-be és a $(PK_2)^2 - r_2^2$-be ugyanazt kell, hogy kapjuk, és nem szabad, hogy megoldása legyen különben egyetlen pontot kapnánk.
Az elsőbe helyettesítve $x = 12 - 4y$-t:

$$(4y-11)^2 + (1-y)^2 - 1 = 17y^2 - 90y + 121$$

A másikba helyettesítve:

$$(4y - 10)^2 + (5 - y)^2 - 4 = 17y^2 - 90y + 121$$

Tehát valóban ugyanazt kaptuk. Ez biztosítja számunkra, hogy az egyenesnek valóban minden pontjára teljesül, hogy az érintőszakaszok hosszai egyenlők. Az egyenlet akkor nem megoldható, ha $D < 0$, és itt $D = 90^2 - 4 \cdot 17 \cdot 121 = -128$. Amit kaptunk valóban a két kör hatványvonala.

Egy másik nagy témakör a térgeometria.

- Milyen távolságra van a pontszerű fényforrás a $11,8m$ sugarú gömb középpontjától, ha a gömbfelület megvilágított része $540,6\ m^2$.[5]

  Megoldás: A feladat nehézsége a térszemléletben lakozik, azaz a diákok el tudják-e képzelni, hogy az a fényforrás, hogyan világítja meg a gömböt.

  A megvilágított rész egy gömbsüveg lesz, aminek a felszíne:

  $$A = 2\pi Rm + \pi r^2$$

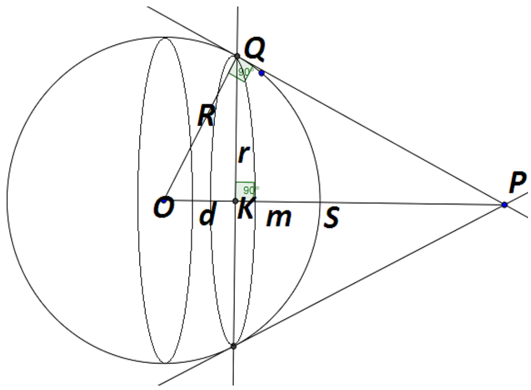
  Ahol jelen esetben R a gömb sugara, r megvilágított gömbsüveg alapkörének sugara és m a gömbsüveg magassága. A gömb főkörének középpontjától, azaz a gömb középpontjától a gömbsüveg alapkörének középpontja d távolságra van. A készített síkmetszet alapján felírható:

  $$r^2 = R^2 - d^2$$

  $$m = R - d$$

  Tehát így a felszín képlet átírható, mint egy egyismeretlenes egyenlet, amiből azt kapjuk, hogy $d \approx 7,82$ és ebből $r \approx 8,84$ és $m \approx 3,98$.

  Miután ezt kiszámítottuk tekintsük a síkmetszetet.



A síkmetszeten legyen a pontszerű fényforrás P, a gömb középpontja O, a gömbsüveg alapkörének középpontja K és a fényforrás érintési pontja a gömbre vonatkozóan Q, továbbá a KP szakasz metszéspontja a gömbbel legyen S. Ekkor a PQO és a QKP derékszögű háromszögek, ahol a $QKP\triangle \subset PQO\triangle$, tehát alkalmazható a magasság-tétel:

$$KQ^2 = OK(KS + SP)$$

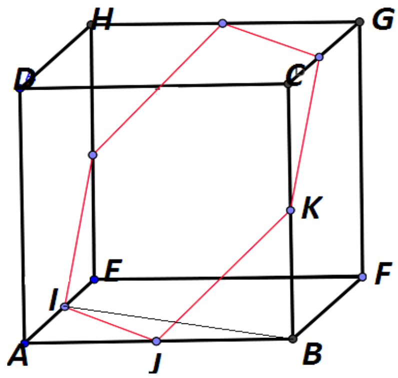
Itt ismerjük KQ-t, ami r, OK-t, ami d, KS-t, ami m és az ismeretlen SP legyen x. Ekkor:

$$r^2 = d(m + x)$$

amiből $x \approx 6,01$, tehát a pontszerű fényforrás távolsága a gömb középpontjától: $\approx 17,81$.

- Tekintsük a kocka két szemközti csúcsát és ezekbe a csúcsokba nem befutó élek felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy ezek egy szabályos hatszög csúcspontjai.[5]
  Megoldás:
  Ahhoz, hogy belássuk, hogy valóban szabályos hatszöget kaptunk először megvizsgáljuk, hogy a keletkezett oldalak egyenlő hosszúak, minden belső szöge $\frac{2\pi}{3}$-os és az oldalak páronként párhuzamosak.
  Az oldalak egyenlősége könnyen látszik, ha Pitagorasz tételt alkalmazunk. Mivel az látható, hogy a hatszög minden oldala, ugyanazzal a módszerrel számolható ki és ugyanazokkal a számokkal, így egyenlő oldalakat fogunk kapni.

Az oldalak párhuzamossága adódik a kocka lapjainak párhuzamosságából.



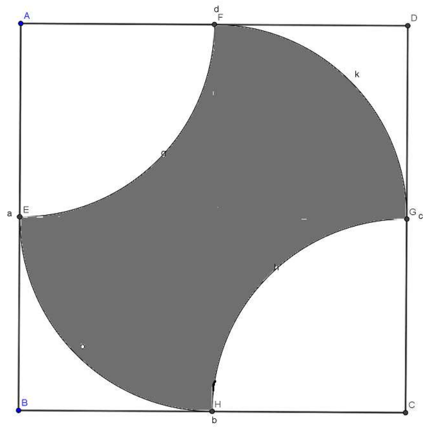
A belső szögek megmutatására szintén elegendő egy szöget megnézni, a többi ugyanúgy számolható. Nézzük az $IJK\angle$-et. Az $IBK\angle$-ről tudjuk, hogy derékszög így abból kiszámolható az IK hossz. Az $IJ = JK$ hossz könnyen számolható. $IJ = \sqrt{\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Az $IB = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2}^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, így az $IK = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Ezek segítségével ki tudjuk számolni koszinusz-tétellel az $IJK\angle$-et.

$$IK^2 = IJ^2 + JK^2 - 2 \cdot IJ \cdot JK \cdot \cos\alpha$$
$$\frac{6}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha$$
$$-\frac{1}{2} = \cos\alpha$$
$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Valóban hatszöget kaptunk.

Szeretnék még mutatni a fentieken kívül pár játékos példát a területszámításra.

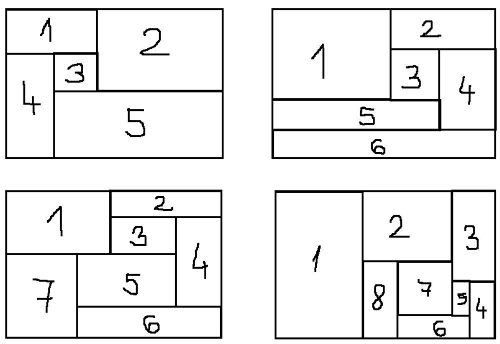
- Számoljuk ki az alábbi négyzetben a színezett rész területét, ahol a négyzetben negyedkörívek vannak. [9]



Megoldás: Osszuk fel a négyzetet 4 részre, méghozzá úgy, hogy húzzuk be az oldalfelező merőlegeseket. Ezáltal a két átlósan elhelyezkedő kis négyzetekben ugyanazt a területet kell számolni. Az egyikben a kis négyzet területéből kell kivonni a negyedkörív területét, míg a másikban csak a negyedkörív területét kell kiszámolni, ahol a negyedkörívek sugara a kis négyzetek oldalhosszúsága, vagyis az eredeti oldalunk hosszának a fele. Tehát a színezett rész területe:

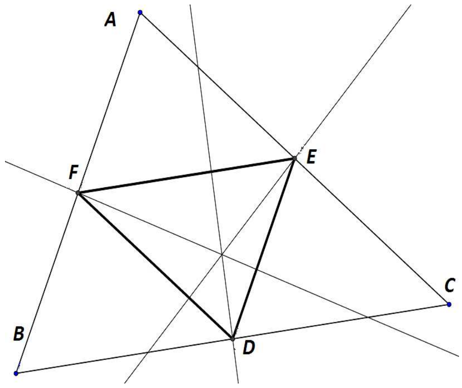
$$T = 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{\frac{a^2}{4}\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{\frac{a^2}{4}\pi}{4}\right) = \frac{a^2 - \frac{a^2}{4}\pi}{2} + \frac{\frac{a^2}{4}\pi}{2} = \frac{a^2}{2}$$

- Téglalapot daraboljunk fel 5,6,7 illetve 8 téglalapra úgy, hogy közülük semelyik két szomszédos se alkosson együtt téglalapot! [9]
  Példa megoldások:



Végül, ahogy azt már a fejezet elején jeleztem most egy olyan feladatot mutatnék be, amit többféle módszerrel is meg lehet oldani. Ezt a feladatot talán az utolsó évben érdemes a diákok körében megmutatni, ezzel is rámutatva a lehetőségekre, amit a matematika, jelen esetben a geometria rejt, miszerint ekkorra a legtöbb feladathoz már nem csak egy eszköz van a kezünkben, egy feladatot már nem csak egyféleképpen tudunk megoldani.

Feladat: Bizonyítsuk be, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.



Megoldás 1.: Legyenek az ABC háromszög egyes csúcsai α, β és γ és az oldalfelező pontok az A csúccsal szemben kezdve D, E és F. Ha összekötjük ezeket az oldalfelező pontokat, akkor ismét egy háromszöget kapunk, amelynek az oldalai az eredeti háromszög középvonalai és megmutatható, hogy az eredeti háromszögünk oldalfelező merőlegesei az új háromszögnek épp a magasságvonalai, amikről tudjuk, hogy egy pontban metszik egymást.

Megoldás 2.: Legyenek az ABC háromszög csúcsainak helyvektorai $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Megmutatható, hogy az AB oldal oldalfelező merőlegesének egyenlete:

$$(\vec{a}-\vec{b})(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{x})$$

ahol $\vec{x}$ a felező merőleges tetszőleges pontja. Ugyanígy a BC illetve a CA oldalra:

$$(\vec{b}-\vec{c})(\frac{\vec{c}+\vec{b}}{2}-\vec{x})$$

$$(\vec{c}-\vec{a})(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}-\vec{x})$$

Emellett tudjuk, hogy A, B és C síkbeli pontok pontosan akkor vannak egy egyenesen, ha $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ teljesül. Jelen esetben, ha az első kettő egyenes egyenletét összeadjuk, akkor épp a harmadikat kapjuk, tehát valóban egy ponton mennek át.

2.3. Miért?

Ahogy azt a cím is sejteti, ebben a részben arra törekszem, hogy megmutassam, miért tartom fontosnak a geometria tanulására való motiválást. Itt külön tárgyalom, hogy általánosan mért tartom fontosnak a geometriában való jártasságot és egyetemi viszonylatban, azaz ha egy diák a matematika szak mellett köteleződik el, akkor neki miért fontos a geometriában otthonosabban mozogni.

2.3.1. Általánosan miért fontos

A geometria egyre kevesebb hangsúlyt kap a középiskolai oktatásban, holott a hétköznapi életben is igen fontos szerepe van.

Egyrészt a geometria az egyik területe a matematikának, ahol már korán előfordulnak tételek illetve alapfogalmak. A geometriának ez a fogalomépítése a hétköznapi élet alap konvencióira tanítja az átlag embereket. A hétköznapokban is szabályok szerint élünk és vannak szociálisan általános érvényű törvények, amiket megtanulunk és alkalmazunk.

Másrészt a geometriai szemlélet a térbeli tájékozódásban játszik igen nagy szerepet. A geometria talán a leginkább képes arra, hogy egy térbeli szemlélet, térbeli tájékozódási képességet kialakítson. Ugyanakkor esztétikai fejlődést is hordoz. Saját magamnál vettem észre ezt a leginkább. Még általános iskola alsó osztályaiban a testvéremmel felmértük a kézügyességünket. Erre nem is felelhetett meg jobban más, mint, hogy ki tud szebben egyenest rajzolni, vagyis húzni. Testvéremnek már akkor nagyon jó kézügyessége volt és fiatalabb kora ellenére ő húzta a szebb vonalat. Ugyanakkor mára már elmondhatom, hogy az akkorihoz képest rengeteget fejlődtem, aminek nyilvánvalóan más háttere is van, de úgy gondolom nagyon sokat jelentett a rengeteg geometriai szerkesztés, és geometriai rajzok készítése.

2.3.2. Egyetemi viszonylatban

A geometria ugyanakkor az egyik legfontosabb tantárgy azok számára, akik a matematika szakot választják továbbtanulásuk céljául.

Személy szerint érdekes volt tapasztalnom, hogy annak ellenére, hogy a középiskolában már nem foglalkoznak olyan számottevően a geometriával, itt az egyetemen legkevesebb három féléven át tanuljuk, ugyanúgy, mint analízist.

Alapvetően a következő témakörökben kell otthonosan mozognia annak, aki elvégzi a matematika alapképzést:

- Elemi sík- és térgeometria, szerkesztések. Ezen belül háromszögek, speciális négyszögek, sokszögek, poliéderek, konvex alakzatok, gömbi geometria, geometriai szerkesztés, nevezetes szerkesztési kérdések és az algebrai vonatkozások.
  E témakörök sikeres elsajátításához úgy gondolom elengedhetetlen a szerkesztési feladatokban való jártasság. Így egyrészt maga a szerkesztési folyamat, másrészt az illeszkedés fogalma. Dolgozatomban a feladatok között épp ezért szerepel illeszkedést bizonyítandó feladat. Az illeszkedést bizonyítandó feladatok nem jellemzőek a középiskolában, pedig a geometriában való jártassághoz létfontosságú.

- Geometriai transzformációk és azon belül hasonlóság, egybevágóság, inverzió, affinitás és projektivitás illetve velük kapcsolatosan a hiperbolikus geometria.
  Itt mindenféleképpen jobb esélyekkel indul az a hallgató, aki nem itt az egyetemen hall először az affin transzformációról vagy az inverzióról, illetve a projektivitásról. Sokat jelent, ha ezekről már van egy alapképe, még ha csak annyi is, hogy ismeri a definíciójukat, és arra próbál tovább építkezni itt az egyetemen. Fontosnak tartom továbbá, hogy a középiskolai diák tisztában legyen vele, hogy mi az, hogy irányítástartó és irányításváltó transzformáció, és egyáltalán magával az irányítás fogalmával a geometriában.

- Analitikus geometria, vagyis tisztában kell lennie a vektorokkal és koordinátákkal, vektorműveletekkel, az euklideszi vektortérrel, alakzatok egyenleteivel, a kör geometriájával és a kúpszeletek elemi, analitikus és projektív tulajdonságaival.
  Ez a témakör talán az egyik legkritikusabb középiskolai szemmel. A vektorokkal közel sem foglalkoznak olyan mélyen a középiskolában,

hogy utána a diák felkészülten fogadja, hogy egy félévi anyagnak minimálisan a fele itt az egyetemen a vektorokról illetve a vektorokról tanultak alkalmazásáról szól. Épp ezért, aki nem kapott mélyebb oktatást a vektorokról kicsit elveszhet már rögtön az első félévben. Szintén a szerencsésebbek közé tartozik az a szakhallgató, aki nem csak a koordinátageometria kapcsán találkozik a kúpszeletekkel a középiskolában és kicsit bővebb ismeretet szerzett a kúpszeletek tulajdonságairól.

A témakörökhöz fűzött megjegyzések, főleg személyes tapasztalatomon nyugszanak, de volt szerencsém erről pár olyan hallgatótársammal is elbeszélgetni, akik bár nem matematika specializációs osztályba jártak, de ugyanúgy matematika fakultációra, mint én.

3. fejezet

Befejezés

Szakdolgozatomban igyekeztem egy olyan kiegészítő anyagot összeszedni, amellyel úgy gondolom, érdekesebbé lehet tenni egy-egy geometria órát illetve egy absztraktabb gondolkodást kialakítani a diákokban, hogy így sikereket érhessenek el a geometriai tanulmányaik során. Épp ezért szerepel vegyesen az érdekesség és az olyan tartalom, amivel inkább egy gondolkodásmódot szeretnék kialakítani. Nem állítom, hogy mindezt, amit leírtam akár egy érdeklődőbb csoportnál is el lehet mondani, de bizonyosan lehet belőle válogatni a csoporthoz igazodva.

A feladatok feldolgozása során igyekeztem a feladatmegoldást elősegítő ábrákat is készíteni a Geogebra illetve a Paint nevű programok segítségével, hiszen egy geometriai feladat megoldását általában ábrák illetve vázlatos rajzok segítségével vezetünk le a gyakorlatban is. Véleményem szerint főként ez az elősegítője a térszemlélet és az esztétikai érzék fejlődésének is.

Úgy gondolom, hogy a matematikaoktatásban ugyanúgy nagy hangsúlyt kell fektetni a geometriára, mint az analízisre például. Az elméleti anyagnak ugyanúgy teret kell kapnia, mint a feladatmegoldásnak. De ugyanakkor a feladatmegoldás során előnyben részesíteném a kicsit elvontabb gondolkodást igénylő feladatokat, mint az egyszerűbb „szerkesszük meg” típusúakat.

Az említett tartalom segítségével elérhetjük, hogy a külső motiváció a matematika tanulására belsővé váljon, és ezáltal megmutathatunk a diákoknak egy olyan világot, amibe nekem csak itt az Eötvös Lóránd Tudományegyetemen volt szerencsém betekintést nyerni.

Irodalomjegyzék

[1] N. Kollár Katalin és Szabó Éva: *Pszichológia Pedagógusoknak*, Osiris Kiadó, Budapest, 2004

[2] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János és Vincze István: *Sokszínű Matematika 9.*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2003

[3] Fried Katalin és Pogáts Ferenc: *Középiskolai Matematika Versenyek 1980-1984*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986

[4] Börcsök László: *Érettségi, Felvételi Feladatok - Matematika*, Szukits Könyvkiadó, Szeged, 1999

[5] Horvay Katalin és Reiman István: *Geometriai Feladatok Gyűjteménye I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001

[6] Ifj. Böröczky Károly: Geometria 1-3 gyakorlatok, előadások nyomán

[7] Moussong Gábor: Geometria 4 gyakorlat, előadás nyomán

[8] Dr. Lévárdi László és Sain Márton: *Matematikatörténeti feladatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982

[9] Róka Sándor: *1000 feladat az elemi matematika köréből*, Typotex Kft, 1992