A diákok motiválása a matematikával

- ezen belül is az analízis elemeivel -

a matematika tanulására

SZAKDOLGOZAT

A dolgozatot készítette: Szemes Péter

Témavezető: Somfai Zsuzsa

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematika Alapszak Tanári Szakirány

2010

0 Bevezetés:

A matematikai analízis rengeteg matematikai problémának képezi az alapját. Minden természettudományi szakon tanítják, sőt a társadalomtudományokban is szerepet kap. Egy egyetemi hallgatónak nem okoz meglepetést, hogy hangsúlyozzák a tárgy fontosságát, hiszen gyakorlati alkalmazásoknál (például fizikai, kémiai laboratóriumi munkáknál, matematikai problémák megoldásánál) igen gyakran előkerül. Mit gondolhat róla azonban egy elsős egyetemista, aki először találkozik magával a tárggyal, és vajon mennyire érzi fontosságát egy középiskolai tanuló?

Ahhoz, hogy matematika tanárként közelebb vigyük a fiatalokat az analízishez, mindenekelőtt tisztázni kell, mit is takar ez a szó. Tisztázni kell, hogy mivel foglalkozik, mi a célja, azt hogyan valósítja meg, és hasznos egy kis történelmi áttekintés, amiből megtudhatják mi hívta életre. Mindezekből már beláthatják, hogy nem légből kapott dolgokról van szó, hanem nagyon komolyan megalapozott rendszer ez, egy hasznos és érdekes világ. Mindezek mellett még nagyon fontosnak tartom, hogy semmiképp sem az anyag nehézségét kell a diákoknak hangsúlyozni, hanem megértetni lehetőleg mindenkivel, hogy a matematika (és ezen belül is az analízis) egy külön nyelv, amin meg kell tanulni beszélni. Meg kell tanulni az alapszavakat (matematikai jelölésrendszer, alapfogalmak) és az alapvető nyelvi szabályokat (axiómák és a logika alapjai).

Mind a középiskolai, mind az egyetemi tanulmányoknál fontos, hogy ezekkel tisztában legyen az ember. Természetesen középiskolában inkább a szemléleti oldal a fontos, az alapfogalmak megalapozása, tisztázása, ezek begyakorlása különböző feladatokkal, míg egyetemen az egész rendszer gondos megalapozása, majd fokozatos felépítése.

A szakdolgozat célja bemutatni (dióhéjban) az első éves analízis anyagát, és fejezetenként a hozzá kapcsolódó középiskolai anyagot, feladatokat, majd ezek után olyan módszert (szemléletet, feladatokat) találni, mely kellőképpen felkészíti a tanulókat az egyetemi matematikára. Mindezt természetesen a kellő motiváció megalapozásával, hiszen ez elengedhetetlen feltétele egy jó hangulatú - és éppen ezért eredményes és mély - tanulási folyamatnak. Itt elsősorban matematika tagozatos, faktos diákok motiválásáról van szó, hiszen például magyar tagozaton nem biztos, hogy túl jó ötlet volna ilyen mélységeiben tárgyalni a matematikát.

A „középiskolai alkalmazások” résznél a Sokszínű Matematika tankönyvet veszem alapul, az abban leírtakhoz igazodva teszem azon kijelentéseket, hogy mely anyagrész melyik évfolyamhoz tartozik, hol kerül elő.

0.1 Analízis – mint szó

Analízis:

A szó görög eredetű. Jelentése "elemzés, részekre bontás". Olyan eljárás, amellyel valamely egészet (tárgyat, jelenséget stb.) gondolatban részeire bontunk a megismerés céljából.

Matematikai analízis:

Az analízis vagy függvénytan a matematika egyik részterülete, amely a függvények vizsgálatával (analízisével) foglalkozik.

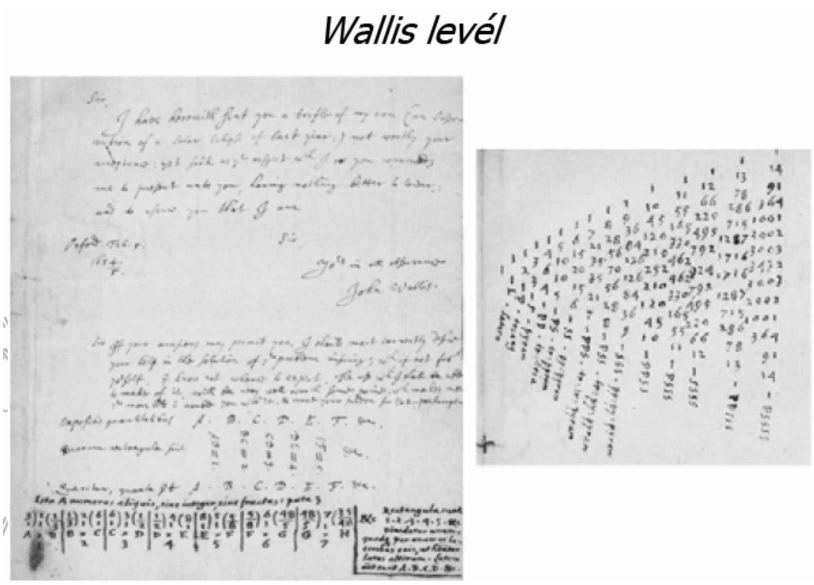
„Fő területei például a numerikus-, komplex-, és a valós analízis, ezen belül a differenciálszámítás, az integrálszámítás és a differenciálegyenletek elmélete; a metrikus terek elmélete és általában a topológia bizonyos ágai, az analitikus rendszerelmélet, a funkcionálanalízis."

/forrás: Wikipédia/

0.2 Az analízis története

Analízis:

Az első, az analízis témaköréhez kapcsolódó kérdések a kutatók szerint az i. e. V. században bukkantak fel. Talán legelőször a kör négyszögesítésének problémája merült fel, majd a mindenféle görbék által határolt idomok területének meghatározása. Ezek a kérdések olyannyira feladták a leckét, hogy a 17. századi nem is sikerült egy jól kidolgozott, általános rendszert kialakítani.
Az ókorban Eudoxosz (i.e. 408-355) használt először egy olyan

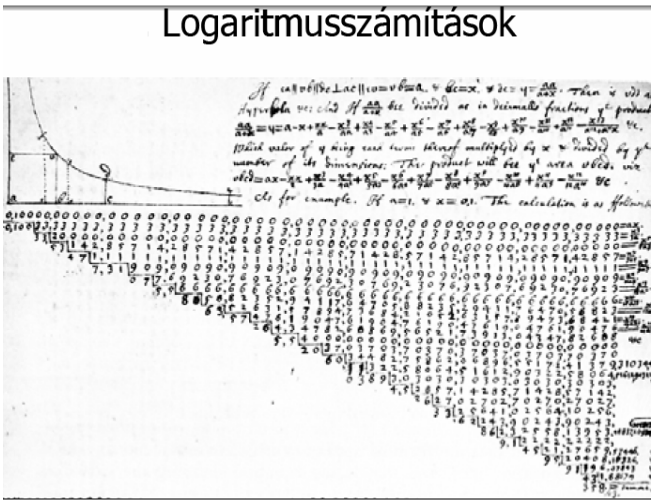


1.kép

megközelítést, szemléletet, mely később az analízis alapvető szemléletévé vált. Nevezetesen ahelyett, hogy konkrét véges értékekből indult volna ki, azt mondta, hogy közelítsük a területeket tetszőleges pontossággal.

Ezt Arkhimédész egészítette ki azzal, hogy ha alulró és felülről is becsülünk egy területet egy „végtelenhez tartó" sorozattal, akkor ha ezen sorozatok összegei ugyanahhoz a számhoz tartanak, akkor a terület pont ez a szám.

Nagyon sokáig aztán nem volt előrelépés eben a témában, míg a 17. században európai matematikusok elkezdték vizsgálni és leírni a mozgás és általában a változás jelenségeit matematikai formulákkal. Ez újra szükségessé tette az előbb említett problémák újratárgyalását. A kor egy nagy előrelépése volt, hogy általánossá vált a derékszögű koordinátarendszer használata, mely lehetővé tette a geometriai problémák algebrai úton történő megoldását. John Wallis (1616-1703) végtelen sorok felírásának segítségével már kimutatta, hogy az x^n görbe alatti terület x^{n+1} / n+1 minden pozitív egész kitevőre (az első kilenc esetet megvizsgálta, majd a többire általánosított). Ezen eredmények azonban igen sok számolása és energiába kerültek (lásd például első kép). Newton is foglalkozott a témával, ő az n= (-1) esetet vizsgálta (vagyis az $x^{n-1} = \frac{1}{x}$ esetet, lásd második kép).



2.kép

Innentől kezdve aztán rohamos fejlődésnek indult a matematika ezen ága, és a mai napig az egyik legmeghatározóbb a természettudományok terén.

1. Az első éves analízis áttekintése:

1.1 Alapfogalmak

(Logikai alapfogalmak, halmazok, valós számok)

Annak megértéséhez, hogy az analízis tárgyalását miért fontos (vagy miért lenne fontos) a logikával kezdeni, vagy hogy miért kell egyáltalán foglalkozni vele, tisztáznunk kell, mivel is foglalkozik a matematika. Természetesen a matematika kialakulásakor a természetben megfigyelt jelenségek leírása volt a cél, azonban ma már sokszor a fizikai jelenségektől teljesen elszakadt, absztrakt dolgokat vizsgál. Ma már azt mondhatjuk, hogy a matematika egy formális nyelv. Egy alapra (axiómarendszerre = általánosan elfogadott igazságokra) épülő világ, ahol az alapigaságok segítségével további igazságokat mondunk ki, bizonyítunk be (ezeket nevezzük tételeknek).
A tételek bizonyítása a matematikai logika segítségével történik.

„A ***logika*** *az érvényes következtetések és bizonyítások… tudománya."*

/Wikipédia/

Ezen logika felépítése is alapvetően a tapasztalatokhoz köthető (vagyis úgy van felépítve, hogy a leírt tételek minél jobban alkalmazkodjanak a fizikai valósághoz).

A matematikai logika fogalmai közül az első maga a fogalom. A matematika nyelvén a fogalmak az alapok, melyeket definiálunk, hogy később egy átlátható, logikus rendszert tudjunk építeni. A következő fogalom az állítás. Azért fontos tisztázni, mit jelent az állítás, mert nyelvtanilag, vagy a hétköznapi nyelven mást értünk alatta. Matematikában (ezen belül is a két értékű logikában) azon kijelentések, melyekről egyértelműen eldönthető, hogy igaz-e vagy hamis, állításoknak nevezzük.
Példák:
Állítás: A Diána egy női név.
Nem állítás: Holnap esni fog az eső.

Az állítások között a logikai műveletek teremthetnek kapcsolatot. Ezek segítségével összetett állításokat kaphatunk. Ezen műveletek a **konjukció**, a **diszjunkció**, a **negáció**, az **implikáció**, valamint az **ekvivalencia**.

A továbbiakban legyen példaként két állítás, amin bemutatjuk a műveleteket:

A: Esik az eső.

B: Elmegyünk kirándulni.

A **konjukció** egy olyan összetett állítás, ami akkor igaz, ha mindkét állítás igaz.

Esik az eső és elmegyünk kirándulni.

Ez az állítás csak akkor igaz, ha mindkét része igaz, vagyis tényleg esik, és ennek ellenére tényleg elegyünk kirándulni. Minden más esetben az állítás hamis, függetlenül attól, hogy esetleg az egyik része igaz (pl. esik, de nem megyünk el).

<u>Jele:</u> $A \wedge B$

A **diszjunkció**val képzett állítás akkor igaz ha két állítás közül legalább az egyik igaz.

Példánkkal élve:

Esik az eső vagy elmegyünk kirándulni.

Itt már nem elég a nyelvtani tudásunk és általános logikai érzékünk, hiszen ezt az állítást több féleképpen is lehet érteni. A diszjunkció úgynevezett „megengedő vagy”-ot jelent, ami azt jelenti, hogy az állítás igaz, ha esik, ha kirándulni megyünk, esetleg mindkettő. Ha nem esik, de kirándulni sem megyünk, csak akkor hamis.

A hétköznapi életben használatos még az úgynevezett „kiegészítő vagy” és a „kizáró vagy”. Az első úgy értendő, hogy pontosan az egyiket csináljuk, vagyis vagy esik és nem megyünk kirándulni, vagy nem esik és megyünk (általában ezen példához ezt rendeljük hozzá), a „kizáró vagy” esetében pedig maximum az egyik teljesülhet, vagyis ha esik akkor semmiképp nem mehetünk kirándulni, ha pedig kirándulunk akkor semmiképp nem eshet (jó lenne☺).

<u>Jele:</u> $A \vee B$

A **negáció** a tagadás. Egy A állítás negációján a „nem A”, vagyis az „A hamis” állítást értjük. Esetünkben az *esik az eső* negációja egyszerűen az, hogy az *esik az eső állítás hamis*, vagyis *nem esik az eső.*

A köznapi nyelv használatában azonban vannak azonban olyan esetek, amikor a tagadást másképp értelmezik. Például, ha azt állítom, hogy *Süt a nap* , akkor ez nem az előző állítás tagadása, még ha feltesszük is, hogy ha süt a nap, akkor nem esik az eső. Ennek oka, hogy a Süt a nap tagadása, a Nem süt a nap, vagyis felhős az ég, de ez nem feltétlenül egyenlő azzal, hogy esik az eső. Az olyan állításokat, amelyek egy A állítás igazságát kizárja, cáfolatnak nevezzük. Pontosabban tehát a negáció egy állítás pontos tagadását jelenti.
Jele: $\neg A$

Az **implikáció** azt jelenti, hogy egy állításból következik egy másik állítás. Nevezhetjük ezt a kapcsolatot „ha… akkor" kapcsolatnak is, hiszen pl. a következőt jelenti:
Ha esik az eső, akkor nem megyünk kirándulni"
Természetesen ez még nem jelenti azt, hogy ha nem esik, akkor megyünk, hiszen ez az állítás csak akkor hamis, ha ez első fele (*Ha esik az eső*) igaz, és a második (*nem megyünk kirándulni*) hamis. Vagyis ha már az első fele nem teljesül, akkor abból nem következik semmi, tehát bármit mondhatok, az állítás igaz marad. Ezt végiggondolva könnyen látható, hogy a „ha A , akkor B" kapcsolat egyenértékű a „nem A, vagy B" kapcsolattal, hiszen ha azt mondom, hogy *Nem esik az eső vagy nem megyünk kirándulni* csak akkor hamis, ha mindkét állíts hamis, vagyis, ha esik és mégis kirándulni megyünk.
Az implikció jele: $\Rightarrow$

A logikai műveletek közül már csak az **ekvivalencia** hiányzik.
Az ekvivalencia két állítás egyenértékűségét fejezi ki, vagyis azt, hogy az egyik állítás pontosan akkor igaz, ha a másik is. Szavakban előző példánk esetén úgy fogalmazhatjuk meg, hogy *Akkor és csak akkor megyünk kirándulni, ha nem esik az eső.* Ez azt jelenti, hogy vagy esik és nem megyünk, vagy nem esik, ekkor azonban mindenkép megyünk. Ha nem ezen esetek állnak fenn, akkor az állítás hamis.
Az ekvivalencia jele: $\Leftrightarrow$

Itt érdemes még megjegyezni (később hasznos lesz), hogy a implikációt és az ekvivalenciát úgy is kifejezhetjük, hogy A elégséges feltétele B-nek ($A \Rightarrow B$), illetve A szükséges és elégséges feltétele B-nek ($A \Leftrightarrow B$). A tételek megfogalmazásánál, bizonyításánál gyakran így fordulnak elő.

Kvantorok

Úgy gondolom, mindenképp fontos szót ejteni a kvantorokról, hiszen általában ez okoz nehézséget egy újdonsült egyetemistának. Nem is maga a kvantor fogalom megértése, megtanulása, hanem a kvantorok alkalmazása és természetessé válása. Ez nem is olyan egyszerű feladat. Ha középiskolában valaki nem találkozik ezzel a jelölésrendszerrel, bizony meglepődik első analízis óráján, hogy két táblát már teleírt az oktató, de egy szót sem írt még le. Pedig nem is a jelölés nehézsége, mint inkább furcsasága, és szokatlansága az, amit szokni, gyakorolni kell. Talán tényleg szemléletes lehet, ha az ember nyelvként (is) tanítja a matematikát, mert akkor nem ijednek meg a diákok, hanem megértik, hogy vannak bizonyos „szavak", „írásjelek", melyeket meg kell tanulni.

A kvantorok szükségességét talán akkor érezzük a legjobban, mikor általánosítani szeretnénk. Ha nem csak egy konkrét állítást, hanem egy úgynevezett nyitott mondatot szeretnénk megfogalmazni.

Megint csak szemléleti oldalról érdekes lehet megfigyeltetni a diákokkal, hogy egyre inkább térünk át fizikai értelmezésből valami formális világba, bár még nem rugaszkodtunk el teljesen. Például ha beállítok egy birkanyájat egy sorba, és azt mondom, hogy *Az x. birka fekete*, akkor ezen állítás igazságtartalma természetesen attól függ, hogy az x helyére milyen számot teszek. Persze felvetheti a diák, hogy ennek semmi értelme, hiszen abból az állításból, hogy *Az x. birka fekete* még semmit nem tudunk meg, azonban itt is egyfajta látásmód átadása a lényeg, aminek később igen nagy hasznát veheti.

A továbbiak megkönnyítése érdekében (ha tanulókról van szó, akkor pedig a jelölésrendszer szoktatása végett) legyen az előző mondat A(x), amiben x a változó. Na most, ha minden birkánk fekete, akkor mondhatom, hogy minden x-re az állítás igaz. <u>Jelölésben</u>: $(\forall x)\ A(x)$. Az ilyen kvantort univerzális kvantornak nevezzük.

Ha van fekete birkánk (mindegy mennyi, de legalább egy), akkor azt mondjuk, hogy létezik x, melyre A(x) igaz. <u>Jelölésben</u>: $(\exists x)\ A(x)$. Ez utóbbinak neve egzisztenciális kvantor. A jelölésben a $\forall$ - jel a német alles (= minden), míg a $\exists$ a német egzist (= létezik) szóból ered.

Középiskolai alkalmazások:

Az analízis elemeinek alapfogalmai 10. osztály elején kerülnek elő. Mindjárt meg is jegyezném, hogy nem most találkoznak a tanulók először analízissel, hiszen már 9. osztályban megismerkednek a függvény és a halmaz fogalmával.
Ezen év elején az implikáció, és az ekvivalencia kerül bevezetésre. A szavak magyarázatán túl egy-két példával szemlélteti a tankönyv a szükséges, a szükséges és elégséges, valamint az elégséges feltételeket. Később - 12. osztályban - aztán újra előkerülnek a logika fogalmai és a logikai műveletek. Ez eddigi ismereteken túl a kijelentés, a konjukció, a diszjunkció, a negáció fogalmai, valamint az implikáció és az ekvivalencia műveletei kerülnek bevezetésre.
Úgy gondolom, a könyvben taglaltak elég érthetőek és jól átláthatóak , és ha az ember a későbbiekben sem hanyagolja el ezen fogalmakat, akkor az egyetemi életben sem okoz különösebb problémát. Aki középiskolai évei alatt aktívabban foglalkozik matematikával, mindenhol ezen logikai alapokkal és logikai műveletekkel találja magát szemben, éppen csak tudatosítani kell, hogy a szemlélet, a gondolkodásmód, amit a sok-sok példa megoldásaként elsajátít, azt éppen a fent említett fogalomrendszer írja le.

A	B	$A \wedge B$
I	i	i
I	h	H
H	i	H
H	h	H

3.kép

Tán a legismertebb logikai példák az igazmondók és a hazugok (lovagok és lókötők stb.) feladatai. Ha az ilyen típusú feladatok után tisztázzuk azt is (például szemléletesen egy igazságtáblázattal – 3.kép), hogy a feladatban milyen logikai fogalmak és következtetések szerepelnek, akkor elég gyorsan elsajátítható a szemlélet és a gondolkodásmód bárki számára.

1.2 Bizonyítási módszerek.

Három általános, és nagyon gyakran alkalmazható módszer egy-egy tétel (matematikai következtetés) helyességének bizonyítására. Ezen módszerek készség szintű ismerete elengedhetetlenül szükséges bármely matematikával foglalkozó ember számára. Szerencsére egy kis türelemmel, kitartással mindenki számára elsajátítható, hiszen a legtöbbször kaptafa szerűen alkalmazhatók.

Direkt bizonyítás

Egyszerű levezetés. Helyes következtetések helyes tételhez vezetnek.

Például:
Ha x páros szám, akkor 5x is az.
Bizonyítás: $\frac{5\times x}{2} = 5\times\frac{x}{2}$, ahol $\frac{x}{2}$ egész szám (a feltevés miatt), így ötszöröse is egész, vagyis az állítás igaz. Ha végiggondoljuk logikai műveletekkel is, itt az implikációt /„ha…, akkor” ($\Rightarrow$) kapcsolatot/ alkalmaztuk.

Indirekt bizonyítás

Az indirekt bizonyításnál feltesszük az állítás ellenkezőjét, és ebből próbálunk meg ellentmondásra jutni. Ebben az esetben ugyanis az állítás ellenkezője nem lehet igaz, vagyis az állítás igaz. Logikai jelekkel: ha $\neg$ A hamis, akkor A igaz (pont így definiáltuk a negációt).
Bizonyítandó például, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.
Ehhez tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális, vagyis felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol a tört már nem egyszerűsíthető. Ekkor

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$2 = \frac{p2}{q2}$$

$$2q^2 = p^2$$

vagyis:

$$2|p^2 \Rightarrow 2|p \Rightarrow 4|p^2 \Rightarrow 2|q^2 \Rightarrow 2|q.$$

Tehát p és q is páros, ami ellentmondás.

Teljes indukció (indukciós feltevés, indukciós lépés)

Teljes indukcióról beszélünk, ha egy állítás (nyitott mondat) bizonyításához a nyitott mondat egyik (általában legkisebb) elemére (mondjuk A_1-re) bemutatjuk, hogy az állítás igaz, majd feltesszük, hogy A_n–re is igaz (ez lesz az indukciós feltevésünk), és megmutatjuk, hogy ha A_n-re igaz, akkor A_{n+1}-re is az. Tehát $A_n \Rightarrow A_{n+1}$. Ez azért jó, mert ha $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ igaz és A_1-re igaz, akkor igaz A_2-re, de az implikáció miatt akkor igaz A_3-ra és így tovább a végtelenségig. Vagyis ezen módszer segítségével végtelen sok állítás igazságát beláthatjuk.

Középiskolai alkalmazások:

Ezen bizonyítási módszerek nem mindegyike szerepel külön anyagként a középiskolában, viszont gyakran előkerül.
A direkt és indirekt bizonyítás (a logikai műveletekhez hasonlóan) a gyakorlatban kerül gyakran elő, így példákon keresztül sajátítható el leginkább. Ezen esetekben maga a módszer nem nehéz, könnyen átlátható, az azonban, hogy tudja az ember, mely esetekben hogyan álljon neki egy-egy bizonyításnak, már gyakorlatot igényel.
A teljes indukció módszere kicsit más. Itt előbb meg kell érteni, min alapul a bizonyítás, majd ezután lehet begyakorolni, elsajátítani. Talán ezért is csak a 12. osztályos törzsanyagba került bele.

1. Feladat (12.osztály):

Bizonyítsuk be, hogy az első n természetes szám összege: $\frac{n(n+1)}{2}$.

1. Megoldás:

Nézzük meg az állítást n = 1 - re. $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, vagyis az állítás n = 1 - re igaz. Tegyük fel, hogy igaz az állítás n-re és vizsgáljuk meg ekkor n + 1 -re.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{(n)(n+1)}{2} + (n+1)$$

/az indukciós felevésből/

$$\frac{(n)(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n)(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

1.3 Halmazok

Ha a halmazokról teszünk említést, a legtöbb embernek megjelenik valami kép a fejében, esetleg egy-két konkrét példa, hogy miket és hogyan lehet halmazba rendezni. Ha azonban megkérdezünk valakit, mit is jelent egészen pontosan a halmaz, nem sok eséllyel ad kielégítő választ. Mindenképpen valamely dolgok összességéről beszélünk, valamiféle csoportosításról. Viszont ezen megnevezések távolról sem nevezhetők pontos definíciónak. Azt aki ilyesmire törekszik, csalódás kell érje, mert a halmaz alapfogalom, így nem tekintjük definiálandó dolognak. Körülírni tudjuk, példákat is adhatunk meg, szemléletes módon ábrázolhatjuk is őket például mindenféle síkbeli alakzatokkal, azonban pontos definíciót nem adhatunk.

„A halmaz a matematika egyik alapfogalma, melyet leginkább úgy tudunk körülírni, mint bizonyos egymástól különböző dolgok „összességét", de tekintettel arra, hogy alapfogalomról van szó, így nem tartjuk definiálandónak. A halmazok általános tulajdonságaival a matematika egyik ága, a halmazelmélet foglalkozik. Annak ellenére, hogy ez a tudományág csak a 19. században fejlődött ki, mára a modern matematika minden ágának ez a tudományág (a matematikai logika mellett) az alapja, mivel minden, a matematika által vizsgált objektum végső soron halmaz. A matematikának ez a jelenleg is uralkodó „halmazelméleti" paradigmája elsősorban a huszadik században működő matematikustársaság, a Bourbaki-csoport munkásságának köszönhető. A halmazelméleti ismeretek az elemi iskolai matematika részét is képezik.

A halmazelmélet eredeti és korai formája, a naiv halmazelmélet, ellentmondásosnak bizonyult. Ezért a matematikusok létrehoztak más, különféle axiómarendszerekre épülő, ún. axiomatikus halmazelméleteket is."

/Wikipédia/

A halmaz megadása után azt kell tudnunk, hogy bármely x eleme egy halmaznak, vagy nem. Ezzel viszont egyértelműen tudunk halmazokat definiálni. Halmazok jelöléseként leggyakrabban a kapcsos zárójelen belüli felsorolást használjuk. Pl.: $A = \{1,2,3,4,5\}$, de megadhatjuk leírással is $B = \{n: n \text{ páros számok}\}$. Tehát magukat a halmazokat az ABC nagy kezdőbetűivel jelöljük, míg az elemeket felsoroljuk, vagy „n:" után leírjuk, mely n-ekre gondoltunk. Ha egy x eleme egy halmaznak, azt így jelöljük: $x \in A$, ha pedig nem eleme:

$x \notin A$. A megadott példára: $1 \in A$, de $1 \notin B$. Fontos tudni, hogy attól, hogy egy elemet többször felsorolunk, a halmaz nem változik, és nem is lesz több eleme. Érdemes megemlíteni, hogy halmaznak lehet halmaz is az eleme.

Halmazok közötti műveletek:

Két halmazt egyenlőnek mondunk, ha elemei megegyeznek, vagyis ha
$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.
Értelmezzük halmazok összeadását (unióját). Az unió két (vagy több) halmaz összességét jelenti, vagyis az összes olyan elem halmazát, amelyet bármelyik halmaz tartalmazott. Jelekkel: $A \bigcup B = \{x: x \in A \text{ vagy } x \in B\}$.
A metszet az a közös elemek halmaza. $A \bigcap B = \{x: x \in A \text{ és } x \in B\}$
A különbség B azon elemek halmazát jelenti, melyek benne vannak A-ban, de B-ben nincsenek. Vagyis $A \backslash B = \{x: x \in A \text{ de } x \notin B\}$. Azonnal látható, hogy ez ekvivalens az $A \backslash A \bigcap B$ kifejezéssel.
Azt a „teret”, vagyis azt a legbővebb halmazt, ahol magukat a halmazokat definiáljuk, illetve ahol a műveleteket végezzük, alaphalmaznak, vagy univerzumnak nevezzük, és U-val jelöljük. Ezen alaphalmazon értelmezhetjük a komplementer halmazt.
A komplementer az alaphalmaz azon elemeinek halmaza, melyek az adott halmaznak nem elemei. Egyszerűbben A komplementere azon elemekből áll, melyekre $x \notin A$. Jele: $\overline{A} = \{x: x \notin A\}$.

Középiskolai alkalmazások:

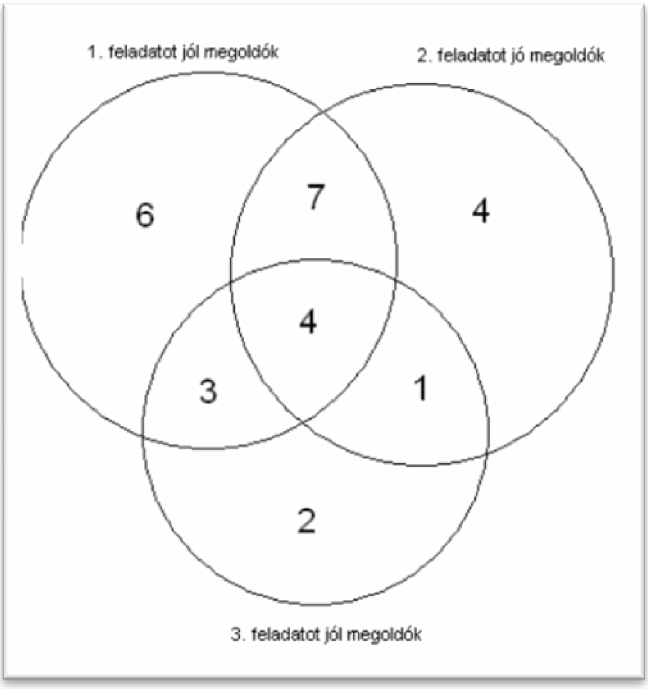
Kilencedik osztályban a kombinatorika rész elején kerül először szóba. Tisztázottak a halmaz elemei, elemeinek száma, az üres halmaz és a végtelen halmaz (pontosabban itt csak a megszámlálhatóan végtelen halmaz), halmazok közötti egyenlőség, a részhalmaz és a valódi részhalmaz fogalmai.
A legtöbbször vagy számhalmazokkal, vagy síkbeli ponthalmazokkal foglalkozunk, így szemléletes ha Venn-diagrammal, vagy síkbeli alakzatokkal szemléltetünk egy-egy példát. Így sokkal átláthatóbbá válik egy feladat, könnyebben érthető a halmaz fogalma. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy más esetekben is beszélhetünk halmazról, bármik legyenek is az elemei, és bármely módon is legyenek felsorolva.

2. Feladat (9. osztály):

Egy osztályban 30 tanuló írt matematika dolgozatot, amelyben három feladatot kellett megoldani. Az 1. feladatot 20, a másodikat 16, a harmadikat 10 tanuló oldotta meg hibátlanul. Az elsőt és a másodikat 11, az elsőt és a harmadikat 7, a másodikat és a harmadikat 5 tanuló oldotta meg jól. Mindhárom feladatot mindössze 4 tanulónak sikerült jól megoldania. Hányan nem tudták egyiket sem megoldani?

2/a Megoldás:

A szövegben lévő sok adat hatására könnyen elveszhetünk. Ha azonban ábrázoljuk az adatokat, sokkal áttekinthetőbbé, érthetőbbé válik a feladat: A Venn-diagrammról (4.kép) azonnal leolvashatjuk, hogy összesen 27 diáknak sikerült legalább egy feladatot jól megírnia, vagyis a megoldás:
30-27 = 3.



4.kép

2/b Megoldás:

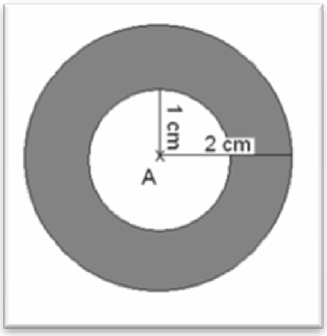
Egy másik lehetőség, ha a – 9. osztályban egyébként már tanított – szita formulát, vagy logikai szitát alkalmazzuk. Ebben az esetben összeadjuk azon emberek számát, akik az első, második vagy harmadik feladatot jól oldották meg, majd ebből kivonjuk azok számát, akik pontosan két feladatot oldottak meg (hiszen őket kétszer számoltuk), végül hozzáadjuk azok számát akik, mindhármat jól oldották meg (őket háromszor számoltuk az elején, majd háromszor ki is vontuk). Ekkor tehát megkapjuk azok számát, akik legalább az egyiket megoldották és ráadásul jól:

$$(20 + 16 + 10) - (11 + 7 + 5) + (4) = 27.$$

Vagyis azok száma, akik egyet sem tudtak jól megoldani:
30-27 = 3.

3. Feladat (9. osztály):

Melyek azok a pontok a síkon, melyek egy adott A ponttól legalább 1 cm, legfeljebb 2 cm távolságra vannak?



5.kép

3. Megoldás:

Rajzoljuk le az 1 cm-re és a 2 cm-re lévő pontok halmazát (két kört). Ebből látszik már, hogy a megoldás a két kör közötti pontok halmaza (a körökkel együtt, lásd: 5.kép).

1.4 Valós számok

Néhány szót ejtenék a valós számokról is. Mivel később a függvényeknél igen gyakran velük dolgozunk, nem árt, ha van valami elképzelésünk, hogy kik is ők, hogyan épülnek fel, és miért pont úgy. Talán a leggyakrabban hallott meghatározás (nekem is ez jut először eszembe), hogy a racionális és irracionális számok együttvéve. Egyből adódik a következő kérdés, hogy mik a racionális és irracionális számok. A racionálisat könnyebb megfogni talán, hiszen azon számok, melyek felírhatóak két egész szám hányadosaként. Mi a helyzet az irracionális számokkal? Mondhatjuk, hogy ők a nem szakaszos tizedestörtek.

Az axiomatikus megalapozás teljesen más oldalról közelíti meg a kérdést.
Ez a módszer, már sokkal inkább a formális nyelv körébe tartozik, és első ránézésre akár gondolhatnánk, hogy a valósághoz nem sok köze van. Természetesen közelebbről megvizsgálva logikusan oly módon lett felépítve, hogy az eddigi ismereteink, és megszokott szabályaink ne vesszenek el.
Axiomatikaus megközelítésben nem definiáljuk a valós számokat, hanem (a halmazhoz hasonlóan) alapfogalomnak tekintjük, aminek azonban ki kell elégítenie néhány tulajdonságot. Ezen alaptulajdonságokat, melyeket bizonyítás nélkül elfogadunk, axiómáknak nevezzük. Bárki könnyen beláthatja, hogy ezen alaptulajdonságok éppen úgy lettek kitalálva, hogy az eddig megszokott szabályink érvényesek maradjanak.
Az axiómákat négy csoportba oszthatjuk.

Az első csoport az úgynevezett Testaxiómák.

Elnevezésének oka, hogy szeretnénk, ha számaink testet alkotnának. A test definíciója az algebra körébe tartozik, nekünk itt elég annyi, hogy számok és műveletek olyan csoportjáról van szó, ahol a testbeli számokon végzett műveletek eredményéül testbeli számokat kapunk.
Először is szükségünk lesz egy összeadás műveletre, ami kommutatív (az életben is ugyanannyit kell fizetnem, ha először a drágább pulcsiért fizetek, utána az olcsóbbért, vagy fordítva), és asszociatív is.
Ezután kell definiálnom egy nullelemet (hogy értelmezni tudjam azokat a jelenségeket, ahol elvesztem minden pénzem, ugyanannyi a kiadás mint a bevétel, stb.), majd a kivonás műveletét (mint negatív számmal vett összeget).
Ha ez is megvan, értelmezem a szorzás műveletét (nem meglepő, rengeteg példa szolgál alapjául az életből: öt darab csoki ára, öt havi fizetés, öt ugyanakkora kupac tégla, stb.), majd a már említett kommutatív és asszociatív tulajdonságot biztosítom erre is.
Itt természetesen előkerül egy egységelem szükségessége, majd a reciprok definiálása (mint egy szám, mellyel az eredetit szorozva az eredmény 1).
Ha mindezzel készen vagyunk, még kapcsolatot kell teremteni a szorzás és összeadás művelete között, amit a disztributivitással azonnal meg is tehetünk (megint csak egyszerű példát találni: kapok mondjuk karácsonyra öt éven keresztül sapkát és kesztyűt, bátym pedig öt éven keresztül karácsonyra sapkát, születésnapjára kesztyűt kap, akkor – ha nem hagyunk el semmit közben – öt év múlva ugyannyi sapkánk és kesztyűnk lesz).

A második csoport a rendezési axiómák:

Ezen szabályok is teljesen egyértelműnek tűnnek, hiszen a mindennapi életben megszoktuk őket, ha viszont nem rögzítenénk le őket, akkor nem tudnánk egyértelműen számolni, hiszen nem lennének a számaink sorba rendezve. Így például elmondhatnám, hogy van öt birkám, a szomszédnak meg csak kettő, erre azonban joggal kérdezhetné bárki, hogy miért örülök ennek annyira, az öt talán több mint a kettő? Erre a kérdésre ebben az esetben csak a fejemet vakargathatnám, és a vállamat húzogathatnám. Látszik tehát, hogy formálisan szükség van rá, még ha fizikailag teljesen egyértelműnek tűnik is (persze ha mondjuk már komplex számokról beszélünk, nem ilyen egyszerű a helyzet, ott maximum a hosszra tudunk egyértelmű rendezést).
A következő négy axióma tehát számaink sorba rendezésére hivatottak, és annak biztosítására, hogy műveleteink elvégzése után is megmaradjon ez a rendezés.
Felsorolás szinten:

$\forall a, b, c \in$ R esetén:

a < b, a > b, vagy a = b (trichotómia) ,

a < b és b < c esetén a < c (tranzitivitás),

a < b esetén a + c < b + c,

a < b esetén a - c < b - c.

A következő két csoport egy-egy axióma csupán.

Arkhimédeszi axióma:

Tetszőleges b pozitív számhoz található b-nél nagyobb n természetes szám.

Itt ha b helyett $\frac{1}{\varepsilon}$ - t írunk, akkor azt kapjuk, hogy ha ε tetszőleges pozitív szám, akkor ∃ olyan n természetes szám, melyre $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Ennek pedig fontos következménye, hogy a racionális számok mindenütt sűrűen helyezkednek el.

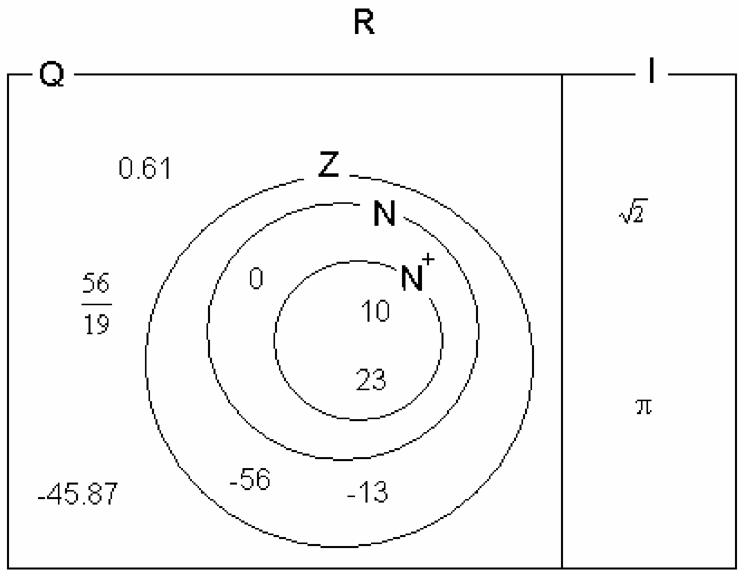
Cantor axióma:

Minden egymásba skatulyázott $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ zárt intervallumsorozatnak van közös eleme, azaz ∃ x valós szám, hogy $x \in I_n$ ∀ n-re.

Az axiomatikus megalapozás végeztével kimondhatjuk, hogy a valós számok arkhimédeszien rendezett testet alkotnak, melyben teljesül a Cantor-axióma.

Középiskolai alkalmazások:

Középiskola kilencedik osztályában már elvileg ismeretesek a számhalmazok fogalmai, már tanulták a természetes számokat, az egész számokat, a racionális és irracionális számokat és a valós számokat. Saját emlékeim szerint azonban annak ellenére, hogy már dolgoztunk vele, még korántsem tartottunk ezen fogalmak készségszintű használatánál, így talán érdemes lehet még egyszer végigfutni rajta. Nagy segítség lehet, ha számhalmazokat is Venn-diagrammon szemléltetjük (6.kép). Ez elég szemléletes, és aránylag könnyen megjegyezhető. Még egy szemléletes módszer az, ha a valós számokat a számegyenes pontjainak feleltetjük meg. Ez a módszer abban segíthet, hogy az ember elképzelje, hogy a racionális és irracionális számok mindenhol „sűrűn" helyezkednek el. A racionális számok „ugyan annyian vannak"mint az egész számok és a természetes számok, és ez a közös számosság a megszámlálhatóan végtelen számosság. Ezen módszerek a konstruktív megalapozás köreibe tartoznak.



6.kép

Célravezető még a műveletekkel párhuzamosan beszélni a számhalmazokról. Hiszen ha vesszük az egységelemet, akkor összeadással, szorzással az egész számokat kapjuk, ha bevezetjük az osztást, akkor a tört számokkal már a racionális számokat kapjuk, majd a gyökvonással az irracionálisat. Negatív szám gyökeként bejöhetnek a komplex számok is, ha már ott tart a csoport. Ha még nem, akkor is esetleg említés szintjén beszélhetünk róla. A számhalmazok ezen tárgyalási formáját azért tartom fontosnak és jónak, mert előkészíti az axiomatikus megalapozást, és egy ahhoz teljesen hasonló szemléletben tárgyalja a témát.

A gyökvonás 10. osztályban kerül elő, majd 11. osztályban a „hatvány, gyök logaritmus" fejezetnél még egyszer. Ennyi idő alatt (ha röviden újra és újratárgyaljuk a témát), van ideje a tanulóknak hozzászokni a kifejezésekhez, elsajátítani a fogalmakat és a szemléletet. Mind e közben a függvényeknél, a polinomoknál is előkerül, mikor az értékkészletet és az értelmezési tartományt vizsgáljuk. Tehát a számhalmazok témaköre is (miután az alapokat tisztázták), legtöbbször közvetett formában jön elő.

<u>4. Feladat (9. osztály):</u>

Milyen számjegy áll a $\frac{3}{7}$ tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 2004. helyen?

4. Megoldás:

Mivel $\frac{3}{7}$ racionális szám, vagy véges a tizedestört alakja, vagy végtelen hosszú, ám szakaszos. Elvégezve az osztást: $\frac{3}{7}$ = 0,4285714…, ahol a második 4-essel kezdve a számok hatosával ismétlődnek. Ebből könnyen számítható, hogy a 2004. számjegy a tizedesvessző után az 1-es.

5. Feladat (10. osztály):

a, Lehet-e két racionális szám számtani közepe irracionális szám?
b, Lehet-e kér irracionális szám számtani közepe racionális szám?
c, Lehet-e két racionális szám mértani közepe irracionális szám?
d, Lehet-e két irracionális szám mértani közepe racionális szám?

5. Megoldás:

a, Minden racionális szám felírható két egész szám hányadosaként, két tört összege is tört, és ezt elosztva kettővel is biztosan törtet kapunk.

b, Lehet, például a $\sqrt{2}$ és az 1 - $\sqrt{2}$ számtani közepe $\frac{1}{2}$, és ők maguk pedig irracionálisak.

c, Ez is lehetséges, hiszen az 1 és a 2 mértani közepe $\sqrt{2}$.

d, Keressünk olyan irracionális számokat, melyek egymás reciprokai. Ilyen például a 2 - $\sqrt{3}$ és a 2 + $\sqrt{3}$. Ezek szorzata ugyanis $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 4-\sqrt{3}^2$ = 1. Tehát lehet két irracionális szám mértani közepe racionális.

1.5 Végtelen számsorozatok

Végtelen számsorozatról akkor beszélhetünk, ha valós számokból valamilyen úton módon, egy sorozatot készítünk, és ez a sorozat végtelen hosszú, valamint az elemek sorrendje egyértelműen meghatározott. A végtelen sorozat középiskolai bevezetésén a diákok tisztában vannak már - elméletileg - a számsorozat és a függvény fogalmával. Így mondhatjuk, hogy a végtelen számsorozat a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény. Miután van valamilyen képünk a sorozatokról, adhatunk pár példát, hogyan is lehet megadni őket. Sorozatok megadhatók explicit formában, rekurzióval, de szóval is, a fontos az, hogy a megadás egyértelmű legyen.

Néhány példa explicit formára:

$$a_n = \frac{1}{n} \ ; \ a_n = \frac{n+1}{n} \ ;$$

vagy

$$(a_n) = (1,2,3,4,\ldots, n, \ldots)$$

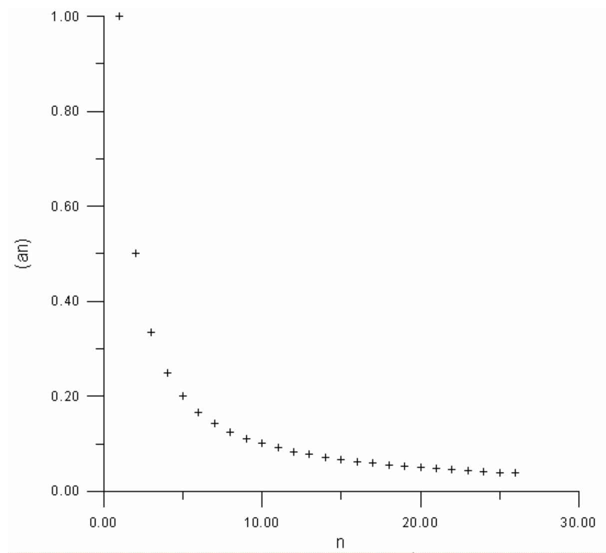
A rekurzív megadás lényege, hogy az első néhány elemet megadjuk, és a következő elemeket mindig az előző néhány segítségével határozzuk meg.

Példa rekurzív megadásra:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \text{(ún. Fibonacci-sorozat)}$$

Konvergencia, divergencia

Ahhoz, hogy megértsük a konvergencia és divergencia fogalmát, meg kell értenünk, mit jelent, hogy egy bizonyos a_n sorozat „tart” egy bizonyos „határértékhez”. Ezt szemléletesen talán úgy lehet elképzelni, hogy elkezdem gondolatban felírni a sorozat tagjait, n-nel tartok a végtelenhez (azaz egyre több és több tagot felírok vég nélkül), és figyelem, mi történik a sorozat tagjaival. Akár



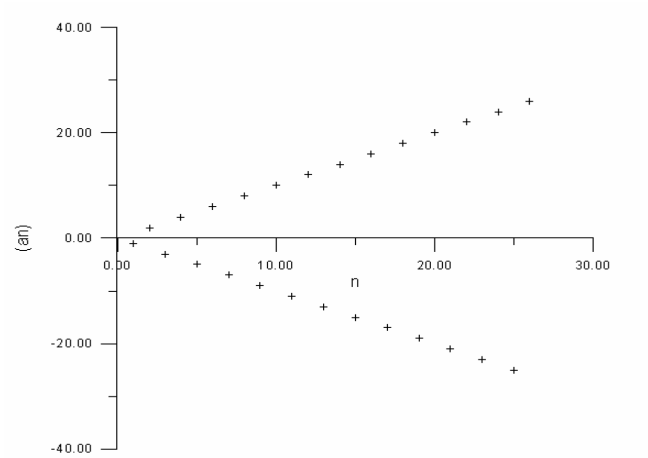
7.kép

ábrázolhatom is őket egy koordinátarendszerben, és figyelem, hogy a tagok hová tartanak (7. kép).

Az 7. kép alapján is látszik, de meg is gondolható, hogy az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat tagjai egyre kisebbek, de soha nem lesznek negatívak, így a sorozat a nullához tart, vagyis a sorozat határértéke 0. Az olyan sorozatokat, melyek egy konkrét számhoz tartanak, konvergens sorozatoknak hívjuk.

Könnyen meggondolható, hogy az előző ábrázolással hogyan is néz ki mondjuk az $a_n = n$ sorozat. Ez ugye felülről nem korlátos, és minden tag nagyobb az előzőnél, így azt mondhatjuk, hogy a sorozat végtelenhez divergál, és így divergens. Azonnal hozzá is tenném, hogy nem csak a végtelenhez (vagy mínusz végtelenhez) divergáló sorozatokat nevezzük divergensnek, hiszen vannak olyan sorozatok, melyeknek egyáltalán nincsen határértékük (ők az oszcillálva divergens sorozatok, például az $a_n = (-1)^n \cdot n$; 8 .kép)

Következik két tétel, a sorozatok határértékéről és korlátosságáról:



8.kép

Bolzano-Weierstrass tétel:

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Cauchy-kritérium

Az (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz $\exists$ N, hogy $\forall$ $n,m \geq N$ -re $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Középiskolai alkalmazások:

Említés szinten a Fibonacci-számok előkerülnek a 11. osztály elején, azonban a számsorozatok részletes taglalása csak 12. osztályban következik. Itt (a tankönyv szerint) a következőképpen definiálják:

„ A számsorozat olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete pedig a valós számok egy részhalmaza”.

Ezt természetesen sokkal könnyebb megérteni, ha mindjárt példákkal is szolgálunk. Mint már fentebb is említettem, sorozatot igen sok féleképpen definiálhatunk.

Például: legyen a sorozat az első n pozitív páratlan szám összege.

6. Feladat (12. osztály):

Írjuk fel másképp (explicit formában) a példában megadott sorozatot

6/a Megoldás:

Számítsuk ki az első néhány tagot!

n = 1,2,3,4,5 -re:

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

A tapasztalatok alapján megsejthető, hogy az eredmények sorra az n. négyzetszámok.

Bizonyítsuk sejtésünket teljes indukcióval:

n = 1 - re az állítás igaz. Tegyük fel, hogy n - re is igaz, és nézzük meg n + 1 -re.

Az első n + 1 páratlan szám összege:

$$1 + 3 + 5 + .. + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$$

/az indukciós feltevésből/

$$n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Tehát a sejtés igaznak bizonyult.

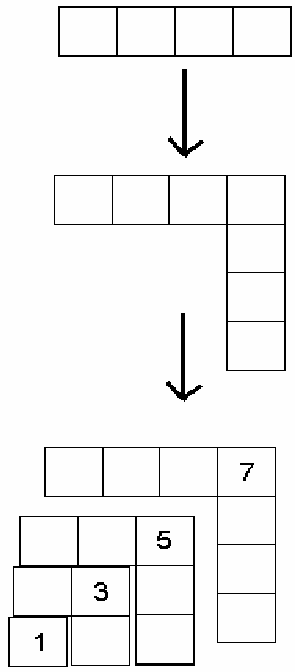
Így tehát explicit formában a sorozat:

$$a_n = n^2$$

6/b Megoldás:

Egy másik (szemléletes) megoldás, ha a n-et egy n hosszúságú (n négyzetből álló) szalaggal szemléltetjük (lásd: 9. kép). Ha két ilyen szalagot L alakban elhelyezünk úgy, hogy egy-egy négyzetük fedje egymást (9. kép), akkor egy 2n - 1 négyzetből álló alakzatot kapunk, amelyek pont a páratlan számoknak feleltethetők meg.
Na most, ha az egyes szalagokat sorra egymáshoz illesztjük (9.kép), akkor éppen n oldalhosszúságú négyzetet kapunk. Ez igazolja, hogy:

$$1 + 3 + 5 + .. + (2n - 1) = n^2$$



9.kép

Példa rekurzív sorozatra:

7. Feladat (12. osztály):

Egy n lépcsőfokból álló lépcsőn úgy mehetünk fel, hogy egyszerre vagy egy, vagy két lépcsőfokot léphetünk. Hány különböző módon juthatunk fel a lépcsőn?

7. Megoldás:

Vizsgáljuk meg először az n = 1,2,3,4 esetet:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$$

n = 4-nél észre kell venni, hogy a negyedik lépcsőfokra vagy a 3., vagy a második lépcsőfokról léphetek. Ez tehát azt jelenti, hogy

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$

Hasonlóan meggondolva a többi esetet is, azt kapjuk, hogy

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Vagyis éppen a Fibonacci-sorozatot kaptuk.

Miután a sorozat alapfogalmai bevezetésre kerültek, egy-egy speciális sorozatot is megemlítenek középiskolában, ez pedig a számtani és mértani sorozat.
Egy sorozatot számtani sorozatnak nevezünk, ha (a második tagtól kezdve) bármelyik tagból kivonva az előzőt, a különbség állandó. Ezt az állandót a számtani sorozat differenciájának (különbségének) nevezzük és d-vel jelöljük.
A számtani sorozatot megadhatjuk rekurzív, de akár explicit formában is:

$$a_n = a_{n-1} + d$$
$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Egy sorozatot mértani sorozatnak nevezünk, ha (a második tagtól kezdve) bármelyik tagot elosztva az előzővel, a hányados állandó. Ezt az állandót a mértani sorozat kvóciensének (hányadosának) nevezzük és q-val jelöljük.
A mértani sorozatot szintén megadhatjuk rekurzív és explicit formában is:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

A számtani és mértani sorozat, illetve a számtani és mértani közép között kapcsolat áll fenn. Nevezetesen a számtani sorozat n. tagja épp a kétoldalt mellette álló két tag - vagy akárhány, csak legyen szimmetrikus - számtani közepével egyenlő:

$$a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) / 2$$

Mértani sorozatra és a tagok abszolút értékére vett mértani középre is ilyen összefüggés érvényes.

Ha már definiáltuk a számtani és mértani sorozatokat, és könnyedén számoljuk az n. tagot, akkor beszélhetünk ezen sorozat összegképletéről, amin azt értjük, hogy az első n tagot összeadva mennyi lesz az összeg.
Számtani sorozatra:

$$s_n = n(a_1+a_n) \cdot \frac{1}{2}$$

Mértani sorozatra:

$$s_n = a_1 \cdot (q^n-1) \ / \ (q-1)$$

Mint hogy a sorozatok egyértelmű hozzárendelések, szemléltethetjük őket például koordinátarendszerben és összehasonlíthatjuk őket az azonos képletű folytonos függvényekkel. A már említett és ábrázolt $\frac{1}{n}$ sorozat tagjai éppen az $\frac{1}{x}$ függvényre illeszkednek, ami nem meglepő, hiszen - mint a definícióból is kitűnik - a végtelen sorozatokat kezelhetjük úgy, mint olyan valós függvények, melyek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Fontos mindemellett megemlíteni, hogy - bár a gyakorlatban talán a példákban taglalt sorozatokat nézünk - a valóságban bármiből készíthető sorozat. Így adhatunk meg olyat, melyre nem könnyen illeszthető megfelelő valós függvény. Ilyen például a következő:

$$a_n = (1,5,3,3,4,5,6,6,1,3,1,4,5,2,5,3, \ldots)$$

Ahol a sorozat tagjai kockadobás eredményei.

Hogy megkönnyítsük a sorozatok elsajátítását, még többféleképpen mutathatjuk be őket:

8. feladat (12.osztály):

1000 Ft-ot 8%-os kamatra helyezünk el a takarékpénztárba. Mennyi pénzünk lesz n év múlva?

8. megoldás:

Ha az első néhány tagot és az n-ediket egy táblázatban szemléltetjük, a megoldás nyilvánvaló:

Év	1	2	3	4	…	n
Tőke (Ft)	$1000 \cdot 1{,}08$	$1000 \cdot 1{,}08^2$	$1000 \cdot 1{,}08^3$	$1000 \cdot 1{,}08^4$	…	$1000 \cdot 1{,}08^n$

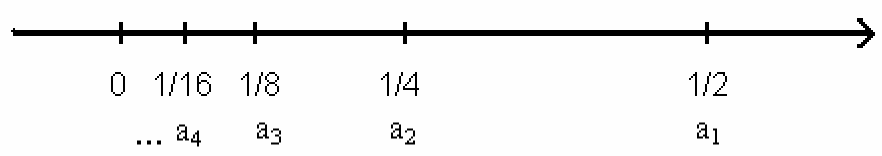
Valamikor érdemes számegyenesen ábrázolni a sorozat tagjait:

9. Feladat (12.osztály):

Szemléltessük számegyenesen az $a_n = 1/2^n$ sorozat néhány tagját. Vonjunk le következtetéseket! Van-e a sorozatnak legkisebb eleme? Van-e legnagyobb eleme?

9. Megoldás:

Az első néhány tag:



10.kép

Mint a 10. képen is látszik a sorozat tagjai egyre kisebbek, és mivel két pozitív szám hányadosáról beszélünk, $a_n > 0$. Amennyiben végtelen sorozatról van szó, nincsen legkisebb tag, a legnagyobb tag pedig az $\frac{1}{2}$.

Már ennél a feladatnál elő is előkerült néhány, a középiskolában is tanított fogalom, ilyenek a monotonitás és a korlátosság.

Mint hogy az egyetemi analízisben is igen fontos szerepet kapnak ezek a definíciók (mind a számsorozatok, mind később a függvények terén), érdemes lehet a középiskolában is nagy hangsúlyt fektetni rá, hiszen az alapvető fogalmak (főleg grafikonon ábrázolva) könnyen megérthetők, és innentől kezdve megint csak a formális nyelvvel való leíráshoz kell hozzászokni.

Például a számegyenesen való ábrázoláskor jól látható, hogy az $a_n = 1/2^n$ sorozat tagjai a nulla pont pozitív környezetében „besűrűsödnek”, vagyis ε sugarú környezetén kívül csak véges sok tag található, illetve az egymást követő számok közötti távolságok csökkennek a nullához közeledve (vagyis n>m esetén $a_{n+1} - a_n < a_{m+1} - a_m$). Ebből pedig már csak egy lépés a Cauchy-kritérium.

Meg kell jegyezni, hogy a korlátosság, a monotonitás és a határérték részletesebb taglalása, emelt szintű feladat, emelt szinten azonban már 11. osztályban szóba kerülhet.

Néhány érdekes példa sorozatokról, monotonitásról, határértékről, korlátosságról:

10. Feladat:

A sakkjáték feltalálója „szerény” ajándékul állítólag azt kérte a perzsa királytól, hogy a sakktábla első négyzetére 1 és a második négyzettől kezdve minden négyzetre kétszer annyi búzaszemet adjon, mint a megelőzőre. Hány búzaszem lesz az utolsó (64.) mezőn? Hány búzaszemet kért összesen a feltaláló?

10. Megoldás:

Vizsgáljuk meg az első néhány négyzetet:

1. négyzet: 1 búzaszem

2. négyzet: $2 \cdot 1 = 2$ búzaszem

3. négyzet: $2 \cdot 2 = 4$ búzaszem

Mint látható egy 64 tagú sorozatról (illetve ennek összegéről) van szó, ahol:

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

Ebből:

$$a_{64} = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{63} = 140737488355328$$

A megadásból látszik, hogy ez egy mértani sorozat, melynek első tagja 1, a kvóciense pedig 2. A mértani sorozat összegképletéből (az első 64 tagra):

$$s_n = a_1 \cdot (q^n - 1) / q-1$$

Vagyis:

$$s_{64} = 1 \cdot (2^{64} - 1) / 2-1 = 2^{64} - 1 = 281474976710655$$

Ezek igencsak nagy számok, holott csak néhány búzaszem volt az első mezőkön. Ezzel a feladattal érzékletesen bemutatható milyen gyorsan is nő a mértani sorozat, illetve a tagok összege.

11. Feladat:

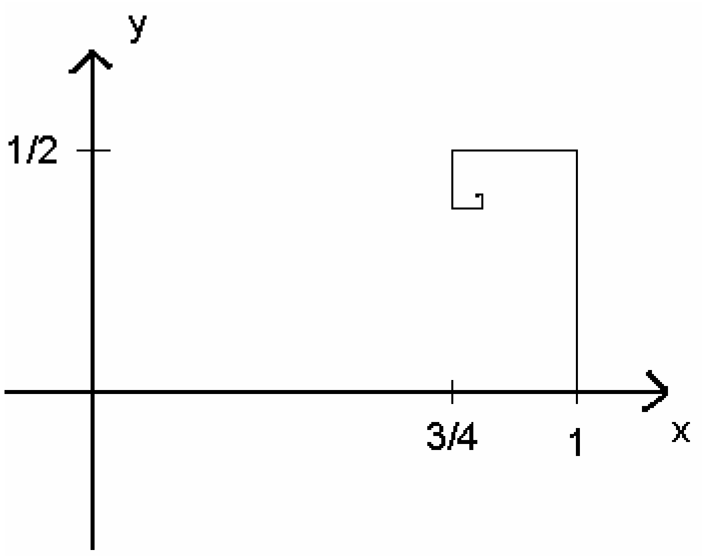
Egy icipici hangya elindul a koordinátarendszer középpontjából, és 1 egységnyit halad a pozitív irányba az x tengely mentén. Ekkor balra fordul, és az előző távolság felét teszi meg, majd ismét balra fordul és az utolsónak megtett távolság felét teszi meg.

a, Hol lesz ekkor a hangya?

c, Ha a hangya a fenti szabály szerint a „végtelenségig” mozog, akkor hova, azaz milyen koordinátájú pontba fog „érkezni”?

11. Megoldás:

a, A 11. képről is leolvasható, hogy a hangya a harmadik útjának végén a $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ pontban lesz.



11.kép

b, Végtelen útra nézve már nehéz volna pontos értéket leolvasni az ábráról. Ahhoz, hogy a végére járjunk a kérdésnek, érdemes koordinátánként külön-külön vizsgálni a kérdést:

Az x koordinátára nézve minden páratlanadik elmozdulásra van változás. Csak ezeket nézve elsőre +1, másodikra $-\frac{1}{4}$, harmadikra $+\frac{1}{16}$, és így tovább. Tehát x koordináták szerint felírható egy sorozat:

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot 1 / 4^{n-1}$$

Ahol a_n az elmozdulás x függvényében. Az x koordináta a sorozat tagjainak összege:

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64} \ldots = s_n$$

Ebből:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\ldots = \frac{1}{4} \cdot s_n$$

Ha a kettőt összeadjuk:

$$1 = \frac{5}{4} s_n$$

$$s_n = \frac{4}{5}$$

Az y koordinátákra ugyanezen összefüggések szerint:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{4} s_n$$

$$s_n = \frac{2}{5}$$

Vagyis a keresett koordináták:

$$(x,y) = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$$

1.6 Valós függvények

Legyen A és B halmaz. Ekkor az A-ból B-be történő *egyértelmű f* leképezést függvénynek nevezzük. Az egyértelműség itt azt jelenti, hogy egy $a_1 \in$ A-hoz csak egy $b_1 \in$ B-t rendelek. Ebben az esetben A a függvény értelmezési tartománya: D(f), B, vagy annak részhalmaza pedig a függvény értékkészlete: R(f).

Ha $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) = b_1 \neq b_2 = f(a_2)$ feltétel teljesül $\forall$ $a_n \in$ A-ra, akkor a függvényt egy-egyértelmű leképezésnek nevezzük. Ebben az esetben az mondjuk, hogy a függvény injektív. Ha egy függvén nem csak injektív, de R(f) = B is teljesül, akkor bijektív függvényről beszélünk. Szemléletesen az injekció azt jelenti, hogy minden A-beli elemhez pontosan egy B-beli elemet rendelek, a bijekció pedig, hogy nem marad olyan B-beli elem, amit nem kapunk meg a leképezés során.

Azért fontos bevezetni az előző két tulajdonságot, hogy beszélhessünk egy függvény inverzéről. Akkor beszélünk inverz függvényről ha ezen f^{-1} függvény minden b = f(a)-hoz a-t rendeli hozzá. De miért kell, hogy f bijektív legyen? Nagyon könnyű meggondolni, hogy ha nem egy-egy értelmű a leképezés (vagyis f nem injektív), akkor több A-beli elemhez is hozzárendelünk egy B-beli elemet. Visszafelé aztán ezt a B-beli elemet több A-belihez kellene rendelni, ami ellent mond a függvény definíciójának. Tehát az injekció szükséges. Nézzük meg mi történik, ha R(f) $\neq$ B! Ekkor létezik olyan B-beli elem, mely egyik A-belinek sem a képe. Ekkor az inverzió során ehhez az elemhez nem tudunk semmit hozzárendelni. Tehát tényleg szükséges, hogy bijektív függvényről legyen szó, ha inverz függvényt szeretnénk előállítani. Természetesen az inverz függvény definíciójából következik, hogy egyben ez elégséges feltétel is.

Mint a halmazoknál, a függvények megadásánál is többféleképpen járhatunk el. Egy lehetséges megadási mód, ha megadjuk az értelmezési tartomány és a képhalmazt, majd képlettel határozzuk meg a leképezést. Megadhatjuk bármely más módon is. A lényeg, hogy a megadás egyértelmű legyen.

Példák:

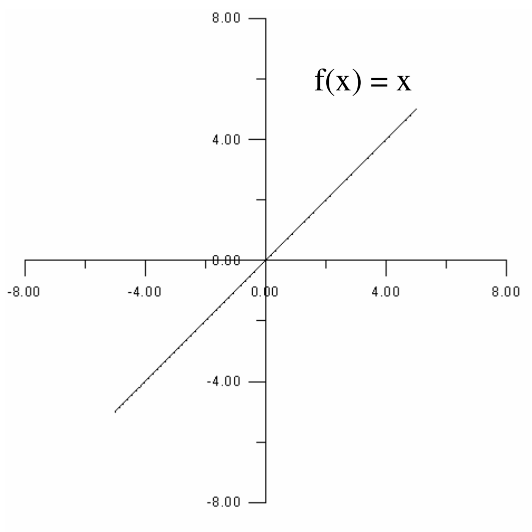
Legyen a következő két példában az értékkészlet és az értelmezési tartomány is a valós számok halmaza:

$$f(x) = x^2 + 8$$

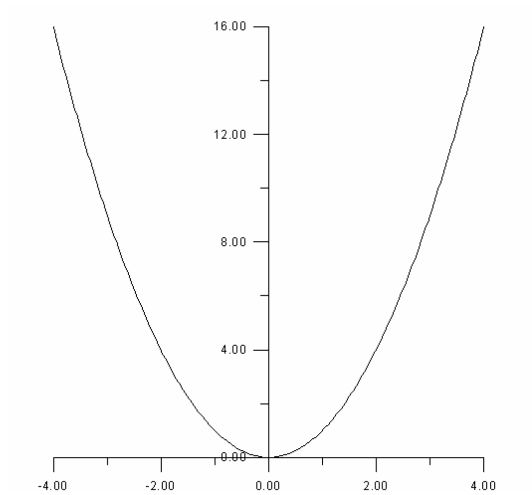
$$f(x) = \begin{cases} 1, ha\_x\_racionális \\ 0, ha\_x\_irracionális \end{cases} \text{ /ún. Dirichlet függvény/}$$

A függvényeket talán úgy a legkönnyebb elképzelni, hogy ha lehet, ábrázoljuk őket. Természetesen csak közelítő pontossággal tudjuk ezt megtenni, sőt van olyan függvény, amely le sem rajzolható, de az esetek többségében a tanult függvények ábrázolhatók.

Íme két egyszerű példa:



12. kép



13. kép

<u>Függvények globális tulajdonságai:</u>

Egy függvényt párosnak mondunk, ha $\forall$ x $\in$ D(f)-re –x $\in$ D(f) és f(x) = f(-x). Itt is érdemes meggondolni, mit is jelent ez a függvény grafikonjára nézve. A definícióból mindjárt látszik, hogy ez az ábrázolást tekintve pontosan azt jelenti, hogy a függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre. Ilyen például az $f(x) = x^2$ függvény.

Egy függvény páratlan, ha $\forall\, x \in D(f)$-re $-x \in D(f)$ és $f(x) = -f(x)$. Ugyanígy meggondolható, hogy ez éppen a grafikon origóra vett szimmetriáját jelenti. Például az $f(x) = x^3$.

Egy további tulajdonság a periodikusság. Egy függvényt akkor nevezünk periodikusnak, ha $\exists$ $d \neq 0$ szám, melyre $\forall\, x \in D(f)$ esetén $x+d \in D(f)$ és $f(x+d) = f(x)$. Itt megjegyzendő, hogy ha létezik egy periódus, akkor annak egész számú többszörösei is periódusok, és nem biztos, hogy létezik legkisebb periódus. Erre szemléletes példa a Dirichlet függvény, aminek minden pozitív racionális szám a periódusa, ezek közül viszont nincs legkisebb.

Azt mondjuk, hogy egy függvény monoton növő az $A \subset R$ halmazon, ha $\forall\, x_1, x_2 \in A$ és $x_1<x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$. A monoton csökkenést hasonlóan értelmezzük csak itt $x_1>x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ teljesül. A szigorú monotonitásoknál pedig a függvényértékekre az egyenlőség nem megengedett.

Az f függvény felülről korlátos az $A \subset R$ intervallumon, ha $\exists$ egy K szám, hogy $f(x) \leq K$ $\forall$ $x \in A$-ra. Az alulról korlátosságot hasonlóképpen definiáljuk. Egy függvény akkor korlátos egy intervallumon, ha alulról és felülről is korlátos.

Még a konvexitást (konkavitást) kell megemlíteni. Egy függvény konvex (konkáv) egy I intervallumon, ha $\forall\, a,b \in I$-re $a < x < b$ esetén $f(x) \leq (\geq)\, h_{a,b}$, ahol $h_{a,b}$ az a és b pontokat összekötő húr egyenlete:

$$h_{a,b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)+ f(a)$$

Középiskolai alkalmazások:

A függvények tanulmányozásánál már középiskolában is előkerülnek az eddig leírt fogalmak. A különbség csupán annyi, hogy nem mindig formai oldalról, vagyis nem biztos, hogy „képletekkel” érdemes bevezetni őket. Talán szemléletesebb, ha mindjárt 9. osztályban, a függvények bevezetésénél ábrával szemléltetjük a fogalmakat.

A függvények bevezetésénél igen egyszerű „szemléltető eszközt” találni, hiszen ábrázolva őket a derékszögű koordinátarendszerben, azonnal képet kapunk a legtöbb függvényről.

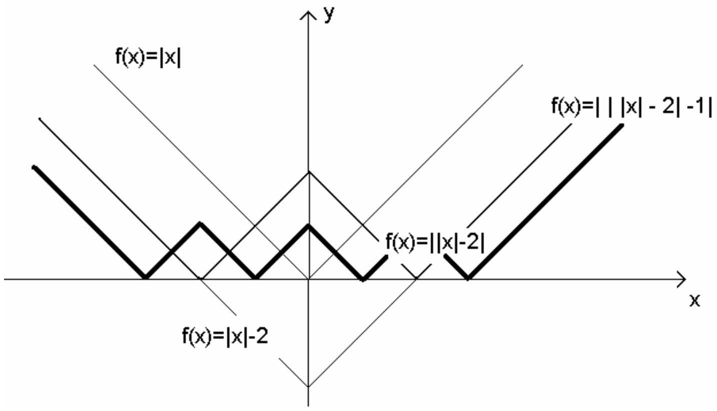
9. osztályban a lineáris függvény, az abszolútértékfüggvény, a másodfokú függvény, a négyzetgyök függvény, és a lineáris törtfüggvény kerül szóba. Ezek alapfüggvényei talán nem is érthetetlenek, az ember néhány pontban kiszámítja őket, majd ebből következtetéseket von le, és ábrázolja. Van olyan eset azonban, amikor első ránézésre nem egyértelmű, hogyan is lehet ábrázolni egy-egy függvényt.

12. Feladat (9.osztály):

Ábrázoljuk a következő függvényt a derékszögű koordinátarendszerben:

$$f(x) = | \, | x| - 2 \, | - 1 \, |$$

12. Megoldás:



14. kép

Állítsuk elő a függvény grafikonját lépésenként. f(x) = |x| képét ismerjük. Ebből |x| - 2 egy y tengely irányú negatív eltolás (pár érték mellett a függvényértékeket kiszámolva ez az állítás igazolható). Ezután ennek a függvénynek kell venni az abszolútértékét (az x tengely alatti részt x-re tükrözni). Ekkor | |x| - 2 | - t kapjuk, végül még egyszer lefelé tolni és még egyszer tükrözni. Az első két lépés és a végeredmény az 14. képen látható.

Érdemes az előző feladathoz hasonló feladatot megfogalmazni a többi függvénytípusra is, hogy a tanulók „ráérezzenek" mikor merre kell tolni a függvényt, mikor kell „nyújtani", vagy éppen „összenyomni".

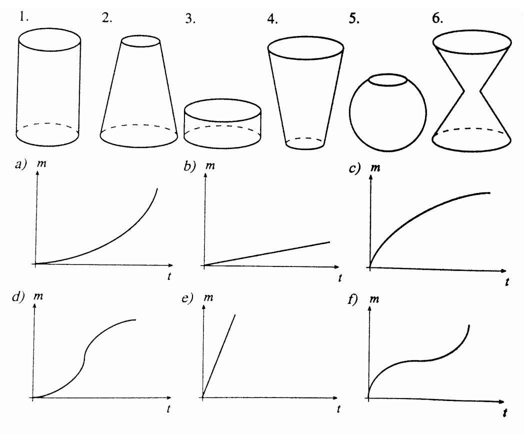
11. osztályban aztán újra előkerülnek a függvények, nevezetesen az exponenciális, a logaritmus, a trigonometrikus függvények és az inverzfüggvény formájában. A 9. osztályban megtanult „szabályok" az eltolással, nyújtással kapcsolatban azonban itt is érvényesek.

Egy játékos és érdekes példa a következő:

13. Feladat:

A folyadékszint magasságának növekedési üteme az edény keresztmetszetétől függ: minél nagyobb a keresztmetszet, annál lassabban emelkedik a folyadékszint.

Párosítsa össze az ábrákat a grafikonokkal! (15.kép)

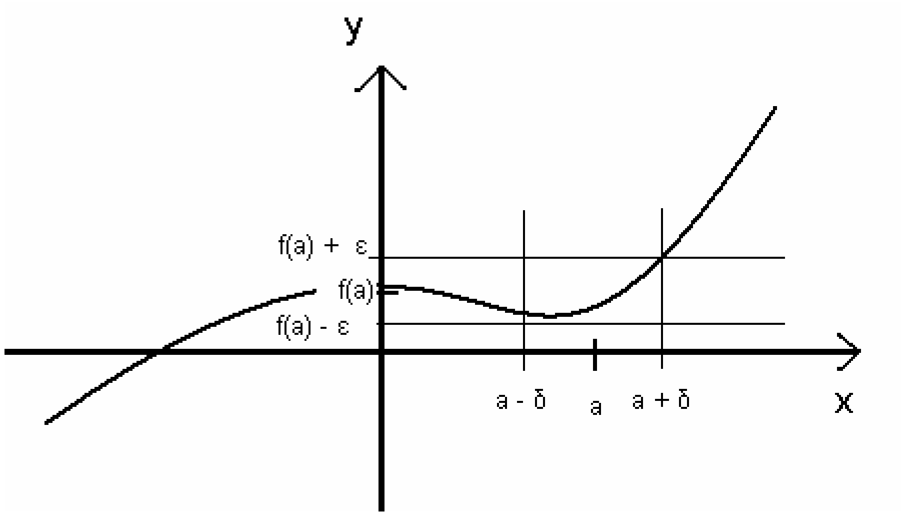


15. kép

Az ilyen, és ehhez hasonló feladatok még kézzelfoghatóbbá teszik a függvényeket, hiszen gyakorlati példát is hozzá tudunk rendelni egy-egy grafikonhoz, amit azután sokkal könnyebb megjegyezni.

1.7 Folytonosság, határérték

Az itt tárgyalt definíciók és az ezekre épülő tételek első ránézésre furcsának tűnhetnek. Nagyon is logikusak, és egy kis fáradozással meg is érthetőek, ám véleményem szerint azonnal nem átláthatóak. Ez az a része az analízisnek, amelynek igazi értelme majd csak később bontakozik ki. Hogy az alapfogalmak miért éppen úgy lettek definiálva ahogy, és miért van szükség ezen alapfogalmakra, az igazán majd csak a differenciálszámításnál mutatkozik meg. Ott viszont igen hasznosnak, sőt elengedhetetlennek bizonyulnak majd, így ezen fogalmak elsajátítása, és készség szintű alkalmazása igen fontos szerepet kap az analízis tanulmányok során.



16. kép

Ebben a fejezetben csak az alapvető definíciókról és alapvető, „kézzel fogható” összefüggésekről ejtek szót. Ezek talán még előkerülhetnek középiskolai környezetben is, illetve haladó csoport számára érthetőek, átgondolhatóak.

Megemlítném még elöljáróban, hogy a későbbiekben többször hivatkozom majd egy függvény „a” pontbeli érintőjére. Ezalatt természetesen a függvénygrafikon érintőjét értem.

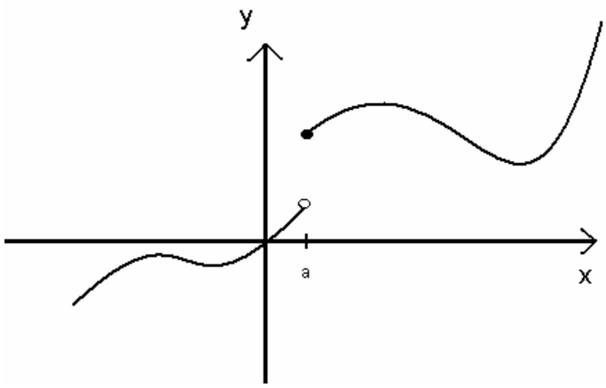
Függvény folytonossága adott pontban: Egy függvény folytonos egy *a* pontjában, ha értelmezve van egy *a*-t tartalmazó nyílt intervallumban, és minden $\varepsilon > 0$ – ra $\exists$ $\delta > 0$, melyre $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$, ha $|x-a| < \delta$. Ez szemléletesen annyit tesz, hogy ha a függvény grafikonját nézve az y tengelyen f(a)-t „beszorítom” egy $f(a) + \varepsilon$ és $f(a) - \varepsilon$ sávba, akkor az x tengelyen a-t is be tudom szorítani egy a - δ, a + δ sávba úgy, hogy a függvény ezen intervallumhoz tartozó képe ebbe a sávba esik (lsd.: 16.kép).

Legyen f értelmezve egy *a*-t tartalmazó nyílt intervallumban (kivéve esetleg *a*-t). A függvény határértéke *a* helyen létezik és b, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ – hoz $\exists\ \delta > 0$, amelyre teljesül, hogy $|f(x) - b| < \varepsilon$, ha $0 < |x - a| < \delta$.

Mint látjuk, ez nagyon hasonló a folytonosság definíciójához. Annyi a különbség, hogy a határérték definíciójánál f(a) nem egyenlő feltétlenül b-vel. Lehet egy másik szám is, és lehet, hogy a függvény nincs is ott értelmezve.

Értelmezünk még a függvényeken jobb és bal oldali határértéket. Ekkor az előző definíció úgy módosul, hogy a függvényem egy (a,c) – vagy (c,a), attól függ, jobb vagy bal oldali határértékről van szó – intervallumon kell értelmezett legyen, és ekkor $\forall\ \varepsilon > 0$ – hoz kell létezzen $\delta > 0$, amelyre teljesül, hogy $|f(x) - b| < \varepsilon$, ha $0 < x - a$ (illetve $a - x$)$< \delta$. Vagyis a második részből az abszolút érték tűnt el.

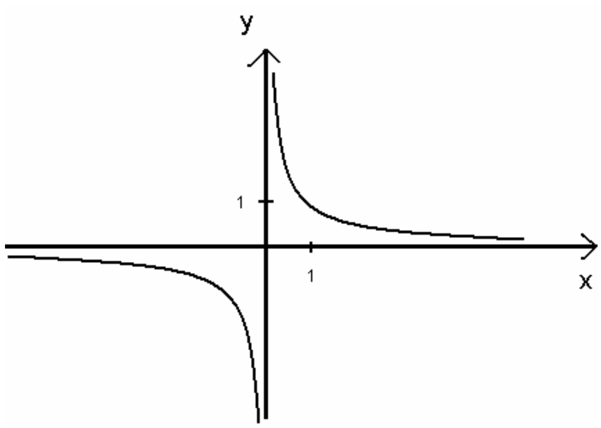
A kétoldali határértékre azért van szükség, mert előfordulhat, hogy egy adott pontban, a kétoldali határérték nem egyezik meg. (Jól látszik az 17. képen, hogy a-ban a kétoldali határérték nem egyezik meg.)



17.kép

Szót kell még ejtenünk a végtelen határértékről is. Ez (mint a neve is sugallja) csupán annyit jelent, hogy minél közelebb kerülünk a-hoz, a függvény értéke annál nagyobb. Formálisan $\forall$ P számhoz $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ 0 < |x - a| < \delta$ esetén $f(x) > P$. Ekkor a függvény határértéke a-ban ∞.

Ezen utóbbi definíció természetesen létezik féloldali határértékekre és $-\infty$ határértékre is. Egy jó példa, melyen egyszerre szemügyre vehetjük a féloldali és végtelen határértékeket az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény (18.kép)



18.kép

Itt a képeken már előkerült, de szót még nem ejtettem róla, hogy mit is jelent, vagyis hogyan is definiált a szakadási pont. Azt mondjuk, egy f függvénynek *a* helyen szakadási pontja van, ha

a függvény nem folytonos a-ban.
Továbbá azt mondjuk, hogy f-nek megszüntethető szakadási helye van, ha $\lim_{x \to a} f(x)$ létezik és véges, de $a \notin D(f)$, vagy $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$.

Középiskolai alkalmazások:

Gimnáziumban a függvények határértéke már csak az emelt szintű anyag részét képezi. Egy fizikai példán keresztül bevezethetjük a határérték fogalmát, majd - mondjuk a fentihez hasonló képek segítségével - megmutathatjuk, hogyan lehet elképzelni egy függvény határértékét, és mi a különbség a véges határérték és a folytonosság között, és milyen a kapcsolatuk (amennyiben függvény folytonos egy a pontjában, úgy itt határértéke is létezik és véges).
Mint írtam a fejezet bevezető részében is, ez az a része az analízisnek, ami elsőre talán kicsit nehéz, és tapasztalatom szerint itt bátortalanodnak el a legtöbben. Ez talán azért lehet, mert konkrétan a határértékre, és folytonosságra nem igen lehet szemléletes, és az életből, a tapasztalatokból vett példával szolgálni. Ennek oka, hogy ez egy módszer, amely később segíteni fog más - jóval könnyebben elképzelhető és a mindennapi életből merített - példák megoldásában.
Viszont, hogy a későbbiekben ne okozzon gondot, be kell gyakorolni a már leírt definíciókat, tételeket.

14. Feladat:

Határozzuk meg a következő határértékeket!
a, $\lim_{x \to 8} (64-x^2) / (x-8)$
b, $\lim_{x \to 0} (4 \cdot \sin^2 (\frac{x}{4})) / (x)$

14.Megoldás:

Ezen feladatok megoldásához talán leginkább gyakorlat és rutin kell. Az első feladatnál például észre kell venni, hogy $64-x^2 = (8 + x) \cdot (8 - x)$.

amiből

$$(64-x^2) / (x-8) = (8 + x) \cdot (8 - x) / (x - 8) = -1 \cdot (8 + x)$$

Tehát

$$\lim_{x \to 8} (64-x^2) / (x-8) = \lim_{x \to 8} (-8 - x) = -16$$

A b feladatnál felhasznált - középiskolában is ismeretes - tétel a következő:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\frac{x}{4})}{\frac{x}{4}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (4 \cdot \sin^2(\frac{x}{4})) / (x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\frac{x}{4})}{\frac{x}{4}} \cdot \sin(\frac{x}{4})$$

Mivel $\lim_{x \to 0} \sin(\frac{x}{4}) = 0$, ezért (a határértékek közötti műveleti szabályoknak megfelelően):

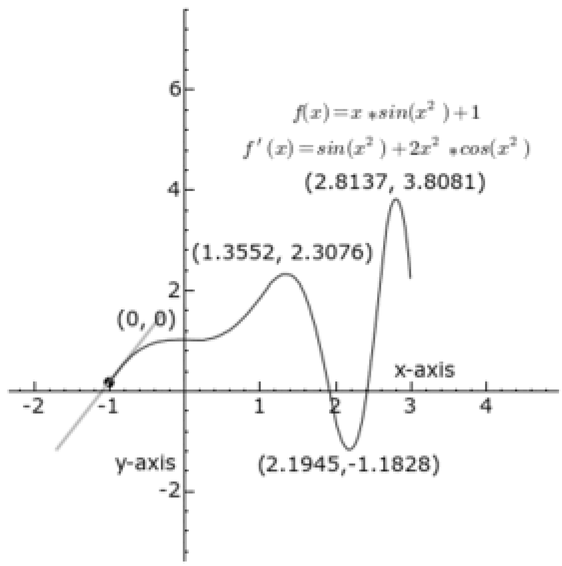
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\frac{x}{4})}{\frac{x}{4}} \cdot \sin(\frac{x}{4}) = 4 \cdot 0 = 0$$

1.8 Differenciálszámítás

Számos fizikai jelenség leírása megköveteli a határértékek számítását. Egyik legkézenfekvőbb és legkönnyebben elképzelhető példa a pillanatnyi sebesség meghatározása. Ez azért is lehet érdekes kérdés (főleg középiskolában), mert tudunk látványos példákkal szolgálni.

Megkérdezhetjük, hogy tudja-e valaki, hogyan működik az autók sebességmérője, a bicikli kilométerórája, vagy esetleg van-e elképzelésünk, hogyan működik a rendőrségi sebességellenőrző (trafipax).

Mivelhogy pillanatnyi sebességet nem tudunk mérni, csak bizonyos úthosszakra vett sebességátlagot, mondhatjuk, hogy a t_0-beli pillanatnyi sebességet a $\lim_{(t \to t0)} \frac{s(t) - s(t0)}{t - t0}$ határértékkel értelmezzük, feltéve persze, hogy ez a határérték létezik és véges.



19. kép

Ha egy függvényt (mondjuk éppen s-et t függvényében) ábrázoljuk, akkor a fenti hányados éppen a függvény (t_0, $s(t_0)$) pontján átmenő érintőjének a meredeksége (lásd 19.kép).
A fenti határértéket különbségi hányadosnak, latin szóval differenciálhányadosnak nevezzük.
A $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ különbségi hányados pedig (mint már a függvényeknél említésre került) az f(x) függvény (a, f(a)) és (b, f(x)) pontjain átmenő egyenes meredeksége.
Legyen f(x) függvény értelmezve „a" pont egy adott környezetében (vagyis létezzen olyan ε, melyre (a-ε, a+ε $\in$ D(f)). Ekkor, ha a $\lim_{(x \to a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy a függvény differenciálható az a pontban. Jelölje a véges határértéket c. Ekkor a $\lim_{(x \to a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ = c differenciálhányadost f'(a) - val jelöljük.
Mint már említettem, ez pont az „a" pontba húzható érintő meredeksége. Innen az érintő egyenlete:

$$e = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$$

Példának okáért a konstans függvény deriváltja az érintő meredekségéből azonnal megállapítható, hiszen ez minden pontjában nulla. Így f(x) = c esetén f(x) differenciálható és f'(a) = 0 $\forall$ a-ra.
A differenciálhatóság és a folytonosság között erős kapcsolt áll fenn. Ha ugyanis egy függvény differenciálható egy a pontjában, akkor folytonos is a-ban.
Az állítás megfordítása azonban nem igaz, hiszen például az f(x) = |x| függvény a nulla pontban folytonos, de nem differenciálható. Ennek bizonyításához be kell vezetni a kétoldali differenciálhányadost. Ez teljesen analóg módon történik a kétoldali határérték bevezetésével, hiszen a differenciálhányados is határérték. Így tehát egy f(x) függvény jobboldali differenciálhányadosán a $\lim_{(x \to a+0)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határértéket értjük és $f_+'(a)$-val jelöljük. A baloldali differenciálhányadost ugyanígy a bal oldali határértékkel analóg módon vezethetjük be és $f_-'(a)$-val jelöljük. Ezekből persze egyből adódik, hogy *f* akkor és csak akkor differenciálható „a"-ban, ha a kétoldali differenciálhányadosa megegyezik és véges. Ez azonban nem teljesül az f(x) = |x| függvényre a 0 pontban.
Mivel nem csak egyes pontokban - hanem intervallumokon, akár a teljes értelmezési tartományon - értelmezni és használni szeretnénk a differenciálhatóság fogalmát, bevezetjük a deriváltfüggvényt. Az *f* függvény deriváltfüggvényének nevezzük és *f'*-vel jelöljük azt a

függvényt, mely értelmezve van mindazon helyeken, ahol *f* differenciálható, és ott az értéke f'(x). A differenciálszámítás ezen f'(x) függvények meghatározásával foglalkozik, és a deriváltak illetve az eredeti függvény kapcsolatával. Mint látni fogjuk, a derivált függvények igen nagy segítségünkre lesznek egy-egy függvény jellemzésénél.

Ahhoz, hogy használni tudjuk a deriváltfüggvényeket, az alapvető differenciálási szabályokkal és az elemi függvények deriváltjaival jó, ha tisztában vagyunk. Bármelyik, a következőben említett szabály, vagy konkrét függvény deriváltja levezethető (hol könnyebben, hol nehezebben) a differenciálhányados definíciójából helyettesítéssel. Az elemi függvények deriváltjait a következő táblázat mutatja (20.kép):

Elemi függvények deriváltjai

Függvény neve	jele	deriváltja
konstans	c	0
konstans szorzó	$c \cdot x$	c
hatvány	x^c	$c \cdot x^{c-1}$
exponenciális (*e* az Euler-féle szám)	e^x	e^x
természetes logaritmus	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
logaritmus (*a* pozitív és nem 1)	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$
Trigonometrikus függvények		
szinusz	$\sin x$	$\cos x$
koszinusz	$\cos x$	$-\sin x$
tangens	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
kotangens	$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$
Hiperbolikus függvények		
hiperbolikus szinusz	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
hiperbolikus koszinusz	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
hiperbolikus tangens	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$
hiperbolikus kotangens	$\operatorname{cth} x$	$\frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \operatorname{cth}^2 x$

Inverz trigonometrikus függvények		
arkusz szinusz	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arkusz koszinusz	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arkusz tangens	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
arkusz kotangens	$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
Inverz hiperbolikus függvények		
area hiperbolikus szinusz	$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
area hiperbolikus koszinusz	$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
area hiperbolikus tangens	$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{x^2-1}$
area hiperbolikus kotangens	$\operatorname{arcth} x$	$\frac{-1}{1-x^2}$

20.kép

/forrás: Wikipédia/

Ha egy f(x) és egy g(x) függvény differenciálható „a"-ban, c pedig konstans, akkor a c · f(x) az $f + g$, az $f - g$, az $f \cdot g$, és az $\frac{f}{g}$ függvények is differenciálhatók „a"-ban. Továbbá ha g differenciálható „a"-ban és f differenciálható g(a)-ban, akkor az $f \circ g$ - az összetett f(g(x)) függvény - is differenciálható „a"-ban.

A konstanssal való szorzásra, a függvények közötti összeadásra, szorzásra és osztásra vonatkozó differenciálási szabályok:

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = (f' \cdot g - f \cdot g') / g^2$$

Az összetett függvény deriválási szabálya:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Ezen tétel neve: láncszabály.

Hogy a továbbiakban azon pontjait is kezelni tudjuk egy függvénynek, ahol a függvényérték a végtelenhez tart, bevezetjük a végtelen határérték fogalmát:

Legyen *f* értelmezve az „a” pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy *f*-nek az „a” pontban a differenciálhányadosa végtelen, ha

$$\lim_{(x \to a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$

Jelölésben $f' = \infty$.

Hasonlóképpen értelmezzük, ha $f' = -\infty$.

A függvényvizsgálatoknál az első és másodrendű deriváltfüggvények ismerete igen hasznos. Ebből következtethetünk ugyanis a függvény monotonitására és konvexitására, szélső értékeire és inflexiós pontjaira. A monotonitásra és a konvexitásra vonatkozó tételek:

Legyen f folytonos [a,b]-n és differenciálható (a,b)-n. f akkor és csak akkor monoton növekedő (csökkenő) [a,b]-n, ha $f' \geq 0$ (illetve $f' \leq 0$).

Legyen *f* kétszer differenciálható egy I intervallumon. Az *f* függvény akkor és csak akkor konvex (konkáv) I-n, ha $f'' \geq 0$ (illetve $f'' \leq 0$)

Ha *f* differenciálható „a”-ban, és szélsőértéke van ugyanitt, akkor $f' = 0$.

Ha *f* kétszer differenciálható „a”-ban, és inflexiós pontja van ugyanitt, akkor $f'' = 0$.

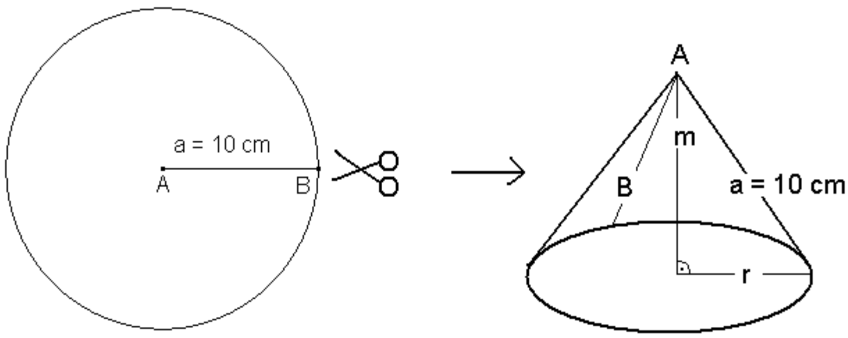
Az utóbbi két tétel megfordítása nem igaz! Az x^3 függvénynek például a nulla pontban a deriváltja nulla, még sincs szélsőértéke itt, csak inflexiós pontja. Az x^4 függvénynek pedig szintén a nulla pontban a második deriváltja nulla, de nincs inflexiós pontja.

Középiskolai alkalmazások:

A matematika történelmében többen foglalkoztak a függvények érintőjének, és ezzel a függvények szélsőértékeinek meghatározásának kérdésével. A differenciálhányados első publikált használata Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, német matematikus) nevéhez fűződik, de Newton is (Leibniz-tól függetlenül) ugyanarra az eredményre jutott a mozgás sebességének elemzése során.
A differenciálhányados alkalmazására is igen sokféle példával szolgálhatunk. Egy könnyen megvalósítható, játékos példa a következő:

15. Feladat:
/forrás: http://xml.inf.elte.hu/~mathdid/ - Matematikadidaktikai fórum/

Rajzoljunk rajzlapra egy 10 cm sugarú kört! Ezt vágjuk ki, majd vágjuk be az egyik AB sugár mentén! Az így készített körlemezből készítsünk kúppalástot úgy, hogy A legyen a kúp csúcsa, és a B pontot a körvonal mentén eltoljuk (21.kép)



21.kép

Változtassuk a kúp magasságát, és próbáljuk meg megbecsülni, mikor a legnagyobb a kúp térfogata, azután számoljuk is ki, mely m-re lesz V = max.!

15. Megoldás:

A feladat próbálgatásos részétől eltekintenék. Tapasztalatokat szerezhetnek a tanulók, ha több esetben megmérik a magasságot, és ebből térfogatot számolnak, majd a kapott eredményeket a hozzájuk tartozó magassággal egy táblázatban ábrázolják.
Ezek után már tudnak valami becslést mondani, majd megkezdődhet a számítás:
A kúp térfogata:

$$V = r^2 \pi m$$

és:

$$m^2 = a^2 - r^2$$

ahol a az alkotó (jelen esetben 10 cm) r az alapkör sugara, m pedig a magasság.

Ezekből:

$$V = r^2 \pi \ (a^2 - r^2)^{1/2}$$

Ezzel az egyenlettel megadott függvénynek keressük a maximumát r változása mellett. A szélsőérték keresésénél segítségül hívjuk a deriváltfüggvényekről tanultakat.

$$V'(r) = \pi \ (2r \ (a^2-r^2)^{1/2} + r^2 \ \frac{1}{2} (a^2 - r^2)^{-1/2} \ (-2r))$$

Ennek a kifejezésnek keressük a zérushelyét, amiből:

$$2r \ (a^2-r^2)^{1/2} = r^2 \ \frac{1}{2} (a^2 - r^2)^{-1/2} \ (2r)$$

Ebből egyszerűsítés után azt kapjuk, (mivel $r \neq 0$ és $r \neq a$ hogy):

$$r^2 = \frac{2}{3} a^2$$

Tehát (ha a = 10 cm-t behelyettesítek):

$$r = \sqrt{66,67} \text{ cm} \approx 8,16 \text{ cm}$$

Tudván persze, hogy a sugár csak pozitív értéket vehet fel, így $r = -\sqrt{66,67}$ cm értelmetlen.
Ebből pedig:

$$m = \sqrt{33,33} \approx 5,77 \text{ cm}$$

Természetesen abból, hogy a deriváltfüggvénynek az adott r helyen zérushelye van, még nem következik, hogy itt maximuma is van. Megvizsgálva azonban megláthatjuk, hogy itt a derivált előjelet váltva nulla, hiszen a számolt r értéktől balra pozitív, jobbra pedig negatív a függvényérték.
Az ehhez hasonló feladatok azért jók, mert az életben is fontos szerepet kapnak, hiszen például ha víztározókat építenek, egyáltalán nem mindegy, mennyi lesz a tartály térfogata.

Összegzés:

Mint látható, az első éves analízisből igen sok előkerülhet középiskolában (van ahol még az integrálszámítás alapjai is). Ahhoz azonban, hogy ne csak módszereket adjunk a tanulók kezébe, szerintem fontos, hogy szemléletes, jól átlátható, érthető példákkal szemléltessük a tanultakat. Ha grafikonokat, és konkrét fizikai jellegű problémát tudnak társítani egy-egy feladathoz, akkor nem csak jobban megjegyzik az oda tartozó képleteket, gondolatsort, de értelmét is látják a matematika tanulásának, és értik a tárgy hasznosságát.

Irodalomjegyzék:

Laczkovich – T. Sós: Analízis I., Nemzeti Tankönyvkiadó 2005

Kosztolányi - Kovács - Urbán - Vincze:Sokszínű matematika 9, Mozaik kiadó 2003

Kosztolányi - Kovács - Urbán - Vincze:Sokszínű matematika 10, Mozaik kiadó 2003

Kosztolányi - Kovács - Urbán - Vincze:Sokszínű matematika 11, Mozaik kiadó 2008

Kosztolányi - Kovács - Urbán - Vincze:Sokszínű matematika 12, Mozaik kiadó 2004

Czapáry - Gyapjas: Matematika a középiskolák 11-12. évfolyama számára, Nemzeti tankönyvkiadó 2003

Czapáry - Gyapjas: Matematika feladatgyűjtemény a középiskolák 11-12. évfolyama számára, Nemzeti tankönyvkiadó 2003

Bárd - Frigyesi - Lukács - Major - Székely - Vancsó: Készüljünk az érettségire Matematikából Emelt Szinten Feladatgyűjtemény, Műszaki könyvkiadó 2005