Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Diofantikus egyenletek megoldása elemi módszerekkel

szakdolgozat

Készítette: Simó Orsolya

Matematika BSc, Matematika tanári szakirány

Témavezető: P. Kovács Katalin, egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék:

Bevezetés

A számelmélet a matematikának az az ága, amelyik az egész számok, ezen belül kiemelten a prímszámok aritmetikai tulajdonságait vizsgálja. Ezen területhez tartozik a diofantikus egyenletek témaköre is.

„Diofantikus (vagy diofantoszi) egyenletnek az olyan egész együtthatós algebrai egyenletet nevezünk, melynek a megoldásait is az egész (esetenként a racionális) számok körében keresünk. Diophantosz görög matematikus az i.sz. III. században élt Alexandriában, és sokféle ilyen egyenlettel foglalkozott. (Akkoriban teljesen természetes volt, hogy egész, illetve racionális megoldásokat kerestek, hiszen az irracionális számok annak ellenére sem nyertek igazán polgárjogot, hogy a görögök bebizonyították ezek létezését.) A diofantikus egyenletek története egyébként még ennél is sokkal régebbre nyúlik vissza; közel négyezer éves kőtáblák tanúsága szerint már a babiloniaiak is ismerték az ún. pitagoraszi számhármasok előállítási módját.

A diofantikus egyenletek megoldása igen változatos módszereket igényel, univerzális megoldási módszer nem létezik (sőt, annak az egyszerűbb kérdésnek a megválaszolására sem létezik általános algoritmus, hogy egy tetszőlegesen adott diofantikus egyenletnek egyáltalán van-e megoldása vagy sem.) Egy-egy konkrét egyenlet esetén is gyakran igen nehéz eldönteni a megoldhatóságot, a megoldásszámról, illetve az összes megoldás meghatározásáról nem is beszélve. Ez a témakör is bővelkedik híres megoldatlan problémákban.” [1]

Dolgozatom célja néhány megoldási módszer bemutatása, kezdve az egyszerűen megoldható lineáris diofantikus egyenletektől, a magasabb fokú egyenletekig. Külön fejezetet szentelek a pitagoraszi számhármasoknak, a Pell-egyenletnek, a Fermat-sejtésnek és néhány trükkös megoldásnak.

1. Fejezet

Lineáris diofantikus egyenletek

1.1 Kétismeretlenes lineáris diofantikus egyenletek

Először az *ax+by=c* kétismeretlenes lineáris diofantikus egyenlettel foglalkozunk. Itt a,b, c rögzített egész számok,ahol az a=b=0 esetet eleve kizárjuk, és megoldásokon x,y egész számokból álló számpárt értünk.

Most megadjuk a megoldásszámot és az összes megoldás leírását.

Tétel: [1]/280. o.

Legyenek a, b és c rögzített egész számok, ahol a és b közül legalább az egyik nem nulla, és tekintsük az ax+by=c diofantikus egyenletet.

(i) Az egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha (a,b)|c.

(ii) Megoldhatóság esetén végtelen sok megoldás van. Ha x_0, y_0 (egy rögzített) megoldás, akkor az összes x', y' megoldást az alábbi képlet szolgáltatja:

$$x' = x_0 + t\frac{b}{(a,b)}, \qquad y' = y_0 - t\frac{a}{(a,b)}, \text{ ahol } t=0, \pm1, \pm2,\ldots \tag{1}$$

(iii) Az egyenlet egy megoldását az euklideszi algoritmus segítségével kaphatjuk meg.

Bizonyítás:

(i) Először tegyük fel, hogy létezik x_0, y_0 megoldás. Ekkor (a,b)|a és (a,b)|b alapján szükségképpen:
$(a,b)|ax_0+by_0=c$.
Megfordítva tegyük fel, hogy (a,b)|c, vagyis van olyan t egész, amelyre (a,b)t=c.
<u>*Segédtétel*</u>: Az a és b számok legnagyobb közös osztója alkalmas u és v egészekkel kifejezhető (a,b)=au+bv alakban.
A segédtétel alapján (a,b)=au+bv teljesül alkalmas u, v egészekkel. Ezt az egyenlőséget t-vel beszorozva kapjuk, hogy c=a(ut)+b(vt), azaz x=ut, y=vt megoldása az ax+by=c diofantikus egyenletek.

(ii) Először azt mutatjuk meg, hogy az (1)-ben megadott x', y' számok valóban az egyenlet egy megoldását szolgáltatják. Mivel x_0, y_0 megoldás, azaz $ax_0+by_0=c$, így

$ax'+by'=a(x_0+t\frac{b}{(a,b)})+b(y_0-t\frac{a}{(a,b)})=ax_0+by_0=c$.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy x', y' tetszőleges megoldás, és belátjuk, hogy x' és y' a kívánt alakú.

A feltétel szerint $ax_0+by_0=c$ és $ax'+by'=c$.

A két egyenlőséget egymásból kivonva $a(x'-x_0)+b(y'-y_0)$ adódik. Rendezés és (a,b)-vel történő osztás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{a}{(a,b)}(x'-x_0)=\frac{b}{(a,b)}(y_0-y') \quad . \qquad (2)$$

Mivel $(\frac{b}{(a,b)},\frac{a}{(a,b)})=1$, ezért (2)-ből $\frac{b}{(a,b)} \mid x'-x_0$, azaz alkalmas t egésszel

$$x'=x_0+t\frac{b}{(a,b)} \qquad (3)$$

következik. A (3)-t (2)-be visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$y'=y_0-t\frac{a}{(a,b)}$. Ezzel megmutattuk, hogy x' és y' valóban az (1)-ben előírt alakú.

(iii) Az (i) részben szereplő segédtétel bizonyítja.

Példa: (saját)

Oldjuk meg az 52x+23y=65 diofantikus egyenletet.

A feladatot háromféleképpen is megoldjuk.

1) Kongruencia segítségével

Tudjuk, hogy két egész szám kongruens egymással modulo m, ha m-mel osztva ugyanazt a maradékot adják (m egész). A következő tételt használjuk fel a megoldásnál:

Tétel: Legyenek a, b, c egészek. Ha az ax+by=c egyenlőség fennáll, akkor $ax\equiv c \pmod b$ és fordítva.

Az egyenletünk tehát 52x+23y=65. A feladat ekvivalens a

$$52x\equiv 65 \pmod{23}$$

megoldásával.

Mindkét oldalból levonjuk a 23 valahányszorosát úgy, hogy a legkisebb abszolút értékű számokat kapjuk a kongruencia mindkét oldalán.

$$6x\equiv -4 \pmod{23}, \text{ osztva 2-vel } 3x\equiv -2 \pmod{23}$$

Ha -2-höz hozzáadunk 23-at, a kongruencia jobb oldalán 21 fog állni. Osztva 3-mal:

$$x\equiv 7 \pmod{23}.$$

Ha x=7, ebből y=-13 adódik az x=7 egyenletbe történő behelyettesítése után. Kaptunk tehát egy x_0, y_0 megoldást. A többi megoldást a tételből kapjuk meg az előző megoldásban leírtakkal azonos módon.

2) A tétel felhasználásával

Próbálkozással keresünk egy x_0, y_0 számpárt, mely kielégíti az egyenletet, majd a tétel segítségével meghatározzuk az összes többit. Próbálkozásaink során kiderül, hogy $x_0=7$, $y_0=-13$ kielégíti az egyenletet. Ebből az összes megoldás:

$$x=7+t*23,\ y=-13+t*52, \text{ ahol } t=0, \pm1, \pm2,\ldots$$

3) Egyszerű következtetéssel (középiskolában is használható)

Fejezzük ki az egyenletből azt az ismeretlent, amelynek az együtthatója kisebb abszolút értékű, és a törtből válasszunk le olyan részeket, amelyek biztosan egész értékűek:

$$y=\frac{65-52x}{23}=3-2x+\frac{-6x-4}{23} \qquad \text{(A1)}$$

Ekkor az (A1) jobb oldalán álló (-6x-4)/23 tört is egész szám kell, hogy legyen, jelöljük ezt u-val. Innen -6x-4=23u. Ez egy hasonló diofantikus egyenlet, mint az eredeti, csak itt az x együtthatójának kisebb az abszolút értéke, mint az eredeti egyenletben az y együtthatójáé volt.
Ismételjük most meg az előző eljárást a -6x-4=23u egyenletre, fejezzük ki x-et, és válasszuk le a garantáltan egész értékű kifejezéseket:

$$x=\frac{-23u-4}{6}=-4u-1+\frac{u+2}{6}. \qquad \text{(A2)}$$

Az (A2) jobb oldalán szereplő (u+2)/6 tört egész szám kell, hogy legyen, jelöljük v-vel, ekkor u+2=6v. Hasonlóan tovább haladva kapjuk, hogy

$$u=6v-2\ . \qquad \text{(A3)}$$

Mivel (A3)-ban már nem szerepel tört, most elindulunk “visszafelé”, és rendre (A2) és (A1) felhasználásával x és y értékét kifejezzük v paraméter segítségével:

$$x=-4u-1+v=-4(6v-2)-1+v=-24v+8-1+v=7-23v \qquad \text{(B1)}$$

$$y=3-2x+u=3-2(-23v+7)+6v+2=-13+52v \qquad \text{(B2)}$$

A módszerből világos, hogy (B1)-(B2) képletpár szolgáltatja az 52x+23y=65 diofantikus egyenlet összes megoldását, ahol v paraméter tetszőleges egész szám. Ugyanis egyrészt, ha az x, y egész számpár megoldás, akkor az (A1)-(A2) lépéseken végighaladva eljutunk v-hez, majd ennek segítségével x-re és y-ra a (B2)-(B1) képletpár adódik, másrészt tetszőleges egész v-re az így képzett x és y számok egészek lesznek és kielégítik az egyenletet.

Legyen például v=1, ekkor x=-16, y=29.

1.2 Kettőnél több ismeretlenes lineáris diofantikus egyenletek

Kettőnél több ismeretlenes lineáris diofantikus egyenletre a kétismeretlenes esethez hasonló állítások érvényesek. Ezeket az alábbi tételben foglaljuk össze.

Tétel: [1]/283. o.

Legyen $k\geq 2$, $a_1,\ldots,a_k$ nem csupa 0 egész számok, c tetszőleges egész, és tekintsük az $a_1x_1+\ldots+a_kx_k=c$ diofantikus egyenletet (azaz megoldáson egy egészekből álló $x_1,\ldots,x_k$ számk-ast értünk).

(i) Az egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha $(a_1,\ldots,a_k)|c$.
(ii) Megoldhatóság esetén végtelen sok megoldás van. Az összes megoldás k-1 egész paraméter segítségével adható meg. A megoldások meghatározása a két ismeretlen esetén látott módszer értelemszerű általánosításával történik.

Példa: [4]/100
Valakinek 3 fajta bora van: az elsőből 1l 36 Ft, a másodikból 1l 24 Ft, a harmadikból 1l 16 Ft. Mennyit kell mindegyik fajtából vennie, hogy 40l, literenként 20 forintos bort kapjon, feltéve, hogy egész számú litereket óhajt összekeverni?

Az első fajtából x litert, a másodikból y litert, a harmadikból pedig z-t veszünk.
Vegyük észre, hogy z kifejezhető x és y segítségével, $z=40-x-y$. Tehát ez tulajdonképpen egy kétismeretlenes lineáris diofantikus egyenlet. Írjuk fel az egyenletet:

$$36x+24y+16(40-x-y)=20*40$$
$$36x+24y+640-16x-16y=800$$
$$20x+8y=160$$
$$5x+2y=40$$

Oldjuk meg ezt a kétismeretlenes egyenletet az egyik fent említett módszerrel.
Ennek egy x_0, y_0 megoldása például 4, 10. Ebből az összes megoldás: $x=4+10t$, $y=10-4t$, ahol t egész szám. z-t kifejezhetjük a $40-x-y$ képlet segítségével, például egy megoldás: $x_0=4$, $y_0=10$, $z_0=26$.

Példa: (saját)
Oldjuk meg a

$$15x+10y+7z=4$$

diofantikus egyenletet.

Ez az egyenlet valóban egy háromismeretlenes egyenlet. Vezessük be t paramétert:

$$7z+5(3x+2y)=4, \text{ ahol } 3x+2y=t.$$

Világos, hogy bármely t esetén létezik x, y megoldás, mert a 3 és 2 relatív prímek, tehát a legnagyobb közös osztójuk bármely t egészet osztja.
Az egyenletünk tehát

$$7z+5t=4.$$

Keressünk egy z_0, t_0 megoldást és írjuk fel ebből az összes z, t megoldást. Például a 2, -2 kielégíti a $7z+5t=4$ egyenletet, így ennek összes megoldása:

$$z=2-5l$$
$$t=-2+7l,$$

ahol l tetszőleges egész.
Tehát azt kapjuk, hogy

$$3x+2y=-2+7l.$$

Mivel $3x\equiv-2+7l \pmod 2$, így $x\equiv l \pmod 2$, azaz $x=l+2h$. Ezt a $3x+2y=-2+7l$ egyenletbe visszahelyettesítve $y=2l-3h-1$.

2. Fejezet

Magasabb fokú diofantikus egyenletek megoldása elemi módszerek segítségével

Ebben a fejezetben megoldásra kerülnek magasabb fokú diofantikus egyenletek elemi úton. Továbbá bemutatásra kerül számos szöveges feladat, melyet diofantikus egyenlet felállításával lehet megoldani. Ezek célja, hogy bemutassa, milyen sokféle problémát lehet megoldani ilyen egyenletek segítségével.

2.1 Néhány elemi megoldási módszer

2.1.1 Szorzattá alakítás

Az ilyen típusú diofantikus egyenleteknél az egyik oldalon egy $c \neq 0$ egész szám , a másik oldalon egy szorzat áll.
Nézzünk először egy egyszerű példát:

Példa: [1]/7.3.13 a
Oldjuk meg az $xy+3x+5y=7$ diofantikus egyenletet!

Miután észrevesszük, hogy a jobb oldalon egy egész szám áll, arra törekszünk, hogy a bal oldalon lévő ismeretlenek szorzatát is tartalmazó kifejezést szorzattá alakítsuk.
Az elemi lépések a következők:

$$5y+3x+xy+15=22$$
$$(3+y)(5+x)=22$$

Mivel a 22 2*11, 1*22, (-2)*(-11), és (-1)*(-22) alakban áll elő szorzatként, nyolc esetet különíthetünk el az alapján, hogy a 5+x-nek és az 3+y-nak választjuk ezeket a tényezőket értékül.
1. eset: $5+x=22$ és $3+y=1$. Kifejezve x-et és y-t ebből a két egyenletből, $x=17$ és $y=-2$ adódik.
2. eset: $5+x=1$ és $3+y=22$. Ebben az esetben $x=-4$ és $y=19$ a megoldás.
3. eset: $5+x=11$ és $3+y=2$. Ekkor $x=6$ és $y=-1$ tesz eleget.
4. eset: $5+x=2$ és $3+y=11$. Az $x=-3$, az $y=8$ ebben az esetben.
5. eset: $5+x=-2$ és $3+y=-11$. Ekkor $x=-7$, $y=-14$.
6. eset: $5+x=-11$ és $3+y=-2$. Ebben az esetben $x=-16$, $y=-5$.
7. eset: $5+x=-1$ és $3+y=-22$. Tehát $x= -6$, $y=-25$.
8. eset: $5+x=-22$, és $3+y=-1$. Ekkor $x=-27$, $y=-4$.

Összefoglalva az egyenletet az alábbi nyolc x, y számpár elégíti ki: {17,-2}; {-4,19}; {6,-1}; {-3,8}; {-7,-14}; {-16,-5}; {-6,-25}; {-27,-4}.

Most kimondunk egy tételt, mely az $x^2-y^2=n$ alakú egyenletek megoldhatóságának feltételét és megoldásszámát mondja ki, majd ennek segítségével eldöntjük néhány egyenletről, hogy megoldható-e, és hány megoldása van.

Tétel: [1]/288. o.
Tekintsük az $x^2-y^2=n$ diofantikus egyenletet, ahol n rögzített pozitív egész.

(i) Az egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha n inkongruens 2 (mod 4).
(ii) A megoldásszám 2d(n), ha n páratlan, és $2d(\frac{n}{4})$, ha 4|n (ahol d(k) a k pozitív osztóinak a száma).

Itt a csak az előjelben eltérő megoldásokat is külön megoldásoknak tekintjük.

Példa: (saját)

Vizsgáljuk meg az $x^2-y^2=36$ diofantikus egyenletet.

Mit mondhatunk a 36-ról (mod 4)?

$36\equiv0$ (mod4), tehát az egyenlet megoldható.

Állapítsuk meg a megoldásszámot!

A megoldásszám, mivel $4 \mid 36$, a 36/4 pozitív osztóinak a számának a kétszerese. A 9 pozitív osztóinak a száma 3, tehát az egyenletnek 6 megoldása van.

(A megoldásokat nyilván az előző példánál látott módszer alapján határozhatjuk meg az egyenlet bal oldalának (x+y)(x-y) alakra hozása után.)

2.1.2. Megoldás kongruenciákkal

Ezzel a módszerrel bizonyos egyenletekről be lehet bizonyítani a megoldhatatlanságot. „Ha egy diofantikus egyenlet esetén az egyenlet két oldala valamely alkalmas modulus szerint sohasem lehet kongruens egymással, akkor az egyenlőség biztosan nem teljesülhet (ez fordított irányban nem igaz!)." [1]

Példa: [1]/ 7.3.13 c

Oldjuk meg a következő diofantikus egyenletet!

$2x^2+3y^2=z^2$

Az egyenletnek nyilván megoldása az x=y=z=0. Megmutatjuk, hogy más megoldás nincs.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan megoldás, ahol x, y, z nem mindegyike 0. Ekkor azt is feltehetjük, hogy az x, y és z relatív prímek. Ha ugyanis (x,y,z)=d>1, akkor az egyenletet d^2-tel elosztva kapjuk, hogy x/d, y/d, z/d is megoldás, és ez a három szám már relatív prím is.

Mivel $2x^2+3y^2=z^2$,ezért

$$2x^2+3y^2\equiv z^2 \pmod 3 \qquad (1)$$

is teljesül. A kis Fermat-tétel szerint bármely a egész számra

$$a^2\equiv\{1 \pmod 3,\ \text{ha } 3\nmid a;\quad 0 \pmod 3,\ \text{ha } 3|a\} \qquad (2)$$

Ha $3\nmid x$, akkor (2) alapján (1) bal oldala 2-vel, jobb oldala viszont 0-val, vagy 1-gyel kongruens (mod3), ami lehetetlen. A $3\nmid z$ eset ugyanígy ellentmondásra vezet. Ebből következik, hogy $3 \mid x$, és $3 \mid z$.

Legyen $x=3x'$ és $z=3z'$,ezt az eredeti egyenletbe beírva

$$2(3x')^2+3y^2=(3z')^2 \quad \text{,azaz} \quad 18x'^2+3y^2=9z'^2,$$

ahonnan

$$3y^2=9(z'^2-2x'^2), \text{ azaz } y^2=3(z'^2-2x'^2)$$

adódik. Ennél fogva $3 \mid y^2$, és így a 3 prím volta miatt $3 \mid y$ is teljesül. Ez azonban ellentmond az $(x,y,z)=1$ feltételnek.

Megjegyzés:

Ez a módszer csak akkor vezethet eredményre, ha a diofantikus egyenletnek nincs megoldása. Azonban ekkor sem biztos, hogy kihozható a megfelelő ellentmondás. Tehát ha nem találunk megfelelő modulust, attól még lehet az egyenlet megoldhatatlan.

Példa: [2]/129

Bizonyítsuk be, hogy az $x^2-2y^2+8z=3$ egyenletnek nem létezik x, y, z egész megoldása.

Rendezzük az egyenletet a következőféleképpen:

$$x^2=3-8z+2y^2$$

8-cal való osztási maradékokat fogunk vizsgálni. Megállapítjuk, hogy $t^2 \equiv 0$, 1, vagy 4 (mod 8) (egy teljes maradékrendszert végigpróbálva). Két esetet különítünk el:

1. eset: y páros, ekkor a jobb oldal 8-cal osztva 3 maradékot ad. A bal oldalon viszont egy négyzetszám áll, ami azonban 8-cal osztva soha nem ad 3 maradékot, tehát ebben az esetben ellentmondásra jutottunk.

2. eset: y páratlan, vagyis $y=2k+1$, ahol k egész szám, akkor

$$x^2= 3-8z+2(2k+1)^2= 3-8z+8k^2+8k+2$$

ami 8-cal való osztáskor 5-öt ad maradékul, ami szintén lehetetlen, mivel páratlan szám négyzetét 8-cal elosztva 1-et kapunk maradékul.

2.1.3. Szorzat = hatvány módszer

A következő módszer az alábbi elven alapul:

”A számelmélet alaptételéből következik, hogy ha egy pozitív k-adik hatvány két pozitív relatív prím tényező szorzata, akkor egységszorzóktól eltekintve a tényezők maguk is k-adik hatványok. Ilyen típusú megoldások gyakran akkor is alkalmazhatók, ha a tényezők nem feltétlenül relatív prímek.” [1]

Példa: [1]/1.6.3 b

Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő (pozitív egész) szám szorzata nem lehet teljes hatvány (azaz egy egész szám egynél nagyobb kitevőjű hatványa).

Az egyenletünk tehát $(x-1)x(x+1)=z^k$.

A három tényező nem feltétlenül relatív prím egymáshoz, viszont a középső elem relatív prím a másik kettőhöz. Tehát $(x, x+1)=1$ és $(x,x-1)=1$, ezekből $(x, x^2-1)=1$ következik. Ez alapján $x=u^k$ és $x^2-1=v^k$. Ekkor $(u^2)^k-1=v^k$, ami lehetetlen.

Példa: [1]/7.3.13 f

Oldjuk meg a $(x^2-2)(x^2+7)=y^3$ diofantikus egyenletet!

A bal oldal értéke $|x|>1$ esetén mindig pozitív, tehát ebben az esetben az y is pozitív kell, hogy legyen. Ha x helyére 1-et helyettesítünk, az köbszámot eredményez, a -8-at, melynél tehát $y=-2$, tehát $x=1$ megoldás. Elég ezután y-t a pozitív számok halmazán keresni, míg egy x megoldás esetén annak ellentettje is megoldás.

Vizsgáljuk meg az egyenlet bal oldalán álló két tényező legnagyobb közös osztójának lehetséges értékeit. Legyen $d=((x^2-2),(x^2+7))$. Ekkor $d\,|\,(x^2+7)-(x^2-2)=9$, azaz csak a $d=1$, $d=3$ és $d=9$ jöhet szóba.

Ha $d=1$, akkor az x^2-2 és x^2+7 külön-külön is köbszámok, azaz alkalmas u, v pozitív egészekkel $x^2-2=u^3$ és $x^2+7=v^3$.

A két tényező különbsége 9, tehát olyan köbszámokat keresünk, melyek különbsége 9. Két köbszám különbsége csak a (-1,8), vagy a (-8,1) számpár esetén lehet 9, azaz $u=-1$, $v=2$, vagy $u=-8$, $v=1$ esetén.

Az $x^2-2=-1$ és $x^2+7=8$ az $|x|=1$ megoldást adja, a másik lehetőség nem ad egész megoldást x-re.

Nézzük most a $d=3$ esetet:

$3\,|\,x^2-2$ és $3\,|\,x^2+7$. Ebből következik, hogy $3\,|\,9\,|\,y^3$, azaz $3\,|\,y$, ahonnan $27\,|\,y^3$.

Vizsgáljuk meg, hogy a 3 hányadik hatványával osztható az egyenlet jobb oldala, illetve a bal oldal két tényezője. A jobb oldalon a 3 kitevője legalább 3. A bal oldalon mindkét tényezőben a 3 kitevője legalább 1, tehát az egész bal oldalt tekintve a 3 kitevője legalább 2.

Ugyanakkor a kitevő nem lehet 3, mert nem lehetséges, hogy az egyik tényezőnek osztója a 9, a másiknak nem, mivel 9 különbségűek. Ebből következően a bal oldal mindkét tényezője osztható 9-cel, ami a d=3 feltevésnek ellentmond.

A d=9 eset azt jelentené, hogy $9|x^2-2$, ami ekvivalens azzal, hogy $x^2 \equiv 2 \pmod 9$, ami nem lehetséges, mert négyzetszám 9-cel osztva nem adhat 2 maradékot.

Az egyenletet tehát az alábbi számpárok elégítik ki: {1,-2}; {-1,-2}.

2.1.4. Egyenlőtlenségek alkalmazása – becslés

Az alábbi két példa, amit látni fogunk, a következő elven alapul:

„Tekintsünk egy $f(x)=y^k$ típusú diofantikus egyenletet. Ha van olyan c, hogy minden c-nél nagyobb abszolút értékű x egész számra az f(x) két k-adik hatvány közé esik (az egyenlőséget nem megengedve), akkor világos, hogy csak olyan megoldások jöhetnek szóba, ahol $|x|<c$. Az így megmaradt véges sok x-et végigpróbálva megkaphatjuk az egyenlet összes megoldását.” [1]

Példa: (saját)

Az eljárást az $x^4+14x+1=y^4$ diofantikus egyenleten mutatjuk be.

Először az x>1 esetre szorítkozunk:

$$x^4<x^4+14x+1<(x+1)^4$$

$$(x^4<x^4+14x+1<x^4+4x^3+6x^2+4x+1=(x+1)^4).$$

Tehát x>1 esetén $x^4+14x+1$ nem lehet negyedik hatvány.

Ha x=1, akkor $y^4=16$, azaz $y=\pm 2$.

Most megvizsgáljuk az x<-1 esetet:

$$x^4>(x+1)^4,$$

ahonnan:

$$x^4>x^4+14x+1>x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \Leftrightarrow 0<4x^2+6x-10 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 1.$$

Sem x=-1, sem x=-2 esetében nem negyedik hatványt kapunk, tehát az egyenletnek nincs megoldása a negatív számok körében.

Természetesen az x=y=0 triviális megoldás kielégíti az egyenletet. Így tehát 3 számpár lehet megoldás: {0,0}; {1,2}; {1,-2}.

Példa: [1]/7.3.10

Adjuk meg az összes olyan egész számot, amelynek a köbe előáll nyolc szomszédos egész szám köbének az összegeként.

Legyen a 8 szám számtani közepe s. Ekkor 2s=t, ahol t páratlan egész, továbbá a nyolc szám köbének összege

$(s - \frac{7}{2})^3 + (s - \frac{5}{2})^3 + (s - \frac{3}{2})^3 + (s - \frac{1}{2})^3 + (s + \frac{1}{2})^3 + (s + \frac{3}{2})^3 + (s + \frac{5}{2})^3 + (s + \frac{7}{2})^3 = 8s^3+126s = t^3+63t.$

Így a $t^3+63t = v^3$ olyan megoldásait keressük, ahol v egész és t páratlan egész. Ha (v,t) pár megoldás, akkor a (-v,-t) pár is megoldás, ezért elég a t>0 megoldásokat keresnünk. Nyilván v>t, továbbá $(t+5)^3 > t^3+63t = v^3$, tehát v<t+5. Ennek alapján (figyelembe véve, hogy v szükségképpen páros) csak v=t+1 és v=t+3 lehetséges. Az elsőből nem kapunk megoldást, a másodikból t=1 és t=3 adódik. A keresett köbszámok ennek megfelelően $64=4^3$, $216=6^3$, $-64=(-4)^3$ és $-216=(-6)^3$.

A következő példa szintén egyenlőtlenségek megállapításával kerül megoldásra, azonban eltér az előző kettőtől típusát tekintve. Ez egy jóval összetettebb, gondolkodtatóbb feladat.

Példa: [2]/125

Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, n pedig természetes szám, akkor az $x(x+1) = p^{2n} * y(y+1)$ egyenletnek x-re és y-ra nincs megoldása a természetes számok körében.

SCHINZEL bizonyítása.

Legyen p pozitív prímszám, n pedig természetes szám, és tegyük fel, hogy az x és y természetes számok kielégítik az egyenletet. Mivel x és x+1 relatív prímek, vagy $p^{2n} \mid x$, vagy $p^{2n} \mid x+1$, tehát mindkét esetben $x+1 \geq p^{2n}$. Viszont egyenletünk ekvivalens a

$$p^{2n}-1=[p^n(2y+1)+(2x+1)][p^n(2y+1)-(2x+1)]$$

egyenlettel, ugyanis ez utóbbit alakítva a következőket kapjuk:

$$p^{2n}-1=p^{2n}(2y+1)^2-(2x+1)^2$$

Átrendezés és kiemelés után azt kapjuk, hogy:

$$p^{2n}(1-(2y+1)^2)=1-(2x+1)^2$$

$$p^{2n}(-4y^2-4y)=-4x^2-4x$$

(-4)-gyel való osztás, majd kiemelés után a feladatban szereplő eredeti egyenletünket kapjuk, tehát tényleg ekvivalens egymással a két egyenlet. Mivel az eredeti egyenletünkkel ekvivalens egyenletnek a bal oldala és a jobb oldalának első tényezője is pozitív, ezért a jobb oldal második tényezőjének is pozitív egésznek kell lennie. Tehát a jobb oldalon álló szorzat tényezői külön-külön is kisebbek a bal oldalnál, azaz

$$p^{2n}-1 \geq p^n(2y+1)+(2x+1)$$

amiből az következik, hogy

$$p^{2n}-1>2x+1.$$

(Itt már nincs megengedve az egyenlőség, mert $p^n(2y+1)\neq 0$, itt használjuk ki, hogy a természetes számok körében vizsgálódunk.) Azt kapjuk tehát, hogy $p^{2n}>2(x+1)$, de a bizonyítás elején arra jutottunk, hogy $x+1\geq p^{2n}$. Ez azt jelentené, hogy $p^{2n}>2p^{2n}$, ami lehetetlen.

2.2. Ismert tételek alkalmazására visszavezethető feladatok

2.2.1 Pitagoraszi számhármasok

„Pitagoraszi számhármasoknak az $x^2+y^2=z^2$ egyenlet pozitív egész megoldásait nevezzük. Geometriai megfogalmazásban a pitagoraszi számhármasok azoknak a derékszögű háromszögeknek az oldalhosszait jelentik, amelyekben mindhárom oldal hossza egész szám. Azonnal látszik, hogy az egyenlet megoldható (például a 3, 4, 5 számhármas megoldás), sőt egy x, y, z megoldást tetszőleges d pozitív egésszel beszorozva a kapott dx, dy, dz számhármas is nyilván megoldás. Ezért külön érdemes azokat a megoldásokat vizsgálni, ahol (x,y,z)=1, ezeket alapmegoldásoknak vagy primitív pitagoraszi számhármasoknak nevezzük.” [1]

Már az alapmegoldásból is végtelen sok van, sőt elő tudjuk állítani az összes alapmegoldást és így az összes megoldást is alkalmas paraméterek segítségével:

Tétel: [1]/286. o.

(i) Az $x^2+y^2=z^2$ egyenletnek az (x,y,z)=1 feltételt kielégítő összes pozitív egész megoldását (azaz az alapmegoldásokat) a következő képlet szolgáltatja (itt az x és y felcseréléséből adódó megoldásokat azonosnak tekintjük):
$x=2mn$, $y=m^2-n^2$, $z=m^2+n^2$
ahol az m és n paraméterek tetszőleges olyan pozitív egészek, amelyekre m és n különböző paritású, m>n és (m,n)=1.

(ii) Az $x^2+y^2=z^2$ egyenlet összes pozitív egész megoldását (azaz az összes pitagoraszi számhármast) az alapmegoldások többszöröseiként kapjuk meg, tehát
$x=2mnd$, $y=(m^2-n^2)d$, $z=(m^2+n^2)d$,
ahol d tetszőleges pozitív egész, az m és n pozitív egészekre pedig teljesül, hogy m és n különböző paritású, m>n, és (m,n)=1.

Példa: [1]/7.2.3

Adjuk meg az összes olyan derékszögű háromszöget, melyeknek oldalai egész számok, és a kerület és terület mérőszáma megegyezik.

Legyen a derékszögű háromszög két befogója x és y, az átfogója pedig z. Ekkor:

$$x+y+z=\frac{xy}{2}$$

A háromszög oldalai a tétel következtében a következő alakban írható fel:
$x=d*2mn$, $y=d(m^2-n^2)$, $z=d(m^2+n^2)$, ahol $m>n$, m és n különböző paritású , és $(m,n)=1$, d pedig tetszőleges pozitív egész. Az eredeti egyenletünk tehát:

$$2d(2mn+m^2-n^2+m^2+n^2)=2d^2mn(m^2-n^2),$$

ahonnan

$$4m(m+n)=2mn(m-n)(m+n)*d.$$

Mivel $2m(m+n)$ pozitív szám, mindkét oldalt eloszthatjuk vele, ezután:

$$2=n(m-n)*d.$$

d=1 eset: $n^2-mn+2=0$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét n-re felírva:

$$\frac{m \pm \sqrt{m^2-8}}{2}$$

A diszkrimináns m^2-8, ennek négyzetszámnak kell lennie, tehát $m^2-8=u^2$. Melyek a négyzetszámok 8 különbséggel? Nyilván csak az 1 és a 9 ilyen. Tehát $m=3$. Behelyettesítve m-et a képletbe, n-re 1 és 2 adódik, melyek közül nyilván csak az $n=2$ fogadható el, mivel m és n különböző paritású kell, hogy legyen. Tehát $m=3$, és $n=2$. Ezekkel a háromszög oldalai:
$x=12$, $y=5$, $z=13$.

d=2 eset: $n(m-n)=1$, azaz $n=1$, $m-n=1$, ahonnan $n=1$, $m=2$, $x=4$, $y=6$, $z=10$.

Példa: [1]/7.2.1

Mutassuk meg, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, akkor az oldalhosszak szorzata osztható 60-nal.

(Elég a d=1 esetre szorítkozni, mivel a többi háromszög ehhez hasonló, így az oldalhosszak szorzata d^3-nal szorzódik a primitív megoldásokhoz képest.)

Legyen a háromszög két befogója x és y, átfogója z. A pitagoraszi számhármasokról szóló tételünk következtében x, y és z az alábbi alakban írható fel:

$x=2mn$, $y=m^2-n^2$, $z=m^2+n^2$, ahol m és n különböző paritású pozitív egész, $m>n$ és $(m,n)=1$.

Tehát az oldalhosszak szorzata

$$2mn(m^2-n^2)(m^2+n^2)=2mn(m-n)(m+n)(m^2+n^2)$$

Azt állítjuk, hogy ez a kifejezés osztható 60-nal. Elég meggondolni, hogy

$$30|mn(m-n)(m+n)(m^2+n^2) \qquad (*)$$

30 prímtényezős alakja: $2^1*3^1*5^1$. Elég azt belátni, hogy 2, 3 és 5 mindegyike osztja a fenti kifejezést. Könnyű belátni, hogy 2 osztja, hiszen m és n különböző paritásúak, így mn páros kell, hogy legyen.

Lássuk be, hogy $3|mn(m-n)(m+n)(m^2+n^2)$.

1. eset: 3|m, vagy 3|n. Ekkor 3|mn, így az egész kifejezést (azaz (*)-ot).

2. eset: 3łm és 3łn. Ekkor m =3k+1, vagy 3k-1, hasonlóképpen n=3l+1, vagy 3l-1, ahol k, l pozitív egészek. Amennyiben m=3k+1 és n=3l+1, vagy m=3k-1 és n=3l-1 alakú, úgy m-n=3(k-l) Azaz: 3|m-n. Ha m=3k+1 és n=3l-1, vagy m=3k-1, és n=3l+1, úgy m+n=3(k+l). Azaz 3|m+n. Mivel m-n és m+n a kifejezés szorzótényezői, így 3 osztja a (*) szorzatot.

Utolsó lépésként azt kell belátnunk, hogy 5 osztja (*)-ot.

1. eset: 5|m, vagy 5|n. Ekkor 5|mn, így a (*) kifejezést.

2. eset: m és n mindketten 5k±1 alakúak, vagy mindketten 5k±2 alakúak. Ezt az esetet ugyanúgy látjuk be, mint a 3-mal való oszthatóság bizonyításakor a 2. esetet.

3. eset: m 5k±1 alakú és n 5l±2 alakú, vagy fordítva. Elég az egyik esetet belátni, tehát azt, amikor m 5k±1 alakú és n 5l±2 alakú.

$$m^2+n^2=(5k\pm1)^2+(5l\pm2)^2=25k^2\pm10k+25l^2\pm10l+5=5(5k^2\pm2k+5l^2\pm2l+1).$$

Azaz $5|m^2+n^2$, ami a (*) kifejezés szorzótényezője, tehát 5 osztja a kifejezést. Tehát bármilyen alakú m és n, 5 is osztja a (*) szorzat valamely tényezőjét.

Mivel 2, 3 és 5 páronként relatív prímek, így szorzatuk is osztja (*)-ot.

2.2.2 Pell-egyenlet

„Pell-egyenletnek egy

$$x^2-my^2=1 \qquad (1)$$

alakú diofantikus egyenletet nevezünk, ahol az m (rögzített) pozitív egész és nem négyzetszám. Az (1) egyenlet két triviális megoldása x=±1, y=0, az ezektől különböző (azaz y≠0 típusú) megoldások a nemtriviális megoldások.

Az (1) bal oldalát szorzattá bonthatjuk:

$$(x+y\sqrt{m})(x-y\sqrt{m})=1.$$

Ebből következik, hogy ha x, y megoldása (1)-nek, akkor az $a+b\sqrt{m}$ alakú számok körében (ahol a és b egészek) az $x+y\sqrt{m}$ és az $x-y\sqrt{m}$ számok osztói az 1-nek és így mindketten egységek. Mivel egy egység tetszőleges (egész kitevős) hatványa is egység, ezért ha létezik egy ε≠±1 egység, akkor az ε hatványai végtelen sok egységet adnak. Ez a Pell-egyenletre „visszafogalmazva” azt jelenti, hogy ha (1)-nek létezik nemtriviális megoldása, akkor végtelen sok megoldása van. A Pell-egyenletnek mindig végtelen sok megoldása van (az előbbiek szerint ehhez elég azt bizonyítani, hogy legalább egy nemtriviális megoldás létezik). És az összes megoldást is meg lehet adni szép formában.” [1]

Tétel: [1]/333. o.

Legyen m olyan pozitív egész, amely nem négyzetszám. Ekkor az (1) diofantikus egyenletnek végtelen sok megoldása van.

Legyen m olyan pozitív egész, amely nem négyzetszám, és x_0, y_0 az (1) diofantikus egyenletnek az a(z egyértelműen meghatározott) megoldása, amelyre $x_0>0$, $y_0>0$ és $x_0+y_0\sqrt{m}$ minimális. Ekkor az összes megoldást az

$$x+y\sqrt{m} = \pm(x_0+y_0\sqrt{m})^n, \quad n=0, \pm1, \pm2,\dots$$

képlettel meghatározott x, y egész számpárok adják.

Példa: (saját)

Oldjuk meg az

$$x^2-24y^2=1$$

diofantikus egyenletet.

Először megállapítjuk, hogy ez egy $x^2-my^2=1$ típusú egyenlet, és észrevesszük, hogy az m=24 pozitív egész, és nem négyzetszám. Olyan x_0, y_0 pozitív egész megoldásokat keresünk, melyre $x_0+y_0\sqrt{24}$ minimális. Ez a megoldás nem más, mint az $x_0=5$, $y_0=1$ lesz. Ebből felírható az összes –végtelen sok- megoldás az utóbbi tétel segítségével:

Azon x, y egészek, melyek: $x+y\sqrt{24}= \pm(5+1\sqrt{24})^n$ képlettel felírhatók, ahol n=±1, ±2,…. Például x_1, és y_1 a következő értékek lesznek: $\pm(5+1\sqrt{24})^2=\pm(29+10\sqrt{24})$, azaz $x_1=\pm29$, $y_1=\pm10$.

2.2.3 A Fermat-sejtés

A 2.1. pontban láttuk, hogy $x^2+y^2=z^2$ pitagoraszi egyenletnek végtelen sok pozitív egész megoldása van (és az összes megoldás leírható három paraméter segítségével). Fermat-nak a közelmúltban igazolt híres sejtése szerint magasabb hatványokra alapvetően más a helyzet:

Tétel: [1]/319. o.

Ha k>2 egész szám, akkor az $x^k+y^k=z^k$ egyenlet nem oldható meg pozitív x ekvivalens, nullától különböző egészekben.

„A sejtés története 1637-ben kezdődött, amikor Diophantosz könyvének 1621-es kiadását olvasgatva, a pitagoraszi számhármasokról szóló résznél Fermat a következő bejegyzést tette: „ Két köbszám összege sohasem lehet köbszám, két negyedik hatvány összege

sohasem lehet negyedik hatvány stb. Erre egy csodás bizonyítást találtam, sajnos a margón kevés a hely ahhoz, hogy leírhassam."
Ez a néhány sor három és fél évszázadon keresztül matematikusok és laikusok seregét tartotta izgalomban.
Könnyen adódik, hogy ha a sejtés igaz egy adott k kitevőre, akkor a k minden többszörösére is igaz, ennélfogva elég a k=4 és k=p=prím eseteket tisztázni. Fermat-nál megtalálható a k=4 eset bizonyítása, majd jó száz évvel később Euler a k=3 kitevővel is boldogult. A 19. század első felében további néhány konkrét k értékre sikerült megoldani a problémát, majd a század közepén lényeges áttörést hozott az „ideális számok", mai szóhasználattal ideálok bevezetése. Ezt továbbfejlesztve számos olyan kritériumot dolgoztak ki, amelynek teljesülése esetén a Fermat-sejtés az adott k(=prím) kitevőre igaz. Ezek a kritériumok (elvileg) bármely konkrét k értékre numerikusan ellenőrizhetők, és az ellenőrzés szorgalmasan folyt is (az utóbbi évtizedekben már számítógépek segítségével).
Mindezek ellenére a 20. század hetvenes éveiben is csak véges sok prím kitevőre nyert bizonyítást a sejtés.
Óriási szenzációt jelentett 1938-ban Gerd Faltings eredménye: a Fermat-egyenletnek bármely k kitevő esetén csak véges sok primitív, (azaz (x,y,z)=1 típusú) megoldása lehet.
Az igazi szenzációt azonban Andrew Wiles okozta 1993-ban, aki sokéves titokban végzett kutatás után a probléma végleges megoldásával rukkolt elő. Wiles azután kezdett a tétellel foglalkozni, hogy a nyolcvanas években Ken Ribet kapcsolatot talált a nagy Fermat-sejtés és az elliptikus görbékkel foglalkozó Taniyama-Shimura-sejtés között, és kiderült, hogy ha valakinek sikerül bizonyítania a másodikat, akkor automatikusan bebizonyította az elsőt is. Wiles tehát ezzel próbálkozott, hétéves munkával és egy végzetesnek tűnő hibát kijavítva végül sikerrel járt.   De Wiles százoldalas levezetését alig páran értik a világon, ezért a közvéleményt továbbra is izgatja, mi lehetett Fermat "csodálatos bizonyítása". (Persze kérdés, hogy helyes volt-e.) „ [1]

Példa: (saját)

Döntsük el a megoldásszámot az

$$x^4 - 81y^4 = 16z^4$$

egyenlet esetében.

Az egyenletet a következőképpen alakítsuk át:

$$x^4 + (2z)^4 = (3y)^4$$

A Fermat-sejtés következtében megállapíthatjuk, hogy nincs x, y, z egész megoldása az egyenletnek, mivel a baloldalon két negyedik hatvány összege, a jobb oldalon pedig egy negyedik hatvány áll.

Kimondunk még egy tételt és egy lemmát, mely tételből következik a Fermat-sejtés k=4 kitevős esete, a lemma pedig a tétel bizonyítását segíti, de önmagában is érdekes, melyre – mint azt látni fogjuk – érdekes szöveges feladatok megoldását lehet alapozni.

Tétel: [1]/320. o

Az $x^4+y^2=z^4$ egyenletnek nem létezik pozitív egész megoldása.

Lemma: [1]/321. o.

Két (nemnulla) négyzetszám összege és különbsége nem lehet egyszerre négyzetszám.

Példa: [1]/7.7.14 a)

Mutassuk meg, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, akkor a háromszög területe nem lehet négyzetszám.

Legyen a derékszögű háromszög két befogója x és y, átfogója z, x, y, z pozitív egészek. Ekkor $x^2+y^2=z^2$. x, y és z Pitagoraszi számhármas, az erről szóló tétel alapján $x=c*2mn$, $y=c(m^2-n^2)$, $z=c(m^2+n^2)$, ahol m és n természetes számok, különböző paritásúak, relatív prímek és m>n. Indirekt tegyük fel, hogy a háromszög területe négyzetszám, ekkor:

$$\frac{c^2 * 2mn(m^2-n^2)}{2} = u^2, ahol\ u\ egész.$$

Kettővel osztva azt kapjuk, hogy:

$$c^2*mn(m^2-n^2)=u^2.$$

Mivel m és n relatív prímek, m^2-n^2 is relatív prím m-hez, illetve n-hez is, tehát m, n és m^2-n^2 páronként relatív prímek. Ez azt jelenti, hogy m, n és m^2-n^2 külön-külön is négyzetszámok kell, hogy legyenek. Használjuk a következő jelölést:

$$t_1^2=m,\ \ t_2^2=n,\ \ t_3^2=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$$

Ha belátjuk, hogy m+n és m-n mindketten négyzetszámok, akkor készen vagyunk, hiszen m és n négyzetszámok és a lemma alapján ezek összege és különbsége nem lehet egyszerre négyzetszám. Mivel m és n relatív prímek és $(m-n,m+n)|(2m,2n)=2(m,n)=2$ és m, n paritása más, igy $(m-n, m+n)=1$, tehát mivel a szorzatuk négyzetszám, külön-külön is négyzetszámok kell, hogy legyenek. Ez ellentmond a lemmának, így beláttuk, hogy egész oldalú háromszög területe nem lehet négyzetszám.

2.2.4 Számok előállítása négyzetösszegként

Ebben a pontban azt vizsgáljuk meg, hogy mely pozitív egészek állnak elő két, három, illetve négy négyzetszám összegeként(összeadandóként a 0-t is megengedve). Az alábbi három tétel segítségével tehát könnyedén el tudjuk majd dönteni némely diofantikus egyenletről, hogy megoldható-e, és ha igen, a megoldásszámot is meghatározhatjuk.

Tétel: (Két- négyzetszám-tétel) [1]/304. o.

Legyen az n pozitív egész kanonikus alakja

$$n=2^{\alpha}p_1^{\beta 1}\ldots p_r^{\beta r}q_1^{\gamma 1}\ldots q_s^{\gamma s},$$

ahol a p_μ prímek 4k+1 alakúak, a q_ν prímek 4k-1 alakúak, és a szereplő α, β_μ, γ_ν kitevők nemnegatív egészek.
Az

$$x^2+y^2=n$$

diofantikus egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha minden γ_ν páros, és ebben az esetben a megoldásszám

$$4\sum_{\mu=1}^{\gamma}(\beta_\mu+1)$$

<u>Megjegyzés:</u> Itt a csak előjelben eltérő megoldásokat is külön megoldásoknak tekintjük.

Példa: [1]/305. o.

Legyen n=4050. A 4050 kanonikus alakja $2*3^4*5^2$. Itt a 3 kitevője páros, tehát van megoldás, és a megoldásszám az 5 kitevőjéből 4(2+1)=12. A megoldások:

$$4050=(\pm 45)^2+(\pm 45)^2=(\pm 9)^2+(\pm 63)^2=(\pm 63)^2+(\pm 9)^2.$$

Tétel: (Három-négyzetszám-tétel) [1]/306. o.

Az n pozitív egész akkor és csak akkor nem áll elő három négyzetszám összegeként, ha

$$n=4^k(8m+7)$$

alakú.

Példa: (saját)

Adjunk meg olyan n-et, hogy az $x^2+y^2=n$ diofantikus egyenletnek ne legyen megoldása.

A tétel alapján például olyan n-et választunk, mely 8-cal osztva 7 maradékot ad. Ekkor a 4 kitevőjében szereplő k-t nullának választjuk. Például n=71 ilyen szám, tehát ebben az esetben az egyenletnek nincs megoldása.

Tétel: (Négy-négyzetszám-tétel) [1]/307. o.

Minden pozitív egész felírható négy négyzetszám összegeként.

Példa: (saját)

Oldjuk meg az $x^2+y^2+z^2+v^2=28$ egyenletet!

A 28-nál kisebb négyzetszámok: 1, 4, 9, 16, 25. Hogyan tudjuk előállítani a 28-at ezek összegeként? Az összes megoldás:

$$28=25+1+1+1=5^2+1^2+1^2+1^2$$

$$28=16+4+4+4=4^2+2^2+2^2+2^2$$

$$28=9+9+9+1=3^2+3^2+3^2+1^2.$$

2.3 Egyéb diofantikus egyenletek

Ebben a fejezetben olyan eseteket tárgyalunk, melyekről az eddigiekben még nem esett szó, az előzőektől eltérő megoldást igényelnek, trükkös módon oldhatjuk meg őket, vagy formájukat , az ismeretlenek helyét tekintve különlegesek.

2.3.1 Megoldhatatlanság, vagy végtelen sok megoldás létezésének bizonyítása azonosságok segítségével

Ez az alfejezet arra szolgál, hogy egy új módszert ismerjünk meg annak bizonyítására, hogy egy adott diofantikus egyenletnek végtelen sok pozitív megoldása van, vagy épp nem létezik pozitív megoldása. Itt nem igazán az eddig ismertetett elemi lépések lesznek szükségesek, hanem trükkös észrevételek visznek közelebb a megoldáshoz.

Példa: [2]/ 123

Elemi úton bizonyítsuk be, hogy az

$$(x-1)^2+(x+1)^2=y^2+1$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számok körében.

Könnyen belátható, hogy ha x és y kielégítik az

$$(x-1)^2+(x+1)^2=y^2+1 \qquad (1)$$

egyenletet, akkor

$$(2y+3x-1)^2+(2y+3x+1)^2=(3y+4x)^2+1,$$

hiszen a két egyenlet ekvivalens egymással.

Tehát az (1) egyenlet bármely x, y pozitív egész megoldásából a nagyobb természetes számokból álló 2y+3x, 3y+4x megoldása. Mivel pedig x=2, y=3 kielégítik az egyenletet, ezért valóban végtelen sok pozitív egész megoldása létezik.

Rekurzióval felírva a megoldások egy olyan (x_n, y_n) n=0, 1, 2,… végtelen sorozat tagjai, ahol a sorozat első tagja (x_0,y_0), a sorozat k-adik tagját (k=1, 2, 3,…) pedig a következőképpen kapjuk meg: $(x_k,y_k)=(2y_{k-1}+3x_{k-1}; 3y_{k-1}+4x_{k-1})$. Például $(x_0,y_0)=(2,3)$.

Példa: [2]/ 127

Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2-Dy^2=z^2$$

egyenletnek bármely D egész szám esetén végtelen sok x, y, z megoldása van a természetes számok körében.

Válasszuk x-nek, y-nak és z-nek a következő értékeket:

$x=m^2+Dn^2$, $y=2mn$, $z=m^2-Dn^2$, ahol n természetes számhoz olyan m természetes számot választunk, amelyre $m^2>Dn^2$. Ezeket az értékeket az egyenletünkbe helyettesítve azonosságot kapunk:

$$(m^2+Dn^2)^2-D(2mn)^2=(m^2-Dn^2)^2$$

azaz a kapott egyenletnek bármely a fenti feltételnek megfelelő m,n számpár megoldása. Mivel végtelen sok ilyen tulajdonságú (m,n) számpár létezik, ezért az eredeti egyenletünknek is végtelen sok x, y, z megoldása lesz, ahol $x=m^2+Dn^2$, $y=2mn$, és $z=m^2-Dn^2$, ahol m, n természetes számok úgy, hogy $m^2>Dn^2$.

Példa: [2]/ 127a

Bizonyítsuk be, hogy az

$$1+x^2+y^2=z^2$$

egyenletnek végtelen sok x, y, z pozitív egész megoldása van a pozitív egész számok körében.

Az előző feladathoz hasonlóan történik a megoldás, x-nek, y-nak és z-nek a következő értékeket választjuk:

$x=2n$, $y=2n^2$, $z=2n^2+1$, ahol n természetes szám. Ekkor a következő egyenletet kapjuk az eredetiből:

$$1+(2n)^2+(2n^2)^2=(2n^2+1)^2.$$

Ez azonosság, azaz bármely n természetes szám kielégíti. Tehát az eredeti egyenletünknek is végtelen sok x, y, z megoldása van, ahol ahol $x=2n$, $y=2n^2$, $z=(2n^2+1)$.

Példa: [2]/130

Adjuk meg az

$$y^2-x(x+1)(x+2)(x+3)=1$$

egyenletnek az összes x, y pozitív egész megoldását.

Legyen x tetszőleges természetes szám. Könnyen ellenőrizhető az

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$$

helyessége, amelyből az adott egyenlet alapján $y=x^2+3x+1$.

Eddig végtelen sok megoldás létezését bizonyítottuk, a következő két példában megoldhatatlanságot igazolunk szintén azonosságok segítségével.

Példa: [2]/ 124

Bizonyítsuk be, hogy az

$$x(x+1)=4y(y+1)$$

egyenletnek nincs megoldása a természetes számok körében, ellenben a pozitív racionális számok között végtelen sok megoldása van.

Egy olyan, az eredeti egyenletünkkel ekvivalens egyenletet fogunk keresni, melynek segítségével megmutatjuk, hogy nincs megoldás a természetes számok körében.
Ötlet: szorozzuk meg az egyenletünket 4-gyel, majd adjunk hozzá mindkét oldalhoz 3-at. A zárójelek felbontása után a következő alakot kapjuk:

$$16y^2+16y-4x^2-4x+3=3$$

Alakítsuk szorzattá az így kapott egyenlet bal oldalát. Ezt kétféleképpen is megtehetjük:

$$3=[2(2y+1)^2]-(2x+1)^2=(4y-2x+1)(4y+2x+3)$$

Ez azt jelenti, hogy 3 a nála nagyobb $4y+2x+3$ természetes számmal osztható, ez pedig lehetetlen.

Ellenben – s ez könnyen ellenőrizhető – ha $n>1$ természetes szám, akkor

$$x=(3^n-3^{1-n}-2)/4, \quad y=(3^n+3^{1-n}-4)/8$$

kielégíti az $x(x+1)=4y(y+1)$ egyenletet, helyettesítsük be ugyanis ezt a két értéket az eredeti egyenletünkbe. Először határozzuk meg a bal oldalt:

$$(3^n-3^{1-n}-2)/4*[(3^n-3^{1-n}-2)/4+1]=(3^{2n}-3-2*3^n-3+3^{2-2n}+2*3^{1-n}+4)/16+(4*3^n-4*3^{1-n}-8)/16=(3^{2n}+3^{2-2n}-10)/16$$

Most nézzük a jobb oldalt:

$$4[(3^n+3^{1-n}-4)/8][(3^n+3^{1-n}-4)/8+1]=(3^{2n}+3-4*3^n+3+3^{2-2n}-4*3^{1-n}-4*3^n-4*3^{1-n}+16)/16+(8*3^n+8*3^{1-n}-32)/16=(3^{2n}+3^{2-2n}-10)/16,$$

tehát a behelyettesítés után valóban azonosságot kapunk.

Például, ha $n=2$, akkor $x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{2}{3}$. Egyenletünknek tehát végtelen sok megoldása van a pozitív racionális számok körében. (Ez a hányados nyilván sosem lesz egész, mert a számlálóban páratlan szám áll, ami nem osztható 4-gyel.)

Példa: [2]/ 132

Bizonyítsuk be Eulernek azt a tételét, mely szerint a

$$4xy-x-y=z^2$$

egyenletnek nincs x, y, z pozitív egész megoldása, továbbá mutassuk meg, hogy ennek az egyenletnek a negatív egészek körében végtelen sok megoldása van.

Ha x, y és z természetes számok kielégítenék az $4xy-x-y=z^2$ egyenletet, akkor

$$(4x-1)(4y-1)=(2z)^2+1$$

adódna, és a $4x-1\geq3$ természetes számnak lenne $4k+3$ alakú p prímosztója. Tehát $(2z)^2\equiv-1 \pmod p$ lenne, amiből $p=4k+3$ következtében a

$$(2z)^{p-1}=((2z)^2)^{(2k+1)} \equiv-1 \pmod p$$

kongruenciát kapnánk, Euler-Fermat tételével ellentétben.

Ellenben jelöljön n tetszőleges természetes számot, és legyen $x=-1$, $y=-5n^2-2n$, $z=-5n-1$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az x, y és z számok kielégítik az $4xy-x-y=z^2$ egyenletet, ugyanis: $4(-1)(-5n^2-2n)-(-1)-(-5n^2-2n)=25n^2+10n+1$ a bal oldal értéke, és a jobb oldalra is ugyanezt az eredményt kapjuk $-5n-1$ négyzetre emelése után. Ekkor x, y és z minden n-re negatív, tehát például a negatív számok körében az egyenletnek végtelen sok megoldása van.

2.3.2. További érdekes diofantikus egyenletek

Olyan egyenletek kerülnek bemutatásra, melyek eddig még nem fordultak elő az előző fejezetekben. Az első példában az ismeretlenek a nevezőben fordulnak elő. A továbbiak során az ismeretlen kitevőben fog szerepelni, majd bemutatásra kerül faktoriálist tartalmazó diofantikus egyenlet is. Ennek az alfejezetnek a célja, hogy ötletet adjon ezen egyenletek megoldásához, mely megoldása nem bonyolultabb az eddig látottaknál, csupán más észrevételeket, ötleteket igényel.

Példa: [3]/ 123 a

Oldjuk meg az egész számok körében az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{14}$$

egyenletet.

Ha $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$, akkor a törtek eltávolítása után azt kapjuk, hogy

$$ax+ay=xy, \text{ ill. } xy-ax-ay+a^2=a^2$$

$$(x-a)(y-a)=a^2.$$

Legyen v az a^2 pozitív osztóinak a száma, beleértve 1-et és a^2-et is. Ekkor a legutolsó egyenlet megoldásainak a száma az egész számok körében $2v-1$ darab ($2v$ darab megoldásból lejön az $x-a=-a$, $y-a=-a$ eset, melyből $x=0$, $y=0$ adódik, ekkor a feladatban szereplő egyenletnek nincs

értelme).
Tehát az egyenlet összes megoldása a következő alakban írható fel:
x-a=d, y-a=$\frac{a^2}{d}$; és x-a=-d, y-a=$-\frac{a^2}{d}$, ahol d a^2-nek osztója és d≠-a.
Ha a=14, akkor a^2=196, ennek osztói pedig: 1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196.
Ennek megfelelően egyenletünkre a következő 17 megoldást kapjuk: x_1=15, y_1=210; x_2=16, y_2=112; x_3=18, y_3=63; x_4=21, y_4=42; x_5=28, y_5=28; x_6=42, y_6=21; x_7=63, y_7=18; x_8=112, y_8=16; x_9=210, y_9=15; x_{10}=13, y_{10}=-182; x_{11}=12, y_{11}=-84; x_{12}=10, y_{12}=-35; x_{13}=7, y_{13}=-14; x_{14}=-14, y_{14}=7; x_{15}=-35, y_{15}=-10; x_{16}=-84, y_{16}=12; x_{17}=-182, y_{17}=13.

Példa: [1]/7.3.13 h

Oldjuk meg a következő diofantikus egyenletet: $x^y=y^x$.

Feltehető, hogy y≥x. Megmutatjuk, hogy az összes megoldás x=y, valamint x=2, y=4 és x=4, y=2. Ezek nyilván megoldások. Így azt kell igazolni, hogy y>x esetén x=2 és y=4.
Két bizonyítást fogunk bemutatni ennek az állításnak az igazolására.

1. bizonyítás: y>x eset: Legyen (x,y)=d, ekkor x=da, y=db, ahol (a,b)=1. Ezt az egyenletbe visszaírva, majd d^a-nal osztva:

$$(da)^b=(db)^a, \text{ azaz } b>a \text{ miatt } d^{b-a}a^b=b^a \qquad (1)$$

adódik. Innen kapjuk, hogy a|b^a, de ez (a,b)=1 miatt csak a=1 esetén lehetséges. Ekkor (1) a

$$d^{b-1}=b \qquad (2)$$

egyenletet jelenti. Itt b>a=1, és így d>1 .Ha d>2, akkor bármely b>1-re d^{b-1}>b, és d=2 esetén is csak úgy teljesülhet (2), ha b=2. Innen valóban a kívánt

$$x=da=2*1=2 \quad \text{és} \quad y=db=2*2=4$$

értékeket kapjuk.

2. bizonyítás: Ha y>x>1, akkor az egyenlet ekvivalens az

$$\frac{x}{\log x}=\frac{y}{\log y}$$

egyenlettel. Mivel az f(z)=z/log z függvény az 1<z<e intervallumban szigorúan monoton fogy, és z>e-re szigorúan monoton nő, így két különböző egész helyen csak akkor vehet fel azonos értéket, ha a kisebbik hely a 2. Ez azt jelenti, hogy csak x=2 lehetséges. Ekkor y=4 megfelel, továbbá az f függvény z>e-re szigorúan monoton, ezért más y már nem lehet jó.

Példa: [3]/115 a, b

Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi egyenleteket:
(a) 1!+2!+…+x!=y^2;
(b) 1!+2!+…+x!=y^z.

a) Közvetlen behelyettesítéssel kapjuk, hogy x<5 esetén egyenletünk megoldásai az x=1, y=±1 és az x=3, y=±3 számok lesznek. Megmutatjuk most, hogy x≥5 esetén nincs megoldása az egyenletnek. Vegyük figyelembe ehhez, hogy 1!+2!+3!+4!=33 utolsó számjegye 3, 5!, 6!, 7!,… utolsó számjegye pedig 0. Ilyen módon $x\geq 5$esetén az $1!+2!+\ldots x!$ összeg 3-ra végződik. Tudjuk azonban, hogy 3-ra végződő négyzetszám nem létezik.

b) Két esetet különböztetünk meg:

1. eset: z=2n páros szám. Ez az eset könnyen visszavezethető az a) feladatra, mivel $y^z=y^{2n}=(y^n)^2$. Ilyen módon páros z-re a következő megoldásokat kapjuk:
x=1, y=±1, ha z tetszőleges páros szám , és x=3, y=±3, ha z=2.

2. eset: z páratlan szám. Ha z=1, az egyenlőség bármilyen x értékre igaz $y=1!+2!+3!\ldots+x!$ választással.
Legyen $z\geq 3$. A következőket kell észrevenni: $1!+2!+\ldots+8!=46233$ osztható 9-cel, de nem osztható 27-tel. $n\geq 9$ esetén n! szám osztható 27-tel. A $9!+\ldots+x!$ osztható 27-tel, minthogy azonban $1!+2!+\ldots+8!$ 9-cel osztható, de 27-tel nem, az $1!+2!+\ldots+x!$ összeg $x\geq 8$ esetén osztható 9-cel, de 27-tel nem.
Ahhoz, hogy y^z osztható legyen 9-cel, szükséges, hogy y osztható legyen 3-mal. Ekkor y^z osztható 27-tel (mert $z\geq 3$), következésképpen $x\geq 8$, $z\geq 3$ esetén az egyenlőségnek nincs megoldása az egész számok körében.
Meg kell még vizsgálnunk az $x<8$ esetet.
$1!=1=1^z$ (z tetszőleges); 1!+2!=3 (nem egyenlő semmiféle egész szám 1-től különböző természetes kitevőjű hatványával); $1!+2!+3!=9=3^2$ (2 páros kitevő, ezt az első esetben megoldásul kaptuk); x= 4, 5, 6, 7 esetén sem jutunk megoldásra, ez könnyen ellenőrizhető.
Ilyen módon páratlan z esetén a következő megoldásokat kapjuk:
x tetszőleges természetes szám, $y=1!+2!+\ldots+x!$, z=1; és x=1, y=1, z tetszőleges páratlan szám.

Összefoglalva az összes megoldás:

- x=1, y=±1, z páros; x=1, y=1, z egész szám
- x tetsz. természetes szám, $y=1!+2!+\ldots x!$, z=1
- x=3, y=±3, z=2

3. Fejezet

Középiskolai szakköri feladatok

Az utolsó fejezet középiskolai matematikai szakkörök, fakultációs órák számára készült. A középiskolai oktatásban nem szerepelnek diofantikus egyenletek, azonban a matematika iránt érdeklődő diákok számára szervezett foglalkozások keretein belül érintőlegesen foglalkoznak a témával. A következőkben olyan feladatok lesznek bemutatva, melyek a középiskolai tanuló számára könnyen megérthetők, alkalmasak arra, hogy bepillantást nyerhessenek a diofantikus egyenletek világába. Ezek a feladatok bemutatják ennek a korosztálynak, néhány szöveges feladat milyen egyszerűen oldható meg ezen egyenletek felírásával.

Példa: [3]/110. a

Határozzuk meg azt a négyjegyű számot, amelyik teljes négyzet és első két számjegye is, utolsó két számjegye is azonos.

Legyen a az első, b az utolsó számjegye a keresett N számnak. Ekkor

$$1000a+100a+10b+b=1100a+11b=11(100a+b)=N.$$

Tehát 11|N, amiből következik, hogy 11 négyzete is osztja N-et, mivel N négyzetszám, 11 pedig felbonthatatlan. Ebből következik, hogy $\frac{N}{11}$=100a+b osztható 11-gyel. Ötlet:

$$100a+b=99a+(a+b)=11*9a+(a+b).$$

Következésképpen a+b is osztható 11-gyel. De 1≤a+b≤18 (a, b számjegyek) miatt a+b=11. Innen

$$100a+b=11*9a+11=11(9a+1),$$

$$\frac{N}{121}=\frac{100a+b}{11}=9a+1.$$

Minthogy N teljes négyzet, így $\frac{N}{121}$ is teljes négyzet. De a 9a+1 alakú számból, ahol a 1 és 9 közötti értékeket vehet fel, csupán a 9*7+1=64 teljes négyzet. Következésképpen $N=121*64=7744=88^2$.

Példa: [3]/121

Határozzuk meg az összes egész számokból álló olyan számpárt, amelyekben a két szám összege egyenlő a szorzatával.

Jelöljük a keresett számokat x-szel és y-nal, felírhatjuk, hogy

$$x+y=xy$$

melyet tovább alakítva

$$xy-x-y+1=1,$$

$$(x-1)(y-1)=1.$$

Minthogy azonban 1-et csak kétféleképpen bonthatjuk fel két egész szám szorzatára, azonnal adódik, hogy

$$x-1=1,\ \ y-1=1;\ \ x=2,\ \ y=2,$$

vagy

$$x-1=-1,\ \ y-1=-1;\ \ x=0,\ \ y=0.$$

Példa: (saját)

Oldjuk meg kétféleképpen a $2x^2+xy-7=0$ egyenletet.

1. megoldás

Az egyenletet szorzattá alakítjuk, méghozzá oly módon, hogy kiemelünk x-et:

$$x(2x+y)=7.$$

A bal oldalon egy szorzatot látunk, a jobb oldalon pedig egy természetes számot. A 7-et kétféleképpen tudjuk szorzatként felírni: 7=1*7, és 7=-1*-7. Tehát 4 megoldást kapunk, melyek a következőképpen írhatók fel:

1) $x=1$, $2x+y=7$, amiből $x=1$, $y=5$.
2) $x=7$, $2x+y=1$, melyből $x=7$, $y=-13$
3) $x=-1$, $2x+y=-7$, azaz $x=-1$, $y=-5$
4) $x=-7$, $2x+y=-1$, $x=-7$, $y=13$

2. megoldás:

Ennél a megoldásnál a másodfokú egyenlet megoldó képletét fogjuk használni, melyet x-re, mint ismeretlenre írjuk fel:

$$x_{1,2}=\frac{-y\pm\sqrt{y^2+56}}{4}$$

Kell, hogy a diszkrimináns négyzetszám legyen, azontúl a számlálóban szereplő kifejezésnek oszthatónak kell lennie 4-gyel. Keressük tehát az összes y-t, mely kielégíti ezeket a feltételeket.
$y^2+56=z^2$ (z tetszőleges egész szám), tehát négyzetszámokat keresünk 56 különbséggel. Rövid próbálkozás után kiderül, hogy két olyan négyzetszám-pár van, melyek különbsége 56, a (25, 81) és a (169, 225)számpár (a keresést egyszerűsíthetjük, ha az egyesek helyén álló számokat nézzük; tudjuk, hogy négyzetszám 0, 1, 4, 5, 6, 9 végű lehet, tehát a keresett két szám kisebbikének 0, míg a másiknak 6, vagy a kisebbnek 9, míg a nagyobbnak 5 a vége, hisz így lesz 6-ra végződő szám a különbségük).

1) $y=\sqrt{25}=5$. Behelyettesítve a megoldó képletbe, megkapjuk x mindkét értékét, ebben az esetben $x_1=1$, $x_2=-14/4$ adódik, amiből megoldásként tehát x=1, y=5 könyvelhető el.
2) $y=\sqrt{25}=-5$. Ekkor $x_1=14/4$, $x_2=-1$, tehát a második megoldás x=-1, y=-5.
3) $y=\sqrt{169}=13$. Ebben az esetben $x_1=1/2$, $x_2=-7$, megoldás ennél az esetnél: x=-7, y=13.
4) y=-13. Ekkor $x_1=7$, $x_2=-1/2$, a negyedik megoldás tehát x=7, y=-13.

Láthattuk tehát, hogy a kétféle megoldás pontosan ugyanazokat az eredményeket szolgáltatta.

Példa: [4]/100

Keressünk olyan kétjegyű egész számot, amely egyenlő a tízesek helyén álló számjegy köbének és az egyesek helyén álló számjegy négyzetének az összegével.

Jelöljük a tízesek helyén álló számjegyet a-val, az egyesek helyén állót pedig b-vel. Ekkor a feladatot a következő diofantikus egyenlettel írhatjuk fel:

$$10a+b=a^3+b^2$$

$$b^2-b+a^3-10a=0$$

Ötlet: A másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével b-t kifejezzük:

$$b_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4(a^3-10a)}}{2}$$

A gyökjel alatt négyzetszám kell, hogy álljon, tehát $1-4a^3+40a=u^2$ (u valamely természetes páratlan szám). Ha u páros lenne, akkor a számlálóban páratlan szám állna, ami nem lenne osztható a nevezőben szereplő 2-vel, így u mindenképp páratlan szám. Tudjuk, hogy a eleme [1,9]-nek, megvizsgáljuk, a mely értékeire kapunk páratlan négyzetszámot. a=4, 5,…, 9-re negatív számot kapunk, ami nem lehet négyzetszám, a<4 esetén csak az a=2 esetben kapunk páratlan négyzetszámot, 49-et. a=2-t a megoldóképletbe helyettesítve megkapjuk, hogy $b_1=4$, $b_2=-3$. A keresett kétjegyű szám tehát 24.

Példa: [3]/ 125

Egy sakkversenyen két hetedik osztályos és néhány nyolcadik osztályos tanuló vett részt. Minden résztvevő mindenkivel egy mérkőzést játszott. A két hetedik osztályos együtt szerzett 8 pontot, a nyolcadik osztályosok pedig mindnyájan egyenlő számú pontot szereztek (a versenyen résztvevők 1 pontot kapnak, ha megnyerik a mérkőzést, és $\frac{1}{2}$ pontot, ha döntetlen játszmát játszanak). Hány nyolcadik osztályos vett részt a versenyen?

Legyen n a nyolcadik osztályosok száma, m pedig a bármelyikük által elért pontok száma. Ebben az esetben a verseny összes résztvevője által elért pontok száma mn+8. Ez a szám egyenlő a lejátszott mérkőzések számával, mert minden mérkőzés alkalmával pontosan 1 pont születik. Minthogy a verseny résztvevőinek a száma n+2, és mindegyik 1-1 mérkőzést játszott a többi n+1 résztvevővel, ezért a résztvevők által lejátszott összes mérkőzések száma

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

(az (n+2)(n+1) szorzatban minden mérkőzés kétszer szerepel). Ily módon azt kapjuk, hogy

$$mn+8=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

illetve a megfelelő átalakítások után

$$n(n+3-2m)=14.$$

Itt n egész szám; a a zárójelben lévő számok szintén egész számok (mert m vagy egész, vagy olyan tört, amelynek a nevezője 2).
Minthogy n osztója 14-nek, ezért n a következő számok valamelyikével egyenlő: 1, 2, 7, 14.
Az n=1 és n=2 lehetőséget ki kell zárnunk, mivel ebben az esetben a résztvevők száma nem lehetne 4-nél több, és így a két hetedik osztályos nem szerezhetne együtt 8 pontot. Marad tehát n=7 és n=14.
Ha n=7, akkor 7(7+3-2m)=14; m=4.
Ha n=14, akkor 14(14+3-2m)=14; m=8. Tehát a nyolcadikosok száma 7, vagy 14.

Irodalomjegyzék:

1. Freud Róbert-Gyarmati Edit: *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000

2. Waclaw Sierpinski: *200 feladat az elemi számelméletből (Középiskolai szakköri füzetek),* Tankkönyvkiadó, Budapest, 1968

3. D. O. Skljarszkij - N. N. Csencov - I. M. Jaglom: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, Aritmetika és algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967

4. *Érdekes matematikai gyakorló feladatok III*. *(Kömal 1904-14),* Tankönyvkiadó, Budapest, 1964