EXTREMÁLIS GRÁFOK

SZAKDOLGOZAT

KÉSZÍTETTE: Tölgyes Laura Veronika

SZAK: Matematika BSc Tanári szakirány

TÉMAVEZETŐ: Szőnyi Tamás

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalom

1. Bevezetés

Témaválasztásomat két alapvető szempont határozta meg. Nevezetesen az egyik az, hogy kedvenc tantárgyam volt a véges matematika, - melyet sajnos csak első évben hallgattunk -, a másik pedig, hogy leendő tanárként, középiskolai vonatkozása is legyen a szakdolgozatomnak.

2. Alapfogalmak

2.1. Definíciók, egyszerű tételek

A szakdolgozatomban használt fogalmakat a szakirodalom alapján definiálom. **[1]**, **[2]**, **[3]**, **[4]**

Gráf:

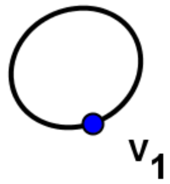
1. Egy pontokból és az őket összekötő vonaldarabokból álló alakzatot nevezünk *gráf*nak. A pontokat a gráf *pontja*inak, illetve *csúcsa*inak (v), a vonaldarabokat pedig a gráf *éle*inek (e) hívjuk.

   A gráfot definiálhatjuk absztraktabb módon is.

2. Egy $G=(V,E)$ rendezett párt, ahol V egy nem-üres halmaz, E pedig ebből a halmazból képezhető párok egy halmaza, - ahol egy pár esetleg többször is előfordulhat (pl.: $\{v_1,v_2\}$, $\{v_1,v_2\}$), illetve lehet egy élnek azonos a kezdő- és végpontja ($\{v_1,v_1\}$ típusú párok)-, *gráf*nak nevezünk. V elemeit *pont*oknak vagy *csúcs*oknak, E elemeit *él*eknek hívjuk. Egy G gráf esetén $V(G)$-vel illetve $E(G)$-vel jelöljük a gráf pontjainak, illetve éleinek halmazát. A pontok, illetve élek számát pedig $v(G)$-vel illetve $e(G)$-vel jelöljük.

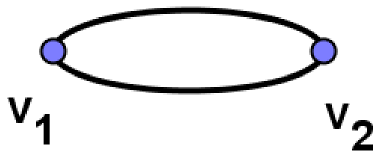
Ha v_1 és v_2 egy gráf két pontja és $e \in E$ él a $\{v_1,v_2\}$ párnak felel meg, akkor ez a két pont *e* két *végpont*ja.

Hurokél: Ha $v_1 = v_2$, azaz $\{v_1, v_1\}$ típusú a pár, akkor *hurokél*nek nevezzük. (*1. ábra*)



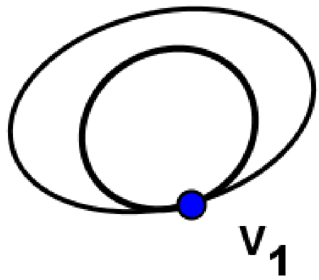
1. ábra: Hurokél

Többszörös, illetve *párhuzamos élek*: Ha két különböző nem hurokélnek azonosak a végpontjai, azaz egy $\{v_1, v_2\}$ pár többször szerepel *E*-ben, akkor *többszörös*, illetve *párhuzamos él*ekről beszélünk. (*2. ábra*)



2. ábra: Párhuzamos élek

Megjegyzés: Ha egy pontra két különböző hurokél illeszkedik, *többszörös hurokél*nek hívjuk. (*3. ábra*)



3. ábra: Többszörös hurokélek

Egyszerű gráf: Olyan gráf, amelyben nincsen hurokél és többszörös él sem.

Teljes gráf: Ha egy *n* pontú egyszerű gráf bármely két pontja között vezet él, *teljes gráfnak* nevezzük. Az *n* pontú teljes gráfot K_n -nel jelöljük.

Élsorozat: Egy $(v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot *élsorozat*nak (*sétá*nak) nevezünk, ha e_i a v_{i-1} -et és v_i -t összekötő él, minden $i = 1, ..., k$ -ra. Az élsorozat hossza az élek száma, azaz *k*.

Út: *Út*nak nevezünk egy élsorozatot, ha abban a csúcsok mind különbözőek.

Kör: Egy élsorozatot *kör*nek nevezünk, ha $e_1 \neq e_2$, $v_0 = v_k$ és egyébként a csúcsok mind különbözőek. Ezen belül *páros*, illetve *páratlan kör*ről beszélünk, ha páros, illetve páratlan sok pontból áll. A *k*-hosszú kört C_k-val jelöljük.

Összefüggő gráf: Egy gráfot *összefüggő*nek nevezünk, ha tetszőleges két pontja között vezet út.

Komponens: Egy gráf *komponens*én egy maximális összefüggő részgráfját értjük.

Fa: Az összefüggő körmentes gráfokat *fáknak* nevezzük.

Izolált pont: Egy pontot *izolált*nak nevezünk, ha nincs vele szomszédos pont.

Független ponthalmaz: Egy $X \subseteq V(G)$ *független ponthalmaz*, ha nincs benne két szomszédos pont.

G-ben a független ponthalmaz maximális méretét $\alpha(G)$-vel jelöljük.

Lefogó ponthalmaz: Egy $X \subseteq V(G)$ *lefogó ponthalmaz*, ha *G* minden élének legalább az egyik végpontját tartalmazza.

G-ben a lefogó pontok minimális számát $\tau(G)$ jelöli.

Állítás: Független ponthalmaz komplementere lefogó ponthalmaz.

Fokszám: Az *x* pontból kiinduló élek számát az *x* pont *fokszám*ának nevezzük és $d(x)$-szel jelöljük.

Megjegyzés: Hurokéleket a fokszám számolásakor kétszer kell számolni.

k-reguláris gráf: Ha egy gráf minden pontjának foka *k*, *k-reguláris*nak nevezzük.

Részgráf: Egy $G'(V', E')$ gráfot a $G(V, E)$ gráf *részgráf*jának nevezünk, ha $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ és két V'-beli pont csak akkor van éllel összekötve, ha *G*-ben is vezetett köztük él. Jelölés: $G' \subseteq G$.

Megjegyzés: Fontos, hogy $G'(V', E')$ valóban gráf legyen, azaz *E'*-ben csak olyan pontpárok lehetnek, melyek mindkét tagja *V'*-beli.

Feszítő részgráf: Egy $G'(V', E')$ gráfot a $G(V, E)$ gráf *feszítő részgráf*jának nevezünk, ha G' részgráfja *G*-nek és *G* összes pontját tartalmazza, azaz $V' = V$.

Feszített részgráf: Egy G' gráfot a *G* gráf *feszített részgráfjának* nevezünk, ha részgráfja *G*-nek, és *G*-nek minden olyan élét tartalmazza, amely G' két pontját köti össze. Azaz, ha úgy keletkezik, hogy *G*-ből bizonyos pontokat a belőlük kiinduló élekkel együtt elhagyunk, más éleket pedig nem.

*<u>Páros gráf</u>: Páros gráf*nak nevezünk egy gráfot, ha pontjai két osztályba sorolhatók úgy, hogy az osztályokon belül nem vezet él.

Lássunk most néhány egyszerű tételt, melyeket a későbbi tételek bizonyításában felhasználunk.

<u>2.1. Tétel</u>: Egyszerű gráf pontjainak összfokszáma egyenlő az élek számának kétszeresével. $\sum_{x \in V} d(x) = 2 \cdot |E| = 2e$. **[1]**

<u>Bizonyítás:</u>

A fokszámok összegzése során minden pontra megszámoljuk, hogy hány él illeszkedik hozzá. Mivel minden élnek két végpontja van, pontosan két ponthoz illeszkedik, így minden élt pontosan kétszer számolunk meg. **[1]**

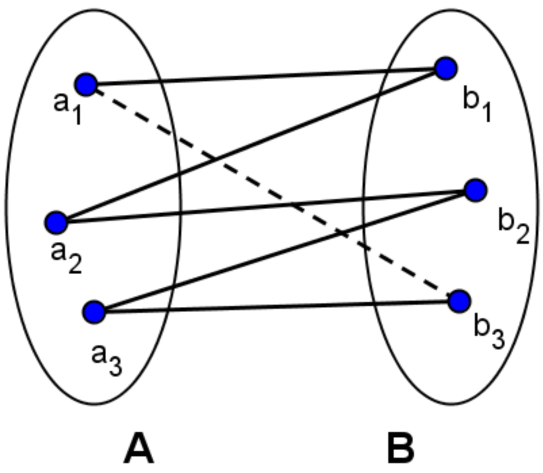
□

<u>2.2. Tétel:</u> Egy *G* gráf pontosan akkor páros, ha nem tartalmaz részgráfként páratlan kört.

A tétel egy másik megfogalmazását találjuk A számítástudomány alapjai című tankönyvben. **[1]**

<u>Bizonyítás:</u>

Az egyik irány triviális, hiszen ha *C* egy kör a páros gráfban, akkor *C* pontjai a gráf két osztálya, *A* és *B* között alternálnak. Így *C* biztosan páros sok pontból áll, páratlan kör nem lehet. (*4. ábra*)



4. ábra

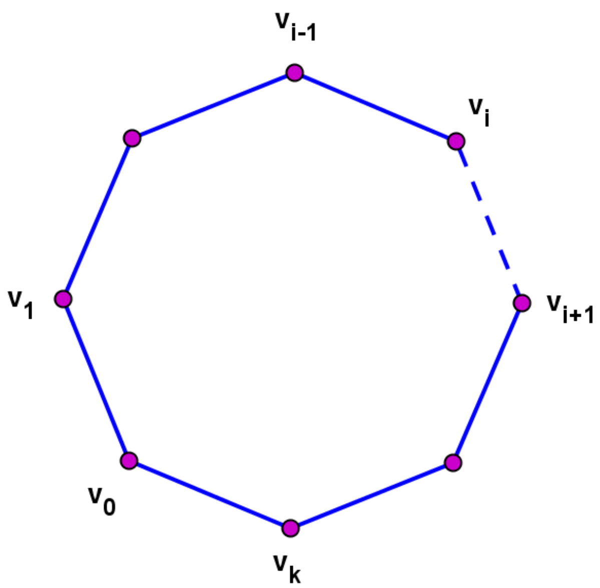
Nézzük most a másik irányt, azaz ha G nem tartalmaz páratlan kört. Ekkor G minden köre páros. Megmutatjuk, hogy ilyenkor a gráf pontjai két halmazba (A-ba és B-be) oszthatók úgy, hogy a halmazokon belül ne vezessenek élek. Válasszuk ki egy tetszőleges x pontját a gráfnak, és helyezzük el az A halmazban. Ekkor x szomszédjait tegyük a B halmazba. Az így B-be kerülő pontok szomszédjait ismét A-ba, és így tovább. Ezt az eljárást addig folytatjuk, míg a gráf összes pontját el nem helyeztük a két halmazban. Ha a kör bezárult, de a gráfnak még van el nem helyezett pontja, azaz G nem összefüggő, ezt az eljárást minden komponensre ismételjük meg. Így biztosan páros gráfot kapunk, hiszen ha az egyik halmazban lenne két szomszédos csúcs, akkor a gráf tartalmazna páratlan kört, ami a feltevésnek ellentmond.

$\square$

<u>2.3. Tétel</u>: Összefüggő G gráf C körének egy élét elhagyva a gráf összefüggő marad.

<u>Bizonyítás:</u>

Mivel egy él elhagyásával csak az adott két pont között vezető út szűnhet meg, ezért elég azt megvizsgálni, hogy a kör egy $\{x, y\}$ élét elhagyva, x és y között még vezet út. Tehát ha a gráf komponensekre esik szét, az csak úgy lehetséges, hogy x és y különböző komponensbe tartozik.



5. ábra

Mivel a kör definíciója alapján az őt alkotó élsorozat elemei ciklikusan permutálhatóak, ezért egy tetszőleges $v_i \in C$ $(0 \le i \le k)$ csúcsból kétfelé juthatunk el a

$v_j \in C \quad (j \neq i,\ 0 \leq j \leq n)$ csúcsba (5. *ábra*). Töröljünk ki $C \subset G$-ből egy tetszőleges $\{v_i, v_{i+1}\}$ élt. Ekkor v_i és v_{i+1} között még vezet út, mégpedig $\{v_i, v_{i-1}, v_{i-2}, ..., v_1, v_o, v_k, ..., v_{i+2}, v_{i+1}\}$, ami ellentmond annak, hogy x és y különböző komponensbe tartozik. Ezt a fenti ábra szemlélteti. (5. *ábra*)

□

3. Mantel tétel

3.1. Rávezetés

Egy n pontú egyszerű gráfnak legfeljebb $\binom{n}{2}$ éle lehet, mivel adott csúcsszám esetén egyszerű gráfok között a teljes gráf a maximális élszámú, és annak pedig $\frac{n(n-1)}{2}$ éle van, hiszen minden kiválasztott pontból bármely másik ponthoz vezet él, de így minden élt kétszer számolnánk, ezért osztanunk kell 2-vel. Ez éppen $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Ha nincs a gráfban kör, akkor legfeljebb $(n-1)$ éle lehet. Ez épp egy fa, amely az összes csúcsot tartalmazza.

Ha a gráf nem összefüggő, legfeljebb hány éle lehet? Tegyük fel, hogy a gráf pontjai két csoportra oszthatók, melyeknek nincsen közös pontjuk, és nem vezet köztük él. Ez már elég ahhoz, hogy a gráf ne legyen összefüggő. Ekkor az egyik csoportban k db csúcs van, így a másikban $(n-k)$, mivel a gráfnak összesen n pontja van. Legyen $k \leq n-k$. Ekkor $k \leq \frac{n}{2}$. Ha így a lehető legtöbb élt akarjuk behúzni, akkor azt az esetet kell tekintenünk, amikor a két csoport két teljes részgráfja az eredeti G gráfnak. Ekkor összesen

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!} + \frac{(n-k)!}{2!(n-k-2)!} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} =$$

$$= \frac{k^2 - k + n^2 - nk - n - kn + k^2 + k}{2} = \frac{n^2 - n}{2} - k(n-k) = \binom{n}{2} - k(n-k)$$

éle van G-nek. Az a kérdés, hogy ez a kifejezés mikor lesz maximális. Mivel $\binom{n}{2}$ és $k(n-k)$ is pozitív, a fenti kifejezés akkor maximális, ha $k(n-k)$ minimális (hiszen $\binom{n}{2}$ állandó, nem függ k-tól). Mivel k az egyik csoportban lévő csúcsok száma, $1 \le k \le n-1$, $k \in \mathbb{N}$. Így azt kapjuk, hogy az élszám akkor lesz maximális, ha $k=1$, illetve ha $k=n-1$. A két eset szimmetrikus. Tehát nem összefüggő gráf esetén a maximális élszám

$$\binom{n}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\binom{n-1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy akkor tudjuk a legtöbb élt behúzni, ha egy izolált pontunk van, és a többi pont teljes gráfot alkot.

Egy n pontú egyszerű, páratlan kört nem tartalmazó gráfnak legfeljebb $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ éle lehet, hiszen egy gráfban – a ***2.2***-es tétel szerint -, pontosan akkor nincs páratlan kör, ha páros. Esetünkben a páros gráf éleinek száma $k(n-k)$. Így a maximális élszám páros gráf esetén éppen $\left(\frac{n}{2}\right)^2$, hiszen egy kéttényezős szorzat értéke akkor maximális, ha a két szorzótényező egyenlő. Tehát $k(n-k) \le \left(\frac{n}{2}\right)^2$.

Mennyiben változna a helyzet, ha nem az összes páratlan kört, hanem csak néhányat, például a 3-hosszúakat, zárjuk ki?

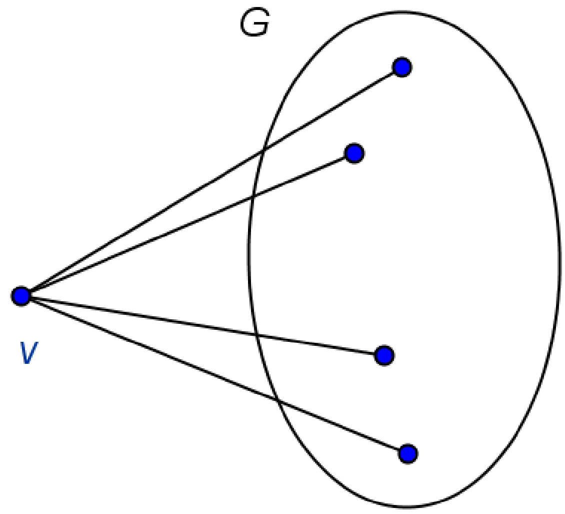
3.2. Mantel tétel és bizonyításai

<u>**3.1. Tétel (*Mantel*)**</u>: Az n pontú háromszögmentes egyszerű gráf éleinek száma legfeljebb $\frac{n^2}{4}$, azaz $|E(G)| \le \frac{n^2}{4}$. **[5]**

<u>*Megjegyzés:*</u> Ha n páros, akkor annak a teljes páros gráfnak, amelynek mindkét osztályában $\frac{n}{2}$ pontja van, éppen $\frac{n^2}{4}$ éle van, tehát a becslés éles, ami azt jelenti, hogy nem javítható.

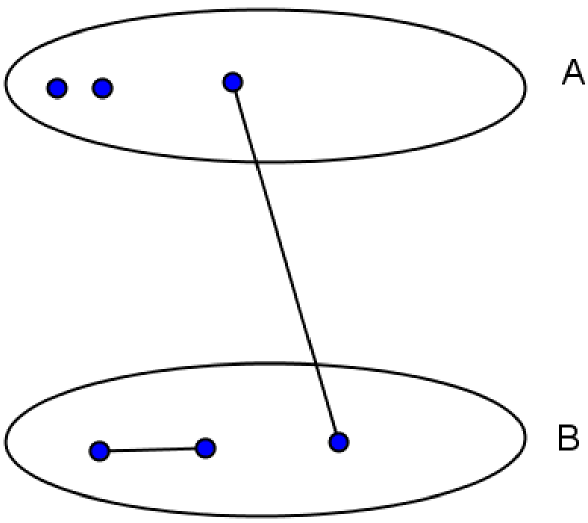
Bizonyítás **1**.:

Ha a gráf háromszögmentes, akkor a v csúcs szomszédjai független ponthalmazt alkotnak. (*6. ábra*) Ha G-ben a maximális független ponthalmaz mérete k, akkor minden csúcsra $d(v) \leq k$. Hiszen ha lenne egy pont (x), aminek a foka például $k+1$, akkor nem k lenne a legnagyobb független ponthalmaz mérete, hanem $k+1$.



6. ábra

Legyen $A \subseteq V(G)$ független és $|A| = k$ (ahol $|A|$ az A halmaz számosságát jelöli). A többi pont által alkotott halmaz legyen B. (*7. ábra*)



7. ábra

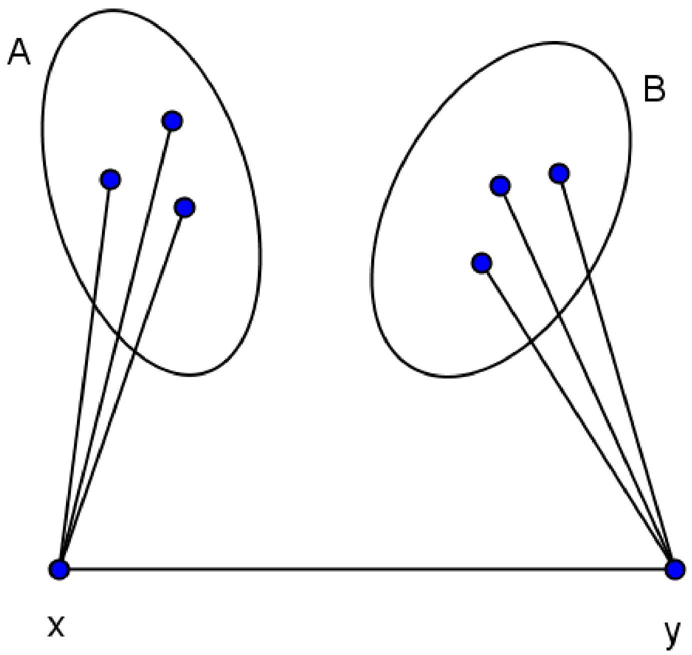
Ekkor $e(G) \leq \sum_{v \in B} d(v)$, mivel A-n belül nem halad él. Egyenlőség akkor teljesül, ha nincsen olyan él, ami két B-beli pontot köt össze, azaz ha G páros. Minden (B-beli) pont foka legfeljebb k, mivel minden pont szomszédjai független halmazt alkotnak, tehát $e(G) \leq \sum_{v \in B} d(v) \leq k|B| = k(n-k)$, mert $|A| = k$, $|B| = n-k$. Ahogy azt a rávezetésben láthattuk, $k(n-k) \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$. **[3]**

□

Ez a bizonyítás tulajdonképpen azt bizonyítja, hogy ha egy G egyszerű gráfban nincsen háromszög, akkor $|E(G)| \leq \alpha(G) \cdot \tau(G)$, hiszen ekkor minden csúcs foka legfeljebb $\alpha(G)$ lehet, és ezeket egy maximális független halmaz komplementerére (ami minimális lefogó halmaz, így $\tau(G)$ pontja van) összegezzük.

Bizonyítás **2**.:

Válasszunk ki két pontot, amelyek közt vezet él. Legyen ez x és y. Jelöljük A-val x-nek y-tól különböző, B-vel pedig y-nak x-től különböző szomszédjainak halmazát. (8. *ábra*)



8. ábra

Ekkor $A \cap B = \emptyset$, hiszen ha A-nak és B-nek lenne közös pontja, például z, akkor az $\{x, y\}$, $\{y, z\}$ és $\{z, x\}$ élek egy háromszöget alkotnának, ami a tétel feltételének ellentmond. Tehát x-nek és y-nak nincs közös szomszédja. Természetesen hasonló okok miatt *A*-n, illetve *B*-n belül sem vezethetnek élek. (Ezt használtuk fel a bizonyítás 1-ben.) Ekkor $d(x)+d(y)\le n$, hiszen ha *x*-et és *y*-t leszámítva a többi pont mindegyike vagy *x*-szel, vagy *y*-nal van éllel összekötve, akkor *x*-nek és *y*-nak együtt összesen legfeljebb $(n-2)$ egymástól különböző szomszédja lehet, és mindkettőnek szomszédja a másik, tehát az még plusz egy-egy él. Így $d(x)+d(y)\le(n-2)+1+1=n$. Adjuk össze ezt az összes élre. Ekkor minden $v\in V(G)$-re $d(v)$ éppen $d(v)$-szer szerepel, és ha a *G* gráfnak összesen *e* éle van, akkor az egyenlőtlenség az összeadás után a következőképpen alakul:

$$\sum_{v\in V(G)} d(v)^2 \le en\,.$$

Az egyenlet mindkét oldalát *n*-nel elosztva a következőt kapjuk:

$$\frac{\sum_{v\in V(G)} d(v)^2}{n} \le e\,. \qquad (*)$$

A ***2.1***-es tétel alapján tudjuk, hogy $\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2e$. Most is osszunk le *n*-nel:

$$\frac{\sum_{v\in V(G)} d(v)}{n} = \frac{2e}{n}\,.$$

Az utóbbi egyenletet emeljük négyzetre:

$$\left(\frac{\sum_{v\in V(G)} d(v)}{n}\right)^2 = \frac{4e^2}{n^2} \qquad (**)$$

Alkalmazzuk ezután $(*)$-ra és $(**)$-ra a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sum d(x)}{n} \le \sqrt{\frac{\sum d(x)^2}{n}} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\sum d(x)}{n}\right)^2 \le \frac{\sum d(x)^2}{n}\,.$$

Ezek alapján tehát,

$$\frac{4e^2}{n^2} = \left(\frac{\sum d(x)}{n}\right)^2 \le \frac{\sum d(x)^2}{n} \le e \quad\Rightarrow\quad \frac{4e^2}{n^2} \le e \quad\Rightarrow\quad e \le \frac{n^2}{4}\,.$$

Ráadásul, mivel $e\in\mathbb{N}$, így az oszthatóság miatt $e \le \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ is teljesül. **[5]**

□

Ezt a bizonyítást kevésbé részletesen leírva Szőnyi Tamás Turán tételkör című jegyzetében megtalálhatjuk. **[5]**, **[6]**

Bizonyítás **3.**:

A Mantel-tétel a Turán-tétel speciális eseteként is értelmezhető. Tehát, ha a Turán-tételt beláttuk, a Mantel-tétel is automatikusan bizonyítást nyer. (A *Turán-tétel*t és bizonyítását ld. később a **7.** pontban.)

□

3.3. Kiegészítés a Mantel tételhez

A Mantel-tételben egyenlőség csak abban az esetben lehetséges, ha minden fokszám megegyezik. Ehhez (a 2. bizonyítás alapján) szükséges, hogy $d(x)+d(y)=n$, minden élre. Ha $\exists\{x,y\}$ él, melyre $d(x)+d(y)=n$, akkor G olyan páros gráf, amelynek két osztálya $G(x)$ és $G(y)$. (Ahol $G(x)$, illetve $G(y)$, az *x*, illetve *y* csúcs szomszédjainak halmazát jelöli.) A rávezetés szerint *G*-nek akkor lesz a legtöbb éle, ha *k* és $n-k$ a lehető legkevésbé tér el egymástól. Ha tehát $e=\frac{n^2}{4}$, akkor $n=2l$ esetén, ahol $l\in\mathbb{N}$, G teljes páros gráf, melynek két $\frac{n}{2}$ elemű osztálya van. Ha $n=2l+1$ és $l\in\mathbb{N}$, akkor $e\le\frac{n^2}{4}$ egyenlőtlenség valójában $e\le\frac{n^2-1}{4}$- et jelent, hiszen $\frac{n^2}{4}=\frac{(2l+1)^2}{4}=\frac{4l^2+4l+1}{4}$ és $e\in\mathbb{N}$. Egyenlőség, azaz $e=\frac{n^2-1}{4}$ esetén G olyan páros gráf, melynek egyik osztálya $\frac{n+1}{2}$, másik pedig $\frac{n-1}{2}$ elemű.

A fentiek alapján a következő tételt fogalmazhatjuk meg:

<u>3.2. Tétel</u>: Legyen G olyan háromszögmentes gráf, melynek élszáma $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$. Ekkor G olyan teljes páros gráf, melynek két osztálya $n=2l$ $(l\in\mathbb{N})$ esetén $\frac{n}{2}$ elemű, $n=2l+1$ $(l\in\mathbb{N})$ esetén pedig $\frac{n+1}{2}$, illetve $\frac{n-1}{2}$ elemű.

Megjegyzés: Ezt is tekinthetjük a Turán-tétel speciális esetének.

Erről bővebben Szőnyi Tamás Turán tételkör című jegyzetében olvashatunk. **[5]**, **[6]**

Tekintsük a ***3.1***-es tétel második bizonyításának végét, és vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor G nem páros gráf. Ebben az esetben $d(x)+d(y)\le n-1$, $\forall\{x,y\}$ élre. Ekkor, ha a ***3.1***-es tétel második bizonyításának számolását erre vonatkozóan megismételjük, $\sum_{v\in V(G)} d(v)^2 \le en$ helyett $\sum_{v\in V(G)} d(v)^2 \le e(n-1)$-et kapunk. Ebből

$$\frac{4e^2}{n} \le e(n-1) \;\;\Rightarrow\;\; e \le \frac{n(n-1)}{4}.$$

A fentiek alapján a következő állítást fogalmazhatjuk meg:

3.3 Állítás: Ha valamely $\{x,y\}$ élre $d(x)+d(y)=n$, akkor a gráf olyan páros gráf, amelynek két osztálya, x illetve y szomszédjai. Ha G nem páros, akkor $|E(G)| \le \left\lfloor \frac{n(n-1)}{4} \right\rfloor$.

4. Általánosítások

Mivel a háromszöget felfoghatjuk 3-hosszú körként és 3 csúcsú teljes részgráfként is, kétféleképpen is általánosíthatunk.

4.1. Háromszög, mint 3-hosszú kör

Vizsgáljuk meg először, hogyan alakul a helyzet, ha C_4-et, azaz a 4-hosszú köröket zárjuk ki. Ezzel a kérdéssel Erdős Pál foglalkozott egy számelméleti probléma kapcsán.

4.1. Tétel (*Jensen-egyenlőtlenség*): Egy *f* függvény akkor és csak akkor konvex egy *I* intervallumon, ha $x_1,\dots,x_n \in I$, $t_1,\dots,t_n > 0$ és $t_1+\dots+t_n=1$-ből következik, hogy

$$f(t_1x_1+\dots+t_nx_n) \le t_1 f(x_1)+\dots+t_n f(x_n).$$

A *Jensen-egyenlőtlenség*et és bizonyítását megtaláljuk az Analízis I. tankönyvben. **[7]**

4.2. Következmény: Ha az *f* függvény konvex az *I* intervallumon, akkor

$$x_1,\dots,x_n \in I,\; t_1=\dots=t_n=\frac{1}{n},\; (n\in\mathbb{N}) \text{ és}$$

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \text{ teljesül.}$$

<u>4.3. Tétel:</u> Legyen G egy n csúcsú egyszerű gráf, amely nem tartalmaz részgráfként 4-hosszú kört, azaz $C_4 \not\subset G$. Ekkor $|E(G)| \leq \frac{n}{4}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)$. **[6]**

<u>Bizonyítás **1**.</u>:

Számoljuk meg pontról pontra az összes cseresznyét a gráfban, vagyis azokat az élpárokat, amelyeknek egyik végpontja közös! Ekkor eredményül $\sum_{x\in V(G)}\binom{d(x)}{2}$-et kapunk, hiszen egy x pont $\binom{d(x)}{2}$-féleképpen lehet egy cseresznye csúcsa. Egy gráf pontjait $\binom{n}{2}$-féleképpen lehet párba állítani. Ugyanarra a pontpárra, mint a cseresznye két végpontjára, két különböző cseresznye nem illeszkedhet, mivel azok együtt egy 4-hosszú kört alkotnának. Így

$$\sum_{x\in V(G)}\binom{d(x)}{2}\leq\binom{n}{2}.$$

Definiáljuk a következő függvényt: $f : x \mapsto \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$.

Alkalmazzuk f-re a *Jensen-egyenlőtlenség*et, illetve az abból származó ***4.2***-es következményt, - amit megtehetünk, mivel a fent definiált f függvény konvex (amely abból is látható, hogy benne az x^2 együtthatója pozitív). Az egyszerűség kedvéért $|E(G)|$-et e-vel jelöljük. Ekkor a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\binom{\frac{\sum_{x\in V(G)} d(x)}{n}}{2}\leq\frac{\sum_{x\in V(G)}\binom{d(x)}{2}}{n}.$$

Az egyenlőtlenséget n-nel megszorozva, majd a ***2.1***-es tételt és a cseresznyék számára kapott felső becslést alkalmazva, az egyenlőtlenség a következőképpen alakul:

$$n\binom{\frac{\sum_{x\in V(G)} d(x)}{n}}{2}\leq\sum_{x\in V(G)}\binom{d(x)}{2} \quad\Rightarrow\quad n\binom{\frac{2e}{n}}{2}\leq\binom{n}{2}.$$

Nullára rendezve az egyenlőtlenséget, az alábbiakat kapjuk:

$$n\frac{\frac{2e}{n}\left(\frac{2e}{n}-1\right)}{2}\le\frac{n(n-1)}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{2e}{n}\left(\frac{2e}{n}-1\right)\le(n-1)\quad\Rightarrow\quad 4e^2-2en-n^2(n-1)\le 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásában az egyik gyök sose lesz pozitív, így azt nem kell figyelembe vennünk, hiszen nem ad új korlátot *e*–re. (Triviális, hogy negatív az élszám nem lehet.) Tehát az élszámra a következő felső becslést nyerjük:

$$e\le\frac{2n+\sqrt{4n^2+16n^2(n-1)}}{8}=\frac{n}{4}\left(1+\sqrt{1+4(n-1)}\right)=\frac{n}{4}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)$$

□

<u>Bizonyítás **2.**</u>:

A Tételt a Mantel-tétel 2-es bizonyítása alapján is beláthatjuk. Ekkor

$$\sum_{x\in V(G)}\binom{d(x)}{2}\le\binom{n}{2}$$

A binomiális együtthatókat kifejtve

$$\sum_{x\in V(G)}\frac{d(x)\left(d(x)-1\right)}{2}\le\frac{n(n-1)}{2},$$

a beszorzást elvégezve

$$\sum_{x\in V(G)}\left(d(x)\right)^2-\sum_{x\in V(G)}d(x)\le n(n-1).$$

Felhasználva, hogy a ***2.1***-es tétel szerint $\sum_{x\in V(G)}d(x)=2e$,

$$\sum_{x\in V(G)}\left(d(x)\right)^2-2e\le n(n-1)\text{ adódik.}$$

Ebből $\sum_{x\in V(G)}\left(d(x)\right)^2$ -re a következő felső becslést kapjuk:

$$\sum_{x\in V(G)}\left(d(x)\right)^2\le n(n-1)+2e.$$

Alkalmazzuk itt is a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{\sum_{x\in V(G)}d(x)}{n}\right)^2\le\frac{\sum_{x\in V(G)}d(x)^2}{n}.$$

Az egyenlőtlenséget $\sum_{x \in V(G)} (d(x))^2$ -re rendezve az eredmény a következő:

$$\frac{\left(\sum_{x \in V(G)} d(x)\right)^2}{n} \leq \sum_{x \in V(G)} d(x)^2 .$$

Használjuk fel ismét, hogy $\sum_{x \in V(G)} d(x) = 2e$. Ekkor

$$\frac{\left(\sum_{x \in V(G)} d(x)\right)^2}{n} = \frac{4e^2}{n} .$$

A fentiek alapján $\sum_{x \in V(G)} (d(x))^2$ -re az alábbi alsó becslést kapjuk:

$$\frac{4e^2}{n} \leq \sum_{x \in V(G)} d(x)^2 .$$

A két becslést összevonva:

$$\frac{4e^2}{n} \leq \sum_{x \in V(G)} (d(x))^2 \leq n(n-1) + 2e .$$

Az egyenlőtlenség két szélét egybeírva és rendezve ismét a

$$4e^2 - 2en - n^2(n-1) \leq 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk, melyből az első bizonyítás szerint épp a tétel állítása következik, azaz $e \leq \frac{n}{4}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)$.

□

4.2. Háromszög, mint 3 csúcsú teljes részgráf

Ezt az általánosítást később, a Turán-tétel tárgyalásánál fejtem ki. (*7*-es pont)

5. Középiskolai tárgyalásra alkalmas témák

Középiskolában a gráfelmélet csak érintőlegesen szerepel a tananyagban. Mivel szerintem a hétköznapi életben is vannak fontos alkalmazásai (például útvonaltervező programok, ismeretségi térképek), kicsit bővebben is érdemes lenne beépíteni a tananyagba. Ehhez a következő vázlatos tervet, és egy-két, középiskolai módszerekkel is megoldható, egyszerű extremális problémákat megfogalmazó feladatot készítettem. Véleményem szerint a Mantel-tétel és bizonyítása is elmondható, kellő előkészületek mellett. Mindez természetesen csak egy alap szemléletmódot ad.

A vázlatos terv:

- Alapfogalmak ismertetése:
    - gráf (1. definíciója), út, kör, fa, élszám, fokszám, összefüggő gráf, egyszerű gráf, teljes gráf, páros gráf
- Fákról szóló tételek és bizonyításuk
- Feladatok kitűzése
- Feladatok megoldása
- Mantel-tétel
- A tétel 2. bizonyításának levezetése

A gráf első definícióját tartom középiskolások számára könnyebben megérthetőnek és elképzelhetőnek, ezért azt használnám az oktatásban. Hasonló módon a Mantel-tétel 2. bizonyítási formája követhetőbbnek tűnik, ezért annak levezetését választanám.

5.1.Fák

Az ***2.1*** pontban megfogalmazott definíció alapján fának nevezzük azokat a gráfokat, amelyek összefüggőek és nem tartalmaznak kört. A fákat „minimálisan összefüggő” és „maximálisan kör nélküli” gráfokként is definiálhatnánk, amely az alábbi tételből következik.

<u>5.1. Tétel:</u>

I.) Egy *G* gráf pontosan akkor fa, ha összefüggő, de tetszőleges élét elhagyva szétesik.

II.) Egy *G* gráf pontosan akkor fa, ha körmentes, de tetszőleges új élt behúzva kör keletkezik.

<u>Bizonyítás:</u>

I.) Először azt az irányt látjuk be, hogy ha a gráf fa, akkor teljesül rá a tételbeli feltétel. A definíció alapján *G* biztosan összefüggő, így annak bizonyításával nem kell foglalkoznunk. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy *G* bármely élét elhagyva, az így kapott gráf már nem összefüggő. Ehhez tegyük fel indirekt, hogy *G*-nek létezik $\{x, y\}$ éle, melyet elhagyva, a keletkezett *G'* gráf összefüggő marad. Ez azt jelenti, hogy *G'*-ben létezik *x*-et és *y*-t összekötő *U* út. Helyezzük most vissza az $\{x, y\}$ élt. Ekkor, ha *U*-hoz hozzávesszük az $\{x, y\}$ élt, együtt kört alkotnak, tehát az eredeti *G* gráf nem volt körmentes, tehát nem lehetett fa. Ezért az indirekt feltevésünk helytelen, azaz *G* tetszőleges élét elhagyva a gráf nem marad összefüggő.

Vizsgáljuk meg most a másik irányt. Mivel tudjuk, hogy a gráf összefüggő, elég azt belátnunk, hogy nem tartalmaz kört. Tegyük fel ismét indirekt, hogy *G*-ben van egy *C* kör. Ez azonban ellentmond a tétel feltételének, hiszen a ***2.3***-as tétel szerint *C* bármely élét elhagyva a gráf összefüggő marad.

II.) Ha *G* fa, akkor a definíció alapján biztosan nem tartalmaz kört. Tegyük fel indirekt, hogy *G*-ben egy új élt, $\{x, y\}$-t behúzva, a kapott *G'* gráfban nem keletkezik kör. Ez azonban azt jelenti, hogy eddig nem vezetett *x* és *y* között út, tehát *G* nem volt összefüggő, így fa sem lehetett.

Lássuk most a másik irányt. Azt tudjuk, hogy *G* körmentes, tehát csak azt kell belátnunk, hogy összefüggő. Ha *G* nem lenne összefüggő, az azt jelentené, hogy be tudunk húzni úgy élt, hogy a gráfban ne keletkezzen kör. Ekkor már összefüggő lesz, de körmentes, ami ellentmond a feltételnek.

□

5.2. Tétel: Bármely legalább két pontot tartalmazó fában létezik legalább két elsőfokú pont.

Bizonyítás:

Legyen a fában lévő leghosszabb út $(x_1, x_2, ..., x_k)$. Most belátjuk, hogy ennek mindkét végpontja elsőfokú kell, hogy legyen. Hiszen ha például x_1 nem elsőfokú, akkor vezetne belőle még egy él a fa valamely pontjába, amely az út többi pontjába nem vezethet, mert akkor kört alkotnának a fában. Azonban egy új (*y*) pontba sem mehet, mivel akkor *y*-t az úthoz hozzávéve, $(y, x_1, x_2, ..., x_k)$ hosszabb utat jelentene, ami ellentmond a feltevésünknek.

□

A fa definíciójában szereplő két tulajdonság a fa élszámát meghatározza, hiszen az összefüggőség alsó, a körmentesség pedig egy felső becslést ad az élszámra. Mivel ez a kettő megegyezik, így a fa éleinek számát a pontjai számának ismeretében a definíciója valóban meghatározza. Ennek alapján a következő tételt fogalmazhatjuk meg.

5.3. Tétel: Minden n pontú fa élszáma $n-1$.

Bizonyítás:

A tétel bizonyítását a pontszámra vonatkozó teljes indukcióval végezzük. $n=1$-re és $n=2$-re az állítás triviális. Tegyük fel, hogy az állítás minden $n<n_o$-ra teljesül. Ekkor, ha az n_o pontú fából elhagyunk egy elsőfokú pontot –amit az ***5.2***-es tétel miatt megtehetünk-, és a hozzá tartozó egyetlen élt, akkor a maradék gráf fa lesz, melynek n_o-1 pontja és n_o-2 éle van, - hiszen rá már igaz az állítás -, így az elhagyott élt újra hozzávéve, azt kapjuk, hogy az n_o pontú fának n_o-1 éle van.

□

5.4. Definíció: Egy *G* gráf *feszítőfá*ján azt az *F* gráfot érjük, amely fa és feszítő részgráfja *G*-nek. **[1]**

5.5. Tétel: Minden összefüggő *G* gráfnak létezik feszítő fája. **[1]**

Bizonyítás:

Ha a gráf nem tartalmaz kört, akkor *G* maga feszítő fa, hiszen összefüggő és körmentes.

Ha *G*-ben van kör, akkor hagyjuk el a kör egy tetszőleges élét. Így *G* – a ***2.3***-as tétel miatt -, még összefüggő marad. Ha *G* még mindig tartalmaz kört, ismét hagyjuk el a kör egy élét. Ezt az eljárást addig folytassuk, míg találunk kört a gráfban. Az így kapott gráf a ***2.3***-as tétel miatt biztosan összefüggő és mivel a gráfból pontot nem hagytunk el, feszítőfát kaptunk.

□

A fákról és tulajdonságaikról bővebben a Számítástudomány alapjai és a Diszkrét matematika című tankönyvben olvashatunk. **[1]**, **[2]**

5.2.Feladatok

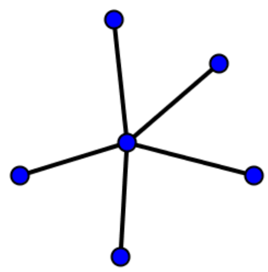
1. Feladat: Legfeljebb hány élű lehet egy *n* csúcsú, három élű csillagot nem tartalmazó egyszerű gráf?

(A feladatot a következőképpen is megfogalmazhatjuk: Legalább hány éle kell, hogy legyen egy *n* csúcsú egyszerű gráfnak, hogy *biztosan* tartalmazzon három élű csillagot?)

1. Megoldás: A kérdést úgy is értelmezhetjük, hogy legfeljebb hány éle lehet egy gráfnak, hogy ne tartalmazzon 3-adfokú pontot. Ekkor az összes csúcs legfeljebb másodfokú, vagyis a gráf éleinek száma maximum *n*. Ha minden csúcs másodfokú, a gráf élszáma éppen *n*, ha pedig minden csúcs legfeljebb másodfokú, akkor az élszám legfeljebb *n*. Tehát ahhoz, hogy legyen legalább egy 3-adfokú pont, legalább $(n+1)$ élt kell behúzni. (Ezzel a feladat átfogalmazására megkaptuk a választ.) Vagyis legfeljebb *n* éle lehet egy *n* csúcsú gráfnak úgy, hogy ne tartalmazzon 3-adfokú pontot. Az *n*-hosszú kör, illetve bármely olyan gráf, amelynek komponensei körök, ennyi élt tartalmaz.

2. Feladat: Legfeljebb hány éle lehet egy 3-hosszú utat nem tartalmazó *n* csúcsú egyszerű gráfnak?

2. Megoldás: Ekkor – ha $n \geq 4$ és a gráf összefüggő - a legtöbb éle annak a gráfnak van, amelyben a lehető legtöbb pont között vezet 2-hosszú út. Tekintsük a gráf egy feszítő fáját, amely egy a gráf összes pontját tartalmazó csillag, mert minden olyan fában, ami nem csillag, van 3-hosszú út. (*9. ábra*). Mivel egyik pont a csillag középpontja, így összesen $(n-1)$ éle van. (Ez az ***5.3***-as tételből is következik.) Plusz él csak akkor lehet, ha háromszöget is tartalmaz a gráf. Ekkor azonban 3-hosszú út is keletkezik, mert $n \geq 4$. Azaz akárhogyan szeretnénk új élt behúzni, biztosan keletkezik 3-hosszú út.

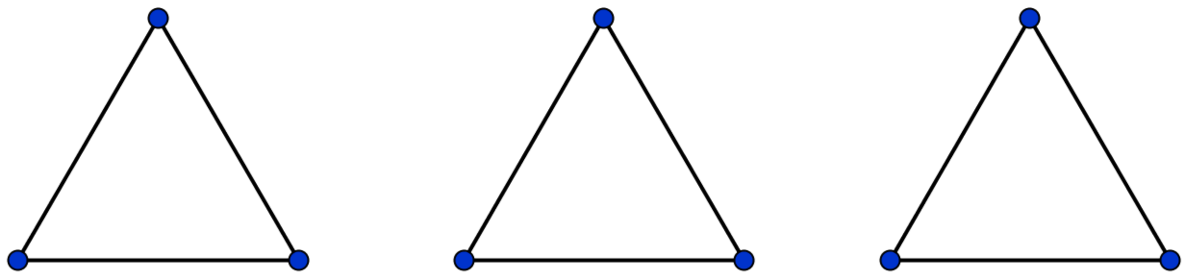


9. ábra

Tehát a legtöbb él, amelyet egy $n \geq 4$ csúcsú összefüggő, (3-hosszú út)mentes gráf tartalmazhat, $(n-1)$. Ha $n=3$, akkor a gráf egy két élű csillag vagy egy háromszög. Ekkor legfeljebb 3 éle van. $n=1,2$ esetén, a gráf egy izolált pont, vagy egyetlen él, amit csillagnak is tekinthetünk.

De mi a helyzet, ha a gráf nem feltétlen összefüggő?

Ahhoz, hogy 3-hosszú utat tartalmazhasson a gráf, kell, hogy legyen legalább három pontja. Az rögtön látszik, hogy 4-hosszú, illetve annál hosszabb kört a gráf nem tartalmazhat, hiszen abban részgráfként a 3-hosszú út megtalálható. A 3-hosszú körnek három csúcsa és három éle van, még sincs benne 3-hosszú út. Ha a gráfot ilyen körökből álló komponensekből, azaz háromszögekből építjük fel, a maximális élszámra $(n-1)$ helyett n-et kapunk, amennyiben n osztható 3-mal. (10. *ábra*)



10. ábra

<u>*Megjegyzés:*</u> Ha az n csúcsú gráfnak pontosan egy komponense csillag, a többi pedig háromszög, és nem tartalmaz 3-hosszú utat, akkor $(n-1)$ éle van. Ha s db csillag és a többi komponens háromszög, akkor $(n-s)$ élű a gráf.

<u>*3. Feladat:*</u> Legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú gráfnak, ha nem tartalmaz páratlan kört?

<u>*3. Megoldás:*</u> Páratlan kört nem tartalmazó gráf páros. Egy páros gráfnak akkor van a legtöbb éle, ha teljes, és mindkét osztálya $\frac{n}{2}$ pontot tartalmaz ha n páros, illetve az egyik osztályban $\frac{n-1}{2}$, a másikban $\frac{n+1}{2}$ pont van, ha n páratlan. Tehát a ***3.1.*** rávezetés szerint az élszám legfeljebb $\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}$, ha n páros, és $\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-1}{4}$, ha n páratlan.

6. Zarankiewicz-probléma

6.1. A probléma ismertetése

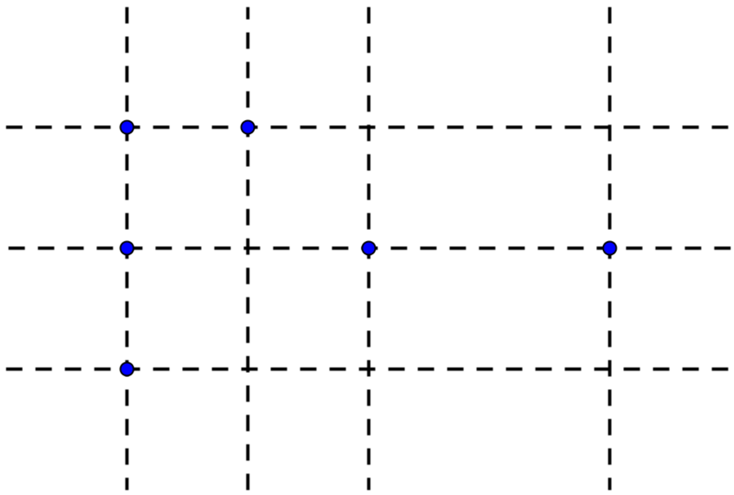
Tekintsük az $n\times m$-es négyzetrácsot, vagyis az $\{(i,j): i=1,...,m,\ j=1,...,n\}$ alakú rácspontokat. Legfeljebb hány rácspont választható ki úgy, hogy a kiválasztott pontok közt ne legyen négy olyan, amely a koordináta-tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapot alkot?

A probléma egyik végletének tekinthető, ha *n* vagy *m* kicsi. Mivel *n* és *m* helyzete szimmetrikus, végig feltehető, hogy $n \le m$. $n=1$ esetén a feladat triviális, ekkor *m* ilyen pont választható ki.

Mi a helyzet például $n=2,\ 3,$ vagy 4 esetén?

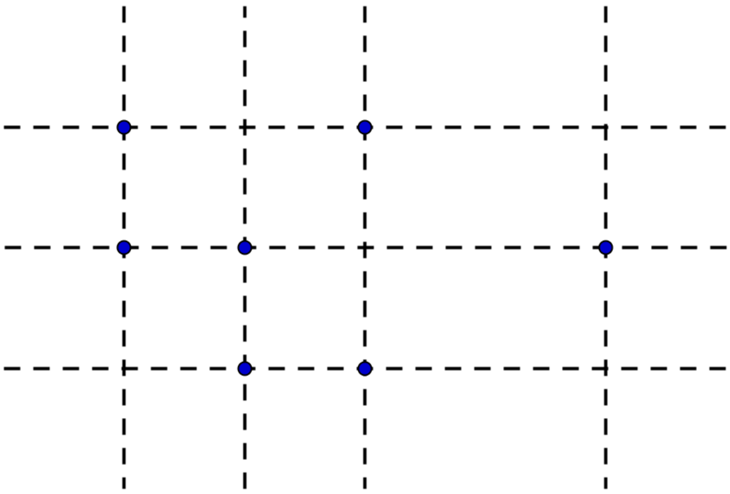
Ha $n=2$, a megoldás egyszerű, hiszen csak egyetlen oszlopban választhatunk ki két pontot, az összes többiben csak maximum egyet. Így legfeljebb $m+1$ pontot választhatunk ki összesen.

$n=3$ esetén kétféleképpen is megkonstruálhatjuk a kiválasztható rácspontokat. Először tekintsük azt az esetet, amikor az egyik oszlopba felveszünk három pontot. Ekkor az összes többi oszlopból legfeljebb egy pontot választhatunk ki. Így maximum $3+(m-1)=m+2$ pont választható ki. (*11. ábra*)



11. ábra

Ha az első oszlopból két pontot választunk csak ki, akkor a második oszlopból is ki tudunk még választani két pontot, és a harmadikból is, az összes többiből azonban legfeljebb egy pontot vehetünk, hogy ne kapjuk téglalapot. Így legfeljebb $3 \cdot 2 + (m-3) = m+3$ pontot választhatunk ki. (*12. ábra*)



12. ábra

Zarankiewicz problémáját többféleképpen átfogalmazhatjuk. Lássunk most néhány más megfogalmazást:

1. Páros gráfokkal: Hány éle lehet egy 4-hosszú kört nem tartalmazó, $(m+n)$ pontú páros gráfnak? (Azaz olyan páros gráfnak, amelynek egyik osztálya *m*, a másik pedig *n* pontot tartalmaz.)
2. Halmazokkal: Válasszuk ki az $\{1,...,n\}$ halmaz néhány részhalmazát, $A_1,...,A_m$-et az alábbi feltételnek megfelelően.

   Bármely két különböző részhalmaz metszete legfeljebb egyelemű, azaz $|A_i \cap A_j| \le 1$, ha $i \ne j,\ i, j = 1,...,m$.

   Mekkora lehet $|A_1| + |A_2| + ... + |A_m|$ maximuma?
3. Mátrixokkal: Legyen egy $m \times n$-es mátrix minden eleme 0 vagy 1. Legfeljebb hány 1-est tartalmazhat ez a mátrix, ha két sor és két oszlop keresztezési mezejében soha nem állhat mindenütt egyes?

Célunk az, hogy a 3. megfogalmazás segítségével az egyesek számát felülről becsüljük. Ennek a becslésnek a bizonyítása Reiman Istvántól származik. **[8]**, **[9]**

Mi most a másik véglettel foglalkozunk, tehát azzal, amikor $m = n$.

6.2. Reiman-tétel és bizonyítása

6.1. Tétel (*Reiman*): Egy csak 0-át és 1-est tartalmazó $n \times n$-es mátrixban, amelyben nincs két-két olyan sor és oszlop, amelyek keresztezési mezőiben csupa egyes áll mind a négy helyen, legfeljebb $\frac{n}{2}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)$ egyes lehet. Jelöljük a mátrixban szereplő egyesek számát *E*-vel. Ekkor $E \le \frac{n}{2}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)$. **[10]**

Bizonyítás:

A valós számokból álló szám *n*-eseket *n*-dimenziós vektoroknak nevezzük, amelyeket az algebrából jól ismerünk. Ha $\mathbf{x}\left(x_1,...,x_n\right)$ és $\mathbf{y}\left(y_1,...,y_n\right)$ *n*-dimenziós vektorok, akkor definiálhatjuk az összegüket: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\left(x_1+y_1,...,x_n+y_n\right)$, illetve a skaláris szorzatukat: $\mathbf{xy}=\left(x_1y_1+...+x_ny_n\right)$. Míg az első esetben ismét egy vektort kapunk, a második esetben egy valós számot. Definiálhatjuk továbbá egy vektor λ skalárral való szorzását, amely ismét egy vektort eredményez: $\lambda\mathbf{x}=\left(\lambda x_1,...,\lambda x_n\right)$.

Fogjuk fel a mátrix sorait és oszlopait olyan *n*-dimenziós vektoroknak, amelyeknek minden koordinátája 0 vagy 1. Legyenek ezek $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_n$. Figyeljük meg, hogy ha $i \ne j$, $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j$ a $\mathbf{c}_i$ és $\mathbf{c}_j$ azonos helyen álló egyeseinek számával egyenlő, ezért $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j=0$ vagy 1, mivel mátrixunk minden eleme 0 vagy 1, és nincsen két-két sor, illetve oszlop, amelyek keresztezési mezőiben négy egyes áll. Ha a skaláris szorzat lehetne 1-nél nagyobb is, az azt jelentené, hogy létezik két sor vagy két oszlop, melyeknek két azonos helyén is egyes áll, azaz két keresztezési mezőjükben négy egyes lenne.

A nevezetes azonosság alapján két vektor összegének a négyzete –amely az önmagával való skaláris szorzata -, a következőképpen számolható: $\left(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2\right)^2=\mathbf{c}_1^2+2\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2^2$. Hasonlóan írhatjuk fel három tag esetén: $\left(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3\right)^2=\left(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2\right)^2+2\left(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2\right)\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3^2=\mathbf{c}_1^2+\mathbf{c}_2^2+\mathbf{c}_3^2+2\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2+2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3+2\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3$.

Általánosan, *n* vektor összegének a négyzete:

$$\left(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+...+\mathbf{c}_n\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{c}_i^2+\sum_{i\ne j}\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{c}_i^2+2\sum_{i<j}\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\ .$$

A második summánál az $i < j$ azért szükséges, hogy egyik sornak se vegyük az önmagával vett skaláris szorzatát és mivel odaírtuk a 2-es szorzót, ne számoljuk többször a skaláris szorzatokat. E-re a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\left(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\ldots+\mathbf{c}_n\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{c}_i^2+2\sum_{i<j}\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\le E+n(n-1),$$

hiszen $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{c}_i^2=E$ és $\sum_{i\ne j}\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\le n(n-1)$, mert két (különböző) sorvektor skaláris szorzata 0 vagy 1, és n-féleképpen választhatunk ki egy sort és hozzá $(n-1)$-féleképpen egy másikat, tehát összesen $n(n-1)$ ilyen skaláris szorzatot képezhetünk, és mindegyik legfeljebb 1.

Jelöljük γ_k -val a k-adik oszlopban lévő egyesek számát. Ekkor természetesen

$$E=\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n\text{, és }\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\ldots\mathbf{c}_n=\left(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n\right).$$

Így

$$\left(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\ldots\mathbf{c}_n\right)^2=\left(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\ldots\mathbf{c}_n\right)\left(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\ldots\mathbf{c}_n\right)=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\ldots+\gamma_n^2.$$

Alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=\frac{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n}{n}\le\sqrt{\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2+\ldots+\gamma_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}.$$

Az egyenlőtlenséget négyzetre emelve és n-nel megszorozva, a következőt kapjuk:

$$\frac{E^2}{n}=\frac{\left(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n\right)^2}{n}\le\gamma_1^2+\gamma_2^2+\ldots+\gamma_n^2=\left(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\ldots\mathbf{c}_n\right)^2\le E+n(n-1).$$

Az egyenlőtlenség két szélét tekintve:

$$\frac{E^2}{n}\le E+n(n-1).$$

Rendezés után:

$$E^2-En-n^2(n-1)\le 0.$$

Ebből fejezzük ki az egyesek számát a másodfokú egyenlet megoldó képletének segítségével (az egyesek száma értelemszerűen nem lehet negatív, így a megoldásban csak az egyik gyökkel kell számolni, hiszen a másik nem pozitív):

$$E\le\frac{n+\sqrt{n^2+4n^2(n-1)}}{2}=\frac{n}{2}\left(1+\sqrt{1+4(n-1)}\right)=\frac{n}{2}\left(1+\sqrt{4n-3}\right).\ \textbf{[10]}$$

□

Megjegyzés: Ha ***4.3***-as tételt (egyenlőosztályú) páros gráfokra vonatkoztatjuk, a Zarankiewicz-probléma előző alpont szerinti 1. megfogalmazását kapjuk. Mivel a ***6.1***-es tétel a Zarankiewicz-probléma 3. megfogalmazása, ezért annak bizonyításával a ***4.3***-as tételt is beláttuk arra az esetre, amikor a gráf olyan páros gráf, amely két *n* pontú osztályból áll. Ha az itteni jelölést vesszük alapul, akkor a ***4.3***-as tételt $2n$ pontra kimondva $\frac{2n}{4}\left(1+\sqrt{8n-3}\right)=\frac{n}{2}\left(1+\sqrt{8n-3}\right)$-at kapunk. Ennél azonban több is igaz. Tekintsük ehhez a ***6.2***-es állításban kimondott, páros gráfokra való átfogalmazását a Reiman-tételnek.

A Reiman-tételt ez alapján a ***4.3***-as tétel 1. bizonyításának mintájára is beláthatjuk (amely megegyezik az alábbi állítás igazolásával).

6.2. Állítás: Legyen *G* egy $(n+n)$ pontú egyszerű páros gráf, amely nem tartalmaz 4-hosszú kört. Ekkor $\left|E(G)\right|\leq\frac{n}{2}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)$.

Bizonyítás:

Számoljuk meg pontról pontra azokat a cseresznyéket a gráfban, amelyeknek mindkét vége azonos osztályban van. Természetesen itt sem illeszkedhet ugyanarra a pontpárra, mint a cseresznye két végpontjára, két különböző cseresznye, hiszen együtt egy 4-hosszú kört alkotnának. A cseresznyék száma ebben az esetben is $\sum_{x\in V(G)}\binom{d(x)}{2}$. Itt azonban a gráf pontszáma *2n*, és külön végezzük az összegzést a két osztályra, mert a cseresznyék csak úgy helyezkedhetnek el, hogy két végpontjuk azonos osztályban van. Így a felső becslés a következőképpen alakul:

$$\sum_{x\in V(G)}\binom{d(x)}{2}\leq 2\binom{n}{2}.$$

Alkalmazzuk erre a ***4.2***-es következményt, amely alapján

$$\binom{\frac{\sum_{x\in V(G)}d(x)}{2n}}{2}\leq\frac{\sum_{x\in V(G)}\binom{d(x)}{2}}{2n}$$ -et kapunk.

Az egyenlőtlenséget *2n*-nel megszorozva és a cseresznyeszámra kapott felső becslést felhasználva,

$$2n\begin{pmatrix}\frac{\sum_{x\in V(G)} d(x)}{2n}\\ 2\end{pmatrix} \le \sum_{x\in V(G)} \binom{d(x)}{2} \quad\Rightarrow\quad 2n\begin{pmatrix}\frac{2e}{2n}\\ 2\end{pmatrix} \le 2\binom{n}{2}.$$

Alkalmazzuk $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$ összefüggést, és rendezzük az egyenlőtlenséget nullára.

$$n\frac{\frac{e}{n}\left(\frac{e}{n}-1\right)}{2} \le \frac{n(n-1)}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{e}{n}\left(\frac{e}{n}-1\right) \le (n-1) \quad\Rightarrow\quad e^2 - en - n^2(n-1) \le 0.$$

A másodfokú egyenlőtlenséget *e*-re megoldva a gráf élszámára a következőt kapjuk:

$$e \le \frac{n+\sqrt{n^2+4n^2(n-1)}}{2},$$

ahol a másik gyök negatív (illetve $n=1$ esetén 0), így azzal itt nem kell foglalkoznunk. Az egyenlőtlenséget kicsit átalakítva, megkapjuk az állítást, amellyel egyben a Reiman-tételt is beláttuk.

$$e \le \frac{n}{2}+\left(1+\sqrt{4n-3}\right).$$

□

Vizsgáljuk meg, mikor teljesülhet a tételben egyenlőség, azaz milyen *n* esetén van a mátrixban éppen $\frac{n}{2}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)$ db egyes. Ehhez természetesen szükséges, hogy $\frac{n}{2}\left(1+\sqrt{4n-3}\right) \in \mathbb{N}$. Ennek viszont feltétele az, hogy a $\sqrt{4n-3}$ egész szám legyen. Tekintsük ennek a kifejezésnek a négyzetét: $4n-3=(2k+1)^2$. Ebből *n*-et kifejezve azt kapjuk, hogy $n=\frac{4k^2+4k+1+3}{4}=k^2+k+1$. **[10]**

Egyenlőség esetén meg kell egyeznie a γ_i-k számtani és négyzetes közepének, ami csak a tényezők egyenlősége mellett lehetséges. Tehát $\gamma_i=\gamma_j$, $\forall i, j \le n$-re. Az egyenlőséghez szükséges továbbá, hogy a $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j$ skaláris szorzat 1 legyen minden $i \ne j$-re. Négyzetes mátrixról lévén szó, az oszlopok és a sorok szerepe szimmetrikus, tehát az utóbbi két állításnak a mátrix oszlopaira is teljesülnie kell.

A fentiek alapján megfogalmazhatjuk az alábbi, ***6.3***-as állítást.

6.3. Egyenlőség a Reiman-tételben

6.3. Állítás: A Reiman-tételben való egyenlőség teljesülésének szükséges feltételei a következők:

1) $n = k^2 + k + 1$;
2) minden sorban $k+1$ db egyes szerepel;
3) minden oszlopban $k+1$ db egyes szerepel;
4) $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j = 1, \ \forall i \neq j$ -re;
5) jelöljük az *i*-edik oszlopvektort $\mathbf{d}_i$ -vel. Ekkor $\mathbf{d}_i\mathbf{d}_j = 1, \ \forall i \neq j$ -re. **[10]**

A Zarankiewicz - problémáról bővebben a **[10]**-ban és **[11]**-ban olvashatunk.

6.4. Véges projektív sík

6.4. Definíció: *Véges projektív sík*ról akkor beszélünk, ha adott egy *P* halmaz, - amelynek elemeit *pont*oknak nevezzük -, és egy *E* halmaz, amely a *P* részhalmazaiból áll, - és elemeit *egyenes*eknek hívjuk -, és az alábbi három feltétel teljesül rájuk:

I. Bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
$\left(\forall\ x, y \in P\text{-re}\ \exists!\ e \in E,\ \text{melyre}\ x, y \in e.\right)$ (Az „egyértelműen létezik”-et $\exists!$ jellel jelölöm.)

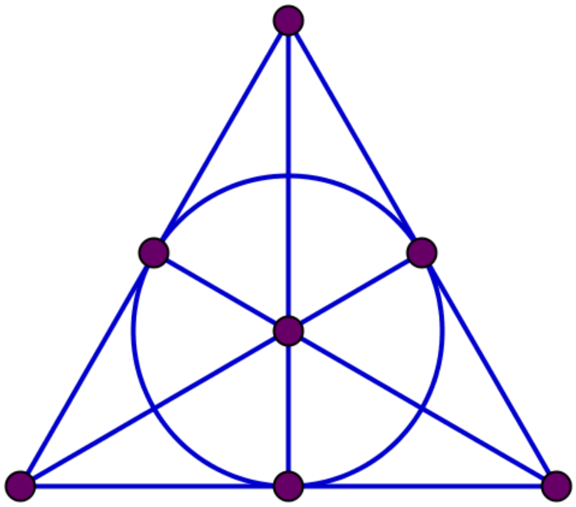
II. Bármely két egyenes pontosan egy közös pontra illeszkedik.
$\left(\forall\ e, f \in E\text{-re}\ \exists!\ p \in P,\ \text{melyre}\ p \in e \cap f.\right)$

III. Létezik négy olyan pont, amelyek közül semelyik háromra nem illeszkedik közös egyenes. **[2]**, **[3]**

6.4.1. Speciális projektív síkok

A speciális projektív síkokról – véleményem szerint -, a középiskolások számára is jól érthető összefoglalást találhatunk a Diszkrét matematika című tankönyvben. **[2]**

A legegyszerűbb projektív sík, az úgynevezett *Fano-sík* (*13. ábra*). Mindössze 7 pontból (ennél kevesebb pontú projektív sík nem is létezik) és 7 egyenesből áll. Az ábrán a hét lila pont, a *Fano-sík* hét pontja, a hat kék egyenes és a kék kör pedig a sík hét egyenese. Az egyenesek metszéspontjai értelemszerűen csak a lila pontok.



13. ábra: Fano-sík

A *Fano-sík*ra a következő állítások teljesülnek:

(a) *Bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.*

(b) *Bármely két egyenesnek pontosan egy metszéspontja van.*

(c) *Minden egyenesnek legalább három pontja van.*

(d) *Minden egyenesnek ugyanannyi pontja van.*

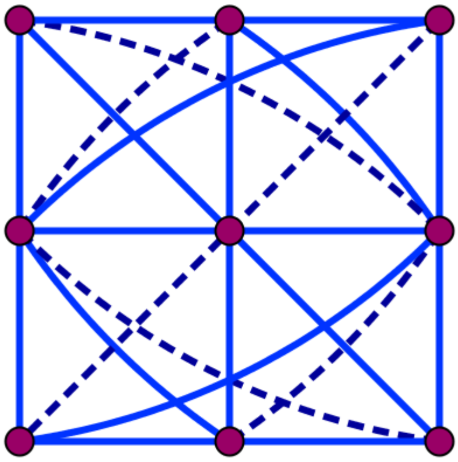
(e) *Minden pontra ugyanannyi egyenes illeszkedik.*

Megjegyzés: A Fano-sík esetében *(c)*, *(d)* és *(e)* a következőt jelenti: minden egyenesnek pontosan három pontja van, és minden pontra három egyenes illeszkedik. (*13. ábra*)

Az *amőbasík*nak (*14. ábra*) 9 pontja és 12 egyenese van. Ha a síkot egy 3×3-as mátrix elemeinek tekintjük, akkor az egyenesek a mátrix sorai, oszlopai és azok az elemek, amelyek a mátrix determinánsának kifejtésében szereplő szorzatokat adják.

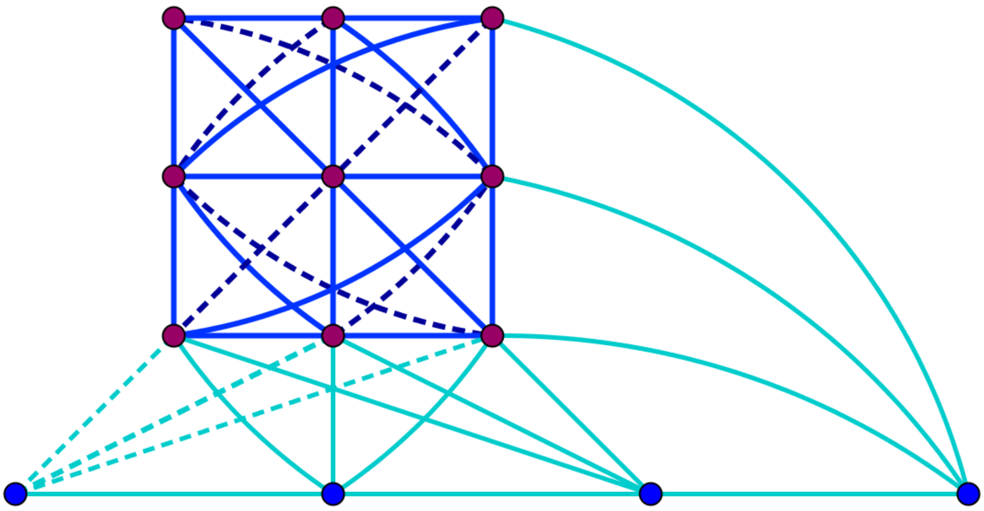
Az amőbasíkon is, - mint a Fano-síkon -, minden egyenesnek pontosan három pontja van, de itt minden pontra négy egyenes illeszkedik, és az egyenesek nem különböztethetőek meg. Erre a síkra, az *(a)-(e)* mellett igaz továbbá a következő is:

(f) *Ha adott egy egyenes és egy, az egyenesre nem illeszkedő pont, akkor egyértelműen létezik olyan egyenes, amely átmegy az adott ponton és párhuzamos a megadott egyenessel. (Euklidesz V. posztulátuma, azaz a párhuzamossági axióma)*



14. ábra: Amőbasík

Az amőbasíkot kibővíthetjük négy végtelen távoli ponttal és egy végtelen távoli egyenessel. Ekkor egy 13 pontú projektív síkot kapunk. (*15. ábra*)



15. ábra: Az amőba sík egy végtelen távoli egyenessel való kibővítése

6.5. Definíció: *Véges affin sík*nak nevezünk egy olyan struktúrát, amelyre az alábbi három axióma teljesül:

[1] Két ponton át pontosan egy egyenes halad át.

[2] Bármely egyeneshez és egy rá nem illeszkedő ponthoz pontosan egy a ponton átmenő, az egyenest nem metsző egyenes létezik.

[3] Létezik három nem egy egyenesen lévő pont. **[11]**

Megjegyzés: Az affin síkot a projektív sík ***6.4***-es definíciójának mintájára is definiálhatjuk. Ebben az esetben a II. pont [2]-re módosul.

Projektív sík továbbá a véges affin sík kibővítése egy végtelen távoli egyenessel, amely éppen a végtelen távoli pontokból áll.

A **6.4.1**-es pontban leírtakról bővebben a **[3]**-ben és **[2]**-ben olvastam.

6.4.2. A Zarankiewicz-probléma és a véges projektív síkok

Térjünk vissza a Zarankiewicz problémának arra az esetére, amikor $m = n$. A ***6.1***-es Reiman-tételt egyenlőséggel kielégítő eseteket vizsgáljuk. A ***6.3***-as állítást fogalmazzuk át a Zarankiewicz-probléma halmazokkal kimondott változatára. Legyen P és E a ***6.4***–es definícióban szereplő két halmaz. Ekkor az állítás 4)-es, illetve 5)-ös pontja a ***6.4.1***-es pont *(a)*, illetve *(b)* állításával feleltethető meg. Továbbá az 1), 2), és 3) állítást a *(c)*-vel, és az alábbi állítással helyettesíthetjük:

(g) Bármely pontot legalább három egyenes tartalmaz.

Ez látszólag enyhébb feltételnek tűnik, de valójában, *(a)* és *(b)* felhasználásával *(c)*-ből és *(g)*-ből már következik 1), 2) és 3). **[10]**

Lássunk most pár tételt bizonyítás nélkül a projektív síkokra.

6.6. Definíció: Ha a ***6.5***-ös definícióban lévő 3 axióma teljesül, akkor a *(d)* állítás is, azaz minden egyenesnek ugyanannyi pontja van. A *k* számot, amely megmutatja, hogy az affin sík egyenesére hány pont illeszkedik, az affin sík *rend*jének nevezzük. **[11]**

Megjegyzés: Egy *k*-adrendű affin síknak k^2 pontja van.

6.7. Tétel: Ha létezik *k*-adrendű affin sík, akkor $k^2 + k + 1$ pontú projektív sík is létezik. **[10]**

Megjegyzés: A projektív sík egy adott egyenesének és a rá illeszkedő pontoknak elhagyásával mindig affin síkot kapunk. Ekkor épp azok az egyenesek lesznek diszjunktak, amelyek metszéspontja a törölt egyenesen volt. Ez alapján kimondhatjuk a ***6.7***-es tétel megfordítását is.

6.8. Tétel: Ha létezik $k^2 + k + 1$ pontú projektív sík, akkor *k*-adrendű affin sík is létezik. **[10]**

6.9. Tétel: Minden projektív síkhoz létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, amelyre az alábbi állítások teljesülnek (a ***6.3***-as definíció jelöléseit használva):

1. $\forall e, f \in E$-re $|e| = |f| = k + 1$, azaz minden egyenesnek $k + 1$ pontja van.

2. $\forall p \in P$ ponthoz pontosan $k+1$ olyan $e \in E$ egyenes létezik, melyre $p \in P$, azaz minden ponton $k+1$ egyenes megy át.

3. A sík pontjainak száma k^2+k+1. **[3]**, **[10]**

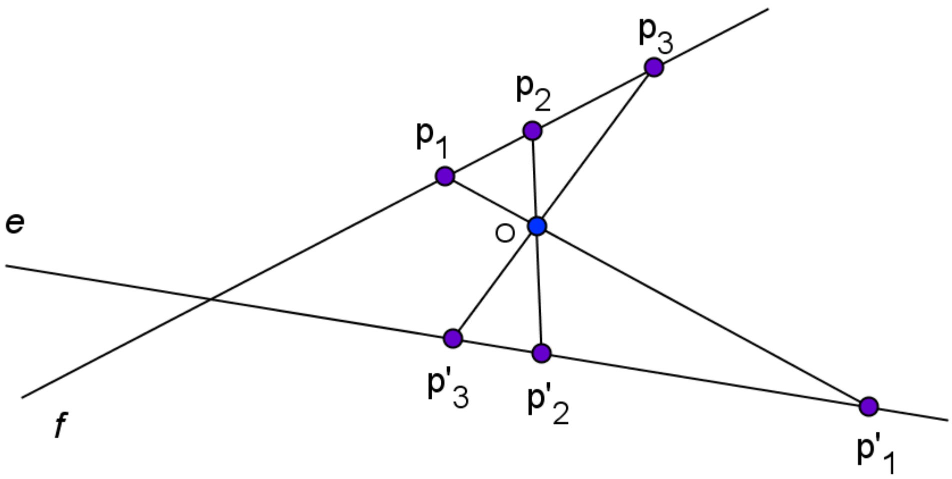
Megjegyzés: A sík egyeneseinek száma is k^2+k+1.

Ennek a tételnek nézzük meg a bizonyítását is.

1. Bizonyítás:

A *k*-adrendű affin síknak k^2+k db egyenese van, amelyek mindegyike *k* pontból áll. Ezt kibővítve az *ideális* pontokból álló ún. *ideális egyenes*sel, az így kapott projektív sík egyeneseinek száma k^2+k+1. Így a projektív sík minden egyenese $k+1$ pontú. Ugyanennyi egy egyenes pontjainak száma is, hiszen minden eredeti egyenesnek – a *(b)* állítás alapján -, pontosan egy metszéspontja van az új, ideális egyenessel, így pontjainak száma eggyel nő.

Létesítsünk *e* és *f* között bijektív megfeleltetést. Legyen $p_i \in f$ bijektív megfelelője a $p_i' \in e$, ahol $p_i' = e \cap p_iO$ ($O \notin e, f$), az alábbi ábrának megfelelően (*16. ábra*). Mivel ez a megfeleltetés tényleg kölcsönösen egyértelmű, *e*-nek és *f*-nek tényleg ugyanannyi pontja van.

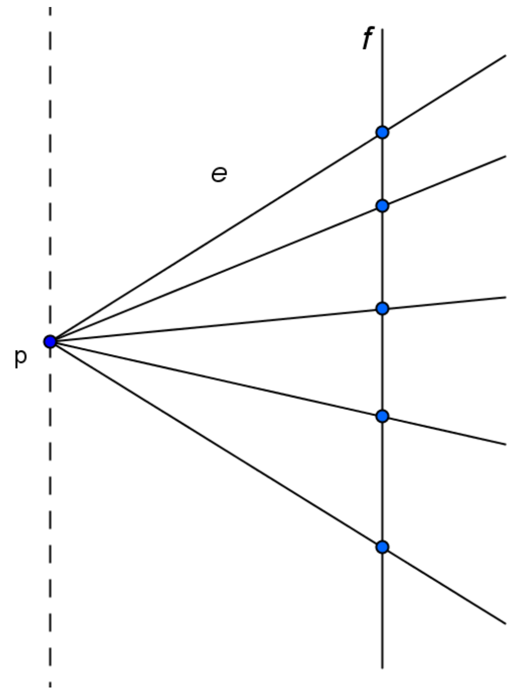


16. ábra

□

2. Bizonyítás:

Az *f* egyenesnek az előző pont szerint $k+1$ pontja van. Mindegyik pontjából húzzunk a *p* ponton át egy egyenest. Ezt éppen $k+1$-féleképpen tehetjük meg. Több ilyen egyenes nem létezhet, hiszen akkor lenne *p*-n át olyan egyenes, amelynek nem lenne *f*-fel közös pontja, ez pedig ellentmondana a *(b)* állításnak. (*17. ábra*)

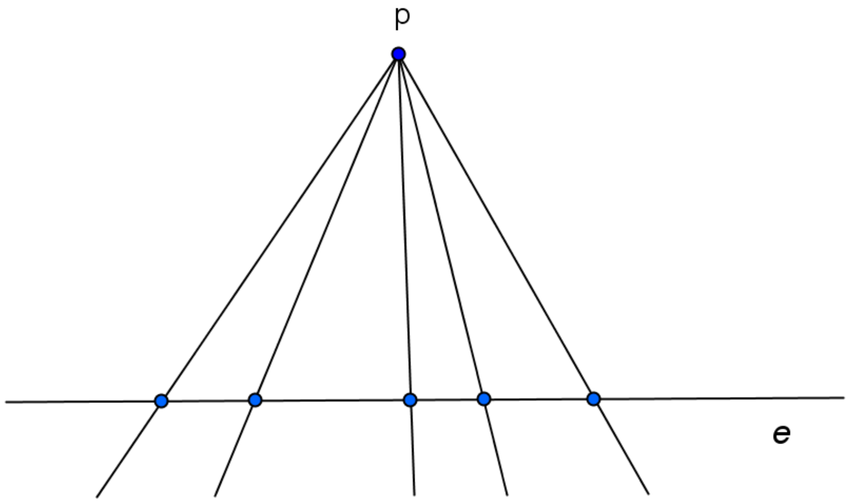


17. ábra

□

3. Bizonyítás:

Húzzunk a $p \notin e$ ponton át az *e* egyenest metsző egyeneseket. (*18. ábra*) Mivel 1. szerint *e*-nek $k+1$ pontja van, $k+1$ db ilyen egyenes húzható. A *p* pont nélkül mindegyiknek *k* pontja van. Tehát a síknak összesen $(k+1)k+1$ pontja van – ahol a plusz egyet a *p* pont jelenti -, ami a beszorzást elvégezve éppen k^2+k+1.



18. ábra

□

6.10. Tétel: Ha a Zarankiewicz-probléma halmazos változatát (ld. ***6.1***-es pont) tekintjük $m=n$ esetén, és a keresett maximum megegyezik a ***6.1***-es tételben szereplő $\frac{n}{2}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)$ felső becsléssel, akkor a halmazaink egy alkalmas projektív sík egyenesei. Az állítás megfordítása is igaz, azaz bármely projektív sík egyeneseiből egyenlőséget kapunk az említett becslésben. **[10]**

A fenti tételt átfogalmazhatjuk a Zarankiewicz-probléma mátrixos változatára is. Ehhez tegyük fel, hogy $m=n=k^2+k+1$ és egy $n\times n$-es mátrix $(k+1)\left(k^2+k+1\right)$ db egyest tartalmaz úgy, hogy nem választható ki úgy két sor és két oszlop, hogy azok négy keresztezési mezőjében mindenütt egyes legyen. Legyenek az oszlopok a pontok, és a sorok az egyenesek. Azonosítsunk minden sort azoknak az oszlopoknak a halmazával, ahol egyes áll. Így projektív síkot kapunk.

Készítsük el a projektív sík ún. *illeszkedési mátrix*át a következő módon. Az oszlopokat pontoknak, az egyeneseket pedig soroknak feleltetjük meg. Írjunk egyest egy oszlop és egy sor kereszteződésébe, ha a megfelelő pont és egyenes illeszkedik egymásra. A projektív sík illeszkedési mátrixa minden esetben extremális.

Az affin síkokról **[11]**-ben, a véges projektív síkokról **[2]**-ben, **[3]**-ban és **[10]**-ben olvastam. Továbbá projektív síkokról részletesen A geometria és határterületei című műben olvashatunk. **[9]**

Lássunk most egy-két további eredményt a Zarankiewicz-problémához kapcsolódóan, melyekhez Roman cikke szolgált alapul. **[13]**

A Zarankiewicz-probléma általános megfogalmazása a következő: Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív számot, $k_{\alpha,\beta}(m,n)$-t, melyre egy csak nullákat és egyeseket tartalmazó $m \times n$-es mátrixnak létezik egy csupa egyesekből álló $\alpha \times \beta$-s részmátrixa, amely épp ennyi egyest tartalmaz. A feladatot újrafogalmazhatjuk: Mekkora az a legnagyobb pozitív szám, $M_{\alpha,\beta}(m,n)$, melyre létezik egy csak nullákat és egyeseket tartalmazó $m \times n$-es mátrix, de nem létezik olyan $\alpha \times \beta$-s részmátrixa, amely csupa egyesekből állna, és $M_{\alpha,\beta}(m,n)$ db egyest tartalmazna. Természetesen $M_{\alpha,\beta}(m,n) = k_{\alpha,\beta}(m,n) - 1$. **[13]**

<u>*Megjegyzés:*</u> A rácspontokra megfogalmazott probléma az $\alpha = \beta = 2$ esetet jelentette.

Kővári, Sós és Turán bebizonyította, hogy $M_{2,2}(k^2 + k, k^2) = k^2(k+1)$, amennyiben *k* prímszám. **[13]**

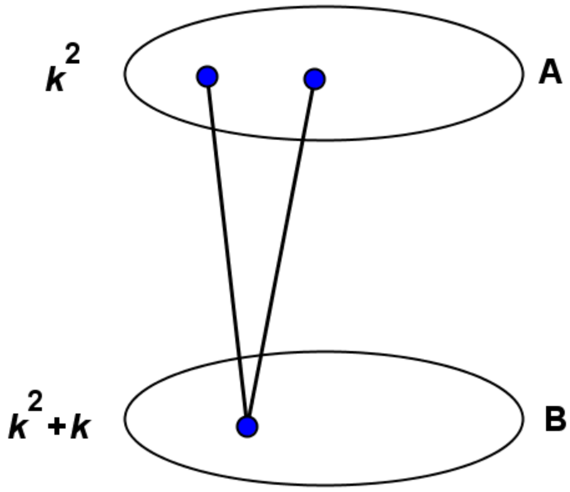
Kőváriék eredményét mátrixok helyett, a Zarankiewicz-probléma páros gráfokkal való kimondására átfogalmazva, az alábbi állítást mondhatjuk ki.

<u>**6.11. Állítás:**</u> Ha *G* egy olyan 4-hosszú kört nem tartalmazó páros gráf, amelynek egyik osztálya $k^2 + k$ pontból, másik osztálya pedig k^2 pontból áll, és élszáma $k^2(k+1)$, akkor projektív sík helyett affin sík illeszkedési gráfja *G*. Azaz az egyik osztály elemei a „pontok”, a másiké, az „egyenesek, az élek pedig a pontok és egyenesek egymásra való illeszkedését adják meg.

<u>Bizonyítás:</u>

A bizonyítást, a ***4.3***-as tétel 2. bizonyításához hasonlóan kezdhetjük el.

Számoljuk meg a gráfban az alábbi ábrának megfelelő cseresznyéket, azaz azokat, amelyek csúcsa a $k^2 + k$ pontot tartalmazó osztályban van, két végpontja pedig a k^2 pontból állóban. (*19. ábra*)



19. ábra

Ekkor a cseresznyék számát $\sum_{x\in B}\binom{d(x)}{2}$ adja, ahol B az ábrán láthatóan a k^2+k pontot tartalmazó osztályban lévő pontok halmaza. A ***4.3***-as tétel bizonyításához hasonlóan

$$\sum_{x\in B}\binom{d(x)}{2}\le\binom{k^2}{2}.$$

A binomiális együtthatók kifejtése után

$$\sum_{x\in B}\frac{d(x)\left(d(x)-1\right)}{2}\le\frac{k^2\left(k^2-1\right)}{2},$$

a beszorzást elvégezve és felhasználva, hogy $\sum_{x\in B}d(x)=e$ (mivel csak az egyik osztály pontjaira összegezzük a fokszámot)

$$\sum_{x\in B}\left(d(x)\right)^2-e\le k^2\left(k^2-1\right).$$

Az egyenlőtlenséget $\sum_{x\in B}\left(d(x)\right)^2$-re rendezve, majd a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\left(k^2+k\right)\left(\frac{\sum_{x\in B}d(x)}{k^2+k}\right)^2\le\sum_{x\in B}\left(d(x)\right)^2\le e+k^2\left(k^2-1\right).\qquad(***)$$

Ebből ismét felhasználva, hogy $\sum_{x\in B}d(x)=e$, és k^2+k-val beszorozva, az alábbi másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk

$$e^2 \le \left(k^2+k\right)e+\left(k^2+k\right)k^2\left(k^2-1\right).$$

Átrendezve:

$$e^2-\left(k^2+k\right)e-\left(k^2+k\right)k^2\left(k^2-1\right)\le 0.$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenlőtlenséget e-re:

$$e\le\frac{k^2+k+\sqrt{\left(k^2+k\right)^2+4\left(k^2+k\right)k^2\left(k^2-1\right)}}{2}=$$

tovább alakítva, majd kiemelve

$$=\frac{\left(k^2+k\right)+\sqrt{k^2\left(k+1\right)^2+4k^3\left(k+1\right)^2\left(k-1\right)}}{2}=\frac{\left(k^2+k\right)+\sqrt{k^2\left(k+1\right)^2\left[1+4k\left(k-1\right)\right]}}{2}=$$

a gyök alól kiemelve $k\left(k+1\right)$-et, teljes négyzet marad a négyzetgyök alatt. Mivel k pozitív, a teljes négyzetnek $\left(2k-1\right)^2$-t válasszuk $\left(1-2k\right)^2$ helyett:

$$=\frac{\left(k^2+k\right)+k\left(k+1\right)\sqrt{1+4k^2-4k}}{2}=\frac{k\left(k+1\right)}{2}\left[1+\sqrt{\left(2k-1\right)^2}\right]=k^2\left(k+1\right).$$

Így végeredményül a gráf élszámára az

$$e\le k^2\left(k+1\right)$$

felső becslést kapjuk.

Vizsgáljuk meg, mikor teljesül egyenlőség, azaz mikor igaz, hogy $e=k^2\left(k+1\right)$.

Ekkor $(***)$-ban mindkét egyenlőtlenség helyén egyenlőségnek kell állnia, azaz a számtani és négyzetes közepek egyenlők. Ez csak úgy lehetséges, ha a bennük szereplő tagok azonosak. Tehát $d\left(x\right)$ minden $x\in B$-re megegyezik. Mivel $\sum_{x\in B}d\left(x\right)=e=k^2\left(k+1\right)$ és B-ben k^2+k pont van, $\left(k^2+k\right)d\left(x\right)=k^2\left(k+1\right)$. Ebből $d\left(x\right)$-et kifejezve azt kapjuk, hogy $d\left(x\right)=\dfrac{k^2\left(k+1\right)}{k\left(k+1\right)}=k$.

Mivel affin síkot a projektív sík egy egyenesének elhagyásával kaphatunk, az affin síkra még egy axiómának, - nevezetesen a párhuzamossági axiómának -, kell teljesülnie.

Affin sík pontjainak száma k^2, egyeneseinek száma pedig k^2+k. Ha az A halmazt a pontok halmazának, B-t pedig az egyenesekének definiáljuk, akkor – mivel $\left|A\right|=k^2$ és $\left|B\right|=k^2+k$ -, a pontok száma éppen k^2, az egyeneseké pedig éppen k^2+k. Jelentsék a gráf élei a pontok és egyenesek illeszkedését. Ezzel a ***6.4***-es definícióban szereplő [1] axiómát beláttuk, hiszen bármely két A halmazbeli pontra pontosan egy cseresznye illeszkedik, azaz bármely két ponthoz egyértelműen rendelhető egy egyenes. Mivel minden B halmazbeli pontnak a foka k, minden egyeneshez k pontot rendelünk, ezért minden egyenesnek k db pontja van. Be kell még látnunk, hogy a párhuzamossági (***6.4***-es definícióban szereplő [2]) axióma is érvényes, amelyhez először azt látjuk be, hogy minden ponton át $k+1$ egyenes húzható. Ha az A halmaz pontjaira felírjuk $\sum_{x\in A} d(x) = e = k^2(k+1)$-et, és figyelembe vesszük, hogy minden csúcs foka megegyezik, akkor $d(x) = \frac{k^2(k+1)}{k^2} = (k+1)$-et kapunk, ami éppen azt jelenti, hogy bármely ponton át $k+1$ egyenes megy. Mivel minden f egyenesnek k pontja van, egy az egyenesre nem illeszkedő pontból k db, f-et metsző egyenes húzható, és mivel a ponton át $k+1$ egyenes megy, így egyértelműen létezik f-et nem metsző egyenes.

A [3] axióma pedig azért teljesül, mert ha nem lenne három nem egy egyenesre illeszkedő pont, akkor az összes pontnak egy egyenesen kellene lennie, ami azt jelentené, hogy B egyetlen egyenesből áll, de tudjuk, hogy $|B| = k^2 + k$, így létezik három nem egy egyenesen lévő pont.

Tehát beláttuk, hogy ha az élszámra az $e = k^2(k+1)$ egyenlőség teljesül, akkor valóban affin síkot kapunk.

□

Lássunk még néhány további eredményt a Zarankiewicz-problémáról.

Reiman megmutatta, hogy $M_{2,2}(m,n) \le \frac{m+\sqrt{m^2+4mn(n-1)}}{2}$, amely $m = n$ esetén a **6.1**-es tétel állítását adja. **[13]**

Čulik belátta, hogy $n \ge (\beta-1)\binom{m}{\alpha}$ esetén $M_{\alpha,\beta}(m,n) = (\alpha-1)n + (\beta-1)\binom{m}{\alpha}$. **[13]**

Tekintsük Čulik állítását $\alpha = \beta = 2$ esetén. Ekkor a következőképpen egyszerűsödik az állítás:

$$n \ge \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2} \text{-re } M_{2,2}(m,n) = n + \binom{m}{2}.$$

A legfőbb eredményt az alábbi tétel foglalja magában.

6.12. Tétel (*S. Roman*): Ha $M_{\alpha,\beta}(m,n)$ a legnagyobb pozitív szám, melyre létezik egy csak nullákat és egyeseket tartalmazó $m \times n$-es mátrix, melynek nem létezik olyan $\alpha \times \beta$-s részmátrixa, amelyben $M_{\alpha,\beta}(m,n)$ db egyes lenne, akkor

$$M_{\alpha,\beta}(m,n) \leq \frac{\beta-1}{\binom{p}{\alpha-1}}\binom{m}{\alpha} + \frac{(p+1)(\alpha-1)}{\alpha}n,$$

minden $p \geq \alpha - 1$-re. **[13]**

7. Turán tétel

Ha a 3-hosszú kört 3 csúcsú teljes gráfnak tekintjük, a problémát általánosíthatjuk. Hány éle lehet egy *n* pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz részgráfként K_{m+1}-et? Ha $m = 2$, a Mantel-tételt kapjuk vissza.

7.1.Turán-gráf

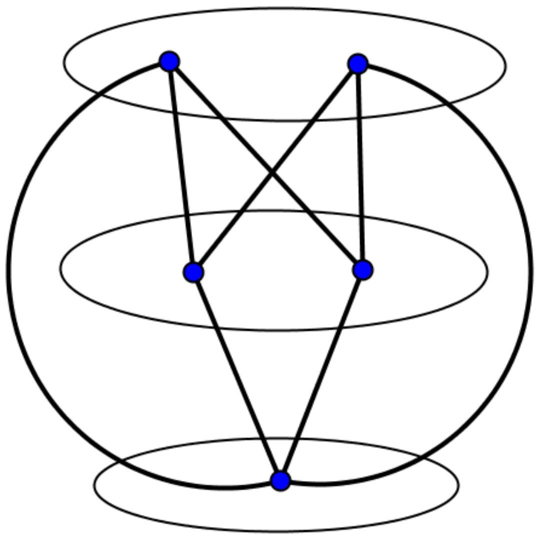
Egy gráfot *m osztályú*nak nevezünk, ha pontjait *m* osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy az osztályokon belül nem fut él. Ez tehát azt jelenti, hogy a gráf *m* színnel jól színezhető.

Megjegyzés: A kétosztályú gráfok éppen a páros gráfok.

7.1. Definíció: Egy *n pontú, m osztályú* gráfot *Turán-gráf*nak nevezünk, ha $n = qm + r,$ ahol $0 \leq r < m$, r osztály $(q+1)$ pontból és $(m-r)$ osztály pedig q pontból áll, és egy osztályon belül nincs él, az osztályok között viszont az összes él be van húzva. A Turán-gráfot $T_{n,m}$-mel jelöljük. **[1]**

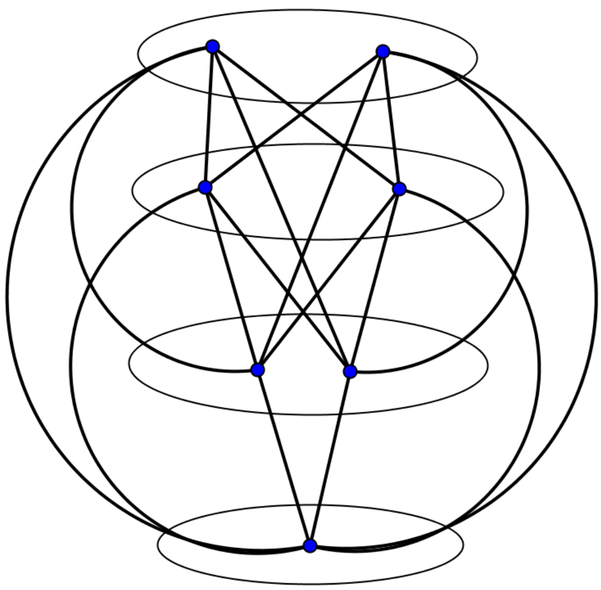
Megjegyzés: A ***7.1***-es definícióban $n = qm + r,$ ahol $0 \leq r < m$, az *n* szám *m*-mel való maradékos osztása.

Vizsgáljuk meg egy konkrét példa alapján, hogyan rajzolható fel a Turán-gráf. Tekintsük ehhez $T_{5,3}$-at! (20. *ábra*) Ekkor – mivel $n = 5,\ m = 3$ -, $5 = 1 \cdot 3 + 2$, azaz $q = 1,\ r = 2$. Tehát az 5 pontú, 3 osztályú Turán-gráfnak két osztálya 2, egy osztálya pedig 1 pontból áll.



20. *ábra:* $T_{5,3}$

Hasonlóan rajzolhatjuk le $T_{7,4}$ -et is. (*21. ábra*)



21. ábra: $T_{7,4}$

A Turán-gráf éleinek számát jelöljük $e\left(T_{n,m}\right)$. Ekkor

$$e\left(T_{n,m}\right)=\binom{n}{2}-r\binom{q+1}{2}-(m-r)\binom{q}{2}=.$$

Használjuk fel, hogy $\binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{2}$, majd alakítsuk tovább az egyenlőséget:

$$=\binom{n}{2}-r\frac{(q+1)q}{2}-(m-r)\frac{q(q-1)}{2}=\binom{n}{2}-\frac{q}{2}\left(r(q+1)+(m-r)(q-1)\right)=$$

$$=\binom{n}{2}-\frac{q}{2}(rq+r+mq-m-rq+r)=\binom{n}{2}-\frac{q}{2}\left(m(q-1)+2r\right)=.$$

Fejezzük ki q-t a másik három változó segítségével és helyettesítsük be:

$$n=qm+r \quad \Rightarrow \quad q=\frac{n-r}{m}$$

$$=\binom{n}{2}-\frac{n-r}{2m}(n-m+r)=\binom{n}{2}-\frac{n^2}{2m}+\frac{r}{2m}(n-m+r)-\frac{n}{2m}(r-m)\leq$$

mivel $\frac{r}{2m}<\frac{1}{2}$ és $(r-m)<0$, mert $r<m$, ezért $e\left(T_{n,m}\right)$-re a következő felső becslést adhatjuk:

$$\leq\binom{n}{2}-\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{n}{2m}(m-r-1)+\frac{1}{2}(n-m+r).$$

Megjegyzés: A Turán-gráf élszámára a következő közelítés érvényes:

$$e\left(T_{n,m}\right)=\binom{n}{2}-r\binom{q+1}{2}-(m-r)\binom{q}{2}\approx\binom{n}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right).$$ **[1]**

7.2. Turán-tétel és bizonyítása

7.2. Tétel (*Turán*): G n pontú gráf és nem tartalmaz K_{m+1}-et $\Rightarrow$ $e(G)\leq e\left(T_{n,m}\right)$. Továbbá $e(G)=e\left(T_{n,m}\right)\Leftrightarrow G\cong T_{n,m}$. **[1]**

Bizonyítás:

1. lépés:

Először azt látjuk be, hogy az m osztályú gráfok közül $T_{n,m}$-nek van a legtöbb éle. Tegyük fel indirekt, hogy a legtöbb élt tartalmazó G gráf nem a Turán-gráf. A legtöbb élt tartalmazó m osztályú gráf, nyilván a teljes m osztályú gráf, azaz az osztályok között az összes él be van húzva. Ekkor G-ben kell lennie két osztálynak, amelyek közül az egyik x pontot tartalmaz, a másik pedig legalább $x+2$. Ha a nagyobb osztályból a kisebbe áthelyezünk egy pontot, akkor x élt szüntetünk meg, viszont legalább $x+1$ új élt húzunk be. Így a G gráf élszámát eggyel növeltük, ami az indirekt feltevésünknek ellentmond, tehát az m osztályú gráfok közül tényleg $T_{n,m}$-nek van a legtöbb éle.

Megjegyzés: Ha az előző bekezdés lépéseit egymás után ismételgetjük, a Turán-gráfot kapjuk.

2. lépés:

Következőnek belátjuk, hogy ha G egy K_{m+1}-et nem tartalmazó n pontú gráf, akkor ugyanazon a ponthalmazon konstruálható egy m osztályú teljes H gráf, amelyben minden pont fokszáma legalább akkora, mint G-ben, azaz $\forall v \in V(G) = V(H)$-ra $d_G(v) \le d_H(v)$.

A bizonyítást m-re való teljes indukcióval hajtjuk végre. $m=1$-re az állítás triviális. Legyen x egy maximális fokú pont G-ben. Ekkor, ha Δ_G-vel jelöljük a G-ben lévő maximális fokszámot, $d_G(x) = \Delta_G$. Legyen továbbá x szomszédjainak halmaza V_1, azaz $V_1 = \{u \mid \{u, x\} \in E(G)\}$, a többi pont pedig alkossa V_2-t, azaz $V_2 = V(G) - V_1$, és x természetesen V_2-be tartozik. Legyen G_1 a G-nek V_1 által feszített részgráfja. Ekkor G_1 biztosan nem tartalmaz K_m-et, hiszen az x-szel együtt G-ben K_{m+1}-et alkotna. Így jogosan alkalmazhatjuk G_1-re az indukciós feltevést, mely szerint létezik olyan teljes $(m-1)$ osztályú H_1 gráf, amelyre $\forall v \in V(G_1)$-re $d_{G_1}(v) \le d_{H_1}(v)$.

A H gráfot a következőképpen konstruáljuk: vesszük a V_1 ponthalmazon a H_1 gráfot, és V_1 összes pontját összekötjük V_2 összes pontjával, és minden olyan élt elhagyunk, amely két V_2-beli pont között fut. Természetesen ez a H gráf m osztályú, mivel H_1 $(m-1)$ osztályú teljes gráf volt, és hozzávettünk egy új osztályt, V_2-t. Azt kell még belátnunk, hogy $d_G(v) \le d_H(v)$, minden pontra igaz. Ha $v \in V_2$, akkor $d_H(v) = |V_1| = \Delta_G$, a jelöléseink miatt viszont $d_G(v) \le \Delta_G$. Ha $v \in V_1$, akkor $d_H(v) = d_{H_1}(v) + |V_2| \ge d_{G_1}(v) + |V_2| \ge d_G(v)$. Ebből látszik, hogy a fenti módon konstruált H gráf valóban megfelelő.

Így tehát ha egy G gráf nem tartalmaz K_{m+1}-et, de nem izomorf $T_{n,m}$-mel, akkor konstruálható egy nála nagyobb élszámú m osztályú teljes gráf, ennek az élszáma pedig nem nagyobb $T_{n,m}$ élszámánál. Ezzel az állítás második részét is beláttuk. **[1]**

□

7.3. Turán-típusú tételek

Itt megemlíteném bizonyítás nélkül még két, ehhez a témakörhöz tartozó tételt.

7.3. Tétel (*Erdős-Stone*): Ha az n pontú G gráf éleinek számára $|E(G)| \geq \binom{n}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\varepsilon n^2$ teljesül, akkor m-hez $\exists$ olyan $c(m,\varepsilon)$ és n_o, hogy ha $n \geq n_o$, akkor G-ben $\exists$ olyan $(m+1)$ osztályú teljes részgráf, amelyben az osztályok mérete legalább $c \log n$. **[1]**

***7.4. Definíció*:** Legyen $ext(n,H)$ az n csúcsú, H-t nem tartalmazó gráf lehetséges maximális élszáma. **[14]**

***7.5. Definíció*:** Egy H gráf *kromatikus szám*a k, ha a gráf k színnel kiszínezhető, de $k-1$ színnel már nem. A kromatikus számot $\chi(H)$-val jelöljük. **[1]**

7.6. Tétel (*Erdős-Stone-Simonovits*): Tetszőleges H esetén

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ext(n,H)}{n^2}=\frac{\chi(H)-2}{2(\chi(H)-1)},$$

ahol $\chi(H)$ a H gráf kromatikus száma. **[14]**

8. Lezárás

Szakdolgozatomban a gráfokhoz tartozó alapfogalmak és tételek összefoglalása mellett az extremális problémakörhöz tartozó legfontosabb tételek ismertetését tűztem ki célul. Dolgozatomban, Mantel és Turán tétele mellett, nagy hangsúlyt helyeztem a Zarankiewicz problémakörre. A véges matematika kurzus keretében Turán tétele különösképpen felkeltette az érdeklődésemet, ezért behatóbban kezdtem foglalkozni a gráfok extremális problémáival.

A Turán-tétel speciális esetét, a Mantel-tételt, középiskolások számára is előadhatónak tartom. Jövőbeni tervem ezzel kapcsolatban, hogy az 5. pontban leírtakat tekintve alapul, volt gimnáziumomban próbaórát tartsak. Mivel a gráfok témakörét kimondottan érdekesnek tartom, véleményem szerint ennek megismerése hozzájárulhat a matematika tanulásának érdekessé tételéhez.

9. Irodalomjegyzék

[1] Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba: A számítástudomány alapjai, Typotex Kiadó, Budapest 2006

[2] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika. Typotex Kiadó, Budapest, 2006

[3] Saját véges matematika jegyzet (előadó: Recski András), 2007-2008-as tanév I., II. félév

[4] Szőnyi Tamás: Gráfok, http://www.cs.elte.hu/~szonyi/grafeleje.pdf

[5] Szőnyi Tamás: Turán tételkör, http://www.cs.elte.hu/~szonyi/turan.pdf

[6] Szőnyi Tamás: Turán tételkör, http://www.cs.elte.hu/~szonyi/turanuj.pdf

[7] Laczkovich Miklós, T.Sóos Vera: Analízis I., Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest, 2005

[8] Kárteszi Ferenc, Bevezetés a véges geometriákba, Akadémiai Kiadó, Budapest 1972

[9] Reiman István: A geometria és határterületei. Gondolat Kiadó, Budapest, 1986

[10] Bérczi Gergely, Gács András, Szőnyi Tamás: Véges projektív síkok. In: Hraskó András (szerk.): Új matematikai mozaik, Typotex Kiadó, Budapest, 2002, 53-76

[11] Szőnyi Tamás: Zarankiewicz problémája, 2009, http://www.cs.elte.hu/~szonyi/kutdiak.pdf

[12] Montágh Balázs: Salakmotor-versenyek és véges síkok. In: Hraskó András (szerk.): Új matematikai mozaik, Typotex Kiadó, Budapest, 2002, 7-51

[13] Steven Roman: A Problem of Zarankiewicz, Journal of Combinatorial Theory 2 (1975), 187-198, http://sroman.com/MathArticles/Zarankiewicz.pdf

[14] Elekes György, Brunczel András: Véges matematika, Eötvös Kiadó, 2002, 56-63

10. Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek, Szőnyi Tamásnak, aki munkámat mindvégig figyelemmel kísérte, akihez a témát érintő kérdéseimmel mindig bizalommal fordulhattam, és a téma feldolgozása valamint a szakdolgozat megírása során számos szempontra felhívta a figyelmemet, munkámat hasznos ötleteivel segítette.

Köszönöm továbbá családomnak és barátaimnak, hogy egész idő alatt támogattak, és minden feltételt biztosítottak ahhoz, hogy optimális körülmények között tudjam készíteni a szakdolgozatomat.