

# Válogatott geometriai módszerek a csillagászatban és a földmérésben

SZAKDOLGOZAT

Séra Bernadett Anna

Matematika BSc. Matematika tanári szakirány

**Témavezető : dr. Naszódi Márton, tanársegéd**  
ELTE TTK, Geometriai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar  
2010

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezető</b>	<b>1</b>
<b>1. Távolságok a világűrben - háromszögelés</b>	<b>2</b>
1.1. Euklédészi trigonometria . . . . .	2
1.2. Távolságmérés a Naprendszerben . . . . .	8
<b>2. Távolságok a Földön - gömbi geometria</b>	<b>12</b>
2.1. Gömbi trigonometria . . . . .	12
2.2. Távolságmérés a Föld felszínén . . . . .	18
<b>3. A bolygók mozgása - Körök, ellipszisek</b>	<b>22</b>
3.1. A körök és ellipszisek jellemzése . . . . .	22
3.2. Kepler I. és II. törvénye . . . . .	31
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>35</b>

# Bevezető

A természettudományok oktatásában fontos megmutatni az egyes tantárgyak közötti kapcsolatokat. Matematika és fizika szakos tanárként hasznosnak tartom a matematika fizikai alkalmazásainak megismertetését. Ezért a szakdolgozat témája olyan geometriai témakörök kidolgozása, melyek igen jól használhatók a fizika egyes területein.

Az első fejezet a háromszögekről szól, az itt található ismeretekkel már a középiskola elején találkozhatnak a diákok. Az összefüggések használhatóságát egy, az ókorban végzett mérésorozattal szemléltetjük. A mérés célja néhány alapvető csillagászati távolság meghatározása a Naprendszerben.

A következő fejezetben a gömbi geometriával foglalkozunk, melynek ismereteit a földmérésben hasznosítják. Szó lesz arról is, hogy kis távolságok esetén a Föld felszínét síkkal közelítjük, ebben az esetben ismét az előző fejezet összefüggéseit alkalmazhatjuk.

Az utolsó fejezet ismét a Naprendszerbe kalauzol bennünket. Itt a körök és ellipszisek tulajdonságainak ismeretében megismerhetjük Kepler nevezetes törvényeit a bolygók keringéséről.

Mivel a dolgozatban euklédieszi és gömbi geometriával is foglalkozunk, a zavar elkerülése érdekében a jelöléseket az adott geometriához igazítjuk. Szög jelölésére az euklédieszi geometriában a  $\angle$  jelet, gömbi geometriában a  $\sphericalangle$  jelet használjuk. Két pont távolságának jelölése az euklédieszi geometriában:  $d_e(A, B)$ , míg a gömbi geometriában:  $d_g(A, B)$ .

# 1. Távolságok a világűrben - háromszögelés

Ebben a fejezetben az euklédészi geometria alapjairól lesz szó. Célunk a háromszögekkel kapcsolatos fontosabb ismeretek összegyűjtése, a szögfüggvényekkel foglalkozó összefüggések megértése [HGy] és [RI] alapján. Az elmélet megalapozása után megismerkedünk egy, már az ókori Görögországban használt alkalmazással: a bolygók távolságának meghatározásával. Ehhez forrásunk *Simonyi Károly* ismertet *A fizika kultúrtörténete* ([SK]) című munkájában.

## 1.1. Euklédészi trigonometria

Az euklédészi geometriával foglalkozó fejezetekben a pontot, az egyenest és a síkot alapfogalmaknak tekintjük. További fogalmak, melyeket itt nem definiálunk többek között a szakasz, a háromszögek külső és belső szögei, valamint a hasonlóság. Egyes tételeknél vektorokat is alkalmazunk, ilyenkor Descartes-féle koordináta-rendszerben dolgozunk.

**1.1.1. Definíció.** *Vegyünk három pontot a síkon, valamint az ezek által meghatározott három szakaszt. Ekkor a három pont és a három szakasz unióját háromszögnek nevezzük.*

Háromszögek esetén szokásos jelölés az oldalakra:  $a, b$  és  $c$ , melyek rendre az  $A, B$  és  $C$  csúcsokkal szemközt helyezkednek el. A szögek jelölésére  $\alpha$  az  $A$  csúcsnál,  $\beta$  a  $B$  csúcsnál és  $\gamma$  a  $C$  csúcsnál helyezkednek el. Derékszögű háromszögben a két befogó  $a$  és  $b$ , az átfogó  $c$ .

Egy háromszög elfajuló, ha csúcsai egy egyenesre illeszkednek. A háromszögeket szögeik mértéke szerint három csoportba bontjuk: vannak hegyesszögű - minden szöge

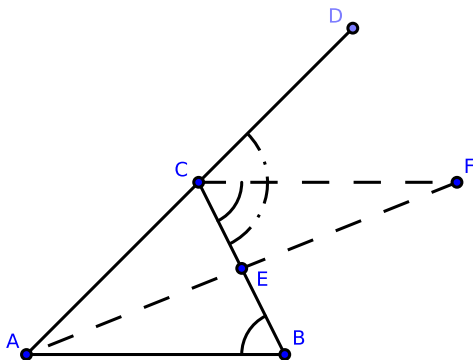
hegyesszög -, derékszögű - van egy derékszög - és tompaszögű - van egy tompaszög - háromszögek. Derékszögű háromszögben a derékszöget bezáró oldalakat befogóknak, a derékszöggel szemközti oldalt átfogónak nevezzük. Az elemi geometriában a háromszögek építőköveknek tekinthetők, ezért néhány tulajdonságuk igen jelentős. A háromszög szögösszegére vonatkozó állítást alaptényként kezeljük.

**1.1.2. Állítás.** *A háromszög belső szögeinek összege  $180^\circ$ .*

A következő tételek a háromszögek oldalai és szögei közötti összefüggéseket adják meg.

**1.1.3. Tétel.** *Egy háromszög tetszőleges csúcsához tartozó külső szög nagyobb, mint bármelyik másik csúcsbeli belső szög.*

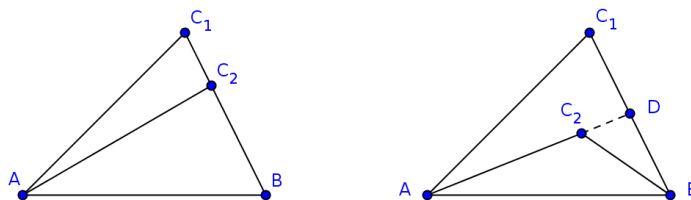
*Bizonyítás.* Vegyünk egy  $ABC$  háromszöget, és tekintsük a  $C$ -nél lévő külső, és a  $B$ -nél lévő belső szöget. Hosszabbítsuk meg  $AC$  oldalt  $C$  ponton túl és vegyük fel rajta a  $D$  pontot, valamint legyen  $E$  a  $BC$  oldal felezőpontja az 1.1 ábrán látható módon. Tükrözzük az  $ABE$  háromszöget az  $E$  pontra, így kapjuk az  $FCE\Delta$ -t. Mivel  $F$  a  $BCD$



1.1. ábra.

szögtartományban van, ezért  $BCF\angle < BCD\angle$ . A tükrözés miatt  $BCF\angle = ABC\angle$ , így összességében  $ABC\angle < BCD\angle$ .  $\square$

**1.1.4. Tétel.** *Vegyünk egy  $ABC_1$  háromszöget, melynek az  $ABC_2$  háromszöggel van egy közös oldala, és  $C_2$  benne van  $ABC_1$  háromszögben. Ekkor a közös oldallal szemközti szög  $ABC_2$  háromszögben nagyobb, mint  $ABC_1$  háromszögben.*



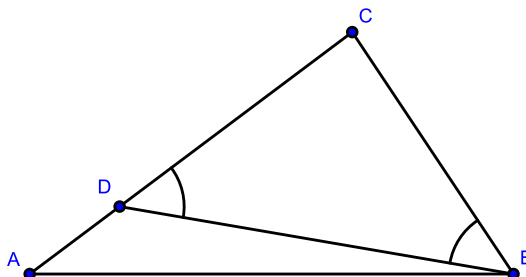
1.2. ábra.

*Bizonyítás.* Először tegyük fel, hogy  $C_2$  a  $BC_1$  oldalon van. Ekkor  $AC_2B\angle$  külső szöge az  $AC_1C_2\Delta$ -nek, és ezért az 1.1.3 tétel szerint nagyobb  $AC_1B\angle$ -nél.

Nézzük azt az esetet, mikor  $C_2$  az  $ABC_1\Delta$  belsejében van. Hosszabbítsuk meg az  $AC_2$  egyenest, legyen  $D$  a meghosszabbításnak és a  $BC_1$  oldalnak a metszéspontja. Ekkor az előbbiek szerint  $AC_1B\angle < ADB\angle$ , másrészt  $ADB\angle < AC_2B\angle$ , ezért valóban  $AC_1B\angle < AC_2B\angle$ .  $\square$

**1.1.5. Tétel.** *Tetszőleges háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.*

*Bizonyítás.* Vegyünk egy  $ABC$  háromszöget, melyben legyen  $AC > BC$ . Vegyük fel az  $AC$  oldalon azt a  $D$  pontot, melyre  $BC = CD$ .

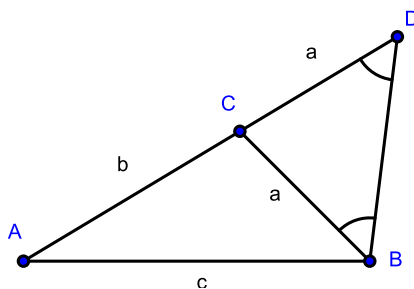


1.3. ábra.

Mivel ekkor  $BCD\Delta$  egyenlőszárú,  $DBC\angle = BDC\angle$ . Mivel a  $BD$  szakasz kettéosztja az  $ABC\angle$ -et, így  $ABC\angle > DBC\angle$ . Mivel  $BDC\angle$  külső szöge az  $ABD$  háromszögnek, így az 1.1.4 tétel szerint  $BDC\angle > BAC\angle$ . Az eddigieket összegezve adódik, hogy  $ABC\angle < BAC\angle$ .  $\square$

**1.1.6. Tétel.** *Egy háromszög tetszőleges két oldalának az összege nagyobb, mint a harmadik oldal.*

*Bizonyítás.* Vegyünk egy  $ABC$  háromszöget, és lássuk be, hogy  $AC + CB > AB$ . Ehhez hosszabbítsuk meg az  $AC$  oldalt egy  $BC$  oldal hosszú szakasszal, ennek végpontja legyen  $D$ . Húzzuk be a  $BD$  szakaszt, így egy egyenlő szárú háromszöget kapunk (1.4 ábra), melyben így  $CBD\angle = CDB\angle$ . Mivel  $BC$  szakasz az  $ABD\Delta$  belsejében van,  $ABD\angle > CBD\angle$ , így  $ABD\angle > ADB\angle$  és az  $ABD\Delta$  oldalaira  $AD > AB$ . Ez pedig  $AD = AC + CB$  egyenlőség miatt a fenti egyenlőtlenséget igazolja.  $\square$



1.4. ábra.

Háromszögekkel kapcsolatos feladatok megoldásához nagyon jól használhatók a szögfüggvények.

**1.1.7. Definíció.** Vegyünk a Descartes-féle koordináta-rendszer origója ( $O$ ) körül egy sugarú kört, és annak egy tetszőleges  $P$  pontját. Legyen az origóból a  $P$ -be mutató helyvektor  $\vec{e}$ , melynek az  $x$  tengellyel bezárt szöge  $\alpha$ . Ekkor  $\vec{e}$ -nek  $\alpha$ -tól függő két koordinátája közül az első  $\alpha$  koszinuszának ( $\cos \alpha$ ), a másodikat  $\alpha$  szinusznak ( $\sin \alpha$ ) nevezzük.

Ha  $\cos \alpha \neq 0$ , illetve  $\sin \alpha \neq 0$ , akkor definiálhatjuk

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

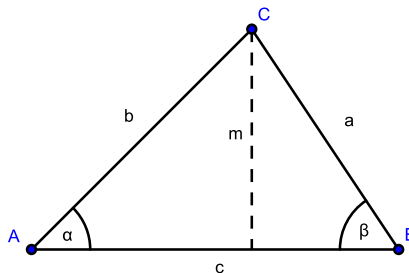
hányadosokat, mint  $\alpha$  tangensét illetve kotangensét. Amennyiben  $\cos \alpha = 0$ , úgy azt mondjuk, hogy  $\operatorname{tg} \alpha$  nincs értelmezve, és hasonlóan, ha  $\sin \alpha = 0$ , akkor  $\operatorname{ctg} \alpha$ -t nem értelmezzük.

Egy síkbeli  $\vec{v}$  vektor *irányszöge* az  $x$  tengely és a  $\vec{v}$  vektor által meghatározott irányított szög. Legyen a vektor hossza  $v$ , irányyszöge  $\alpha$ . Ekkor  $\vec{v}$  koordinátái  $(v \cos \alpha, v \sin \alpha)$ , mert ez a vektor a  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  egységvektor  $v$ -szerese.

**1.1.8. Tétel.** *(Szinusztétel) Tetszőleges háromszögben az oldalak aránya megegyezik a velük szemközti szögek szinuszának arányával. Vagyis a szokásos jelölések mellett:*

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (1.1)$$

*Bizonyítás.* Vegyünk egy  $ABC$  háromszöget, és húzzuk be az  $m$  magasságot a  $C$  pontból az 1.5 ábra szerint. Az eddigiek szerint



1.5. ábra.

$$m = a \sin \beta = b \sin \alpha$$

melyből átrendezéssel megkapjuk  $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$  egyenlőséget. Könnyedén megkaphatjuk a tételben szereplő többi egyenlőséget, ha a gondolatmenetet más oldalpárokkal vezetjük végig.  $\square$

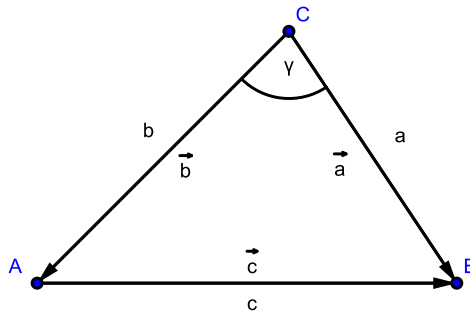
**1.1.9. Tétel.** *(Koszinusztétel) A szokásos jelölések mellett:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (1.2)$$

*Bizonyítás.* Legyenek  $\vec{a} = \vec{CB}$ ,  $\vec{b} = \vec{CA}$  és  $\vec{c} = \vec{AB}$  vektorokat. Ekkor teljesül  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$  (1.6 ábra). Az egyenlőséget négyzetre emelve

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b}$$



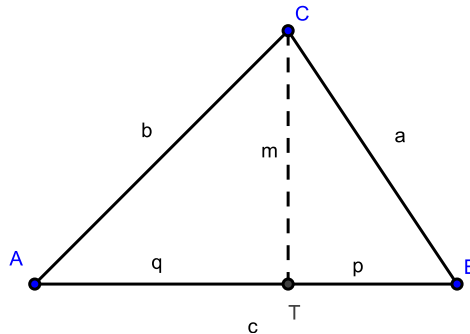


1.6. ábra.

adódik. Ebben az egyenlőségben a vektorokat skalárisan szoroztuk. A szorzatokat kifejtve éppen az 1.2-es összefüggést kapjuk.  $\square$

A háromszögek halmazán belül a derékszögű háromszögek igen fontos helyet foglalnak el, ezért a következőkben bebizonyítunk néhány, speciálisan ilyen háromszögekre kimondott tételt.

**1.1.10. Tétel.** (*Magasságtétel*) *Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a befogók átfogóra vett merőleges vetületeinek mértani közepe.*



1.7. ábra.

*Bizonyítás.* Vegyünk egy  $ABC$  derékszögű háromszöget, melyben a derékszög a  $C$  csúcsnál fekszik. A  $C$  pontból a  $c$  oldalra bocsássunk merőlegest, ennek talppontja legyen  $T$ . Legyen  $AT = q$  és  $TB = p$  (1.7 ábra). Ekkor a  $CT$  szakasz a háromszöget két hasonló háromszögre bontja, mivel mindkettő derékszögű, és van 1-1 közös szögük

az  $ABC$  háromszöggel:  $CBT\Delta \sim ABC\Delta \sim ACT\Delta$ . A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak arányai egyenlőek:  $p : m = m : q$ , amiből  $m^2 = pq$  következik, ami éppen a bizonyítani kívánt összefüggés.  $\square$

**1.1.11. Tétel.** *(Befogótétel) Derékszögű háromszögben bármely befogó mértani közepe az ő átfogóra vett merőleges vetületének és az átfogónak.*

*Bizonyítás.* Vegyünk egy  $ABC$  derékszögű háromszöget, melyben használjuk az 1.1.10 tételben alkalmazott jelöléseket. Amint azt az előző tételben beláttuk, a magasságvonal két, az eredetivel hasonló háromszögre bontja  $ABC\Delta$ -t. Az oldalak közötti arányt felírva  $a : c = p : a$  adódik, azaz  $a^2 = cp$ , mely éppen a bizonyítani kívánt összefüggés.  $\square$

**1.1.12. Tétel.** *(Pythagorasz-tétel) A derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege megegyezik az átfogó négyzetével, vagyis a szokásos jelölések mellett:*

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.3}$$

*Bizonyítás.* Írjuk fel az  $ABC$  derékszögű háromszög mindkét befogójára a befogótételt az 1.7 ábrán látható jelölésekkel: a szokásos jelölések mellett:  $a^2 = cp$  és  $b^2 = cq$ . Ezeket összegezve:

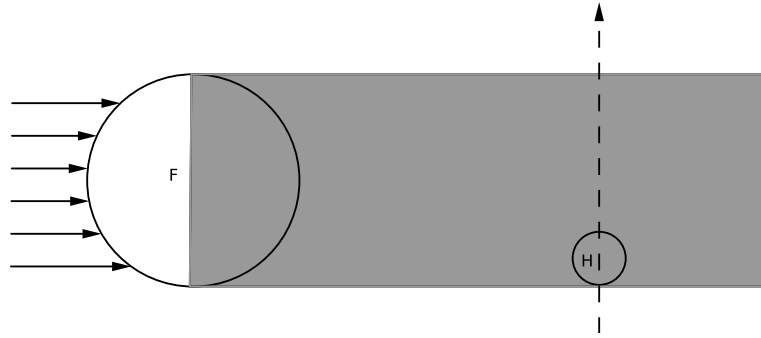
$$a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q) = c^2$$

$\square$

## 1.2. Távolságmérés a Naprendszerben

Az égitestek távolságmérésének kezdete az ókorba nyúlik vissza. Szamoszi Arisztarkhosz igen részletesen foglalkozott a két legfeltűnőbb égitest, a Nap és a Hold méreteivel, Földtől való távolságukkal. Fennmaradt művében, az *A Nap és Hold alakja és távolságá*-ban a Föld átmérőjéhez, mint egységhez viszonyítva határozta meg a cím-ben szereplő adatokat. Sajnos Arisztarkhosz mérései nagyon pontatlanok voltak, így a számolt eredmények néhol több nagyságrenddel eltérnek a valóstól.

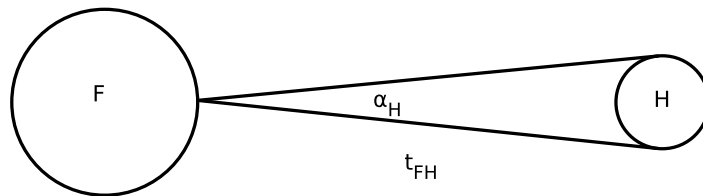
A Hold átmérőjét ( $D_H$ ) egy teljes holdfogyatkozás alkalmával határozta meg, mégpedig úgy, hogy megmérte, mennyi ideig tartózkodik a Hold a Föld hengeresnek



1.8. ábra.

tekinthető árnyékában (1.8 ábra). Vegyük az árnyékba való belépés kezdetétől a teljes eltűnésig eltelt időt, ez a szám jellemzi a Hold átmérőjét. Ezt leosztva azzal az idővel, ami a belépés kezdetétől az újra felbukkanásig eltelik, kapjuk a két átmérő közötti arányszámot, mely Arisztarkhosz méréseivel 0,36-ot adott. A tényleges, arányszám 0,27.

A Föld és Hold távolságának ( $t_{FH}$ ) megméréséhez vette a Hold látószögét ( $\alpha_H$ ) a Föld egy tetszőleges pontjáról, ahogy az az 1.9 ábrán látható. Ez a látószög



1.9. ábra.

nem állandó nagyságú, mivel a Hold pályája nem egy Föld középpontú kör, ezért a középértéket vette, ami  $30'$ . A Hold átmérőjének ismeretében a távolság ezen szögből meghatározható:

$$\sin(\alpha_H/2)t_{FH} = D_H/2. \quad (1.4)$$

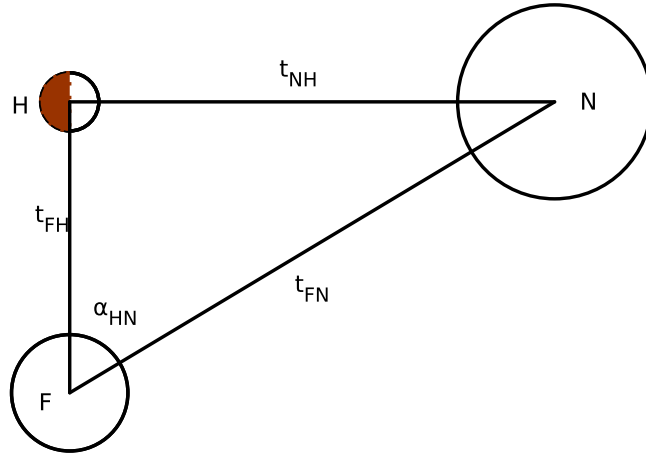
Másrészt az 1.1.7 alapján, mivel  $\alpha_H$  nagyon kicsi:

$$\sin(\alpha_H/2) \approx \frac{\alpha_H}{2}. \quad (1.5)$$

Így kapjuk, hogy

$$\alpha_H \frac{t_{FH}}{D_F} \approx \frac{D_H}{D_F} \implies \frac{t_{FH}}{D_F} \approx \frac{1}{\alpha_H} \frac{D_H}{D_F}, \quad (1.6)$$

Arisztarkhosz eredménye:  $\frac{t_{FH}}{D_F} = 9,5$ , ahol  $D_F$  a Föld átmérője.



1.10. ábra.

Arisztarkhosz észrevette, hogy amikor a Holdnak pontosan a felét látjuk megvilágítva, a Hold-Nap és a Hold-Föld iránya éppen merőleges. Ezt a helyzetet az 1.10 ábra szemlélteti. Ekkor megmérve a Föld-Hold és a Föld-Nap irányok által bezárt  $\alpha_{HN} = 87^\circ$  szöget, az eddigi eredmények felhasználásával meghatározható a Föld-Nap távolság ( $t_{FN}$ ):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{HN}\right) t_{FN} = t_{FH}.$$

Mivel ekkor  $\frac{\pi}{2} - \alpha_{HN}$  nagyon kicsi, szinuszát közelíthetjük a szög értékével:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{HN}\right) t_{FN} \approx t_{FH},$$

melyet átrendezve, majd leosztva  $D_F$ -el:

$$\frac{t_{FN}}{D_F} \approx \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{HN}\right)} \frac{t_{FH}}{D_F}, \quad (1.7)$$

melyre 180 adódott.

Ma már tudjuk, hogy ezek az értékek néhol nagyságrendekkel eltérnek a valóstól. Ennek egyik oka lehet, hogy Arisztarkhosz a szögek mérését még a kortársaiénál jóval nagyobb hibával végezte el. Határozzuk meg, mekkora szöveget kellett volna mérnie, hogy a helyes arányokat kapja!

*Feladat:* Mérési eredményekből tudjuk, hogy  $t_{FH} = 384000$  km,  $D_F = 12742$  km,  $D_H = 3476$  km, valamint  $t_{FN} = 150000000$  km. Határozzuk meg  $\alpha_H$ -t és  $\alpha_{HN}$ -t.

*Megoldás:* Az 1.6 összefüggést rendezzük  $\alpha_H$ -ra:

$$\alpha_H \approx 0,009052$$

adódik. Ez az érték ívmértékben adta meg a szög nagyságát, átszámolva:  $\alpha_H \approx 0,52^\circ$ .

Az  $\alpha_{HN}$  meghatározásához rendezzük át az 1.7-es egyenletet, így:

$$\alpha_{HN} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{t_{FH}}{t_{FN}} = 1,57 - \frac{384000km}{150000000km} = 1,57 - 0,00256 = 1,56744.$$

A szöget fokokba átszámolva  $\alpha_{HN} \approx 89,85^\circ$  adódik.

## 2. Távolságok a Földön - gömbi geometria

Ebben a fejezetben az előző fejezet mintájára vezetjük le a gömbi háromszögekkel kapcsolatos tételeket [CsB] és [KA] alapján. A gyakorlati felhasználással foglalkozó részben megismerkedünk a földmérés alapjaival, melyről bővebben [KrA] jegyzetben olvashatunk.

### 2.1. Gömbi trigonometria

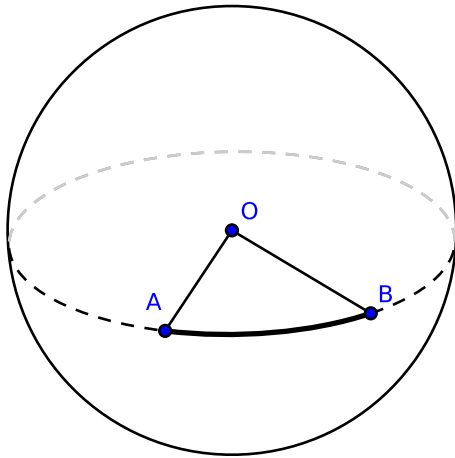
Tekintsünk egy  $O$  középpontú, egység sugarú gömböt. A következőkben bevezetjük a gömbi geometria alapfogalmait.

**2.1.1. Definíció.** *Két pont gömbi távolságán a hozzájuk tartozó középponti szögget értjük. Jelölés:  $d_g(A, B)$ .*

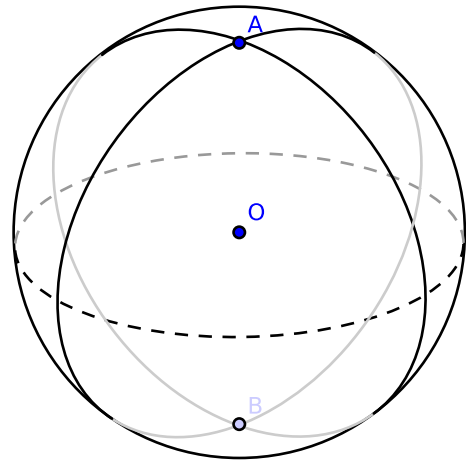
**2.1.2. Definíció.** *Gömbi egyeneseknek nevezzük a gömb főköréit (2.2 ábra). Két nem átellenes pont az őket összekötő főkört két ívre bontja, melyek közül az átellenes pontpárt nem tartalmazót gömbi szakasznak (2.1 ábra) nevezzük.*

Vegyünk két pontot a gömbön:  $A$  és  $B$ . Ekkor, ha ezek nem átellenes pontok, akkor az  $AOB$  sík által kimetszett főkör rövidebb íve lesz a két pontot összekötő gömbi szakasz. Amennyiben a két pont a gömb átellenes pontjai, úgy végtelen sok  $\pi$  hosszúságú gömbi szakasz köti össze őket.

**2.1.3. Definíció.** *Két főkör szöge valamely metszéspontjukban vett euklédesszi térbeli érintőegyeneseik szöge, ami megegyezik a főköröket a gömbfelületből kimetsző síkok szögével.*



2.1. ábra.



2.2. ábra.

**2.1.4. Állítás.** *Két ponttól azonos távolságra levő pontok mértani helye a gömbön egy olyan gömbi egyenes, mely a két pontot összekötő gömbi szakaszt merőlegesen felezi. Ezt a gömbi egyenest gömbi szakaszfelező merőlegesnek nevezzük.*

*Bizonyítás.* A térben a két ponttól azonos távol levő pontok halmaza egy sík, amely természetesen tartalmazza a gömb középpontját. Ennek a síknak a gömbbel vett metszete egy főkörív. Ez a főkörív merőleges a gömbi szakaszra. Ha az euklédieszi térben tekintjük a gömb pontjait, akkor nyilvánvaló, hogy azok szimmetrikusak a középponton áthaladó síkra. Tehát az erre a síkra való tükrözés a gömbi szakasznak a síktól egyforma euklédieszi távolságra lévő pontjait felcseréli, szögtartó tulajdonsága miatt pedig a sík és a szakasz által bezárt szög csak derékszög lehet.  $\square$

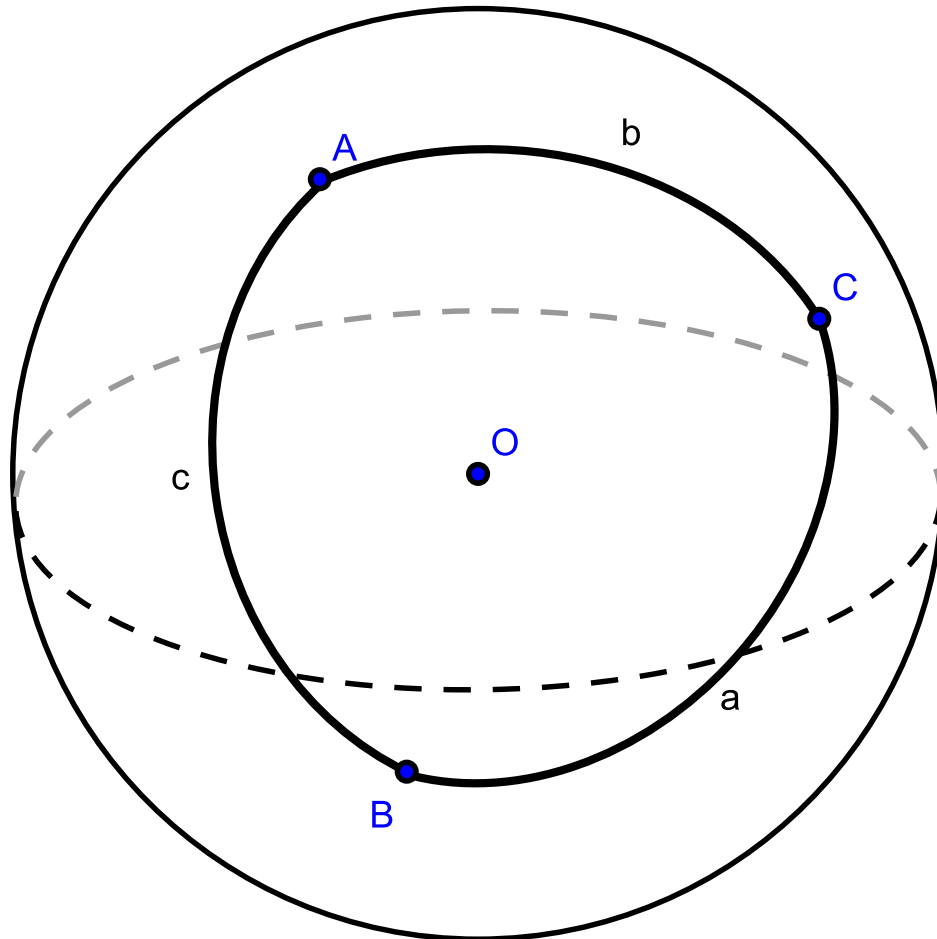
Ha két fél-főkörív végpontjai egybeesnek, akkor azt mondjuk, hogy az  $A, B$  végpontok és az  $a, b$  főkörívek kétszöget (?? ábra) alkotnak. Az  $A$  és  $B$  pontokat a kétszög csúcsainak, az  $a$  és  $b$  köríveket a kétszög oldalainak nevezzük. A kétszög nyílásszöge megegyezik a két főkör szögével.

**2.1.5. Definíció.** *Vegyünk három pontot ( $A, B, C$ ) a gömbön, valamint az ezek által meghatározott három gömbi szakaszt. Ekkor a három pont és a három gömbi szakasz unióját gömbháromszögnek (2.3 ábra) nevezzük.*

Háromszögek esetén szokásos jelölés az oldalakra:  $a, b$  és  $c$ , melyek rendre az  $A, B$  és  $C$  csúcsokkal szemközt helyezkednek el. A szögek jelölésére  $\alpha$  az  $A$  csúcsnál,  $\beta$  a  $B$

csúcsnál és  $\gamma$  a  $C$  csúcsnál helyezkednek el.

A gömbi háromszög csúcsai az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontok, oldalai az ezen pontok által meghatározott szakaszok, belső szögei a szakaszok által bezárt szögek. Egy gömbi háromszög elfajuló, ha csúcsai ugyanarra a főkörre illeszkednek.



2.3. ábra.

**2.1.6. Tétel.** *Egy gömbi háromszögben nagyobb oldallal szemközt nagyobb, egyenlő oldalakkal szemben egyenlő nagyságú szögek fekszenek.*

*Bizonyítás.* Vegyünk egy  $ABC$  gömbi háromszöget, melyben  $a < b$ . Ekkor a  $C$  pont az  $AB$  oldal szakaszfelező merőlegesének arra az oldalára esik, mint  $B$ . Következésképpen az  $AC$  szakasz metszi a felező merőlegest egy  $C^*$  pontban. Ekkor a következő



összefüggés áll fenn a gömbháromszög szögei között:  $\alpha = C^*AB \triangleleft = C^*BA \triangleleft$ , tehát  $C^*BA \triangleleft < CBA \triangleleft = \beta$ .

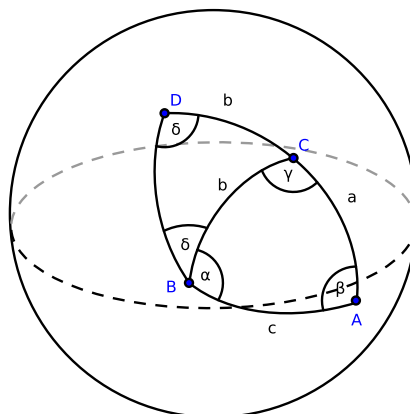
Hasonlóan megvizsgálva  $a = b$  esetet látható, hogy ekkor  $C^* = C$ , amiből következik, hogy  $\alpha = C^*AB \triangleleft = C^*BA \triangleleft = \beta$ .  $\square$

**2.1.7. Definíció.** Az olyan gömbháromszöget, melynek két oldala egyenlő egyenlő szárú gömbi háromszögnek nevezzük.

**2.1.8. Tétel.** Nem elfajuló gömbi háromszögben két oldal hosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza.

*Bizonyítás.* Egység sugarú gömbben egy oldal hossza legfeljebb  $\pi$  lehet, így az állítás teljesül ha a két oldal összege nagyobb, mint  $\pi$ .

Vegyünk egy  $ABC$  gömbi háromszöget, és tegyük fel, hogy  $AC + CB < \pi$ . Hozzábírjuk meg a 2.4 ábrán látható módon a  $AC$  főkörívet a  $C$  ponton túlra addig, míg a  $D$  végpontjának  $C$  ponttól való távolsága éppen megegyezik  $a$ -val. Ekkor  $d_g(A, D) \leq \pi$  és



2.4. ábra.

a  $DCB$  gömbi háromszög egyenlőszárú. Ebben a gömbi háromszögben a  $D$  és a  $B$  pontnál ugyanaz a  $\delta$  szög található. Az előbbi állítás szerint  $\delta < \delta + \alpha$  miatt  $AB \leq AC + CB$  következik. Egyenlőség esetén  $\delta = \delta + \alpha$  miatt  $\alpha = 0$  áll fenn.  $\square$

**2.1.9. Következmény.** Egy gömbi szakaszokból álló töröttvonal hossza legalább akkora, mint a végpontok távolsága. Egyenlőség áll fenn, ha a töröttvonalak egy rétegben fednek le egy gömbi szakaszt.

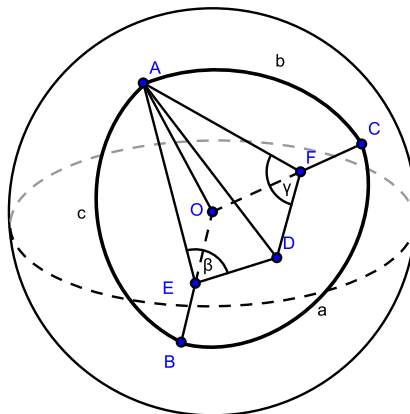
Innen már látható, hogy a gömbi távolság egy metrikát ad a gömbön, hiszen nem negatív, pontosan akkor 0, ha két pont egybeesik, és a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül.

**2.1.10. Tétel.** (Gömbi szinusztétel) *A szokásos jelölések mellett a következő teljesül:*

$$\sin b : \sin c = \sin \beta : \sin \gamma \quad (2.1)$$

*Bizonyítás.* Vegyünk egy  $ABC$  gömbi háromszöget az egy sugarú gömbön. Legyen  $A$ -nak az  $OBC$  síkra vett vetülete  $D$ , és ennek  $OB$  és  $OC$  egyenesekre vett vetülete rendre  $E$  és  $F$  (2.5 ábra). Ekkor  $AE$  merőleges  $OB$ -re és  $AF$  merőleges  $OC$ -re. Az  $AED\angle = \beta$ , mivel  $\beta$  az  $AOB$  és  $OCB$  síkok által bezárt szög, és  $AE$  és  $DE$  merőlegesek a  $BO$  egyenesre, tehát  $AED\angle$  is az ezen síkok által bezárt szög. Hasonlóan  $AFD\angle = \gamma$ , ahonnan  $\sin \beta = AD : AE$  és  $\sin \gamma = AD : AF$ . Innen következik, hogy  $\sin \beta : \sin \gamma = AF : AE$ . Tudjuk, hogy  $AOB\angle = c$ , ahonnan következik, hogy  $AE = \sin c$ , hasonlóan pedig, hogy  $AF = \sin b$ . Innen tehát  $\sin \beta : \sin \gamma = \sin b : \sin c$ .

A tétel többi része hasonlóan bizonyítható. □



2.5. ábra.

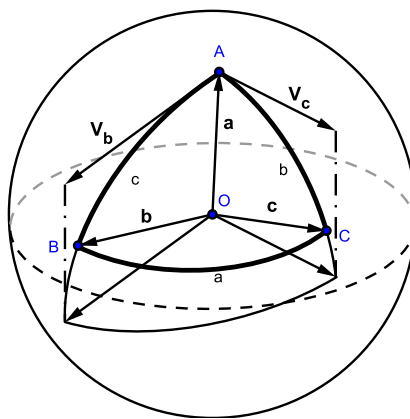
**2.1.11. Tétel.** *Gömbi koszinusztétel az oldalakra:*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (2.2)$$

A bizonyításban felhasználunk egy ismert formulát: ha egy síkban adott két egymásra merőleges egységvektor,  $a$  és  $v$ , akkor  $a$ -nak  $v$  irányába vett elforgatottja  $t$  szöggel:

$$a' = \cos t a + \sin t v$$

*Bizonyítás.* Vegyünk egy  $ABC$  gömbi háromszöget, és három vektort -  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , és  $\vec{c}$  - , melyek a gömb középpontjából a háromszög megfelelő csúsaiba mutatnak a 2.6 ábra szerint. Definiáljunk egy  $\vec{v}_b$  egységvektort, mely a háromszög  $AB$  oldalának  $A$ -beli érintő félegyenese irányába mutat, valamint egy  $\vec{v}_c$  egységvektort, mely  $AC$  oldal  $A$ -beli érintőfélegyenese irányába mutat.



2.6. ábra.

Ekkor  $\vec{b} = \cos c \vec{a} + \sin c \vec{v}_b$  és  $\vec{c} = \cos b \vec{a} + \sin b \vec{v}_c$ . Skalárisan összeszorozva a két egyenletet:

$$\begin{aligned} \cos a &= \vec{b} \vec{c} & (2.3) \\ &= (\cos c \vec{a} + \sin c \vec{v}_b) (\cos b \vec{a} + \sin b \vec{v}_c) \\ &= \cos b \cos c \vec{a} \vec{a} + \cos c \sin b \vec{a} \vec{v}_c + \cos b \sin c \vec{a} \vec{v}_b + \sin b \sin c \vec{v}_b \vec{v}_c \\ &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \end{aligned}$$

mivel  $\vec{a} \vec{a} = 1$ ,  $\vec{a} \vec{v}_b = \vec{a} \vec{v}_c = 0$  és  $\vec{v}_b \vec{v}_c = \cos \alpha$ . Így megkaptuk a keresett összefüggést.  $\square$

A következő tétel bizonyításához be kellene vezetnünk a poláris gömbi háromszög fogalmát, majd arra alkalmazni a 2.1.11 tételt. Mivel ezt nem tesszük meg, így a tételt bizonyítás nélkül közöljük.

**2.1.12. Tétel.** *Gömbi koszinusztétel szögekre:*

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \quad (2.4)$$

**2.1.13. Következmény.** *Az azonos szögekkel rendelkező háromszögek oldalainak hossza is megegyezik.*

**2.1.14. Tétel.** *A  $C$  csúcsánál derékszögű gömbi háromszögben érvényesek a következők:*

*Pythagorasz-tétel:*

$$\cos c = \cos a \cos b \quad (2.5)$$

*Befogótétel:*

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos \alpha \quad (2.6)$$

*Bizonyítás.* A Pythagorasz-tételt a 2.1.11 tétel  $\cos \gamma = 0$  eset adja.

A Befogótételt megkapjuk, ha a gömbháromszöget annak  $A$  csúcsában a gömböt érintő síkra vetítjük. Ekkor a kivetített háromszög derékszögű háromszög, melynek átfogója  $\operatorname{tg} c$ , a mellette levő befogója pedig  $\operatorname{tg} b$  lesz, az általuk bezárt szög  $\alpha$ .  $\square$

A következő tétel a gömbi és az euklédészi geometria kapcsolatával foglalkozik.

**2.1.15. Tétel.** *Legyenek  $a$ ,  $b$  és  $c$  nemnegatív valós számok, melyekre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Vegyünk az  $r$  sugarú gömbön  $A(r)$ ,  $B(r)$  és  $C(r)$  pontokat, ahol  $a$ ,  $b$  és  $c$  rendre a megfelelő csúcsokat az  $r$  sugarú gömbön összekötő főkörívek ívhosszai. Ekkor az  $A(r)B(r)C(r)$  gömbi háromszög belső szögei, ha a gömb sugara tart a végtelenhez, tartanak az  $a$ ,  $b$  és  $c$  oldalhosszakkal rendelkező euklédészi háromszög  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  szögeihez.*

## 2.2. Távolságmérés a Föld felszínén

A Föld felszínén egy adott pont helyzetének meghatározásával, a földfelszíntől való magasság és a felszíni távolságok mérésével a geometriai módszereket alkalmazó *geodézia*

tudományág foglalkozik. A geodézia tudományos feladata a Föld alakjának, méretének és nehézségi erőterének meghatározása, valamint a földfelszín bármely pontján végrehajtandó helymeghatározás elméleti megalapozása. Gyakorlati feladatai a felszíni természetes és mesterséges alakzatok alakjelző pontjainak helymeghatározása, valamint ezeknek mérethelyes ábrázolása (térképezés). Mi most az ehhez szükséges távolságméréssel, illetve a helymeghatározással foglalkozunk.

A Föld, mint égitest alakját kétféleképpen tekintjük. Létezik az úgynevezett *fizikai alak*, mely a tengerek és szárazföldek által meghatározott felszínt jelenti, és létezik egy *matematikai (elméleti) alak*, mely valamelyik tenger meghatározott közép szintjének magasságában helyezkedik el, ezt nevezzük *geoid*-nak. A méréseknél a geoid alakot egy matematikailag könnyebben leírható alakzattal szokták helyettesíteni, ezt az alakzatot nevezzük *alapfelület*-nek, mely három féle lehet. Amennyiben egy  $4\text{km}$  sugarú körön belül mérünk, a síkot tekintjük alapfelületnek, ennek a közelítésnek a 2.1.15 tétel az alapja. Ha a munkaterület egy  $13\text{km}$  sugarú körbe foglalható, akkor gömböt használunk alapfelületnek, ami elég jól közelíti a geoid alakot. Ennél nagyobb területen való méréskor *forgási ellipszoid*-ot használunk, melynek paramétereit úgy választjuk meg, hogy a lehető legjobban közelítse a geoidot. Evvel az esettel bonyolultsága miatt nem foglalkozunk.

Egy, a Föld felszínén lévő pont térbeli helyét mérési eredményekből határozzuk meg. Első lépésben kiválasztjuk az alapfelületet, majd a ponthoz ( $A$ ) vetítéssel egy alapfelületi pontot ( $A'$ ) rendelünk. Meghatározzuk az így kapott pont helyét, majd  $A$ -nak az alapfelülettől mért *magasságát* ( $h$ ) a vetítés vonala mentén. Ennek a magasságnak a meghatározásához például *optikai szintezőműszer*-t, a szögek méréséhez *teodolit*-ot, a távolságok meghatározásához *elektronikus távmérő*-ket használunk. Napjainkban e két műszer egybeépítésével létrejött a mérőállomás, angolul *total station*.

A vízszintes helymeghatározás célja az alapfelületre vetített pontok helyének meghatározása. Ennek egy módszere, hogy meghatározzuk több ismert koordinátájú ponttól vett alapfelületi távolságát. Tehát a vízszintes helymeghatározáshoz az alapfelületen értelmezett szögek és távolságok meghatározása szükséges. Vegyünk az  $A$  és  $B$  pontokat a terepen. Az  $A$  és  $B$  pontok *távolsága* alatt a pontok alapfelületre vett vetületeinek felületi távolságát értjük. A felületi távolság meghatározásához először vegyünk a két pont *ferde távolságát*, mely a végpontokra illeszkedő függőleges sík és a terep metszészvonalának a hossza, ami közelíthető egy olyan töröttvonalal,

melynek töréspontjai a terepen vannak.

A Föld felszínén mért hosszúságnak az alapfelületre történő átszámítását két lépésben végezzük el. Az első lépésben *ferde távolságokat* ( $l_i$ ) mérünk a terepen, ezt felosztjuk rövid szakaszokra, és mindegyiket a neki megfelelő vízszintes síkra vetítjük, így kapunk több  $l_{v,i}$  távolságot. A geodéták által kidolgozott eljárással ez lényegében annyit jelent, hogy az egyes  $l_i$  távolságokhoz egy, az  $l_i$  hosszától és a két végpontja magasságától függő tagot adnak hozzá. Ez a tag a *redukció*. Második lépésben a vízszintes távolságot vetítjük az alapfelületre. Amennyiben az alapfelület sík, úgy a két lépést egyszerre végezzük el, a ferde távolságból azonnal az alapfelületi távolságot kapjuk.

Attól függően, hogy az alapfelületünk sík vagy gömb, merőleges vagy középpontos vetítéssel kapjuk az alapfelületi távolságot. Nézzük először a sík esetét. Legyen a mért töröttvonal  $i$ -edik darabjának hossza  $l_i$ , ennek a darabnak a vízszintessel bezárt szöge  $\alpha_i$ . Ekkor a szakasz vízszintes vetületének hossza

$$l_{v,i} = l_i \cos \alpha_i. \quad (2.7)$$

Amennyiben ismert a végpontok  $\Delta m_i$  magasságkülönbsége, akkor a  $\cos \alpha$  függvény Taylor-sorának első tagjával közelíthetjük a vetületi hosszt:  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ , ahol kicsi szögek esetén  $\alpha$ -t közelítjük  $\sin \alpha \approx \frac{\Delta m_i}{l_i}$ -vel. Így  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\Delta m_i^2}{2l_i^2}$  közelítést kapjuk, melyet a (2.7) egyenletbe helyettesítve

$$l_{v,i} = l_i + \Delta_{v,i} \quad (2.8)$$

egyenletet kapjuk, ahol  $\Delta_{v,i} = -\frac{\Delta m_i^2}{2l_i}$ . Ha az így redukált hosszakat összeadjuk, akkor jó közelítéssel a végpontok  $t_v = \sum l_{v,i}$  vízszintes távolságot kapjuk.

A gömbre vetített alapfelületi távolság meghatározásához vegyünk egy  $R$  sugarú gömböt. Legyen  $t_g$  a keresett alapfelületi távolság,  $t_v$  a vízszintes távolság az alapfelület-től  $H$  magasságban. Ekkor a két távolság aránya:

$$\frac{t_g}{t_v} = \frac{R}{R+H} = \frac{R+H-H}{R+H} = 1 - \frac{H}{R+H} \approx 1 - \frac{H}{R},$$

mivel a Földet közelítő gömb sugarához képest a felszíni magasság elhanyagolható

mértékű. Innen:

$$t_g = t_v - t_v \frac{H}{R} = t_v + \Delta_v,$$

ahol  $\Delta_v = -\frac{H}{R}t_v$  a távolság alapfelületi redukciója. Ez nagyságrendileg annyit jelent, hogy egy 100 m-es magasságban mért 100 m-es távolság alapfelületi redukciója  $-1,6 \text{ mm} = 0,0016 \text{ km}$ .

*Feladat:* Adottak a következő adatok:  $t = 0,025 \text{ km}$  ferde távolság,  $\Delta m = 0,003 \text{ m}$  az alapfelülettől vett  $H = 0,2 \text{ km}$ -es magasságban. Határozzuk meg az alapfelületi távolságot, ha az alapfelület sík, illetve ha gömb. Utóbbi esetben számítsuk ki az alapfelületi redukciót, ha ismerjük a Föld sugarát:  $R = 6371 \text{ km}$ .

*Megoldás:* Először végezzük el a távolság síkra redukálását a 2.8 összefüggés alapján:

$$t_v = t - \frac{\Delta m^2}{2t} = 25 - \frac{0,003^2}{2 * 0,025} = 0,02482 \text{ km}$$

Nézzük azt az esetet, mikor az alapfelület gömb.

Az alapfelületi redukció:  $\Delta_v = -\frac{H}{R}t_v = -\frac{0,2}{6371} * 0,02482 = -0,000000779 \text{ km}$ .

Végül a gömbre vetítéssel kapott távolság:

$$t_g = t_v + \Delta_v = 0,02482 - 0,000000779 = 0,024819 \text{ km}$$

Az eredményekből jól látható, hogy kis távolságok esetén a gömbre és a síkra vetített távolságok hosszai közötti különbség valóban elhanyagolható.

## 3. A bolygók mozgása - Körök, ellipszisek

A fejezet célja a körök és ellipszisek tulajdonságainak ismertetése [HGy] és [RI] alapján. miután megismertük az alakzatok legfontosabb tulajdonságait, levezetjük kanonikus egyenletüket. Végül egy rövid áttekintést adunk [SK] nyomán arról, hogy ezen ismeretek birtokában hogyan jutott el Kepler a bolygók keringési pályájával kapcsolatos törvényeinek felismeréséhez.

### 3.1. A körök és ellipszisek jellemzése

**3.1.1. Definíció.** *A kör azon pontok mértani helye a síkon, melyek egy megadott  $O$  ponttól (a kör centruma - középpontja) adott (0-tól különböző) távolságra (sugár) vannak.*

Tudjuk, hogy egy körnek és egy egyenesnek 0, 1 vagy 2 közös pontja van, attól függően, hogy a kör középpontjának az egyenestől vett távolsága a sugárnál nagyobb, azzal megegyező, vagy kisebb. Ha egy egyenesnek egy körrel két közös pontja van, akkor a körön belülré eső szakaszát *húr*nak nevezzük. A középponton áthaladó húr az átmérő. Ennek két végpontja átellenes pont. Ha a körnek és az egyenesnek egyetlen közös pontja van, akkor az egyenest *érintő*nek nevezzük.

**3.1.2. Tétel.** *A körnek minden egyes pontjában pontosan egy érintője húzható, mely a sugárra merőleges.*

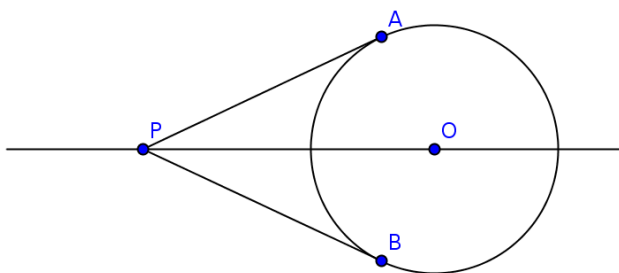
A tételt nem bizonyítjuk.

Hasonlóan kimondható, hogy a körön kívül eső bármely pontból pontosan két érintő húzható egy körhöz.



**3.1.3. Tétel.** Vegyünk egy  $k$  kört és egy  $P$  pontot, mely a körön kívül helyezkedik el. Ekkor a  $P$ -ből  $k$ -hoz húzott érintőszakaszok hossza megegyezik.

*Bizonyítás.* Legyenek az érintési pontok  $A$  és  $B$  a 3.1 ábra szerint, tekintsük a  $PA$  érintőszakasz  $PO$  egyenesre vett tükörképét. Tudjuk, hogy a kör a  $PO$  egyenesre szimmetrikus, ezért az érintőszakasz tükörképe is  $P$ -ből húzott érintő lesz. Mivel a  $P$  pontból pontosan két érintő húzható  $k$ -hoz, ezért ez az érintő  $PB$  lesz, mely szimmetrikus szakaszok egyenlő hosszúak.  $\square$



3.1. ábra.

**3.1.4. Tétel.** A  $C(a, b)$  középpontú,  $r$  sugarú kör egyenlete

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (3.1)$$

*Bizonyítás.* Az egyenletet a Pythagorasz-tételből vezetjük le. A 3.2 ábrán látható jelölések mellett

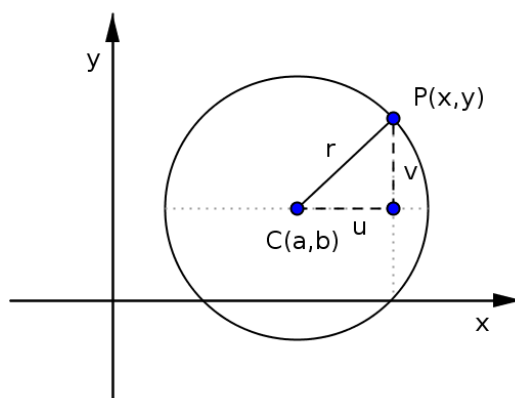
$$u^2 + v^2 = r^2.$$

Az egyenletben  $u$ -t és  $v$ -t helyettesítve a  $P$  és a  $C$  koordinátaival adódik

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

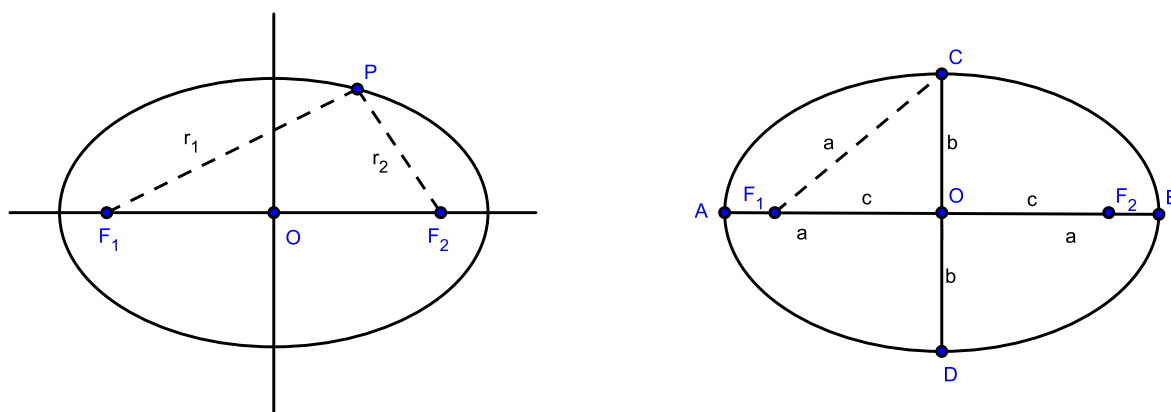
ami épp a bizonyítandó összefüggés.  $\square$

**3.1.5. Definíció.** Adott két különböző pont ( $F_1$  és  $F_2$ ) az  $\mathbf{S}$  síkon és egy  $a > 0, a \in \mathbb{R}$  távolság. Ekkor az  $F_1, F_2$  fókuszú,  $2a$  nagytengelyű ellipszis pontjai a  $\{P \in \mathbf{S} \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$  pontok.



3.2. ábra.

A fókuszpontokat összekötő szakasz egyenesét, valamint felező merőlegesét *tengelyeknek* nevezzük. A tengelyek merőlegesen metszik egymást a fókuszpontokat összekötő szakasz felezőpontjában, ez az ellipszis *centruma*. A centrumnak egy fókusztól mért távolságát *lineáris excentricitásnak* ( $c$ ) nevezzük. Az ellipszis a tengelyek egyenesére szimmetrikus. Ennek oka, hogy ezekre az egyenesekre a fókuszpontok szimmetrikusak, ezért ugyanazoktól a pontoktól ugyanakkora távolságösszegre lévő pontok definiálják az ellipszist.



3.3. ábra.

**3.1.6. Állítás.** *Az ellipszis mindkét tengelyét két-két pontban metszi.*

*Bizonyítás.* A fókuszokat tartalmazó tengelyre az állítás abból következik, hogy az  $F_1F_2$  szakasz pontjaira  $r_1 + r_2 = 2c < 2a$ , valamint a szakaszra illeszkedő egyenes többi pontjára ez az összeg az  $O$  centrumtól mért távolság kétszerese. Tehát az egyenes azon pontjai tartoznak az ellipszishez, melyeknek a középponttól mért távolsága  $a$ , ilyen tulajdonságú pontból pedig éppen kettő van,  $A$  és  $B$ .

A másik tengely pontjai - mivel ezeknek a fókuszoktól mért távolsága megegyező - akkor tartoznak az ellipszishez, ha a fókuszponttól mért távolságuk  $a$ . Ez a valamely fókusz körül írt  $a$  sugarú körnek a tengellyel vett metszéspontjaira teljesül, melyekből  $c < a$  miatt szintén kettő,  $C$  és  $D$  van.  $\square$

A tengelyeken elhelyezkedő ellipszispontokat *tengelyvégpontok*nak, az  $AB$  szakaszt *nagytengety*nek, a  $CD$  szakaszt *kistengely*nek nevezzük. A nagytengety hossza az ábrán látható jelölések mellett  $2a$ , a kistengely hossza  $2b$ .

Ekkor a  $COF_1$  derékszögű háromszögre a Pythagorasz-tétel szerint:

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

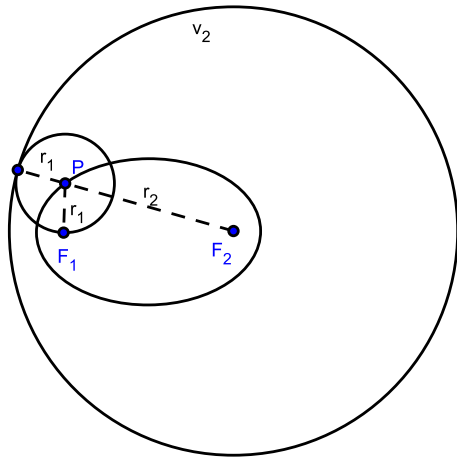
Az ellipszis egyik fókusza körül a nagytengetyvel, mint sugárral írt kört *vezérkör*nek nevezzük. Az ellipszisnek két vezérköre van.

**3.1.7. Tétel.** *Az ellipszis az egyik vezérkört belülről érintő és a másik fókuszon áthaladó körök középpontjainak mértani helye a síkon.*

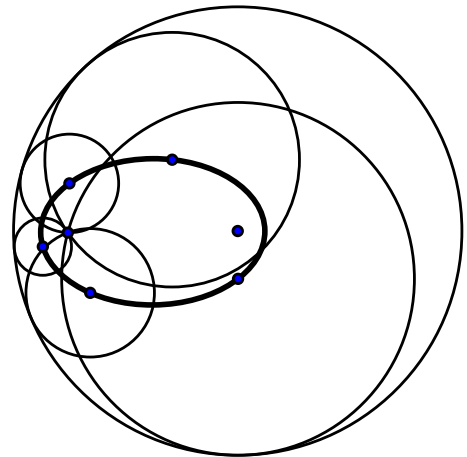
*Bizonyítás.* Legyen  $P$  az ellipszis egy pontja. Tudjuk, hogy erre a pontra  $r_1 + r_2 = 2a$ , melyből következik, hogy  $r_2 = 2a - r_1$ , vagyis a  $P$  körüli  $r_1$  sugarú kör belülről érinti az  $F_2$  körül írt vezérkört, és áthalad  $F_1$  fókuszon (3.4 ábra).

Másfelől, ha egy pont körül írható egy olyan kör, mely érinti az  $F_2$  középpontú,  $2a$  sugarú kört, valamint áthalad  $F_1$ -en, akkor az említett vezérkört csak belülről érintheti, mivel  $F_1$  fókusz a vezérkör belsejében van, hiszen a fókuszok  $2c$  távolságára  $2c < 2a$ , ahol  $2a$  a kör sugara. Mivel az érintkező körök sugaraira  $r_2 = 2a - r_1$  összefüggés áll fenn, ezért a  $P$  pont az ellipszisen van (3.5 ábra).  $\square$

**3.1.8. Tétel.** *Egy kört érintő és a körnek egy, a középpontjával nem megegyező belső pontján áthaladó körök középpontjainak mértani helye egy ellipszis.*



3.4. ábra.



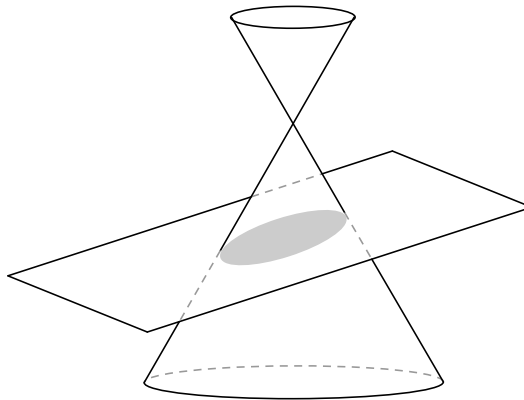
3.5. ábra.

*Bizonyítás.* Vegyünk egy kört és annak egy középpontjával nem azonos belső pontját, melyen áthaladnak a tételben szereplő körök. Tekintsük azt az ellipsztist, melynek egyik fókuszpontja a kör középpontja, másik a megadott pont, nagytengelyének hossza pedig a kör sugara. Ekkor a kör ennek az ellipszisnek vezérköre lesz, és a 3.1.7 tétel szerint az ellipszis éppen a tétel által meghatározott mértani hely lesz.  $\square$

Az ellipszist kúpszeletként is származtathatjuk a parabolával és a hiperbolával együtt. Utóbbi kettővel részletesen nem foglalkozunk, de a származtatásukat megadjuk. Vesszünk egy teljes forkáskúpfelületet, és vizsgáljuk egy síkmetszetét. Amennyiben a sík nem halad át a kúp csúcsán, és nem merőleges a kúp tengelyére, úgy három eset lehetséges. Ha a sík és a kúptengely hajlásszöge nagyobb a kúp félnyílásszögénél, akkor a sík csak az egyik félkúpot metszi annak minden alkotójában, úgy a metszet ellipszis (3.6 ábra). Ha a sík és a kúptengely hajlásszöge a kúp félnyílásszögénél kisebb, akkor a sík metszi mindkét félkúpot, és két alkotóval párhuzamos, akkor a metszet hiperbola. Ha a sík és a kúptengely hajlásszöge megegyezik a kúp félnyílásszögével, akkor a sík csak egy félkúpot metsz és csak egy alkotóval párhuzamos, úgy a metszet parabola.

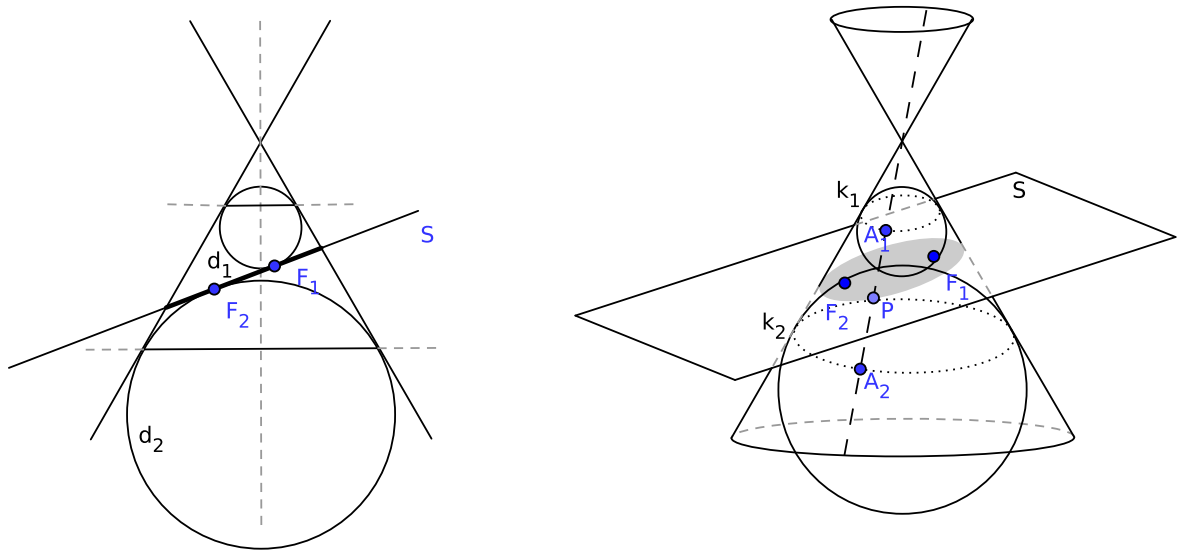
**3.1.9. Tétel.** *Ha egy  $\alpha$  félnyílásszögű forgáskúpfelületet egy annak csúcsán át nem menő, a tengellyel  $\beta \neq \frac{\pi}{2}$  szöget bezáró síkkal metszünk, akkor  $\alpha < \beta$  esetén ellipszist kapunk.*

*Bizonyítás.* Vegyünk egy  $K$  kúpfelületet melynek csúcsa  $C$ , valamint egy  $S$  síkot. A bizonyításhoz úgynevezett Dandelin-féle gömböket használunk fel: ezek érintik  $K$ -



3.6. ábra.

t minden alkotójában, valamint a metsző  $S$  síkot a 3.7 ábra szerint. Pontosan két



3.7. ábra.

ilyen gömb létezik, egy a sík fölött ( $G_1$ ), egy pedig alatta ( $G_2$ ). Ezek a gömbök  $K$ -t a  $k_1$  és a  $k_2$  körökben érintik, az  $S$  síkot pedig  $F_1$  és  $F_2$  pontokban. Legyen a két kör távolsága egy alkotó mentén  $2a$ , ekkor azt állítjuk, hogy a metszet az  $F_1, F_2$  fókuszú,  $2a$  nagytengelyű ellipszis lesz.

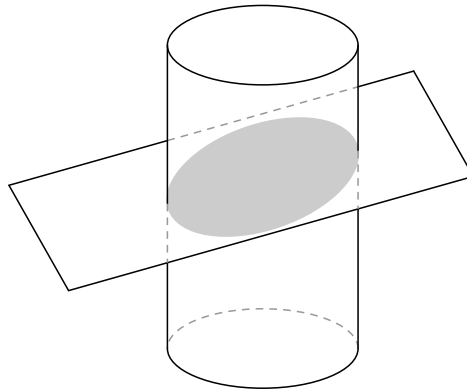
Ennek belátásához vizsgáljuk meg, hogy egy tetszőlegesen választott  $P \in \mathbf{K} \cap \mathbf{S}$  pontra teljesül e az ellipszis definíciójában megadott feltétel, vagyis hogy  $d(P, F_1) +$

$$d(P, F_2) = 2a.$$

Legyenek  $A_1, A_2$  azok a pontok, melyek a  $P$ -n átmenő alkotó metszéspontjai  $k_1$  és  $k_2$  körökkel. Ekkor  $d(P, F_1) = d(P, A_1)$  és  $d(P, F_2) = d(P, A_2)$  a 3.1.3 szerint, mivel ezek egy-egy közös pontból húzott érintőszakaszok  $G_1$  és  $G_2$  gömbökhöz. Az egyenlőségeket összeadva:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, A_1) + d(P, A_2) = d(A_1, A_2) = 2a. \quad \square$$

**3.1.10. Tétel.** *A forgáshenger tengelyével nem párhuzamos, rá nem merőleges sík a hengerfelületet ellipsziszben metszi (3.8 ábra).*



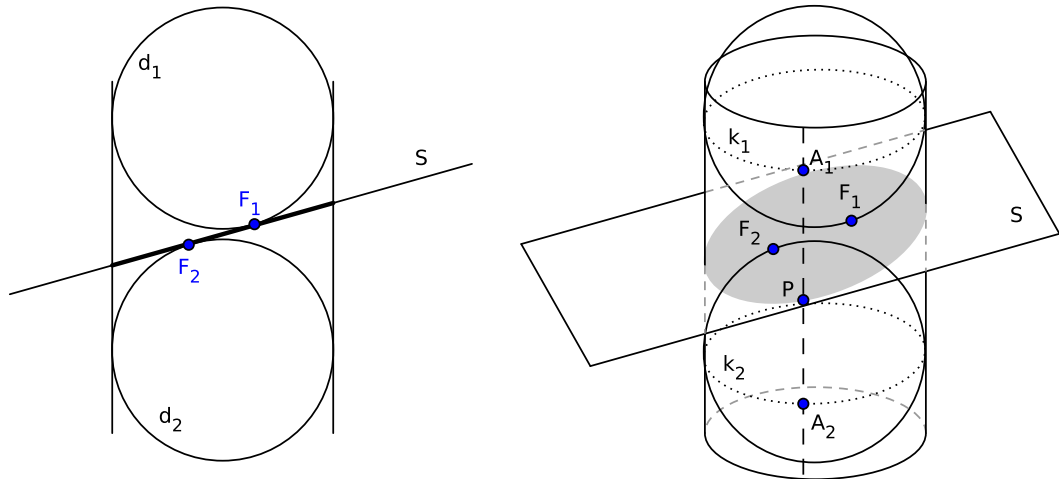
3.8. ábra.

*Bizonyítás.* Az előző tétel mintájára Dandelin-féle gömböket alkalmazunk. Vegyünk egy hengerfelületet és egy  $S$  síkot. A  $G_1, G_2$  Dandelin-gömböket úgy helyezzük el, hogy a hengerfelületet  $k_1$  és  $k_2$  körökben, az  $S$  síkot  $F_1$  és  $F_2$  pontokban érintsék a 3.9 ábra szerint. Legyen a két kör távolsága egy alkotó mentén  $2a$ , ekkor a metszetgörbe az  $F_1, F_2$  fókuszú,  $2a$  nagy tengelyű ellipszisz lesz.

Legyen  $P$  a metszetgörbe egy tetszőleges pontja, és az ezen áthaladó alkotónak  $k_1$  és  $k_2$  körökkel vett metszéspontjai  $A_1$  és  $A_2$ .  $P$  pont az  $A_1A_2$  szakasz belsejében van, mivel a két Dandelin-gömb az  $S$  sík alatt, illetve felett van. Emiatt, mivel a külső pontból egy körhöz húzott érintők egyenlő hosszúak:  $d(P, F_1) = d(P, A_1)$  és  $d(P, F_2) = d(P, A_2)$ . Az egyenlőségeket összeadva:

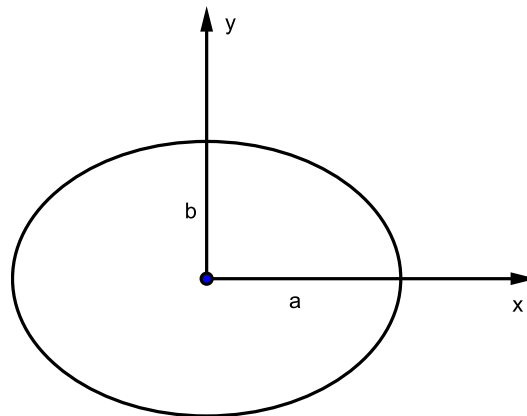
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, A_1) + d(P, A_2) = d(A_1, A_2) = 2a.$$

□



3.9. ábra.

Az ellipszis egyenletét a centrumába helyezett koordináta-rendszer segítségével határozzuk meg, az ellipszis fókusza az  $x$ -tengelyen legyen (3.10. ábra). Ez az ellipszis kanonikus egyenlete.

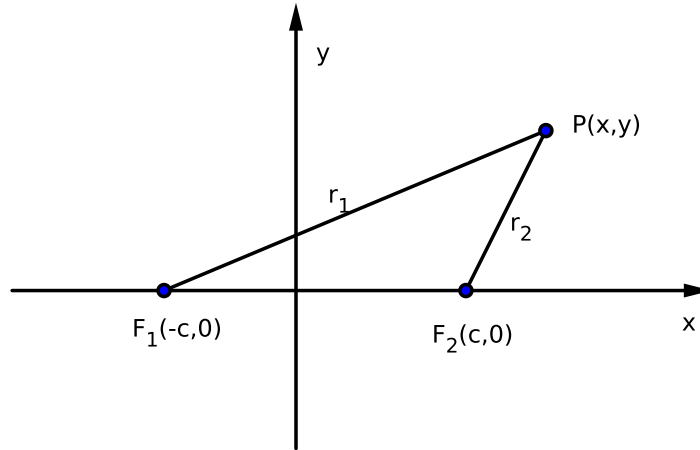


3.10. ábra.

**3.1.11. Tétel.** *Ha az ellipszis nagytengelye  $2a$ , kistengelye  $2b$  hosszú, akkor kanonikus egyenlete:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.2)$$

*Bizonyítás.* Vegyünk egy tetszőleges  $P(x, y)$  pontot a síkon, melynek  $F_1(-c, 0)$  és  $F_2(c, 0)$  fókuszpontoktól való távolsága  $r_1$  és  $r_2$  (3.11 ábra). Állítjuk, hogy



3.11. ábra.

$$(r_1 + r_2 + 2a)(r_1 + r_2 - 2a)(r_1 - r_2 + 2a)(-r_1 + r_2 + 2a) = 0$$

egyenlet  $a > c$  esetén csak a  $2a$  nagytengelyű ellipszis pontjaira teljesül. Ehhez elég megmondolni, hogy a szorzat tényezői egyenként mikor adnak adnak 0-t. Az első tényező pozitív, így az sosem lesz 0, az utolsó két tényező valamelyike pedig éppen akkor 0, ha  $|r_1 - r_2| = 2a$ , és ez  $|r_1 - r_2| \leq 2c$  háromszög-egyenlőtlenség miatt nem következhet be. A szorzat második tényezője pedig akkor és csak akkor 0, ha  $r_1 + r_2 = 2a$ , ami éppen teljesül az ellipszis pontjaira.

Alakítsuk át az egyenletet úgy, hogy abban  $P$  koordinátái szerepeljenek. Ehhez szorozzuk össze az első két tényezőt és az utolsó két tényezőt:

$$[(r_1 + r_2)^2 - 4a^2][4a^2 - (r_1 - r_2)^2] = 0$$

vagyis

$$[2r_1r_2 + (r_1^2 + r_2^2 - 4a^2)][2r_1r_2 - (r_1^2 + r_2^2 - 4a^2)] = 0.$$



Újabb szorzással a

$$4r_1^2 r_2^2 - (r_1^2 + r_2^2 - 4a^2)^2 = 0$$

egyenletet kapjuk, melyet átalakítva a

$$-(r_1^2 - r_2^2)^2 + 8a^2 (r_1^2 + r_2^2) - 16a^4 = 0$$

egyenlet adódik. A pontok koordinátái alapján az  $r_1, r_2$  távolságokra

$$r_1^2 = (x + c)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x - c)^2 + y^2$$

teljesül, amivel  $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$ ,  $r_1^2 + r_2^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2)$  egyenlőségeket kapjuk. Ezeket behelyettesítve

$$-16c^2 x^2 + 16a^2 (x^2 + y^2 + c^2) - 16a^4 = 0$$

egyenletet kapjuk, melyet 16-tal egyszerűsítve, majd rendezve

$$(a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

adódik, melyet a jobb oldali kifejezéssel való osztás után

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

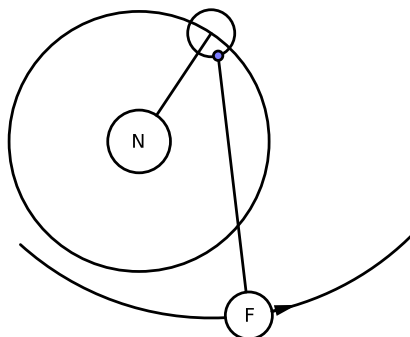
alakot adja, mely az ellipszisre teljesülő  $a^2 - c^2 = b^2$  összefüggés mellett éppen a 3.2-t adja. □

## 3.2. Kepler I. és II. törvénye

Az égbolt vizsgálata a történelem minden korszakában nagyon fontos volt. Míg kezdetben csupán megfigyelték és feljegyezték az égi jelenségeket, a görögök mindenben az okokat keresték. Az asztrológia megszületése után az elsődleges cél a bolygó jövőbeni helyének meghatározása lett.

Jól ismert, hogy a kezdeti világtételek a Földet helyezték a középpontba, a Hold,

a Nap és a Naprendszer bolygói e körül keringtek. Többek között Kopernikusz is rájött arra (XVI. század közepe), hogy a Föld a Nap körül mozog, eredményét azonban vallási okokból nem tényként, hanem a számolást megkönnyítő szemléletként hozta nyilvánosságra. Mivel kortársaihoz hasonlóan ő is a tökéletességet kereste a bolygók mozgásában, ezért körpályákkal számolt. Így azonban csak igen nagy hibával lehetett meghatározni egy-egy égitest helyét, míg végül kénytelen volt epicikloisokat is bevezetni. Emellett a Mars pályájához sehogy sem illett a körpálya, ezért a Nap helyett egy fiktív pontot helyezett a Naprendszer középpontjába, mely körül a bolygók keringtek. Ez a pont bonyolult pályán haladt a Nap körül, ezt a 3.12 ábra szemlélteti.

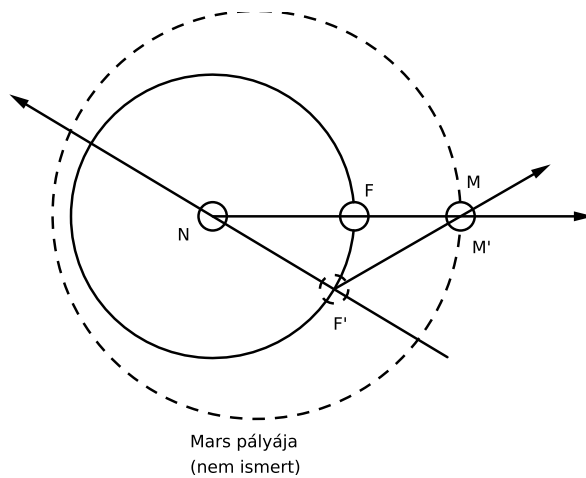


3.12. ábra.

Johannes Kepler (XVII. sz. eleje) természetes kiindulásként fogadta el Kopernikusz rendszerét. Ahhoz, hogy végül eljutott jól ismert törvényeihez, sok szerencsés véletlen vezetett. Először is rendelkezésére állt húsz évnyi csillagászati feljegyzés, mely több bolygó és csillag igen pontosan megmért helyzetét tartalmazta, ezt Tycho de Brahe készítette az 1600-as években. Másrészt az is megkönnyítette a számításait, hogy a Föld pályájának nagyon kicsi az excentricitása, vagyis igen közel áll a körhöz.

Kepler célja az volt, hogy a mérési adatok segítségével meghatározza a Mars pályáját. Ehhez meg kellett határozni, hogy a bolygó milyen szög alatt látszik, valamint a Naptól és a Földtől való távolságát. Mindezt olyan adatok felhasználásával, melyek egy ismeretlen pályán ismeretlen paraméterekkel keringő helyről lettek meghatározva. Ehhez első lépésben meghatározta a Föld pályáját.

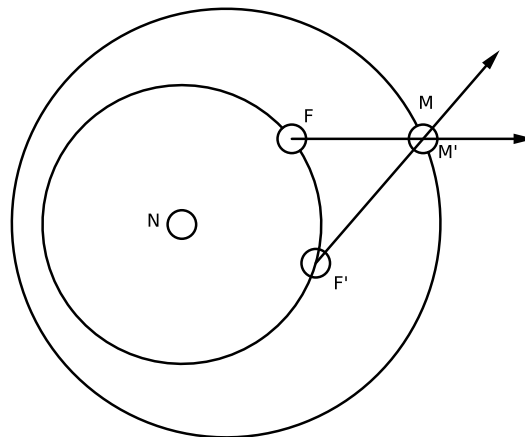
Induljunk ki a 3.13 ábrán látható  $NFM$  helyzetből, mikor a Nap, a Föld és a Mars egy egyenesbe esik. Korábban már meghatározták, hogy a Mars keringési ideje 687 nap, vagyis ennyi idő elteltével a Mars ugyanezen a helyen lesz. Ugyanekkor a Föld egy  $F'$



3.13. ábra.

helyzetében lesz, mely megszerkeszthető. Ismerük ugyanis a Nap-Föld irány, valamint a Föld-Mars irány szögét (mérésekből), és ezek metszéspontjában található  $F'$ . Újabb 687 nap elteltével ismét megszerkeszthetjük a Föld akkori helyzetét, az eljárást folytatva kirajzolódik a Föld pályája.

A földpálya ismeretében a Mars pályája is meghatározható. Vegyük a Földnek két olyan helyzetét, melyet 687 napnyi időköz választ el egymástól (3.14 ábra). Tudjuk,



3.14. ábra.

hogy mindkét időpontban a Mars ugyanazon a helyen lesz, melyet meg tudunk szerkeszteni, mint a Föld-Mars irányok metszéspontját. Újabb két Föld-helyzetet vál-

sztva a Marsnak egy újabb helyzetét határozhatjuk meg, míg végül elegendő pontot kapunk a pálya megrajzolásához. Kepler matematikus is volt, sok próbálkozás után eljutott a felismeréshez, mely végül első törvénye lett.

*I. A bolygók a Nap körül ellipszispályán keringenek, melynek egyik fókuszpontjában a Nap áll.*

Mivel a mérésorozat automatikusan az idő függvényében szolgáltatta a megszerkeszthető pontokat, könnyen jött a második törvény felfedezése:

*II. A bolygók a Nap közelében gyorsabban mozognak, mint attól távol.*

Kepler felismerte, hogy ez az ismeretlen erőhatás valamiképpen a Nappal van kapcsolatban, és a Naptól való távolodással csökken. Eredetileg a hatást  $F \approx \frac{Mm}{r}$ -es alakban adta meg, ahol  $F$  a vonzó hatás mértéke,  $M$  a vonzócentrum, esetünkben a Nap,  $m$  pedig a bolygó tömege,  $r$  a kettő távolsága. Ma már ismert, hogy a helyes összefüggés négyzetes, vagyis  $F \approx \frac{Mm}{r^2}$ . Kepler számítását azzal indokolta, hogy a hatás a bolygó pályájának síkjában terjed szét, ilyenkor pedig csak első hatvánnyal kell változnia.

Csillagász lévén, Kepler feladatai közé tartozott a horoszkópok készítése, bár maga valószínűleg nem hitt az asztrológiában. Némi iróniával mondogatta is, hogy Isten minden teremtett lény megélhetéséről gondoskodik: a csillagásznak adja az asztrológiát.

## Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Homolya Andrásnak és Dr. Földváry Lórántnak, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Általános és Felsőgeodézia Tanszékének oktatóinak a *Távolságmérés a Föld felszínén* című fejezet megírásához nyújtott segítségért, és a fejezet lektorálásáért. Különösképpen köszönettel tartozom témavezetőmnek, dr. Naszódi Mártonnak, aki végtelen türelemmel pártfogolt a félév során.

# Irodalomjegyzék

- [CsB] Csikós Balázs: *Gömbi geometria*, Új matematikai mozaik (szerk. Hraskó András) kötetben, Typotex Kiadó, Budapest, 2002.
- [HGy] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
- [KA] Kurusa Árpád: *Nemeuklidészi geometriák*, Szeged, Polygon Jegyzettár, Szegedi Egyetemi Kiadó, 2009.
- [KrA] Krauter András: *Óravázlatok a Geodézia I. tantárgyhoz*, [http://www.agt.bme.hu/tantargyak/bsc/bmeeoafat08/BMEEOAFAT08\\_ea\\_1-14.pdf](http://www.agt.bme.hu/tantargyak/bsc/bmeeoafat08/BMEEOAFAT08_ea_1-14.pdf)
- [RI] Reiman István: *A geometria és határterületei*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.
- [SK] Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1981.