Szerkesztés a gömbi geometriában

Szakdolgozat

Készítette: Vad Szilvia

Témavezető: Dr. Moussong Gábor adjunktus

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematika Alapszak, Tanári Szakirány

2010

Tartalomjegyzék

1. fejezet: Bevezető

A gömbi geometria alapjaival az egyetemi geometria előadásokon ismerkedtem meg. Már akkor is érdekes volt számomra, hogy azáltal, hogy a végtelen síkról egy korlátos alakzatra, a gömbre térünk át, és bizonyos fogalmakat másképpen definiálunk, milyen, a síkbelitől eltérő eredményekhez juthatunk. Ennek a kérdésnek a részletesebb vizsgálata motivált szakdolgozatom témájának kiválasztásakor.

A dolgozat első részében meghatározzuk az euklideszi síkgeometriából jól ismert fogalmak gömbi megfelelőit, bemutatjuk az így definiált gömbi alakzatok (egyenesek, szakaszok, körök és háromszögek) alapvető tulajdonságait, különös tekintettel az euklideszi síkgeometriában jellemzőektől eltérőekre.

A következő fejezetben ismertetjük a gömbi geometriai szerkesztés során megengedett lépéseket és a gömbi geometriai szerkesztés definícióját. Ezután áttekintjük az alapvető síkbeli euklideszi szerkesztési feladatokkal analóg gömbi szerkesztések megoldásait, és összevetjük ezeket a síkbeli eljárásokkal. Megvizsgálunk néhány olyan példát, amelynek megoldása a gömbön lényegesen különbözik a síkbelitől, illetve kitérünk olyan gömbi szerkesztési feladatra is, melynek nincs síkbeli megfelelője.

Miután konkrét példákon keresztül bemutatjuk a gömbi geometriai szerkesztést, a *4.* fejezetben felvetünk, majd megválaszolunk egy általánosabb jellegű szerkesztéselméleti problémát, a gömbfelületen megszerkeszthető szögek és távolságok kérdését. Az analóg síkbeli kérdésre jól ismerjük a választ, ami egyúttal része a matematika tanári alapképzés algebra anyagának. A probléma gömbi geometriai megoldásával kapcsolatban azonban nem állnak rendelkezésünkre ismert források, ezért is különösen érdekes az oda vezető út.

A gömbi szerkeszthetőségről szóló tétel bizonyításában olyan síkbeli ismereteket használunk fel, mint például a körsorok bizonyos tulajdonságai és az inverzió, melyeket ugyancsak a *4.* fejezetben foglalunk össze. Továbbá értelmezzük ezen fogalmak gömbi változatát, és összegyűjtjük a bizonyításhoz szükséges tulajdonságaikat, valamint áttekintjük a tétel igazolásához szintén szükséges sztereografikus projekció jellemzőit. A fejezet végén eljutunk a gömbön megszerkeszthető távolságok és szögek pontos meghatározásához. Ehhez sok segítséget kaptam témavezetőmtől, Dr. Moussong Gábortól, akinek ez úton is nagyon köszönöm a munkáját.

Tanár szakos hallgatóként a gömbi geometria mélyebb matematikai háttere mellett a téma középiskolai alkalmazhatósága is foglalkoztat. Úgy gondolom, hogy sok előnye lehet, ha a középiskolás diákok az euklideszi geometria mellett a gömbi geometria alapjaiba is betekintést nyernek. Szakdolgozatom utolsó fejezete személyes tanítási tapasztalatokra alapozva ennek a lehetőségeiről szól.

2. fejezet: Bevezetés a gömbi geometriába

Ahhoz, hogy megvizsgáljuk, hogyan és mit szerkeszthetünk meg a gömbfelületen, előbb definiálnunk kell bizonyos síkbeli szerkesztésből ismert geometriai fogalmak gömbi megfelelőit.

2.1 Alaphalmaz

Az alaphalmazt tetszőleges r ($r \in \mathbb{R}^+$) sugarú, O ($O \in \mathbb{R}^3$) középpontú gömbfelszín pontjai adják, az alaphalmaz elemei a gömbfelület pontjai. Mivel bármely két gömb hasonló egymáshoz, tetszőleges két gömb esetén van olyan hasonlósági transzformáció, ami az egyik alakzatot a másikba viszi. A *2.3.* pontban látni fogjuk, hogy a gömbi távolságot a gömb sugarától függetlenül definiáljuk, úgy, hogy az minden gömbfelületen az egységgömb geometriáját származtatja. Ezért a továbbiakban a gömbre vonatkozó állítások tetszőleges gömbre érvényesek.

2.2 Gömbi egyenesek és szakaszok

Gömbi egyeneseknek az úgynevezett főköröket tekintjük, melyek valamely, a gömb középpontján áthaladó sík és a gömbfelület metszeteként állnak elő. Egy főkör a gömböt két félgömbre osztja. Két adott ponton átmenő főkörnek a pontok közé eső rövidebbik ívét gömbi szakasznak, hívjuk.

A gömbön nem definiálunk párhuzamos egyeneseket. Két gömbi főkörnek mindig van legalább két közös pontja (a gömbfelszín azon átellenes pontpárja, amin mindkét főkör átmegy).

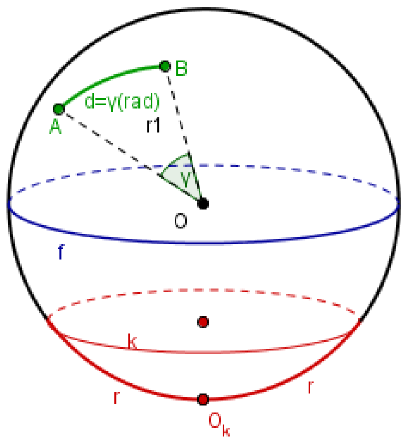
Két gömbi egyenes bezárt szögén a metszéspontjukban a főkörökhöz húzható érintők kisebbik bezárt szögét értjük, ami megegyezik a két főkört a gömbfelszínből kimetsző síkok bezárt szögével.

Két egy pontból induló félkörnél rövidebb gömbi főkörív bezárt szögét a következőképpen definiáljuk: Tekintsük a gömbfelületen a P pontból induló, egymástól különböző, nem egy főkörre eső PA és PB félkörnél rövidebb gömbi főköríveket. Az őket tartalmazó két különböző gömbi egyenes (melyek a P és a vele átellenes Q pontban metszik egymást) mindegyike két félgömbre osztja a gömbfelületet. A PA főkörívet tartalmazó gömbi egyenes által meghatározott félgömbök közül tekintsük azt, amelyik tartalmazza a B pontot, hasonlóan a PB főkörívet tartalmazó gömbi egyenes által meghatározott félgömbök közül tekintsük azt, amelyik tartalmazza az A pontot. Ennek a két félgömbnek a metszete a gömbfelületen meghatároz egy kétszöget. A PA és PB ívek bezárt szögén az őket tartalmazó gömbi egyeneseket a gömbből kimetsző síkok azon félsíkjainak bezárt szögét értjük, melyek ezt a metszetként előálló kétszöget határolják. Ha a PA és PB ívek egy főkörre esnek, akkor az APB szög 0^o, ha az A pont a PB gömbi szakasz egy pontja, vagy ha a B pont az AP gömbi szakasz egy pontja, illetve 180^o, egyébként.

2.3 Gömbi távolság és gömbi körök

Az euklideszi geometriában a kör az adott ponttól adott r távolságra levő pontok mértani helyét jelenti. Ahhoz, hogy ennek a definíciónak a gömbi megfelelőjét értelmezni tudjuk, meg kell határoznunk, hogy mit értünk a gömbfelszín két pontjának távolságán.

A gömb felületén az A és B pont távolsága a rövidebb AB főkörívhez tartozó középponti szög radiánban számított értéke, azaz az A és a B pontokat a gömb középpontjával összekötő szakaszok bezárt szöge.



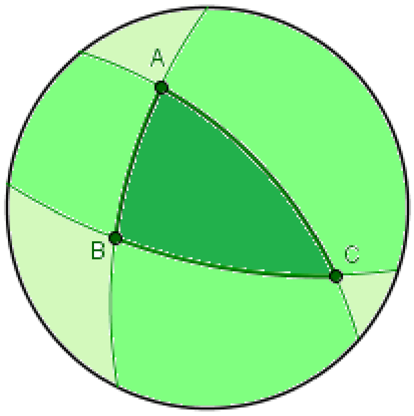
Ezek alapján a gömbi kört a következő módon definiáljuk: A gömbi kör a gömbfelület azon pontjainak mértani helye, melyek egy adott gömbi ponttól adott $r \leq \pi/2$ távolságra helyezkednek el. Ez az adott távolság a gömbi kör sugara. A sugár hosszára vonatkozó megkötésre azért van szükség, hogy a kör középpontja és a körív által határolt körlemez (az $r=\pi/2$ esettől eltekintve) egyértelmű legyen. (Körlemez alatt a gömbfelület azon pontjainak mértani helyét értjük, melyek egy adott gömbi ponttól adott $r \leq \pi/2$ távolságnál nem nagyobb távolságra helyezkednek el.) Ha $r=\pi/2$, akkor az adott pont körül r sugárral húzott körvonal egyúttal főkör is. Ebben a speciális esetben a körnek két átellenes középpontja is van, ezeket a kör pólusainak nevezzük. Ha egy ilyen főkör

által határolt körlemezről beszélünk (ami egy félgömbfelület), akkor meg kell adnunk a körlemez egy belső pontját, hogy egyértelműen definiáljuk a körlemezt.
Egy gömbi kör érintő főkörén olyan gömbi főkört értünk, melynek pontosan egy közös pontja van a körrel, és a főkör minden érintési ponttól különböző pontja a kör külső pontja.
Ha egy gömbi főkör metsz egy gömbi kört (pontosan két közös pontjuk van), akkor a két alakzat bezárt szöge valamely metszéspontban a körhöz húzott érintő főkör és a metsző főkör bezárt szöge. (Ez a definíció mindkét metszéspontra ugyanazt a szöget adja.)
Két egymást metsző gömbi kör bezárt szögén az egyes körökhöz a metszéspontjaikban húzott gömbi érintő főkörök bezárt szögét értjük.

2.4 Gömbi háromszögek

2.4.1 Definíció

Három nem kollineáris gömbi pont (*A*, *B* és *C*) egyértelműen definiál egy közönséges *ABC* gömbi háromszöget a következő módon: Az *A* és *B* pontokra illeszkedő főkör a gömbfelületet két félgömbre osztja. Tekintsük ezek közül azt, amelyik tartalmazza a *C* pontot. Hasonlóan a *B* és *C* , illetve az *A* és *C* pontokra illeszkedő főkörök is meghatároznak egy-egy olyan félgömböt, melyben benne van a harmadik pont. Ezen félgömbök *A*, *B* és *C* csúcsokat tartalmazó metszete adja az *ABC* gömbi háromszöget, melynek csúcsai gömbi pontok, oldalai pedig a rövidebbik *AB*, *BC* és *CA* főkörívek.



Az *ABC* gömbi háromszög *A* csúccsal szemközti *a* oldalának hossza a *BC* gömbi szakasz hossza, tehát az *OB* és *OC* vektorok bezárt szöge radiánban számolva (*O* a gömb középpontja), az *A* csúcsnál fekvő szöge az *AB* és *AC* főkörívek *2.2* pontban definiált bezárt szöge.

2.4.2 Gömbi háromszögekkel kapcsolatos összefüggések

A síkbeli háromszögekhez hasonlóan a gömbi háromszögek oldalhosszai között is fennáll a háromszög-egyenlőtlenség (gömbi háromszögek esetén ezt gömbi háromszög-egyenlőtlenségnek hívjuk), azaz: $a+b>c$, $a+c>b$ és $b+c>a$.

A gömbi háromszögek oldalhosszára vonatkozóan azonban van még egy szabály, aminek nincs síkbeli megfelelője: a *2.4.1* pontbeli definíció miatt szükséges feltétel, hogy legyen olyan gömbi félsík, amelyben a gömbi háromszög mindhárom csúcsa, és maga a háromszög is benne van. (Ilyen gömbi félsík például a háromszöget a definíció szerint előállító egyik félgömb.) Ez a feltétel pedig ad egy korlátot a gömbi háromszög kerületére. A gömbi háromszögek kerülete nem érheti el a gömb felületére rajzolható főkörök hosszát, azaz 2π-t, tehát $a+b+c<2\pi$.

A gömbi és a síkbeli háromszögek között a szögeikre vonatkozó összefüggésekben is lényeges eltérések vannak. Mivel a Girard-formula alapján a gömbi háromszögek területe és szögei között fennáll a $T_{ABC} = \alpha+\beta+\gamma-\pi$ egyenlőség, továbbá a háromszög területe pozitív szám, ezért $\alpha+\beta+\gamma> \pi$. Tehát a gömbi háromszög szögeinek összege nagyobb mint π. A gömbi háromszög minden szöge kisebb mint π, ezért a háromszög belső szögeinek összege kisebb mint 3π. Tehát a háromszög szögeinek összege π és 3π közé eshet.

A gömbfelület korlátos volta nemcsak a gömbi háromszög kerületére, hanem a területére is ad egy felső korlátot (a háromszög területe kisebb, mint egy gömbi félsík területe, azaz egy félgömb felülete), a gömbi háromszög területe biztosan kisebb, mint 2π.

A gömbháromszögek oldalai és szögei közötti összefüggéseket a gömbi háromszögekre vonatkozó szinusztétel, valamint az oldalakra illetve a szögekre vonatkozó koszinusztétel adják meg:

- $\sin a:\sin b:\sin c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$
- $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma$
- $\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c$

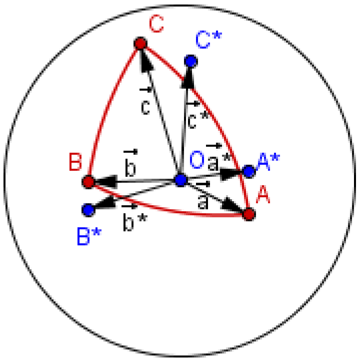
Az oldalhosszak szögfüggvényein az oldalakat meghatározó főkörívek középponti szögének megfelelő szögfüggvényét értjük. A koszinusztételek a többi oldal illetve szög esetében hasonlóan írhatóak fel.

A szögekre vonatkozó gömbi koszinusztételből következik, hogy a gömbi háromszöget egyértelműen meghatározzák a szögei. (A síkban a megfelelő szögek egyenlősége csak a háromszögek hasonlóságát garantálja.) Ezért a gömbfelületen bármely két háromszög, melyeknek megfelelő szögei egyenlők, egybevágó háromszögek. Hasonló, de nem egybevágó háromszögek pedig nincsenek a gömbfelületen.

2.4.3 Poláris gömbi háromszögek

Minden gömbi háromszöghöz egyértelműen definiálhatjuk a hozzá tartozó poláris gömbi háromszöget. A gömbháromszög és a hozzá tartozó poláris háromszög oldalai és szögei közötti összefüggéseket a későbbiekben gömbi geometriai szerkesztési feladatok megoldásánál fogjuk használni.

Valamely gömbháromszög polárisát úgy határozzuk meg, hogy az eredeti háromszög mindhárom csúcsához egyértelműen hozzárendeljük a gömbfelület egy pontját. Az így kapott három képpont által meghatározott gömbi háromszög lesz az eredeti háromszög polárisa.



A hozzárendelés a következő: Tekintsük az *O* középpontú *G* gömb felületén levő nem kollineáris *A*, *B* és *C* pontokba mutató *OA*, *OB* és *OC* vektorokat. Az *A* ponthoz tartozó A^* pont legyen a gömbfelület azon pontja, melyre $OB{\cdot}OA^*=0$, $OC{\cdot}OA^*=0$ és $OA{\cdot}OA^*\geq 0$. (A képletekben szereplő szorzás alatt a megfelelő vektorok skaláris szorzatát értjük.) A háromszög *B* és *C* csúcsaihoz hasonló módon definiálhatjuk a hozzájuk tartozó B^* és C^* pontokat. Tehát az *ABC* gömbi háromszög poláris háromszögén az $A^*B^*C^*$ gömbi háromszöget értjük.

A poláris és az eredeti gömbháromszög oldalai és szögei között a következő összefüggések ismeretesek: Ha az *ABC* gömbi háromszög *A* csúcsánál fekvő szöge α, az *A* csúccsal szemközti oldalának hossza *a*, akkor a neki megfelelő poláris gömbi háromszög A^* csúcsánál fekvő α* szög nagysága π-*a*, az A^* csúccsal szemközti oldal hossza pedig π-α. A másik két oldal, csúcs, illetve szög esetében is hasonló összefüggések teljesülnek.

A poláris gömbháromszög definíciójából könnyen belátható, hogy az *ABC* gömbi háromszög polárisának polárisa maga az *ABC* gömbi háromszög. Ezt az észrevételt több későbbi szerkesztési feladatban fel fogjuk használni.

3. fejezet: Gömbi geometriai szerkesztés

3.1 Eszközök

A gömbfelületen történő szerkesztéshez, akárcsak az euklideszi geometriában, vonalzó és körző áll rendelkezésünkre, azonban, mivel gömbfelületen szerkesztünk gömbi vonalzót, illetve gömbi körzőt használunk. A gömbi vonalzó segítségével főköröket rajzolhatunk, a gömbi körzővel pedig köröket szerkeszthetünk a gömbfelületen.

3.2 A gömbi geometriai szerkesztés definíciója

Miután bemutattuk a szerkesztéshez használatos eszközöket, határozzuk meg mit nevezünk a gömbfelületen történő szerkesztésnek. A szerkesztés az az eljárás, melynek során adott pontokból, egyenesekből, körökből kiindulva, a megengedett szerkesztési lépések véges sokszori alkalmazásával újabb pontokhoz, egyenesekhez, körökhöz jutunk. Minden egyes lépésben adottnak tekintjük az eredetileg adott, és a korábbi lépésekben megszerkesztett ponthalmazokat. A megengedett szerkesztési lépések a következők:

1) A gömbfelület két különböző adott pontjára, melyek nem átellenes helyzetűek, gömbi egyenest, azaz főkört illeszthetünk.
2) Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3) Adott pont körül adott körzőnyílással kört rajzolhatunk.
4) Tekinthetjük két különböző meglévő egyenes (főkör) metszéspontjait. (Két átellenes metszéspontot kapunk.)
5) Tekinthetjük egy kör és az azt metsző egyenes mindkét metszéspontját.
6) Tekinthetjük két egymást metsző kör mindkét metszéspontját.

Ahhoz, hogy a gömbfelületen elkezdhessünk szerkeszteni, szükségünk van a gömbfelület két adott pontjára. A síkbeli euklideszi szerkesztés elkezdéséhez is szükségünk van a sík két különböző adott pontjára, melyek egymáshoz képest tetszőleges módon helyezkedhetnek el. Ezen két kiinduló pont távolságát egységnek tekintjük, és a továbbiakban ezt az egységet használjuk például adott távolságok felvételére.

A gömbfelületen azonban nem lehet tetszőleges két különböző pont a kiindulási pont. Tekintsük adottnak a gömbfelszín két olyan pontját, melyekhez 90^o-os középponti szög tartozik. Azért ilyen pontpárt választunk, mert a későbbiekben vizsgálni szeretnénk, hogy melyek a szerkeszthető távolságok, illetve szögek a gömbfelületen, ezt pedig a gömb esetében meghatározzák a kiindulási adatok. Ezért olyan kiindulási pontpárra van szükség, melyek távolsága nem jelent „többletinformációt", azaz bármely más kiindulási távolság esetén is megszerkeszthető távolság lenne. Látni fogjuk, hogy a 90^o-os középponti szöghöz tartozó főkörív hossza ilyen távolság.

Ha a kiindulási pontpárunk átellenes lenne, akkor a megengedett szerkesztési lépésekkel nem tudnánk további pontokat előállítani, hiszen nem fektethetünk rájuk egyértelműen gömbi főkört, és a távolságukkal nem tudunk gömbi kört rajzolni sem.

Belátható, hogy a megengedett szerkesztési lépések véges sokszori alkalmazásával bármilyen más, nem átellenes kezdő pontpár esetén a szerkesztés során kapott pontok mindenütt sűrűn belepik a gömbfelületet. (A kapott pontok között fellépő lehetséges távolságok, azonban a kiindulási pontok egymáshoz viszonyított helyzetétől függenek.) Ebből adódóan az általunk választott egymástól $\pi/2$ távolságra levő kiindulási pontok esetén a következő fejezetekben tárgyalt szerkesztési eljárások során megengedett az a lépés, hogy vegyünk fel tetszőleges pontokat, egyeneseket, húzzunk tetszőleges köríveket. Ezekre a lépésekre tekinthetünk úgy, mintha a kezdő pontpárból előállítottuk volna a gömbfelületet mindenütt sűrűn belepő ponthalmazt, és az így kapott pontokat használnánk.

3.3 Az euklideszivel analóg alapvető szerkesztési feladatok a gömbön

A megengedett szerkesztési lépések ismertetését követően tekintsünk át néhány alapvető szerkesztési feladatot.

3.3.1 Távolságokkal és szögekkel végzett műveletek

Akárcsak az euklideszi geometriai szerkesztés során, a gömbfelületen való szerkesztés esetében is adott szakaszokat körzőnyílásba vehetünk, majd felmérhetünk adott egyenesre, az egyenes adott pontjából húzott körívvel. Így értelemszerűen elvégezhetjük szakaszok összegzését, kivonását és pozitív egész számmal történő sokszorozását. Ugyancsak a síkbeli eljárás mintájára végezhetjük a gömbfelületen adott szögek összegzését, kivonását, valamint pozitív egész számmal történő sokszorosítását. Az eljárás során gömbi kör ívének adott ponttól való értelemszerű felmérését hajtjuk végre.

3.3.2 Pontból egyenesre állított merőleges szerkesztése

Szerkesszünk a gömbfelület adott P pontján át olyan főkört, mely merőleges a gömbfelület adott f főkörére (f). (Az egyértelműség érdekében tegyük fel, hogy a *P* pontot a gömb középpontjával összekötő szakasz nem merőleges az *f* főkör síkjára.)

A szerkesztési eljárás megegyezik a gömbi szerkesztési feladatnak megfelelő euklideszi feladattal, azaz adott pontból adott egyeneshez húzott merőleges megszerkesztésével:

- Ha *P* nincs rajta az adott *f* főkörön, szerkesszünk egy olyan *P* középpontú kört, amely metszi *f*-t. Ezt úgy biztosíthatjuk, hogy kiválasztjuk a főkör egy tetszőleges pontját (*Q*), majd *P* körül *PQ* távolsággal kört írunk. Ha a kiválasztott *Q* pont épp a *P*-ből *f*-re bocsátott merőleges talppontja, akkor *P* és *Q* pontok összekötésével megkaptuk a keresett főkört. Egyéb esetekben a *P* középpontú, megfelelő sugarú kör két pontban metszi az *f* főkört (legyenek ezek *Q* és *R*). A metszéspontok körül írjunk *QP*=*RP* sugarú köröket. Ezek a körök két pontban metszik egymást, melyek közül az egyik a megadott *P* pont, a másik pedig legyen *M*. Belátható, hogy a metszéspontokra fektetett főkör merőleges az adott f főkörre. A bizonyítás lépései a síkbeli indoklás gömbi megfelelőiből adódnak. (A gömbfelületen azon pontok mértani helye, melyek a gömbfelület két különböző pontjától, esetünkben *Q* és *R* pontoktól, egyenlő távolságra vannak, az a *Q* és *R* pontokat összekötő főkörív felező merőleges főköre.)
- Abban a speciális esetben mikor *P* rajta van az *f* főkörön a szerkesztési eljárás és az indoklás is hasonlít az előbb leírtakhoz. Vegyük a főkör tetszőleges *P*-től π/2-nél közelebbi *Q* pontját. Rajzoljunk kört *P* körül ezzel a *PQ* távolsággal. Ez a kör a főkört a Q és R pontokban metszi. A metszéspontok körül rajzoljunk kört tetszőleges *PQ* távolságnál nagyobb sugárral.(Ha az előző esethez hasonlóan most is *PQ* távolsággal rajzolnánk kört a két pont körül, akkor azok *P*-ben érintenék egymást.) Ezek a körök két pontban metszik egymást. A metszéspontokra fektetett főkör átmegy a *P* ponton és merőleges *f*-re.

3.3.3 Szakaszfelező merőleges szerkesztése

Ugyancsak alapvető szerkesztési feladat a *két különböző gömbi pontot összekötő gömbi szakasz felező merőleges főkörének megszerkesztése*.

A szerkesztés menete az *3.3.2* feladat speciális esetére adott szerkesztési eljárásból következik:

- Tekintsük az adott gömbi szakasz végpontjait, mint az előző feladat szerkesztési eljárása során kapott *Q* és *R* pontokat. Írjunk kört *Q* és *R* pontok köré a *QR* főkörív felénél nagyobb sugárral (például *QR* sugárral). A körök két metszéspontjára illesztett főkör lesz a keresett főkör.

Ez az eljárás a gömbfelület majdnem minden *Q* és *R* pontpárjára valóban a *QR* gömbi szakasz felező merőleges főkörét adja.

- Kivételt képeznek azonban az átellenes *Q* és *R* pontpárok.(A gömbön két átellenes pontpár végtelen sok különböző gömbi egyenest, így végtelen sok különböző gömbi főkörívet határoz meg. Ezeknek azonban közös a felező merőleges főkörük, tehát bármelyik ilyen *QR* főkörívhez kereshetünk felező merőlegest.) Ilyen esetben a *Q* körül rajzolt *r* sugarú körnek és az *R* körül rajzolt *r* sugarú körnek nincs metszéspontja, amire főkört illeszthetnénk.

Ezt a problémát úgy oldhatjuk meg, ha egy olyan *Q'R'* gömbi főkörív felező merőlegesét szerkesztjük meg a már ismert módon, melynek hossza kisebb a *QR* félfőkörív hosszánál, de felező merőlegese megegyezik a *QR* főkörív felező merőlegesével. Ilyen *Q'R'* főkörívet úgy kaphatunk, hogy a *QR* főkörívet mindkét végpontjából ugyanakkora távolsággal lerövidítjük, azaz a *Q* és *R* pontból is felmérjük a *QR* főkörívre ugyanazt az *r'* ($0<r'<\pi/2$) tetszőleges gömbi távolságot.

A következő szerkesztési feladat megoldása bemutatja a szakaszfelező merőleges szerkesztési feladatban történő felhasználásának egyik lehetőségét.

3.3.4 Kör középpontjának megszerkesztése

Szerkesszük meg adott, gömbi kör (k) középpontját (O_k-t).

A feladat megoldása lényegében ismét az analóg síkbeli szerkesztés gömbfelületen történő kivitelezése: A szerkesztési eljárás arra az ismeretre épül, hogy a gömbi kör középpontja egyenlő távolságra helyezkedik el a körív pontjaitól.

- Vegyük a körvonal tetszőleges három különböző pontját (*A*-t, *B*-t és *C*-t). Mivel a keresett *O* pont egyenlő távolságra van az *A* és *B* pontoktól, az *O* pont rajta van az *A* és *B* pontok által meghatározott gömbi szakasz felező merőleges főkörén, f_1-n. Hasonlóan az *O* pont rajta van az *AC* gömbi szakasz felező merőleges főkörén, f_2-n. Ezért f_1 és f_2 megszerkesztése után a főkörök körbe eső közös pontja lesz a keresett középpont.

Vegyük észre, hogy ez az eljárás főkörök esetén is működik. Ebben az esetben előfordulhat, hogy *A*, *B* és *C* pontok közül valamely két pont átellenes. Ilyenkor a *3.3.3.*

speciális esetére vonatkozó szerkesztési lépéseket kell alkalmaznunk, ha ezen pontok által meghatározott szakasz felező merőlegesét szeretnénk megszerkeszteni.

3.3.5 Háromszög körülírt körének megszerkesztése

Szerkesszük meg adott ABC gömbi háromszög körülírt körét (k_{ABC}-t).

A szerkesztési eljárás triviálisan következik a *3.3.4.* pontbeli feladat megoldásából. A háromszög csúcsai által meghatározott gömbi szakaszok közül két tetszőlegeset kiválasztva ezen szakaszok felező merőleges főköreinek metszete adja a keresett kör középpontját. A középpont és a kör adott pontjának (például *A* pont) ismeretében már meg tudjuk szerkeszteni a kört.

3.3.6 Szögfelező egyenes szerkesztése

Szerkesszünk két különböző adott főkör (f_1 és f_2) bezárt szögét felező főkört.

Mivel bármely két különböző gömbi főkörnek van metszéspontja, bármilyen kiindulási feltételek esetén van ilyen főkör. A következő eljárást akkor is alkalmazhatjuk, ha két gömbi egyenes kiegészítő szögét felező főkört szeretnénk kapni. A kiegészítő szög szögfelezője merőleges lesz az eredeti szög szögfelezőjére (akárcsak síkban).

Két különböző főkör két olyan pontban metszi egymást, melyek a gömb átellenes pontjai. Két metsző főkör a gömb felületét négy gömbkétszögre osztja. Két főkör bezárt szögén a két főkör síkjának kisebbik bezárt szögét értjük. (Egyenlőség esetén ez a szög 90^o.) Két főkör mindkét metszéspontjában ugyanakkora szögben metszi egymást.

- Válasszuk ki a két metszéspont közül az egyiket (legyen ez a *P* pont, a másik metszéspont pedig legyen *Q*). Először adunk egy eljárást a *P* pontnál levő szög szögfelezőjének megszerkesztésére, majd megmutatjuk, hogy ez a szögfelező főkör f_1 és f_2 *Q* pontnál levő szögét is felezi.
- Válasszuk ki f_1 tetszőleges *P*-től és *Q*-tól, valamint a *P* és *Q* pontokhoz, mint pólusokhoz

tartozó kör pontjaitól különböző pontját (*A* pont), majd írjunk kört a *P* középpont körül a *PA* főkörív hosszának megfelelő sugárral. Ez a kör négy pontban metszi az f_1 és f_2 főköröket. Válasszuk ki az f_2-n azt a metszéspontot (*B*), amelyre az *APB* szög a felezni kívánt szög. Írjunk kört az *A* és *B* pontok köré *AP*=*BP* sugárral. Ezen körök *P*-től különböző metszéspontja legyen *M*. A *P* és *M* pontokra illesztett főkör lesz az f_1 és f_2 főkörök bezárt szögét felező keresett főkör.

A szerkesztési lépések helyességét az analóg síkbeli feladat megoldásához hasonlóan láthatjuk be. A síkhoz hasonlóan a gömbön is teljesül, hogy két metsző egyenestől egyenlő távolságra levő pontok halmaza a két egyenes bezárt szögének, valamint a hozzá tartozó kiegészítő szögnek a szögfelező egyenese. A szerkesztési eljárásunk eredményeként kapott egyenes pontjai egyenlő távolságra vannak az f_1 és f_2 egyenestől, és a gömbfelület más pontjaira (a kiegészítő szög szögfelezőjének pontjaitól eltekintve) nem teljesül ez az állítás. Továbbá, mivel a szögfelező olyan gömbi főkör, amely átmegy a *P* ponton, szükségszerűen átmegy a *P*-vel átellenes *Q* ponton is. Következésképpen a megszerkesztett gömbi főkör felezi az f_1 és f_2 egyenesek *Q* metszéspontjánál fekvő szögét is.

Síkbeli euklideszi szerkesztés esetén alapvető szerkesztési feladatnak számít a háromszög szerkesztés meghatározott adatokból. A következőkben áttekintjük, hogy ezen szerkesztések gömbi megfelelői hogyan valósíthatóak meg.

3.3.7 Háromszög szerkesztése az oldalhosszok ismeretében

Szerkesszünk gömbi háromszöget, ha adva van mindhárom oldalának hossza (a,b,c).

Feltehetjük, hogy az oldalak hosszára fennállnak a *2.4.2* pontban említett egyenlőtlenségek, különben az adatokból nem szerkeszthető gömbi háromszög. A szerkesztési eljárás hasonlít a megfelelő síkbeli feladat megoldására.

- Vegyünk fel egy főkörívet, és jelöljük ki egy tetszőleges pontját, ez lesz a háromszög

A csúcsa. Vegyük körzőnyílásba a *b* oldalhosszt, és mérjük fel a főkör *A* pontjából az egyik tetszőleges irányba, a *b* hosszúságú főkörív *A*-tól különböző végpontja lesz a háromszög *C* csúcsa. Ezután írjunk kört az adott *c* hosszúságú sugárral az *A* pont körül, és *a* hosszúságú sugárral a *C* pont körül. Ha a háromszög szerkeszthető, akkor az $a+c>b$, $a+b>c$ és $b+c>a$ feltételek miatt ez a két kör metszi egymást. A két metszéspont közül bármelyiket is választjuk a háromszög *B* csúcsának, egybevágóság erejéig egyező megoldásokat kapunk.
A szerkesztés lépéseit végiggondolva láthatjuk, hogy három adott oldal egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározza a háromszöget.

3.3.8 Háromszög szerkesztése két oldal és a közbezárt szög ismeretében

Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának hossza (a és b), és a közbezárt szög (γ).

- Vegyünk fel tetszőlegesen egy *f* főkört a gömb felületén, majd tetszőleges *C* pontját kiválasztva mérjük fel a γ szöget a *C* csúcsba úgy, hogy a szög egyik szára az *f* főkör legyen. Ezután *C* csúcsból mérjük fel a γ szög egyik szárára az *a*, a másikra pedig a *b* oldalhosszokat.

Az oldalakra vonatkozó gömbi koszinusztételből következően a feladatban szereplő három adat egyértelműen megadja a háromszög harmadik oldalának hosszát. Ezekből az adatokból egybevágóság erejéig pontosan egyféle háromszöget szerkeszthetünk. Mivel az általunk megszerkesztett háromszög megfelel a kezdeti feltételeknek, ezért szerkesztési eljárásunk helyes volt.

3.3.9 Háromszög szerkesztése két oldalból és a nagyobbikkal szemközti szögből

Szerkesszünk gömbi háromszöget, ha adott két oldala (a és b, továbbá feltehetjük, hogy $a \leq b$), és a nagyobbikkal szemközti szöge (β).

- Vegyünk egy tetszőleges *f* főkört, rajta egy *B* ponttal. Az *f* főkörre mérjük fel a *B* csúcsból az adott *a* oldalhosszt, így megkapjuk a háromszög *C* csúcsát. Mérjük fel a *B* csúcsba az adott β szöget úgy, hogy egyik szögszára az *f* főkör legyen. Messük el a másik szögszárat a *C* csúcsú *b* sugarú körívvel, így megkapjuk a háromszög *A* csúcsát is. A háromszög csúcsainak ismeretében, azokat főkörívekkel összekötve megkaphatjuk a kérdéses háromszöget.

A feladatban szereplő „nagyobb oldallal szemközti szög" feltétel azt biztosítja, hogy a kiindulási adatokból (ha megfelelőek) egybevágóság erejéig egyféle háromszöget tudjunk szerkeszteni. Ha nem kötjük ki, hogy a megadott szög a nagyobb oldallal szemközti szög, akkor a fenti szerkesztési eljárást követve (a síkbeli esethez hasonlóan) több egymástól különböző jó megoldást is kapunk. Ez abból adódik, hogy, ha β a rövidebbik oldallal szemközti szög, akkor a szerkesztési eljárás során a β nagyságú szögszárat a *C* csúcsból *b* sugarú körívvel metszve a szögszáron két megfelelő metszéspont is adódik, melyek különböző olyan háromszögeket határoznak meg, melyeknek két oldala *a* és *b* hosszúságú és egyik szögük β.

Ha azonban β a nagyobbik oldallal szemközti szög, akkor csak egy ilyen metszéspont keletkezik (a másik metszéspont a szögszár másik irányú meghosszabbításán lesz, ami nem ad megfelelő háromszöget, mert *b* oldallal szemközti szöge π-β és nem β.)

3.3.10 Háromszög szerkesztése egy oldalából és a rajta fekvő két szögből

Szerkesszünk gömbi háromszöget, ha adott egy oldala (a) és a rajta fekvő két szöge (β és γ).

A szerkesztési eljárás ebben az esetben is megegyezik a hasonló síkbeli feladat megoldásával.

- A gömbfelület valamely *f* főkörén vegyük fel a *B* pontot, majd *B*-ből *a* sugarú körívvel messük el a főkört. Az egyik ilyen metszéspont lesz a *C* csúcs. (A másik metszéspontot *C*-nek választva egybevágóság erejéig ugyanazt a gömbi háromszöget kapnánk.) Az így kapott *BC* oldalra mérjük fel a *B* pontban az adott β, *C* pontban pedig az adott γ szöget. Ezen szögszárak a háromszög *A* csúcsában metszik egymást.

3.4 Az euklideszitől eltérő alapvető szerkesztések a gömbön

Az eddigi gömbi szerkesztési példák megoldása lényegében megegyezett a síkbeli megfelelőjével. Most tekintsünk néhány olyan szerkesztési feladatot, melyek esetében eltérés mutatkozik a gömbi és a síkbeli módszerek között, illetve az egyik esetben megoldhatóak, míg a másik esetben nem.

3.4.1 Szakasz egyenlő részekre osztása

A síkbeli euklideszi szerkesztés során a párhuzamos szelők tételét használjuk adott szakaszt adott *n* egyenlő részre osztó pontok megszerkesztésekor (ha $n>2$). Ezt a síkban használatos módszert nem tudjuk megfelelő gömbi lépésekkel végrehajtani a gömbfelületen, mivel párhuzamos egyeneseket a gömbön nem definiálunk, és a háromszögek közötti hasonlóság sem úgy teljesül a gömbfelületen, ahogyan azt a síkbeli párhuzamos szelők tételének bizonyításában használjuk. Tehát ennek a síkbeli szerkesztési eljárásnak nincs analóg gömbi megfelelője.

Felvetődik az a kérdés, hogy vajon csak más szerkesztési eljárást kell találnunk, vagy a gömbön esetleg nem is létezik olyan eljárás, ami minden $n>2$ természetes szám esetén jó megoldást ad. Miután a *4. fejezetben* megvizsgáljuk a gömbi geometriai szerkeszthetőség kérdését, az eredmények alapján azt is be tudjuk majd látni, hogy más módszerrel sem lehet adott gömbi szakaszt tetszőleges $n>2$ részre osztani. Csak bizonyos *n*-ekre található megfelelő eljárás.

3.4.2 Háromszög szerkesztése egy oldal és két tetszőleges szög ismeretében

Ha a síkban általánosítjuk a *3.3.10.* pontban leírt feladatot, azaz *szerkesztendő egy háromszög, ha adott két szöge és egy oldala*, akkor a belső szögek összegét ismerve megszerkeszthetjük a harmadik szöget is, ezután már csak több esetre kell megoldanunk az előző feladatot, hiszen bármelyik két ismert szög lehet az adott oldalon fekvő két szög.

Mivel azonban gömbi háromszögek esetében nem teljesül, hogy minden gömbi háromszög belső szögeinek összege ugyanannyi, nem tudjuk átvinni ezt a síkbeli módszert a gömbön történő szerkesztésre.

Ennek a szerkesztési feladatnak a megoldásához a gömbi háromszög és a hozzá tartozó poláris gömbi háromszög szögei és oldalai közti *2.4.3* pontban ismertetett összefüggéseket fogjuk felhasználni. Ezekből az összefüggésekből következően, ha adott egy gömbi háromszög egy oldala és két szöge, akkor ismerjük a hozzá tartozó poláris háromszög két oldalát és egy szögét.

Feltehetjük, hogy az eredeti háromszögben a két adott szög közül csak az egyik illeszkedik az adott oldalra, hiszen azt az esetet, mikor mindkét szög az adott oldalra illeszkedik, már megvizsgáltuk a *3.3.10.* pontban.

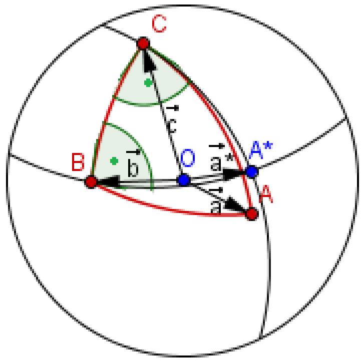
Tehát, ha az eredeti háromszög két adott szöge közül csak az egyik illeszkedik az adott oldalra, akkor a poláris gömbi háromszög ismert szöge nem a két ismert oldal bezárt szöge. Ezt a poláris gömbi háromszöget a *3.3.9.* pontban írtak alapján meg tudjuk szerkeszteni, és attól függően, hogy az ismert szög a nagyobbik ismert oldallal szemközti szög-e, vagy nem, egy vagy több a feltételeknek megfelelő poláris háromszöget kapunk.

Mivel az ABC gömbi háromszög polárisának polárisa maga az ABC gömbi háromszög, már csak azt kell megmutatnunk, hogy miként szerkeszthetjük meg egy gömbháromszög poláris háromszögét, és ekkor a poláris gömbi háromszögekre vonatkozó feladat megoldása után a megoldásként kapott háromszög polárisát megszerkesztve az eredeti feladat megoldásához jutunk. A poláris háromszög szerkesztését a következő pontban tárgyaljuk.

3.4.3 Gömbi háromszög polárisának megszerkesztése

Szerkesszük meg adott gömbi háromszög poláris háromszögét.

Legyenek ABC és $A^*B^*C^*$ háromszögek egymás polárisai, O pedig a gömb középpontja. Ekkor az A^*-ba mutató OA^* vektor merőleges a B, C és O pontok által meghatározott síkra (a B és C pontokon átmenő főkör síkjára), és az A és A^* pontok a sík ugyanazon oldalára esnek. Ebből következően az A^* ponton átmenő főkörök merőlegesek a B és C pontok által meghatározott főkörre.



Tehát A^*-t megkaphatjuk a B és C pontokon átmenő főkörre a B és a C pontokban állított merőleges főkörök metszéspontjaként. (A keletkező átellenes metszéspontok közül az lesz a keresett A^* pont, amire A és A^* pontok a B és C pontokhoz tartozó főkör ugyanazon oldalán vannak.) Hasonlóan kaphatjuk a B^* és C^* pontokat is.

Ezután a poláris háromszög megfelelő oldalaihoz tartozó főköríveket behúzva megszerkesztettük az ABC háromszög poláris háromszögét, $A^*B^*C^*$-t.

3.4.4 Gömbi háromszög szerkesztése szögeinek ismeretében

Az eredeti feladat poláris háromszögekre történő átfogalmazását használjuk az alábbi szerkesztési probléma megoldásánál is:

Szerkesszünk gömbi háromszöget, ha adott három szöge.

Ez a kérdés azért is érdekes, mert síkban ennek a feladatnak nincs egyértelmű megoldása, hiszen három szög végtelen sok különböző méretű hasonló háromszöget definiál. Gömbi háromszögek esetében azonban három szöge egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározza a gömbi háromszöget.

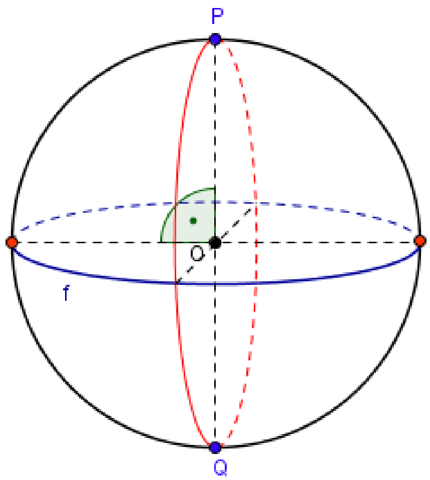
Ha ismerjük egy gömbi háromszög szögeit, akkor ezek meghatározzák a háromszög poláris háromszögének oldalait. Három adott oldalból (feltéve, hogy teljesülnek rájuk a *2.4.2.* pontban leírt egyenlőtlenségek) a *3.3.7.* pontban tárgyalt módon tudunk gömbi háromszöget szerkeszteni, majd az így kapott háromszög polárisát megszerkesztve az eredeti feladat megoldását kapjuk.

3.4.5 Főkörök és átellenes pontpárok polárisainak megszerkesztése

A gömbön nem csak háromszögek, hanem átellenes pontpárok és főkörök polárisát is értelmezhetjük, melyek további szerkesztési feladatoknál játszanak fontos szerepet.

1. definíció: A gömbfelületen egy átellenes (P, Q) pontpár poláris képe az az f főkör lesz, melynek pólusai az adott pontpár tagjai. Ennek a főkörnek a síkja merőlegesen felezi a pontpárt térben összekötő szakaszt.

2. definíció: Egy *f* főkör polárisa a pólusaiból (*P*, *Q*) álló átellenes pontpár. Ez az átellenes pontpár a gömb középpontjából a főkör síkjára merőleges térbeli egyenes és a gömbfelszín metszeteként áll elő.



A definíciókból következően most is teljesül, hogy egy alakzat (pontpár vagy főkör) polárisának polárisa, maga az alakzat.

Ahhoz, hogy szerkesztéseknél használhassuk a poláris alakzatokat, előbb meg kell mutatnunk, hogy miként szerkeszthetőek meg a fent említett alakzatok poláris képei.

Az átellenes pontpár polárisának definíciójából következik, hogy a poláris főkör merőlegesen felezi a két átellenes pontra illeszthető főkör pontok közé eső szakaszát.

- Tehát a két átellenes pontot összekötő főkörív szakaszfelező merőlegesét a *3.3.3.* pont átellenes pontpárokra vonatkozó részéből ismert módon megszerkesztve a pontpár poláris képét kapjuk.
- Mivel egy főkörre állított minden merőleges főkör átmegy a főkörhöz tartozó poláris pontpáron, a főkör poláris képét úgy szerkeszthetjük meg, ha a főkör két különböző pontjában is merőleges főköröket állítunk a főkörre. Ezen két merőleges metszéspontjai adják azt az átellenes pontpárt, ami az adott főkör poláris képe.

A következő két pontban olyan szerkesztési példákat láthatunk, melyekben pontpárok, és főkörök polárisát használjuk fel.

3.4.6 Körhöz külső pontból húzott érintő szerkesztése

Adott a gömbfelületen egy k kör és rajta kívül egy P pont. Szerkesszünk olyan főkört, ami átmegy a P ponton és érinti az adott k kört.

Ennek a szerkesztési feladatnak a síkbeli megoldásánál felhasználjuk a Thálesz-tételt, melynek állítása azonban a gömbfelületen nem teljesül, így itt más eszközöket kell választanunk.

Mielőtt a szerkesztési eljárást megkeresnénk, érdemes elgondolkodni, hogy milyen eredményt várunk az eljárástól.

Ha a k kör egy gömbi főkör, akkor a gömbfelületnek nincs olyan pontja, amin keresztül érintő főkört húzhatunk k-hoz, hiszen bármely két főkörnek legalább két közös pontja van egymással, tehát nem érinthetik egymást.
A P pont és a k kör egymáshoz viszonyított helyzetétől függően, akárcsak síkban, a lehetséges megoldások száma háromféleképpen alakulhat:

1. Ha a P pont az adott körön belül helyezkedik el, akkor nincs olyan főkör, ami áthalad P-n és érinti az adott k kört.
2. Ha P külső pontja a körnek, akkor két különböző érintő főkör is húzható P-n keresztül.
3. Ha P a körív egy pontja, akkor P-n keresztül pontosan egy érintő főkört rajzolhatunk a körhöz.

Szerkesztési módszerünk lényege, hogy előbb a keresett érintő főkör(ök) poláris képét szerkesztjük meg, majd ennek segítségével származtatjuk az érintő főkör(öke)t. Az érintő főkör(ök) poláris képét pedig megfelelő főkörök metszeteként fogjuk előállítani.
Ahhoz, hogy a szerkesztési eljárás helyességét megértsük, fel kell használnunk a következő tételt:

1. Tétel: *Ha a gömbfelületen egy f főkör átmegy egy P ponton, akkor az f főkörhöz tartozó poláris pontpár rajta van a P ponthoz tartozó poláris főkörön.*

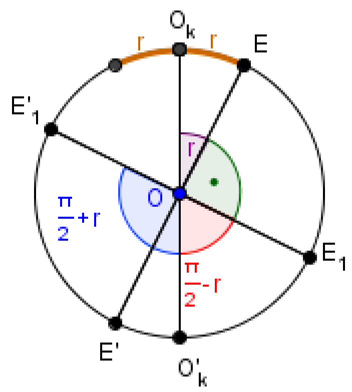
Bizonyítás: Ez az állítás az átellenes pontpárok és főkörök poláris képére vonatkozó definíciókból következik az alábbiak miatt: Legyen az f_1 főkör egy pontja P_1, a P_1-gyel átellenes pontja pedig P_1'. Ekkor az f_1 poláris képe a kör pólusaiból álló átellenes pontpár (Q_1 és Q_1'). Ez a pontpár P_1 és P_1' pontokat térben összekötő szakaszra a gömb középpontjában állított merőleges egyenes és a gömb metszeteként áll elő. A P_1 és P_1' pontpár poláris képe az az f_2 főkör, melynek pólusai a P_1 és P_1' pontok. Az f_2 főkör síkja merőlegesen felezi a P_1 és P_1' pontokat térben összekötő szakaszt. Ezért f_2 átmegy a Q_1 és Q_1' pontokon.

Tehát a feladatbeli k kör P-n átmenő érintőjének poláris pontpárja rajta lesz a P és a P-vel átellenes P' pontokhoz tartozó poláris főkörön.
Ha tudunk mutatni további olyan ponthalmazt, amiben biztosan benne van a keresett érintő főkör poláris képe, akkor ennek a halmaznak, és a P, P' pontokhoz tartozó poláris főkörnek a metszete megadja az érintő főkör poláris képét, amiből már az említett módon

megszerkeszthetjük a megfelelő érintőt. A következő tétel éppen ilyen ponthalmazt ad meg.

2. Tétel: *Legyen O_k a k gömbi kör középpontja, O_k' az O_k-val átellenes gömbi pont, O pedig a gömb középpontja. A k-val koncentrikus, O_k középpontú, π/2-r sugarú kör és az O_k' középpontú π/2-r sugarú kör együttesen (r itt a k kör sugarát jelöli) kiadja a k-t érintő valamennyi főkör poláris képét.*

Bizonyítás: Adott *e* érintő főkör esetén legyen a *k*-val vett érintési pont *E*. Tekintsük a gömbnek az O_k és *E* pontokon átmenő főkört tartalmazó síkkal vett metszetét. Ez a síkmetszet egy kör, melynek középpontja megegyezik a gömb *O* középpontjával.



Mivel a *k* gömbi kör sugara *r*, az O_kOE (O_kE ívhez tartozó) középponti szög radiánban vett értéke megegyezik *r*-rel.
Legyen a síkmetszeten az *E* pont átellenes párja *E'*, ez a gömbfelületen is *E* átellenes pontja lesz. Az *E*, *E'* pontokon áthaladó gömbi főkör poláris képe ezen a síkmetszeten az *O* középpontú körnek az az átellenes pontpárja (E_1 és E_1'), amelyeket összekötő átmérő merőleges az *EE'* átmérőre. Ebből adódóan az O_kOE_1 középponti szög radiánban mért értéke a síkmetszeten π/2+*r*, az O_kOE_1' középponti szög radiánban mért értéke pedig π/2-*r*. Az O_kOE_1 és az E_1OO_k' szögek π-re egészítik ki egymást, hiszen O_k és O_k' átellenes pontok a síkmetszet körén és a gömbön is. Ezért az E_1OO_k' szög radiánban számított értéke π/2-*r*.
Mivel ezek az összefüggések bármely *k*-hoz húzott érintő *E* érintési pontja esetén vett síkmetszetekre teljesülnek, ha az *E* pont befutja a *k* gömbi körvonalat, akkor a síkmetszeteken ábrázolt E_1 és E_1' pontok befutják az O_k középpontú π/2-*r* és az O_k' középpontú π/2-*r* sugarú gömbi körvonalakat.

Ezekből a tételeket felhasználva szerkesztési eljárásunk a következő:

- Megszerkesztjük a *P* és a vele átellenes *P'* pontokhoz tartozó poláris főkört, f_p-t.
- Megszerkesztjük az O_k középpontú π/2-*r* sugarú kört (k_1-t), majd az O_k-val átellenes O_k' pontot, és az O_k' középpontú π/2-*r* sugarú kört (k_2-t).
- Az f_p valamint a k_1 és k_2 körök metszéspontjai adják a keresett érintő főkör poláris képét.

- Ha a P pont a k körön kívül esik, akkor négy ilyen metszéspont keletkezik, melyek közül két-két pont átellenes. Ebben az esetben a két-két átellenes pontpár poláris képét megszerkesztve a k kör P-n átmenő két érintőjét kapjuk.
- Ha a P pont rajta van a k körvonalon, akkor a P és a vele átellenes pont poláris képét adó f_p kör érinti az O_k középpontú $\pi/2$-r és az O_k' középpontú $\pi/2$-r sugarú kört is. Ekkor ezek az érintési pontok adják azt az átellenes pontpárt, melynek poláris képe a P-n áthaladó egyetlen érintő lesz.
- Ha a P pont a k körön kívül esik, akkor f_p-nek nincs közös pontja a k_1 és k_2 körökkel, tehát a feladatnak nincs megoldása.

3.4.7 Két kör közös érintőinek megszerkesztése

Adott a gömbfelületen két gömbi kör (k_1 és k_2). Szerkesszünk olyan főkört, amely mindkét adott kört érinti.

Legyenek O_{k1} és O_{k2}, az adott körök középpontjai, O_{k1}' és O_{k2}' a velük átellenes gömbi pontok, $r_1$és r_2 pedig az adott körök sugarai.

A *3.4.6.* pontban bizonyított 2. tétel szerint a k_1 kört érintő főkörök poláris képei rajta lesznek az O_{k1} és O_{k1}' középpontú $\pi/2$-r_1 sugarú körökön. Hasonlóan a k_2 kört érintő főkörök poláris képei rajta lesznek az O_{k2} és O_{k2}' középpontú $\pi/2$-r_2 sugarú körökön. Mivel olyan főkört keresünk, ami k_1-t és k_2-t is érinti, a keresett főkör poláris képének mindkét feltételt ki kell elégítenie.

Tehát szerkesztési eljárásunk a következő:

- Megszerkesztjük az O_{k1}' és O_{k2}' pontokat, valamint az O_{k1}, $O_{k2,}$ O_{k1}' és O_{k2}' középpontú megfelelő sugarú köröket.
- Az ezen körök metszéspontjaiként előálló átellenes pontpárok lesznek a k_1 és k_2 körök közös érintőinek poláris képei.
- Ezután az átellenes pontpárok poláris képeit, a *3.4.5.* pontból ismert módon megszerkesztve megfelelő érintő köröket kapunk.

Akárcsak síkban, a gömbfelületen is különböző számú megoldást kaphatunk a megadott körök egymáshoz viszonyított helyzetétől függően.

4. fejezet: Gömbi szerkeszthetőség

Miután az euklideszi geometriából ismert alapvető szerkesztési feladatok gömbi végrehajtásának lehetőségeit megvizsgáltuk, megállapíthatjuk, hogy a módszerek sok hasonlóságot mutatnak az euklideszi eljárással, de vannak lényeges különbségek is.
Ismert euklideszi geometriai probléma, hogy mely szögek és távolságok szerkeszthetőek meg két adott pontból kiindulva (távolságukat egységnyinek tekintve) a megengedett szerkesztési lépések véges sokszori alkalmazásával. Jogosan merül fel bennünk a kérdés, hogy mit mondhatunk a gömbfelületen megszerkeszthető szögekről, valamint távolságokról. Vajon ebben a tekintetben hasonlóságot, vagy különbséget mutat az euklideszi és a gömbi geometriai szerkesztés? Szakdolgozatom következő nagyobb gondolati egységében ennek a kérdésnek a megválaszolásával foglalkozom.

4.1 Megszerkeszthető távolságok és szögek definíciója

Először is pontosan meg kell határoznunk, hogy mikor tekintünk egy távolságot, illetve szöget megszerkeszthetőnek a gömbfelületen.
Az alapvető szerkesztési feladatok bevezetésében foglaltak miatt legyen adott a gömbfelület két olyan pontja, melyekhez $\pi/2$ nagyságú középponti szög tartozik. Bármilyen más távolságra levő A, B pontpárt veszünk adottnak, mindenképpen tudunk olyan pontpárt szerkeszteni, melyek egymástól $\pi/2$ távolságra vannak.

- Illesszünk főkört az A és B pontokra (ha ezek átellenes pontok, akkor vegyük valamelyik tetszőleges rájuk illeszthető főkört), majd vegyünk fel két nem átellenes pontot ezen a főkörön (legyenek ezek C és D pontok).
- A főkörre C-ben és D-ben állított merőleges főkörök a főkörhöz tartozó poláris pontpárban metszik egymást, tehát bármelyik metszéspontot véve, a metszéspont és a C (vagy D) pont távolsága éppen $\pi/2$.

1. definíció: Egy α szöget a gömbön megszerkeszthetőnek tekintünk, ha két, egymástól $\pi/2$ távolságra levő adott pontból kiindulva a *3.2.* pontban definiált gömbi geometriai szerkesztés útján, véges sok lépésben két olyan egyeneshez, vagy főkörívhez jutunk, melyek egymással α szöget zárnak be.

2. definíció: Egy d távolságot a gömbön megszerkeszthetőnek tekintünk, ha egy olyan alappontpárból kiindulva, melyek tagjai $\pi/2$ távolságra vannak egymástól, véges sok gömbi geometriai szerkesztési lépés után két olyan pontot kapunk, melyek távolsága d.

4.2 Megszerkeszthető gömbi távolságok és szögek kapcsolata

Tétel: *A gömbön a megszerkeszthető szögek, és a megszerkeszthető távolságok megegyeznek.*

Bizonyítás: Ha egy α szög megszerkeszthető, akkor egymástól α távolságra levő pontokat is tudunk szerkeszteni a következő módon:

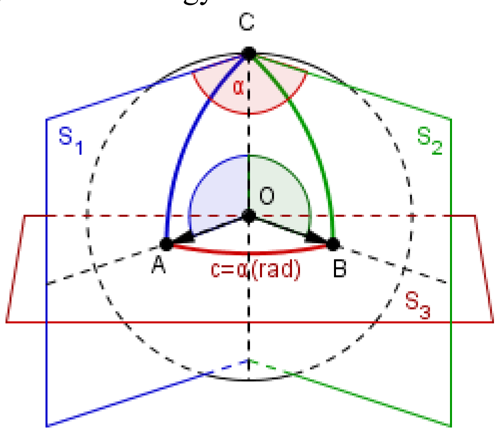
- Az α szöget bezáró egyenesek átellenes metszéspontjaihoz megszerkesztjük, a hozzájuk tartozó poláris főkört. (α szöget bezáró főkörívek esetén a főkörívek végpontjaira illesztett, a főköríveket tartalmazó egyenesek átellenes metszéspontjaihoz tartozó poláris főkört szerkesztjük meg.) Ekkor a poláris főkörből a két α szöget bezáró gömbi egyenes (α szöget bezáró főkörívek esetén a meghosszabbításukként adódó két főkör) α hosszúságú főkörívet metsz ki, melynek végpontjai megfelelő pontok.

Fordítva, ha adott a gömbfelületen két pont (A és B), melyek távolsága α, akkor tudunk szerkeszteni két olyan gömbi főkört, vagy főkörívet melyek α szöget zárnak be egymással.

- Állítsunk merőlegest az A és B pontokra illesztett főkörre az A és B pontokban. Ekkor

a két AB gömbi szakaszra merőleges főkör α szögben metszi egymást, vagy tompaszögű α esetén a kiegészítő szögük lesz α.

Mindkét szerkesztés indoklását megkapjuk, ha tekintjük a gömb és két olyan félsík (S_1 és S_2) metszetét, melyek egy a gömb középpontján átmenő egyenesben csatlakoznak egymáshoz, és α szöget zárnak be egymással.



Ezek a félsíkok a gömbből két egymással α szöget bezáró gömbi félfőkörívet (f_1 és f_2) metszenek ki. A gömb középpontján átmenő, S_1-re és S_2-re is merőleges harmadik félsík (S_3) olyan gömbi főkörív végpontjait metszi ki a két gömbi félfőkörből, melyhez az S_1 és S_2 síkok

bezárt szöge miatt α középponti szög tartozik, tehát a főkörív hossza α.
Mivel S_3 merőleges S_1-re és S_2-re, ezért S_1 és S_2 merőlegesek az említett főkörívre, és az S_3 által kimetszett gömbi félfőkörívre illeszkedő főkör az f_1 és f_2 félfőkörívekre illeszkedő főkörök átellenes metszéspontjaihoz tartozó poláris főkör.

4.3 Tétel a gömbi szerkeszthetőségről

A gömbi távolságok és szögek megszerkeszthetőségét pontosan definiálva értelmet adtunk annak a kérdésnek, hogy mely szögek, illetve távolságok szerkeszthetőek meg a gömbfelületen. Az itt következő tétel erre a kérdésre ad választ:

Tétel: *Pontosan azok a gömbi geometriai szerkesztésben megszerkeszthető szögek, mint, amelyek a síkban euklideszi szerkesztéssel szerkeszthetőek.*
A tételbeli állítás elsőre meglepőnek tűnhet, hiszen eddigi gömbi geometriai vizsgálódásaink során jelentős különbségeket tapasztaltunk az euklideszi és a gömbi geometria között. A tétel bizonyítása az állítás jellegéből adódóan kétirányú lesz, azaz belátjuk, hogy minden gömbön megszerkeszthető szög a síkban euklideszi szerkesztéssel is megszerkeszthető, valamint azt is, hogy minden síkban euklideszi szerkesztéssel előállítható szög a gömbön is megszerkeszthető.

4.4 A bizonyítás alapötlete

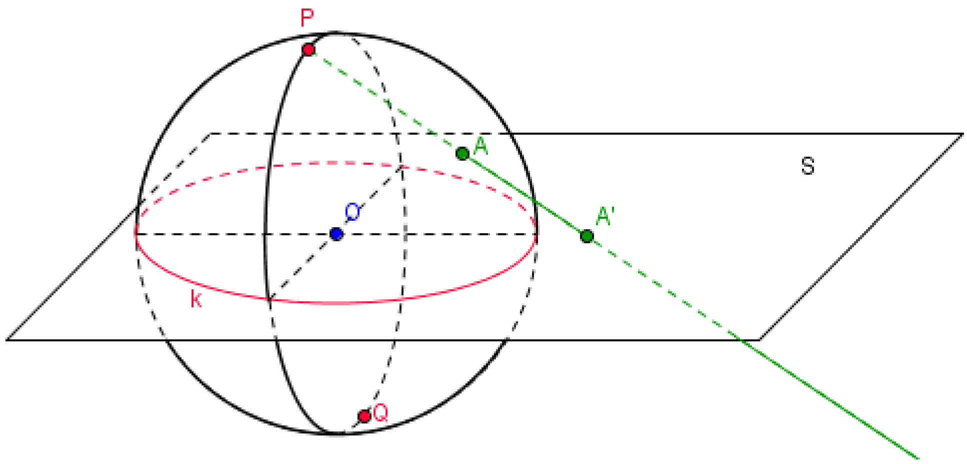
4.4.1 A sztereografikus projekció bevezetése

A különböző szögek gömbi és euklideszi szerkeszthetőségének összehasonlítása érdekében kapcsolatot kell teremtenünk a gömbfelszín és a sík pontjai között. Ehhez olyan alkalmas transzformációt választunk, ami (a gömbfelület egy pontját kivéve) bijektíven felelteti meg egymásnak a gömbfelület és a sík pontjait.
Legyen ez a transzformáció a sztereografikus projekció, amit a következőképpen értelmezünk:

- Vegyük a gömbfelület egy tetszőleges *P* pontját. (Amikor majd a sztereografikus projekciót a *4.3.* pontbeli tétel bizonyításában alkalmazzuk, akkor bizonyos megkötéseket fogunk tenni a *P* pont kiválasztására, de a definíció kimondásában ennek nincs szerepe.)

A P-vel átellenes gömbi pont a Q pontot. A P és Q pontokhoz tartozó k poláris főkört kimetsző sík legyen S, erre a síkra vetítjük le a gömbfelület pontjait.

- Valamely P-től különböző gömbi A pont síkbeli képe az A és P pontokon átmenő térbeli egyenes és az S sík metszete (A'). Így a P pont kivételével a gömb minden pontjához egyértelműen rendeltük hozzá a sík valamely pontját, hiszen ez a metszet mindig létezik.



- A P pont képét szemléletesen úgy képzelhetjük el, mint az S sík végtelen távoli pontját, hiszen a gömbfelület többi pontjára vonatkozó definíció szerint P képe egy olyan egyenes S síkkal vett metszete lenne, amely a gömbfelület többi pontján nem halad át (mert ezek már más gömbi pontok képeit definiálják, és bijektív leképezést keresünk). Az ilyen tulajdonságú egyenesek a gömbhöz P-ben húzott érintők, amik párhuzamosak az S síkkal, tehát S síkkal vett metszetük az S végtelen távoli pontja.

4.4.2 A sztereografikus vetítés tulajdonságai

1. Vegyük észre, hogy a k kör (gömbi főkör) középpontja megegyezik a gömb középpontjával (O pont), és ez az O pont a gömbi Q pont sztereografikus projekcióval kapott síkbeli képe.

2. A gömbfelület k főkörének pontjai a transzformáció fixpontjai, tehát k képe a síkban önmaga. A k főkör két félgömbre osztja a gömbfelületet.

3. A gömbfelület azon pontjai, melyek a P ponttal azonos félgömbön helyezkednek el, a transzformáció után a k körön kívülre kerülnek, a másik félgömb pontjainak képei a kör belsejében lesznek.

4. Az S sík bármelyik pontját (a végtelen távoli pont kivételével) P-vel összekötő egyenes pontosan egy P-n kívüli pontban metszi a gömbfelületet. Tehát bármely síkbeli A' ponthoz egyértelműen létezik olyan gömbi A pont, aminek sztereografikus képe az A'

pont. Ezzel beláttuk, hogy valóban olyan transzformációt definiáltunk, ami a P ponttól eltekintve bijektíven képezi le a gömbfelület pontjait egy adott sík pontjaira, és egyúttal azt is megmutattuk, hogyan kapjuk a transzformáció inverzét, azaz hogyan rendelhetjük hozzá a sík pontjaihoz a gömb pontjait.

5. Ismeretes, hogy a *4.4.1.* pontban definiált sztereografikus projekció azon gömbi köröket (a főköröket is beleértve), amelyek nem mennek át a *P* ponton síkbeli körökbe viszi (az azonban nem teljesül, hogy a gömbi körök középpontjainak sztereografikus képei megegyeznének a körök síkbeli képeinek középpontjával). A *P* ponton átmenő gömbi körök képei síkbeli egyenesek lesznek.

Mindez fordítva is igaz, azaz síkbeli egyenes gömbi képe a sztereografikus projekció inverzét alkalmazva olyan gömbi kör (esetleg főkör) lesz, ami átmegy a *P* ponton, a síkbeli körök képei pedig a gömbön is körök lesznek. (Most sem teljesül, hogy a síkbeli kör gömbi képének középpontja megegyezne a síkbeli kör középpontjának gömbi képével.)

6. Továbbá azt is tudjuk, hogy két gömbi kör (a főköröket is beleértve) bezárt szöge megegyezik síkbeli sztereografikus képeik bezárt szögével. (Az 5. tulajdonságból következően ezek a képek lehetnek síkbeli egyenesek, vagy körök, tehát a síkbeli képek bezárt szögén ezen alakzatok egymással bezárt szögét értjük.) Ezért a sztereografikus projekció invertálhatóságából adódóan két síkbeli egyenes gömbi képének bezárt szöge is megegyezik az egyenesek síkban bezárt szögével.

4.4.3 A sztereografikus projekció szerepe a bizonyításban

A sztereografikus projekció definiálása után megmutatjuk, hogyan használhatjuk ezt a módszert a *4.3.* tétel kétirányú bizonyításában.

A bizonyítás első részében belátjuk, hogy a meglévő gömbi alapadatokból kiinduló tetszőleges gömbi szerkesztés során keletkező gömbi pontok, egyenesek és körök síkbeli sztereografikus képei megszerkeszthetőek síkbeli euklideszi szerkesztési lépésekkel a gömbi alapadatok síkbeli képeiből kiindulva.

A másik irányú bizonyításban ennek az állításnak a fordítottját látjuk be, tehát azt, hogy adott síkbeli alapadatokból induló síkbeli euklideszi szerkesztés során keletkező geometriai objektumok gömbi képei előállíthatóak a síkbeli alapadatok gömbre visszavetített képeiből kiinduló gömbi geometriai szerkesztéssel.

Az *S* síkbeli szerkesztéshez meg kell adnunk egy olyan gömböt, amire a sztereografikus vetítés inverz műveletét végrehajtva visszavetítjük a sík pontjait. Ezt úgy tesszük, hogy megadunk egy síkbeli *k* kört a középpontjával (*O* pont). Ez a *k* kör, mint gömbi főkör egyértelműen meghatároz egy *G* gömböt. A *k* kör egyúttal az így meghatározott gömb és a sík metszete. Ekkor a *G* gömb felületének pontjait rendeljük az S sík pontjaihoz.

A *G* gömbön a *k* főkörhöz tartozó poláris pontpár egyik tetszőlegesen választott tagja legyen az a *P* pont, amivel *S* pontjait egyenessel összekötve a sík pontjainak gömbi képei előállnak. (Meggondolhatjuk, hogy a poláris pontpár másik tagját *P*-nek választva a síkbeli pontok gömbre visszavetített képei épp az előző esetben kapott képek *k* síkjára vett tükörképei lesznek. Tehát a későbbiekben tárgyalt összefüggések ebben az esetben is teljesülnének.)

Miután áttekintettük a bizonyítás alapszerkezetét, és megismerkedtünk a bizonyítás alapötletével, már azt is megérthetjük, hogy miért éppen a sztereografikus projekciót választottuk, mikor a gömb és a sík pontjai között kerestünk megfeleltetést.

A sztereografikus projekciónak a *4.4.2/5.* pontban leírt körtartó tulajdonságát fogjuk felhasználni, amikor gömbön megszerkesztett alakzatok síkbeli képeit szeretnénk a síkban megszerkeszteni. A bizonyítás másik irányában a sztereografikus projekció inverzének körtartó tulajdonságát hasonlóan fogjuk felhasználni az inverz transzformáció után kapott gömbi kép gömbi eszközökkel történő megszerkesztésénél.

Továbbá a sztereografikus projekció *4.4.2/6.* pont szerinti szögtartó tulajdonságból következően a gömbön megszerkeszthető szögeket a síkba levetítve ugyanakkora szögeket kapunk, melyek, mint látni fogjuk síkbeli euklideszi eljárással is megszerkeszthetőek. Ugyanez visszafelé is igaz, azaz ha egy szög síkban megszerkeszthető, akkor a vele egyező nagyságú gömbi szög is megszerkeszthető gömbi szerkesztési lépésekkel.

4.5 A bizonyításhoz szükséges előismeretek

A *4.3.* tétel bizonyításában számos síkgeometriából már ismert, azonban nem triviális összefüggésre hivatkozunk, valamint felhasználjuk ezek gömbi megfelelőit is. A bizonyítás könnyebb megértése érdekében gyűjtsük össze ezeket az előismereteket, és vizsgáljuk meg, hogyan alkalmazhatóak a gömbi geometriában.

4.5.1 Síkbeli körsorok

A síkbeli körsorok közül a bizonyítás során a koncentrikus, a hiperbolikus és az elliptikus körsorokra lesz szükségünk, melyeket a következőképpen definiálunk:

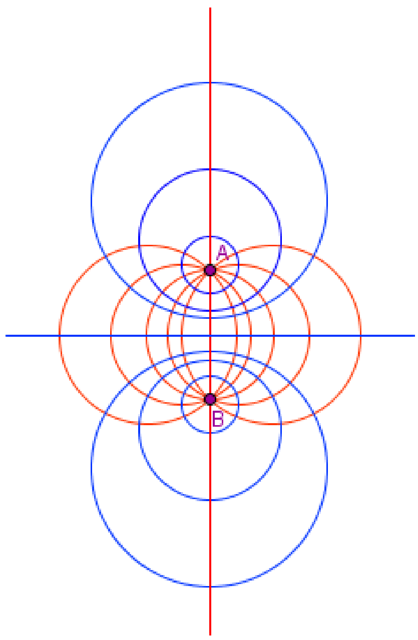
1. definíció: Síkbeli *koncentrikus körsor*on adott O pont, mint középpont köré írható valamennyi kör összességét értjük, beleértve az O középpontot is, amit 0 sugarú, úgynevezett pontkörnek tekintünk.

2. definíció: A síkban két különböző adott ponton átmenő összes körök rendszerét, a két ponton átmenő egyenessel együtt *hiperbolikus körsor*nak nevezzük.

3. definíció: A síkban *elliptikus* körsornak nevezzük két különböző ponthoz, mint alappontokhoz tartozó Apollóniosz-körök rendszerét, a két pontot összekötő szakasz felező merőleges egyenesével (mint az 1 arányhoz tartozó Apollóniosz-körökkel) és a két alapponttal együtt.

A bizonyításban az elliptikus körsorok következő tulajdonságait fogjuk felhasználni:

1. Az elliptikus körsorok fenti meghatározásával ekvivalens definíció szerint az elliptikus körsor a síkban két különböző adott pont által meghatározott hiperbolikus körsor valamennyi tagjára merőleges összes körből (és egyenesből) álló rendszer. Ha a síkban egy pont és egy kör, illetve egy pont és egy egyenes egymásra merőleges helyzetét úgy definiáljuk, hogy akkor merőlegesek egymásra, ha a pont rajta van az egyenesen, illetve a körvonalon, akkor az elliptikus körsor alappontjai is kielégítik ezt az ekvivalens definíciót.
   Egy adott elliptikus körsort, és azt a hiperbolikus körsort, melynek tagjaira az elliptikus körsor elemei merőlegesek, egymás konjugáltjainak nevezzük.



2. A sík minden pontját egy adott elliptikus körsornak pontosan egy eleme tartalmazza.
3. Az A és B pontok által meghatározott elliptikus körsort alkotó körök középpontjai, valamint a körsor alappontjai rajta vannak az A és B pontokra illeszkedő egyenesen.

4. A bizonyításunk szempontjából további lényeges ismeret az a szerkesztési eljárás, mellyel adott *A* és *B* alappontok által meghatározott elliptikus körsor azon tagját kaphatjuk meg, ami átmegy a síknak az alappontoktól különböző adott *C* pontján. (A 2. állításból következően ilyen elem mindig egyértelműen létezik.)

- Ha a *C* pont rajta van az *A* és *B* alappontokat összekötő szakasz felező merőleges egyenesén, akkor az elliptikus körsor keresett eleme éppen ez a felező merőleges egyenes lesz, hiszen tudjuk, hogy erre az egyenesre teljesülnek a feltételek, és a 2. pontban leírtak miatt ezen a *C* ponton a körsornak pontosan egy eleme megy át így más megoldás nem lehet.
- Ha a *C* pont nincs rajta ezen a felező merőlegesen és az *A* és *B* pontokra illeszkedő egyenesen sem, akkor szerkesztési eljárásunkban az elliptikus körsorok 1. pontban leírt tulajdonságát használjuk fel.

  Az *A* és *B* pontok által meghatározott elliptikus körsor valamennyi tagja merőleges az *A* és *B* pontokon átmenő minden körre, így arra is, ami átmegy a *C* ponton is. Az elliptikus körsor konjugált körsorának azt az elemét, ami átmegy a *C* ponton megkaphatjuk, ha megszerkesztjük az *ABC* háromszög köréírható körét (k_c-t). Feladatunk ezután az, hogy olyan kört szerkesszünk, ami ugyancsak átmegy a *C* ponton, és merőleges k_c-re.

  Ha két kör merőlegesen metszi egymást, akkor az egyik kör középpontjából a metszéspontjukba húzott sugár a másik kör érintője lesz. Ezért az általunk keresett kör középpontja rajta van a k_c körhöz *C* pontban húzott érintőn.

  Azt is tudjuk, hogy a keresett kör középpontja rajta van az *A* és *B* pontokra illesztett egyenesen. Tehát az említett érintőt megszerkesztve, az érintő és az *A* és *B* pontokon átmenő egyenes metszéspontja adja a keresett kör középpontját. A középpont és a körív egy pontjának (*C*) ismeretében a keresett kör könnyen megszerkeszthető.
- A harmadik lehetőség, hogy a *C* pont rajta van az *A* és *B* pontokat összekötő egyenesen (annak valamely *A*-tól és *B*–től különböző tagja).

  Az 1. tulajdonság miatt a keresett kör merőleges az *A* és *B* alappontok által meghatározott hiperbolikus körsor elemeire, így az *A* és *B* átmérőjű körre is.

  Ismert összefüggés, hogy tetszőleges síkbeli k_1 körre vonatkozó inverzió esetén egy k_1-re merőleges k_2 kör inverz képe önmaga lesz. A két kör közös pontjait a transzformáció helyben hagyja, a k_2 kör metszéspontoktól különböző *P* pontját pedig a k_1 kör középpontját P-vel összekötő félegyenes és a k_2 kör P-től különböző metszéspontjába viszi.

Ezekből az összefüggésekből adódóan szerkesztési eljárásunk a következő lesz: Megszerkesztjük a C pont inverz képét (D-t) az A és B átmérőjű körre vonatkozóan. A C és D pontok az inverzió említett tulajdonsága miatt a keresett kör átellenes pontjai lesznek, ezért a keresett kör a C, D átmérőjű kör lesz, ami C és D ismeretében könnyedén szerkeszthető.

4.5.2 Gömbi inverzió

A *4.5.1*/4. pontban szereplő szerkesztéshez hasonlót a gömbfelületen is szeretnénk megvalósítani a későbbiekben, miután definiáltuk, hogy mit értünk gömbi körsorokon. Erre a szerkesztésre a gömbi szerkeszthetőségről szóló tétel bizonyításának azon részében lesz szükség, ahol belátjuk, hogy a síkban megszerkesztett alakzatok képei megszerkeszthetőek gömbi eszközökkel a síkbeli alapadatok képeiből kiindulva. Ezért a következőkben bevezetjük a gömbi inverzió definícióját, és ismertetjük néhány tulajdonságát.

definíció: Legyen adott a G gömb egy tetszőleges l köre (a gömbi inverzió alapköre) és egy, a gömb középpontján átmenő S sík. Az S sík és a gömbfelület metszeteként adódó k gömbi főkörhöz tartozó poláris pontpár egyik tagja legyen P.

A gömbfelület valamely X pontjának l-re vonatkozó gömbi inverzén a következő transzformáció során kapott pontot értjük: Tekintsük a gömbfelület pontjainak az S síkra vett P pólusú sztereografikus vetítését. Legyen ez a vetítés a v: $G \longrightarrow S$ függvény, ami a gömbfelület pontjaihoz bijektíven rendeli hozzá az S sík pontjait a *4.4.1* pontban meghatározott módon. Ekkor az l gömbi kör képe a $v(l)$ S-beli kör lesz.

Ha az l nem megy át a P ponton, akkor egy X gömbi pont l-re vonatkozó gömbi inverz képét úgy kapjuk, hogy vesszük az X pont S-re vonatkozó sztereografikus képének, $v(X)$-nek a $v(l)$ körre vonatkozó síkbeli inverzét, $i \circ v(X)$-t, majd ezt az inverz képet visszavetítjük a gömbre a sztereografikus projekció inverz transzformációjával, ez a v^{-1}: $S \longrightarrow G$ függvény. Az így kapott gömbi pont, $v^{-1} \circ i \circ v(X)$, lesz az X pont l-re vonatkozó gömbi inverze.

Ha speciálisan az l kör átmegy a P ponton, akkor a sztereografikus projekció után kapott képe egy $v(l)$ egyenes lesz. A gömbfelület X pontjának egy ilyen l gömbi körre vonatkozó inverze alatt a $v(X)$ síkbeli, sztereografikus projekcióval kapott pont $v(l)$ egyenesre vonatkozó tükörképének ($i \circ v(X)$) gömbre történő visszavetítéseként előálló $v^{-1} \circ i \circ v(X)$ pontot értjük.

Belátható, hogy bárhogyan vesszük fel a G gömb középpontján átmenő S síkot, a G gömb pontjainak adott l gömbi körre vonatkozó inverz képe minden esetben ugyanaz a gömbi pont lesz. Ez abból következik, hogy a gömbi inverziónak van a sztereografikus projekciótól független geometriai meghatározása is, ami adott gömbi pont és gömbi kör esetén ugyanazt a képpontot származtatja, mint az általunk használt definíció.

Tulajdonságok:

A következőkben vegyük sorra a gömbi inverzió azon tulajdonságait, melyekre szükségünk lesz:

1. A síkbeli inverzióval kapcsolatban tudjuk, hogy adott síkbeli körre vonatkozólag két síkbeli pont akkor, és csak akkor áll inverzióban egymással (azaz kölcsönösen egymás inverz képei a körre nézve), ha bármely rajtuk átmenő kör vagy egyenes merőleges az inverzió alapkörére.

Az ennek megfelelő gömbi állítást a következő tétel mondja ki:

Tétel: *Adott gömbi körre vonatkozóan két gömbi pont akkor, és csak akkor áll inverzióban egymással, ha bármely rajtuk átmenő gömbi kör (a főköröket is beleértve) merőleges az inverzió alapkörére.*

Bizonyítás:

Mikor a gömbi X pont gömbi inverz képét keressük, és tekintjük a fent meghatározott módon előálló $v(X)$ és $i \circ v(X)$ síkbeli pontokat, akkor rájuk teljesül, hogy (mivel egymás inverzei az $v(l)$ körre vonatkozóan) minden rajtuk átmenő síkbeli kör, illetve egyenes merőleges a $v(l)$ körre.

Mivel a sztereografikus projekció inverze kör és- szögtartó, a gömbre történő visszavetítés után a gömbön is teljesülni fog, hogy X és $v^{-1} \circ i \circ v(X)$ gömbi pontokon átmenő minden gömbi kör merőleges a gömbi inverzió l alapkörére. Tehát, ha két gömbi pont inverzióban áll egymással egy adott gömbi körre nézve, akkor minden rajtuk átmenő gömbi kör merőleges az inverzió alapkörére.

Továbbá, ha adott két gömbi pont (X és Y), és egy gömbi kör (l), és teljesül, hogy minden olyan kör, ami átmegy a két adott ponton, merőleges az l, akkor a két gömbi pont egymás inverze erre az adott l körre nézve, mert: A sztereografikus projekció kör-és szögtartó tulajdonságából adódóan az X és Y pontokon átmenő, l-re merőleges körök sztereografikus vetületei átmennek a $v(X)$ és $v(Y)$ pontokon, és merőlegesek a $v(l)$ körre. Ezért a síkbeli inverzióra teljesülő fenti összefüggés miatt a $v(X)$ és $v(Y)$ pontok egymás inverzei a $v(l)$ körre nézve. Tehát a sztereografikus projekció invertálhatósága miatt $v^{-1} \circ i \circ v(X)=Y$ és $v^{-1} \circ i \circ v(Y)=X$. Következésképpen az X és Y gömbi pontok kölcsönösen egymás inverz képei a gömbi l körre nézve.

A tételbeli állítás mindkét irányát belátva magát a tételt is igazoltuk.

2. Ha adott a gömbfelületen egy l gömbi kör és egy l-re nem illeszkedő X pont, akkor az X pont l-re vonatkozó inverz képét gömbi szerkesztési lépésekkel a következő módon szerkeszthetjük meg:

- Használjuk fel az 1. pontban leírtakat, és szerkesszünk két olyan X ponton átmenő kört, melyek merőlegesek l-re (a szerkesztési eljárást alább ismertetjük). Ekkor az 1. pontban megfogalmazott tétel miatt a két kapott kör X ponttól különböző metszéspontja az X pont l-re vonatkozó inverz képe.
- Az X ponton átmenő l-re merőleges kört a következő módon szerkeszthetünk: Ismeretes, hogy ha adott a gömbfelületen két egymást (az M_1 és M_2 pontokban) merőlegesen metsző kör (l_1 és l_2) , akkor az l_1 körhöz M_1 és M_2 pontokban húzott érintő főkörök átmennek az l_2 kör középpontján (O_2-n). Az állítás fordítva is igaz, azaz az l_2 körhöz a metszéspontokban húzott érintő főkörökre is hasonló összefüggés teljesül.
- Mivel ezt az állítást szeretnénk felhasználni az X ponton átmenő l-re merőleges körök szerkesztésénél, meg kell keresnünk az l kör középpontját (O_l-t). Ezt a *3.3.4.* pontban leírt módon tehetjük meg.
- Ha megkaptuk az l kör középpontját, akkor kössük össze gömbi szakasszal az O_l pontot a körív tetszőleges pontjával (E), majd állítsunk merőlegest az E pontban az E-be húzott sugárra. Az egymást merőlegesen metsző gömbi körök fenti tulajdonsága miatt annak a körnek a középpontja, ami átmegy az X ponton, és merőlegesen metszi l-t az E pontban, rajta van ezen a merőlegesen.
- Ráadásul a keresett középpont egyenlő gömbi távolságra van az X és E pontoktól. Tehát ezt a középpontot megkaphatjuk, az EX gömbi szakasz felező merőlegese és az l-hez E-ben húzott érintő metszeteként. Hasonló eljárással kaphatunk még olyan kört, ami átmegy az X ponton, és merőlegesen metszi az l-kört.

Ezzel sikerült eljárást találnunk a gömbi körre vonatkozó inverzió során adott pont képének megszerkesztésére.

4.5.3 Gömbi körsorok

A gömbi körsorok definiálására azért van szükség, mert bizonyos tulajdonságaikat fel fogjuk használni a síkbeli szerkesztés gömbre vetített képének gömbi megszerkesztésekor.

1. definíció: Adott G gömb esetén tekintsük valamely G középpontján (O-n) átmenő S sík egy tetszőleges körsorát, vagy sugársorát. (Síkbeli sugársor alatt a sík valamely pontján átmenő összes egyenesek seregét értjük.) Vetítsük vissza ezt a síkbeli körsort, illetve sugársort a gömbre a G gömb S síkra vonatkozó sztereografikus projekciójának inverz transzformációjával. (A *4.5.2.* pontban definiált v^{-1} transzformációval.) A síkbeli körsor, illetve sugársor v^{-1}-gyel vett gömbi képét *gömbi körsor*nak nevezzük.
Belátható, hogy bármely O-n átmenő sík esetén ez a definíció ugyanazt adja.

2. definíció: Valamely S sík esetén egy síkbeli hiperbolikus körsor, illetve sugársor ilyen módon kapott gömbi képét *gömbi hiperbolikus körsor*nak nevezzük.

3. definíció: *Gömbi elliptikus körsor* alatt valamely S síkbeli elliptikus, vagy koncentrikus körsornak a G-ről S-re képző sztereografikus projekció inverzénél kapott képét értjük. (Speciálisan: Ha a gömbi kép egymással koncentrikus körök rendszere, akkor ezt a képet gömbi koncentrikus körsornak nevezzük.)

4. definíció: A síkbeli elliptikus körsor alappontjainak a vetítés után kapott gömbi képét a *gömbi körsor alappontjai*nak nevezzük.

5. definíció: Hasonlóan a síkbeli hiperbolikus körsor tartópontjainak gömbi képei a *gömbi körsor tartópontjai*. (A tartópontok síkban a hiperbolikus körsor azon pontjai, melyeken a körsor mindegyik eleme átmegy. Ezért a tartópontok gömbi képein a körsor minden elemének gömbi képe is át fog menni.)

A bizonyítás során fel fogjuk használni a gömbi körsorok néhány ismert tulajdonságát. Ezek a következőek:

1. A gömbi elliptikus körsor fenti definíciója ekvivalens a következő meghatározással:

Gömbi elliptikus körsornak nevezzük a gömbfelület két különböző adott pontján átmenő összes körökre merőleges gömbi körökből álló rendszert.

Ez az állítás abból adódik, hogy síkbeli elliptikus körsorokra már beláttuk ezt az összefüggést. Mivel a sztereografikus projekció inverze szög- és körtartó transzformáció, így a síkbeli elliptikus körsor köreinek képei a gömbön is körök lesznek, akárcsak a rájuk merőleges hiperbolikus körsor köreinek képei. A képalakzatok pedig megőrzik az eredeti alakzatok bezárt szögét.

2. A gömbi elliptikus körsort egyértelműen meghatározza a két alappontja.

Az egyértelműség abból adódik, hogy a síkban is egyértelműen határozza meg az elliptikus körsort a két alappontja, és a gömbre történő felvetítés során a pontok gömbi képe ugyancsak egyértelmű. Továbbá tetszőleges gömbi elliptikus körsort pontosan akkor kaphatunk meg síkbeli koncentrikus körsor gömbre történő visszavetítettjeként, ha a gömbi elliptikus körsor egyik alappontja a vetítés P pólusa.

3. A gömbfelület minden pontját adott elliptikus körsornak pontosan egy eleme tartalmazza

4. A síkbeli körsoroknál is tárgyalt szerkesztési feladat gömbi körsorok esetén is megoldható. A feladat gömbi megfelelője így szól: Adott a gömbfelületen három különböző pont (*A*, *B* és *C*). Szerkesszük meg az *A* és *B* alappontok által meghatározott gömbi elliptikus körsor azon tagját, ami átmegy a *C* ponton.

A szerkesztési eljárás a gömbön hasonló lesz a síkbeli módszerhez, mert a gömbi körsorok olyan tulajdonságaira alapoz, amiknek síkbeli megfelelője is van.

- Ha a *C* pont rajta van az *A* és *B* pontokat összekötő gömbi szakasz felező merőleges főkörén, akkor a körsor keresett tagja éppen ez a főkör lesz. (Mivel ez a főkör része az elliptikus körsornak, és a 3. pontbeli egyértelműség miatt más megoldás nem lehet.)
- Ha a *C* pont nincs rajta sem az *AB* szakasz felező merőleges főkörén, sem az *A* és *B* pontokra illeszkedő körön, akkor is a síkbeli esettel megegyező gömbi lépések vezetnek a megfelelő kör megtalálásához. Tudjuk, hogy a keresett kör középpontja az elliptikus körsorok szimmetrikus tulajdonsága miatt rajta van az *A* és *B* pontokra illeszkedő egyenesen. Továbbá az 1. pontban leírtak miatt (akárcsak síkban) a keresett kör merőlegesen metszi az *ABC* háromszög köré

írható körét, ezért a köré írható körhöz a *C* pontban húzott érintő főkör átmegy a keresett kör középpontján. (A gömbi inverzió tulajdonságainál már említett egymást merőlegesen metsző körökre vonatkozó összefüggés miatt.)

Az *ABC* háromszög körülírt körének megszerkesztése után állítsunk merőlegest a kör *C* pontba húzott sugarára a *C* pontban. Ezen a *C* ponton átmenő érintő főkörív és az *A* és *B* pontokra illesztett egyenes metszéspontjaként megkapjuk a keresett kör középpontját.

A középpont és a körív *C* pontjának ismeretében már megszerkeszthetjük az elliptikus körsor megfelelő elemét.

- Ha a *C* pont rajta van az *A* és *B* pontokra illeszkedő főkörön, akkor a keresett kört úgy fogjuk megkapni, hogy megszerkesztjük a *C* ponttal átellenes pontját (*D*-t). Ekkor a *CD* gömbi szakasz felezőpontja lesz a kör középpontja.

  A *D* pont megszerkesztéséhez a gömbi inverzióval kapcsolatos előismereteinkre lesz szükség. Mivel a keresett kör ezúttal is merőleges az *AB* átmérőjű körre, a *4.5.2.* pontban szereplő tétel miatt *C* és a keresett *D* pont inverzióban állnak egymással az *AB* átmérőjű körre vett inverziót tekintve.

  Tehát a *C* pont *AB* átmérőjű körre vonatkozó inverzének *4.5.2/2.* pontban leírt megszerkesztésével megkaptuk a keresett kör *C*-vel átellenes *D* pontját, így pedig már meg tudjuk szerkeszteni a szükséges kört.

5. A sztereografikus projekció invertálhatóságából, valamint kör- és szögtartó tulajdonságából adódóan a síkbeli körsorokat is megkaphatjuk megfelelő gömbi körsorok sztereografikus képeként. (Adott síkbeli körsort éppen annak a gömbi körsornak a képeként kaphatunk meg, mai az adott síkbeli körsor gömbre felvetített képe.)

4.5.4 Átellenes gömbi pontpárok sztereografikus képei

Legyen *G* gömb, *P* a gömbfelület egy pontja, *S* a *P* ponthoz, mint pólushoz tartozó *k* gömbi főkört a *G*-ből kimetsző sík, *O* pedig a gömb és a *k* főkör közös középpontja. Tekintsük a gömb pontjainak *S*-re vonatkozó *P* pólusú sztereografikus projekcióját. A következő tétel a *G* gömb átellenes pontjainak és azok sztereografikus képeinek kapcsolatáról szól:

Tétel: *A G gömbfelület két különböző A és B pontja akkor és csak akkor átellenes helyzetűek, ha a sztereografikus vetítés során keletkező képeikre (A'-re és B'-re) teljesül, hogy egyiket a másikba a k-ra vonatkozó inverzió és az O pontra vett középpontos tükrözés kompozíciója viszi.*

Bizonyítás:

Annak az iránynak a belátásához, hogy, ha az *A* és *B* pontok átellenesek, akkor az *A'* és *B'* pontok között az állításbeli összefüggés áll fenn, tekintsük a *G* gömb *A*, *P* és *B* pontokat tartalmazó síkmetszetét.

Mivel *A* és *B* átellenesek, ezért a gömb középpontja is benne van ebben a síkmetszetben. A *G* gömb ezen a síkmetszeten egy olyan k_G kör, aminek középpontja a gömb középpontja, sugara pedig a gömb sugara. Az *S* sík képe egy a gömb középpontján áthaladó l_S egyenes.

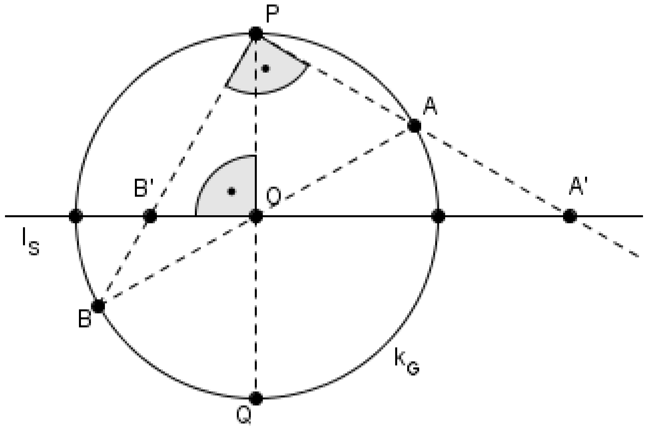
Az *A*, *B* és *P* pontok rajta vannak a metszetköríven, mégpedig úgy, hogy *A* és *B* a k_G körnek is átellenes pontjai, *P* pedig olyan, hogy az *OP* sugár merőleges az l_S egyenesre. (Hiszen a gömb *OP* sugara is merőleges az *S* síkra.)

A sztereografikus projekció definíciójából adódóan az *A'* pont az *A* pontot *P*-vel összekötő egyenes és az l_S egyenes metszéspontja. (Hasonlóan kaphatjuk meg a *B'* pontot is.)

Az *A* és *B* pontok átellenes helyzetük miatt (hacsak nincs rajta mindkettő az S sík és a gömb metszetén, így ebből adódóan l_S-en) az l_S egyenes különböző oldalaira esnek (hiszen az *A* és *B* pontok a térben az *S* sík különböző oldalán vannak). Ezért az *A'* és *B'* pontok közül az egyik sztereografikus képe a síkmetszeten az l_S egyenes k_G-be eső részén van, míg a másiké az l_S egyenes körön kívülre eső pontja lesz.

Továbbá az *A'* és *B'* pontok az l_S egyenesen úgy helyezkednek el, hogy az *O* pont elválasztja őket, mert a sztereografikus vetítés miatt csak akkor kerülhetnének, az *O* pont azonos oldalára az egyenesen, ha az *A* és *B* pontok a síkmetszeten az *O* és *P* pontokra fektetett egyeneshez képest a sík ugyanazon felében lennének. Ekkor azonban *A* és *B* nem lehetnének ellentétes helyzetűek.

Mivel *A* és *B* pontok a k_G ellentétes pontjai,ezért az *APB* szög a Thalész-tétel miatt 90^o. Abból következően, hogy az *A'* és *B'* pontok rajta vannak az *A* és *P* valamint a *B* és *P* pontok egyenesén az *A'PB'* szög ugyancsak 90^o.



Az l_S egyenes és az *OP* sugár merőlegek egymásra, ezért az *OP* szakasz az $A'PB''$ háromszög P csúcsból induló magassága, melynek $A'B'$ oldalon található talppontja O. Az $A'PB'$ háromszögben a magasságtétel miatt:

$$OB' \cdot OA' = r^2$$

Az összefüggés a szakaszok hosszára vonatkozik.

Ha a B' pontot tükrözzük a k_G kör középpontjára (B''-t kapunk), akkor a középpontos tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt az OB' és az OB'' szakaszok egyenlő hosszúak. Mivel B' és A' az O-nak különböző oldalára esnek az l_S egyenesen, ezért B'' és A' ugyanarra az oldalára kerülnek. A távolságtartás miatt a fenti szakaszhosszokra vonatkozó összefüggés a tükrözés után is igaz marad, tehát:

$$OB'' \cdot OA' = r^2$$

Ha egy síkban két pontra melyek rajta vannak egy ugyancsak ebben a síkban fekvő r sugarú kör középpontjából induló félegyenesen, ez az összefüggés áll fenn, akkor ők egymás inverz képei a körre nézve. Így az A' és a B'' pontokra teljesül, hogy egymás inverz képei a k_G körre vonatkozóan.

Mivel l_S az S síkban és a vizsgált síkmetszetben is benne van, ezért ez igaz a rajta fekvő A', B', B'' és O pontokra is, melyek egymástól mért távolsága mindkét síkban megegyezik. Továbbá mindkét sík tartalmaz egy O középpontú r sugarú kört (az S síkban ez a kör a k kör), ezért A' és B'' pontok az S sík k körére nézve is egymás inverzei, valamint a B' pont itt is a B'' pont O-ra vonatkozó tükörképe. Ezzel az állítás egyik irányát beláttuk.

Az állítás másik irányát az első részből következően indirekt módon láthatjuk be. Tegyük fel, hogy az S síkbeli A' és B' pontokra teljesül, hogy a k-ra vonatkozó síkbeli inverzió, és az O-ra vett középpontos tükrözés az egyik pontot a másikba viszi.

Továbbá indirekt tegyük fel, hogy a gömbre visszavetített képeik (A és B) nem átellenes helyzetűek a gömbön. Ekkor vegyül azt a gömbi A_1 pontot, melyre az A_1 és B gömbi pontok átellenes helyzetűek. A tétel első részéből következően ezen átellenes pontpár síkbeli A_1' és B' vetületeire teljesül, hogy mindkettő előáll a másik pont k-ra vett inverz képének O pontra való tükörképeként.

Ez az összefüggés azonban igaz az A', B' síkbeli pontpárra is ($A' \neq A_1'$, mert a sztereografikus projekció során különböző pontokból kaptuk őket.) Ezzel ellentmondáshoz jutottunk, hiszen a síkbeli B' ponthoz (ha $B' \neq O$) pontosan egy olyan síkbeli pont tartozhat, amire a pontpár tagjai az állításban szereplő viszonyban állnak egymással, hiszen mind az inverzió, mind a középpontos tükrözés egyértelmű leképezés a síkban.

Így az állítás másik irányát is beláttuk.

4.6 A gömbi geometriai szerkeszthetőségről szóló tétel bizonyítása

A bizonyításhoz szükséges előismereteket alkalmazva megmutatjuk, hogy a gömbfelületen pontosan ugyanazokat a szögeket lehet megszerkeszteni gömbi geometriai szerkesztési lépések segítségével, amelyek a síkban is előállíthatóak síkbeli euklideszi szerkesztéssel.
A bizonyítás során a *4.4.* pontban tárgyalt alapötletet fogjuk felhasználni, azaz sztereografikusan levetítjük a gömböt, egy olyan S síkra, mely tartalmazza a gömb középpontját.
Ezt az *S* síkot egyértelműen meghatározza a vetítés gömbi pólusa, a *P* pont. A gömb *P*-vel átellenes pontja a *Q* pont. A pólus legyen egy olyan tetszőlegesen választott pontja a gömbnek, ami adott gömbi szerkesztés esetén különbözik a megadott alapadatok kitüntetett pontjaitól és a szerkesztés során felhasznált egyéb kitüntetett, kiválasztott pontoktól. Erre azért van szükség, hogy az *S* síkra történő *P* pólusú sztereografikus vetítés során ne legyen olyan gömbi pont, melynek síkbeli képeként a síkban adottnak tekintett pont a sík végtelen távoli pontja.

Bizonyításunk első lépése annak igazolása, hogy minden a gömbfelületen megszerkeszthető szög a gömbi kiindulási adatok sztereografikus képeiből kiindulva a síkon is megszerkeszthető síkbeli euklideszi szerkesztési lépésekkel. Ehhez elegendő azt megmutatnunk, hogy a gömbön végzett elemi szerkesztési lépések sztereografikus vetületei végrehajthatóak euklideszi szerkesztési lépésekkel a síkban. Mivel minden gömbi geometriai szerkesztési eljárás elemi szerkesztési lépések véges sokszori alkalmazásából áll, így az elemi szerkesztési lépésekre vonatkozó állítás bebizonyításával egyúttal minden gömbi geometriai szerkesztésről belátjuk, hogy sztereografikus vetülete végrehajtható a síkon euklideszi szerkesztési lépésekkel.
Az elemi szerkesztési lépések közül azok, melyek során vesszük két megszerkesztett alakzat (kör vagy egyenes, azaz főkör) metszéspontját a sztereografikus képeik ismeretében a síkban is triviálisan elvégezhetőek, hiszen két gömbi főkör vagy kör, illetve kör és főkör metszéspontjának képe ezen alakzatok síkbeli vetületeinek metszete. A metszéspont síkbeli létezését biztosítja, hogy a *P* pont választásánál kizártuk a szerkesztés során keletkező kitüntetett pontokat (így a metszéspontokat is), tehát a gömbön előálló metszéspont síkbeli képe nem a sík végtelen távoli pontja.

Két elemi szerkesztési lépés síkbeli vetületének euklideszi megszerkesztését kell még meggondolnunk, ezek a következőek:

a) Két adott ponton át főkört fektethetünk.
b) Ha adott egy gömbi kör középpontja és a kör egy pontja, akkor megszerkeszthetjük ezt a gömbi kört.

Mutassunk síkbeli euklideszi szerkesztési eljárást ezen lépések síkbeli vetületeinek megszerkesztésére:

a) A gömbön adottak a különböző, nem átellenes pontok (*A* és *B*). Ezekre illesztünk főkört (*f*). A gömbfelület alkalmas *P* pontja által meghatározott *S* síkban adott az *A* és *B* gömbi pontok sztereografikus képe, *A'* és *B'*, valamint a gömb és a sík metszeteként előálló *k* kör. Feladatunk, hogy ezekből a síkbeli alapadatokból kiindulva síkbeli euklideszi szerkesztési eljárást találjunk a gömbi *f* főkör síkbeli sztereografikus képének megszerkesztésére.

Az *A'*, *B'* és *O* pontok egymáshoz viszonyított helyzete alapján két esetet különböztetünk meg. Ezek a pontok vagy kollineárisak, vagy nem kollineárisak (ekkor az *S* síkban meghatároznak egy háromszöget.)

- Ha az említett három pont kollinéáris, az azt jelenti, hogy a gömb *P* pontját *A*-val, *B*-vel, valamint *Q*-val összekötő térbeli egyenesek *S* síkkal vett metszetei egy egyenesre esnek (*l* egyenes). Ezért a *P* ponton átmenő három említett térbeli egyenes egy síkba esik, és ez a sík tartalmazza a gömb *O* középpontját is, hiszen az *O* pont a *P* és *Q* pontok által meghatározott szakasz felezőpontja. Ha az *A*, *B* és *P* gömbi pontok síkja tartalmazza a gömb középpontját is, akkor az *A*, *B* és *P* pontok síkja a gömbből egy főkört metsz ki, tehát a gömbön *A*, *B* és *P* pontok egy főkörre esnek.

Felhasználva, hogy a sztereografikus projekció *P* pólusán átmenő főkörök sztereografikus vetülete egyenes, ha az *A* és *B* gömbi pontok síkbeli *A'* és *B'* vetületei egy egyenesbe esnek a gömb középpontjával, akkor az *A* és *B* pontokon átmenő gömbi főkör *P* pólusú sztereografikus vetülete az *A'* és *B'* pontokra illesztett egyenes. Tehát ebben az esetben a gömbön két pontra történő főkör illesztését a síkban a két pontra történő egyenes illesztésének feleltetjük meg.

- A másik esetben, mikor *A'*, *B'* és *O* nem kollineárisak, akkor a gömbi *P* pólust *A*-val, *B*-vel és *Q*-val összekötő egyenesek nincsenek egy síkban, ezért az *A* és *B* pontokon átmenő gömbi főkör nem tartalmazza a *P* pontot. ekkor ennek a főkörnek a sztereografikus képe a síkon egy *A'* és *B'* pontokat tartalmazó kör lesz.

Ha ismernénk ennek a síkbeli körnek valamely *A'* és *B'* pontoktól különböző *C* pontját is, akkor egyértelműen meg tudnánk szerkeszteni az *A* és *B* gömbi pontokon átmenő gömbi főkör sztereografikus képeként előálló síkbeli kört, hiszen az *A'B'C* háromszög körülírt körének megszerkesztése lenne a feladatunk.

Használjuk fel az átellenes gömbi pontok sztereografikus képére vonatkozó *4.5.4.* pontbeli tételünket. Ha megszerkesztjük az *A'* pont *k* körre vett inverzét, *A''*-t, majd ezt a pontot tükrözzük a *k* kör *O* középpontjára, akkor az így keletkező *A'''* pont és az *A '* pontok a gömb átellenes pontjainak sztereografikus vetületei. Az *A'* pont a gömbi *A* pont sztereografikus vetülete, tehát *A'''* a gömb *A*-val átellenes (*C*) pontjának sztereografikus vetülete. Ha *A* és *C* pontok a gömb átellenes pontjai, akkor a *C* pont rajta van bármely *A*-n átmenő főkörön, így azon is, amit az *A* és *B* gömbi pontokra illesztünk. Ezzel beláttuk, hogy ezen *C* pont sztereografikus képe (*A'''*) a sík olyan pontja lesz, ami rajta van az *A* és *B* gömbi pontokon átmenő főkör sztereografikus képeként előálló síkbeli körön.

Tehát, ha a fent említett módon megszerkesztjük ezt az *A'''* síkbeli pontot, akkor a keresett síkbeli kör az *A*, *B* és *A'''* pontokon átmenő kör lesz, amit megkaphatunk az *A'B'A'''* síkbeli háromszög körülírt körének megszerkesztésével.

Így minden lehetséges esetben megszerkesztettük a két gömbi pontra történő főkör illesztés elemi gömbi szerkesztési lépésének síkbeli vetületét.

b) A gömbfelületen adott az *A* pont és tőle legfeljebb π/2 távolságra a tőle különböző *C* pont. A gömbfelületen megrajzoljuk azt az *A* középpontú gömbi kört (k_1) , ami átmegy az adott *C* ponton.

Ebben az esetben azt kell meggondolnunk, hogy megfelelő *P* pont választása esetén hogyan kaphatjuk meg síkbeli euklideszi szerkesztéssel a k_1 kör *P* pólusú sztereografikus képét (k_1'-t), ha ismerjük az *A* és *C* pontok sztereografikus képeit (*A'*-t és *C'*-t), valamint a gömb és az *S* sík metszeteként előálló *k* kört.

Tudjuk, hogy gömbi körök sztereografikus képe a síkbeli kör lesz, ezért olyan k_1*'* síkbeli kört kell szerkesztenünk, ami átmegy az *C'* ponton. Az eljárás azért nem triviális, mert a sztereografikus projekcióra nem teljesül, hogy a kör középpontját a képkör középpontjába vetíti. Tehát a síkban szerkesztendő kör középpontja nem az *A'* pont lesz.

Legyen a gömb *A*-val átellenes pontja a *B* pont. Ekkor a k_1 gömbi kör az *A* és *B* alappontú gömbi koncentrikus körsor (azaz speciális gömbi elliptikus körsor) egy tagja. A gömbi körsorok *4.5.3/*5. pontban tárgyalt tulajdonsága miatt ennek a gömbi körsornak a sztereografikus képe az *A'* és *B'* alappontú síkbeli elliptikus körsor lesz. (Hiszen olyan

gömbi koncentrikus, tehát speciális elliptikus körsort, melynek P nem alappontja olyan síkbeli elliptikus körsor visszavetítettjeként kaphatunk, ami elliptikus, de nem koncentrikus.)
A *4.5.4.* pontbeli tételünk alapján az A-val átellenes B gömbi pont sztereografikus képét, B'-t megszerkeszthetjük A' és a síkbeli k kör, valamint a kör O középpontjának ismeretében. (O-t megkaphatjuk a *3.3.4.* pontbeli szerkesztési eljárással.)
Így az eredeti szerkesztési feladatunk (k_1' síkbeli kör megszerkesztése) ekvivalens az A' és B' alappontú síkbeli körsor C' ponton átmenő tagjának megszerkesztésével. Ez a szerkesztés a korábban leírt módon elvégezhető.

Mivel minden elemi gömbi geometriai szerkesztési lépés sztereografikus vetületét meg tudtuk szerkeszteni euklideszi síkbeli szerkesztéssel, igazoltuk tételünk egyik irányát.

A tétel másik irányának belátásához azt kell megmutatnunk, hogy a síkban végzett euklideszi szerkesztés adott gömbre történő visszavetítése során keletkező gömbi vetületei végrehajthatóak gömbi geometriai szerkesztési lépésekkel a gömbön. A gömböt valamely síkbeli k kör határozza meg a *4.4.3.* pontban leírtak szerint.
A másik irányhoz hasonlóan most is elegendő az elemi síkbeli euklideszi szerkesztési lépésekre ellenőriznünk az állítás helyességét. A metszési lépéseket a gömbön is triviálisan végre tudjuk hajtani, hiszen egymást metsző síkbeli alakzatok (egyenesek és körök) metszéspontjai a gömbre történő visszavetítéskor keletkező képeik metszéspontjai lesznek. Tehát az alábbi két elemi síkbeli euklideszi szerkesztési lépés gömbi visszavetítésének gömbi geometriai lépésekkel történő megszerkesztését kell még meggondolnunk:

c) Két adott különböző síkbeli pontra (A és B) egyenest illesztünk.
d) Adottak a síkban az A és B, egymástól különböző pontok. Megszerkesztjük az A középpontú B-n átmenő kört.

Keressünk gömbi geometriai szerkesztési eljárást ezen síkbeli szerkesztési lépések gömbre történő visszavetítéskor keletkező képeinek előállításához:

c) Adottak az S síkbeli A és B pontok, valamint a rájuk illeszkedő e egyenes és egy k kör. A sík A és B pontjait a P pólusú sztereografikus projekció inverze a gömbi A', illetve B' (P pólustól különböző) pontokba viszi, a k kört a transzformáció helyben

hagyja. Feladatunk, hogy az *A'* és *B'* pontok, a *P* pólus, továbbá a *k* kör ismeretében gömbi geometriai szerkesztéssel megszerkesszük a síkbeli *e* egyenes gömbi *e'* képét.
A sztereografikus projekció bijektív leképezés a gömbfelület és az *S* sík pontjai között, és azt is tudjuk, hogy egy gömbi kör sztereografikus képe pontosan akkor síkbeli egyenes, ha a kör átmegy a vetítés *P* pólusán. Tehát az *e* egyenes gömbi *e'* képe olyan gömbi kör lesz, ami átmegy az *A'*, *B'* és *P* gömbi pontokon is. Az *e* egyenes gömbi képe tehát az *A'*, *B'* és *P* csúcsú gömbi háromszög körülírt köre lesz. Ennek megszerkesztése a *3.3.5.*pontbeli szerkesztési feladat tárgyalt módon történik.

d) Adottak az *S* síkbeli *A* és *C* pontok, melyek meghatározzák az *A* középpontú, *C* ponton átmenő k_1 kört. Továbbá adott egy síkbeli *k* kör. A *k* kör által meghatározott *G* gömbön adottak az *A'* és *B'*, *P*-től különböző pontok (az *A* és *B* pontok képei), a *P* pólus, továbbá a *k* gömbi főkör (ami a *k* síkbeli kör gömbre történő visszavetítésekor helyben marad). Feladatunk, hogy ezen gömbi képalakzatok ismeretében gömbi geometriai szerkesztési eljárással megszerkesszük a síkbeli k_1 kör gömbi k_1' képét.

A k_1 kör a síkbeli *A* középpontú koncentrikus körsor azon tagja, mely átmegy a *C* ponton, tehát gömbi képe (k_1') ezen síkbeli körsor gömbre történő felvetítettjének egy olyan tagja lesz, ami átmegy a *C'* ponton. A *4.5.1/4.* pontból következően ennek a síkbeli körsornak a gömbi képe olyan gömbi elliptikus körsor lesz, melynek egyik alappontja a sztereografikus projekció *P* pólusa. A gömbi körsor másik alappontja az *A'* pont lesz. Tehát keressük egy alappontjaival adott gömbi elliptikus körsor azon tagját, ami átmegy a gömbi *C'* ponton. Ezt a gömbi szerkesztési feladatot már megoldottuk a *4.5.3/4.* pontban. Az ott leírt eljárást követve megkaphatjuk a síkbeli k_1 kör gömbi képét.

Így valamennyi elemi síkbeli euklideszi szerkesztési lépés gömbi visszavetítettjére mutattunk gömbi geometriai szerkesztési eljárást. Tehát kétirányú tételbeli állításunk mindkét irányát belátva igazoltuk, hogy pontosan ugyanazokat a szögeket szerkeszthetjük meg a gömbfelületen gömbi geometriai szerkesztéssel, melyek a síkban is megszerkeszthetőek síkbeli euklideszi szerkesztéssel.

Tételünk belátásából közvetlenül adódik, hogy (amint azt a *3.4.1.* pontban megjegyeztük) gömbi geometriai szerkesztési lépésekkel nem tudunk adott gömbi szakaszt tetszőleges n>2 egyenlő részre osztani. Ha ugyanis ez lehetséges volna, akkor például a 90^o-os középponti szöghöz tartozó π/2 hosszúságú szakaszt 90 egyenlő részre osztva meg tudnánk szerkeszteni az 1^o-os középponti szöghöz tartozó $\pi/180$ hosszúságú szakaszt is. Ekkor a *4.2*. pontbeli tétel miatt egymással 1^o-os szöget bezáró gömbi főköröket is tudnánk szerkeszteni. Mivel ismeretes, hogy 1^o-os szöget síkbeli euklideszi lépésekkel nem tudunk szerkeszteni, ez ellentmondana a *4.3.* tételnek.

5. fejezet: Gömbi geometria a középiskolában

Az alapvető szerkesztési feladatok gömbi megvalósítása, valamint a gömbi szerkeszthetőség tárgyalása után további érdekes kérdés annak vizsgálata, hogyan hozható közelebb a gömbi geometria témája középiskolás (esetleg akár általános iskolás) diákokhoz.

5.1 A korosztály kiválasztása

Annak meghatározása, hogy milyen korosztályban, illetve évfolyamon érdemes először beszélni a gömbi geometriáról, nehéz feladat. A választ döntően befolyásolja a diákok előképzettsége, azaz, hogy mennyire rendelkeznek biztos geometriai és gondolkodásmódbeli alapokkal a téma megértéséhez, a gömbi és az euklideszi geometria közti különbségek és hasonlóságok felismeréséhez.

Ezeket az előfeltételeket illetően jelentős különbségek mutatkoznak a matematika tagozatos, és a matematikából általános tanterv szerint haladó tanulók, valamint a hat-és nyolc-osztályos gimnáziumba járó diákok és általános iskolában tanuló társaik között. Ezen szempontok precíz vizsgálata szakdolgozatom keretein belül nem célom, azonban a matematikát nem emelt óraszámban tanuló diákok számára készült kerettanterveket alapul véve úgy gondolom, hogy legkorábban a hetedik osztály végén, vagy nyolcadik osztályban érdemes foglalkozni a témakörrel. A későbbi geometriai tanulmányok során pedig érdemes visszatérni a gömbhöz, és ott is megvizsgálni az aktuális ismeret gömbi geometriai tárgyalhatóságának kérdését.

5.2 Miért érdemes gömbi geometriát tanítani a középiskolában?

Véleményem szerint több szempontból is előnyös, ha a gyerekek a tantervben szereplő sík-és térgeometriai ismereteken túlmenően a gömbi geometria világában is szert tesznek némi jártasságra. A gömbbel történő részletesebb ismerkedés lényeges matematikai kompetenciákat és készségeket fejleszt.

Mivel Földünk modellezéséhez is a gömböt használjuk, a gömbi geometria ismerete segíti a diákok térbeli tájékozódását és a világról alkotott pontosabb képük kialakulását. Ha

engedjük, hogy a gyerekek önálló felfedezéseket tegyenek a gömbön, az növeli a kreativitásukat és a képzelőerejüket.
Úgy gondolom, hogy a gömbi geometria témakörében számos olyan kérdés kínálkozik melynek megértése, és megválaszolása az alapok tisztázása után már a gyerekek számára is lehetséges. Ezért a gömbi geometria kiválóan alkalmas arra, hogy a segítségével megmutassunk a diákoknak, hogy nem csak az általuk már ismert euklideszi geometria létezik, hanem vannak más geometriák is, ahol megváltozhatnak az általuk eddig megismert összefüggések.
A gömbbel történő foglalatoskodás hozzájárul a gyerekek matematikai szemléletmódjának fejlődéséhez, hiszen megtapasztalják, hogy bizonyos definíciókat megváltoztatva a korábbitól eltérően, de jól működő új rendszert kaphatnak. Ez a felismerés növeli a diákok kísérletező kedvét, a tárgy iránti érdeklődését, és gondolkodásra motiválja őket.

5.3 Saját tapasztalataim a gömbi geometria tanításával kapcsolatban

Mivel szerettem volna személyesen is megtapasztalni, hogy fenti elképzeléseim helyesek-e, hogy milyen módszerrel érdemes a gömbi geometriát középiskolai szinten tanítani, valamint, hogy mennyire befogadható ez a téma a gyerekek számára, a tanítási gyakorlatom keretében gömbi geometriát tanítottam egy speciális matematika tantervű hatosztályos gimnázium kilencedikes osztályában.
Ebben az iskolában a diákok képességeik szerinti csoportbontásban tanulják a matematikát. Mindkét csoportban volt lehetőségem órát tartani (a jobb képességű csoportban két órát, a gyengébb csoportban egy negyvenöt perces és egy duplaórát), aminek azért is örültem, mert így összehasonlíthattam a különböző ütemben haladó gyerekek munkáját. Az osztály matematikatanárától előzetesen megérdeklődtem, hogy milyen matematikai ismeretekkel rendelkeznek a diákok, és megtudtam, hogy a gimnáziumi geometria tananyagot a koordinátageometriától eltekintve már teljes egészében megtanulták. Az óráim anyagát mindezek figyelembevételével állítottam össze.

5.3.1 A téma feldolgozása

A két csoportnak hasonló felépítésű órát tartottam, de a gyengébb csoportnál kisebb módosításokat alkalmaztam a másik csoportnál szerzett tapasztalatok alapján.

A téma bevezetésében közösen gyűjtöttünk ötleteket arra, hogy a gyakorlati életben miért lehetnek hasznosak a gömbi geometriai ismeretek. Erre a bemelegítő kérdésre még bátortalanul válaszoltak a gyerekek, csak néhány felelet érkezett, de ezt követően az alapvető definíciók megbeszélésében már egyre aktívabban vettek részt a tanulók.

Tisztáztuk, hogy mit értünk a gömbön a pont, egyenes, szakasz és háromszög fogalmak alatt, definiáltuk a gömbi távolságot, a gömbi kört, valamint két egyenes bezárt szögét. A definíciók megalkotásában kikértem a gyerekek véleményét is, és meglepően hamar rátaláltak a különböző síkból ismert alakzatok gömbi megfelelőjére.

Az egyes alakzatok meghatározása után megmutattam nekik, hogy milyen eszközökkel tudják megszerkeszteni, illetve megmérni őket a gömbfelületen. Vittem nekik néhány Lénárt-féle gömbkészletet, és a következőkben ezek segítségével oldották meg a feladatokat.

Mindkét csoportnak az alábbi feladatsort kellett megoldania:

Gömbi geometria feladatok
9. osztály

1) **Egyenesek, sokszögek:**
- Hány metszéspontja lehet két egyenesnek (főkörnek)?
- Két különböző ponton át hány egyenest fektethetünk?
- Ha van két különböző egyenesünk, hány olyan egyenest tudunk rajzolni, ami mindkettőre merőleges?
- Mi az a legkisebb *n,* amire létezik gömbi *n*-szög?

2) **Háromszögek:**
- Rajzoljatok tetszőleges gömbi háromszöget. Mekkora a belső szögeinek összege? (Végezzetek több mérést.)
- Rajzoljatok szabályos gömbi háromszöget. Mekkorák a belső szögei? (Vizsgáljátok meg több háromszögre.)
- Hány derékszöge lehet egy gömbi háromszögnek?
- Mit mondhatunk a hasonló háromszögekről?
- Létezik legnagyobb háromszög? Ha igen mekkorák a szögei és a kerülete?

3) Körök:

- Létezik legnagyobb kör? Ha igen mekkora a gömbi sugara?
- Van-e olyan kör, ami már egyenes?
- Vegyük egy adott kör sugarának felét, és ezzel a sugárral is rajzoljunk egy kört. Hogyan változik a kör kerülete?
- Mekkora lehet gömbi körök esetén a kerület és az átmérő aránya?

Házi feladatok:

1. Hogyan számíthatjuk ki egy tetszőleges gömbi kétszög területét?

2. Mondjatok ötletet arra, hogyan adhatunk koordinátákat a gömbi pontoknak. Próbáljatok minél kevesebb koordinátát használni.

3.* Hogyan számíthatjuk ki egy tetszőleges gömbi háromszög területét? (Segítség: Használjátok az 1. feladat eredményét.)

A téma feldolgozásához a csoportmunkát választottam, mert úgy gondoltam megkönnyíti és élvezetesebbé teszi a gyerekek számára a munkát, ha társaikkal együtt próbálhatnak választ adni az egyes kérdésekre. A feladatok jellege is a csoportmunkához igazodik, együtt gyorsabban megoldhatók az ábraszerkesztések, a mérések és az eredmények rögzítése, ráadásul egymás ötleteit kiegészítve hamarabb jutnak jó eredményre a matematikának ebben a számukra egyelőre még új és szokatlan területén.

A gyerekek négy, egyenként három, illetve négyfős csoportban dolgoztak. Az első, egyenesekkel és sokszögekkel kapcsolatos kérdéskör minden csoport számára feladat volt, mert olyan alapvető kérdések tisztázása volt a célom velük, melyek a későbbiek megértéséhez mindenki számára nélkülözhetetlenek.

Rövid gondolkodási idő után, megbeszéltük a válaszokat. Minden csapat jól dolgozott, a legtöbben még azt a speciális esetet is felismerték, hogy két átellenes ponton át végtelen sok különböző egyenest fektethetünk. A legnagyobb nehézséget ebből a kérdéskörből a legkisebb csúcsszámú gömbi n-szög megtalálása okozta. Gömbi háromszöget minden csapat tudott rajzolni, de a kétszögre csak néhány csoport jött rá.

Ezt követően két csoportnak a háromszögekkel, a másik kettőnek a körökkel kapcsolatos kérdéseken kellett gondolkodnia. Azért osztottam fel a feladatokat a csapatok között, mert arra nem lett volna idő, hogy minden csapat minden feladattal foglalkozzon, azonban szerettem volna minél több szempontból összehasonlítani a gyerekekkel a gömbi és az euklideszi síkgeometriát, hogy lássák, valóban lényeges különbségek vannak a kettő között. Mindkét kérdéskör megoldásait úgy beszéltük meg, hogy minden csoport hallhassa a válaszokat, így azok az egyes csoportok tagjai abba a témába is betekintést nyertek, amivel előtte nem foglalkoztak.

A háromszögeket vizsgáló valamennyi csapat felfedezte, hogy a gömbre rajzolt háromszögek belső szögeinek összege nem állandó, de az intervallumot, amin belül változhat kevesen adták meg jól. Az 540°-os elfajuló esetre a határok ismeretében sokan tudtak példát mutatni, de a 180°-os speciális eset nagy meglepetést okozott a gyerekeknek. Annak ellenére, hogy megbeszéltük, hogy a gömbi háromszögek oldalait gömbi szakaszok adják, néhány esetben találkoztam olyan „háromszögekkel", melynek oldalait a gömbi vonalzó „rossz" élével (azzal az éllel, ami nem főkörív) rajzolták. A későbbiekben (például a kétszög területének meghatározásánál) is előkerült az a probléma, hogy olyan általuk sokszögnek vélt alakzatot készítettek a diákok, melyeknek oldalai körívek, de nem főkörívek voltak. Érdekes felismerés volt számomra, hogy míg síkban nem nevezik szakasznak a két pontot összekötő görbe pontok közé eső részét, addig a gömbön szerkesztve gyakran elkövetik ezt a hibát, mert a gömbfelület domború jellege miatt nem veszik észre, ha egy „vonal" nem egyenes.

A szabályos háromszög szerkesztése gondolkodóba ejtette a gyerekeket, mert akik a szögmérővel szerettek volna felmérni két 60°-os szögeket egy szakasz végpontjaiban, meglepődve tapasztalták, hogy a háromszögük nem lett szabályos. Miután adtam nekik ötletet a szerkesztési eljárásra, már maguktól fogalmazták meg, hogy a gömbi szabályos háromszögek belső szögei egyenlők, de nem 60°-osak.

A háromszögek derékszögű szögeik száma szerinti osztályozása a jobb képességű csoportban általában nem okozott gondot, de a gyengébb csoportba járó gyerekek nehezen találták meg mind a négy lehetőséget (0,1,2,3 derékszög). A Földgömb általuk is ismert hosszúsági, és szélességi körökre történő felosztása nagy segítségemre volt a szemléletes példák keresésénél. Ezeket felhasználva a gyerekek rögtön átlátták, mi hogyan valósulhat meg a gömbön.

A hasonló háromszögekre vonatkozó kérdéshez szinte minden csapat úgy kezdett hozzá, hogy megpróbáltak látszólag hasonló háromszögeket rajzolni a gömbre. Ekkor megkértem őket, hogy idézzék fel, mikor nevezünk két háromszöget hasonlónak a síkban, és ellenőrizzék, hogy ezek a feltételek teljesülnek-e az ő háromszögeikre. Ezután mindenki megértette, hogy a gömbfelületen ilyen értelemben nem beszélhetünk hasonló háromszögekről, illetve, ha két háromszög hasonló, akkor egybevágóak is. Ennél a feladatnál is azt tapasztaltam, hogy a gömbi szögfogalom alkalmazás szinten történő megértése még nehézséget okozott a gyerekeknek. Automatikusan a szemmértékükre hagyatkoztak, mikor két valójában nem hasonló háromszög megfelelő szögeit egyformának vélték, mert megszokták, hogy síkban „ránézésre”, az „alakjukból” is lehet sejteni két háromszög hasonlóságát.

A körrel dolgozó csapatok mindegyike felismerte, hogy a legnagyobb kör, amit a gömbre rajzolhatnak, az a főkör, és, hogy ez egyúttal egyenes is, viszont a főkör sugarának megállapításakor néhányan a gömb sugarát adták meg. Ők még nem szokták meg a gömbfelületen bevezetett távolság definíciót, de mikor erre felhívtam a figyelmüket, akkor már tudták a helyes választ.

A kör kerületével kapcsolatos feladatokhoz vittem fonalat a gyerekeknek, hogy próbálgatás útján jöjjenek rá az összefüggésekre, mert úgy gondolom, hogy fontos lenne az induktív, tapasztalatszerző módszernek az elsajátítása. Sok feladat megoldásánál lehet hasznos segítség néhány konkrét példa tanulmányozása, a kísérleti eredmények alapján esetenként könnyebb lehet rájönni az általános összefüggésre.

Ez az elképzelésem beigazolódott, mert a konkrét példák vizsgálata arra motiválta a csapatokat, hogy matematikailag is megmagyarázzák, miért kaptak minden esetben különböző arányokat. Sokan készítették el az ábrák síkmetszeteit, és a megfelelő derékszögű háromszögek berajzolása után arra is rájöttek, hogy a szögfüggvényekkel kapcsolatos az eredmény. A táblánál együtt levezettük az adott kör, és a kétszer akkora sugarú kör kerületének arányára vonatkozó összefüggést, de a sugár függvényében változó arány lehetséges értékeinek alsó és felső korlátait idő és bizonyos függvényvizsgálati módszerek ismeretének hiánya miatt én adtam meg nekik.

A kerület és átmérő aránya esetén is sikerült megállapítaniuk, hogy a síkbeli esettől eltérően nem állandó, a lehetséges értékek intervallumának határait megint én adtam meg.

A házi feladatok megbeszéléséből a koordinátázás sajnos, ugyancsak az órák rövidsége miatt, kimaradt. A kétszögek területével kapcsolatban mindenki átlátta, hogy egységgömbön csak a belső szögeitől függ, néhányan önállóan rájöttek a kiszámítás módjára is. A többieknek azzal segítettem, hogy síkban a körcikk területe viselkedik hasonlóan. Ezzel az asszociációval már ők is megtalálták a helyes képletet.

A gömbi háromszögek területének meghatározását az egyik csapat ezután már önállóan elvégezte, nagyon hamar rájöttek, hogy miként lehet összefüggésbe hozni a kétszögek területével, ahogy ezt segítségképpen javasoltam. A többi csapat munkáját azzal próbáltam könnyíteni, hogy arra kértem őket, rajzoljanak tetszőleges háromszöget a gömbjükre, és hosszabbítsák meg a háromszögek oldalait alkotó főköríveket teljes főkörökké. Minden csapat felfedezte, hogy ekkor a gömb „túloldalán” keletkezik egy, az eredetivel egybevágó háromszög. Ezután még egy további csapat rájött a megoldásra. Mivel ők nagyon szemléletes, színes példát rajzoltak a gömbjükre, ezt használtam fel, mikor a többieknek elmagyaráztam, hogyan áll elő a háromszög területe, mint a megfelelő kétszögek területösszegének, és a gömbfelület különbségének négyszerese. Igyekeztem segítő kérdéseket feltéve a feladatot nem megoldó gyerekeket is bevonni a levezetésbe.

Az indoklás megértéséhez nagymértékben hozzájárult, hogy nem csak nálam volt szemléltető eszköz, hanem a saját gömbjüket is vizsgálhatták a diákok. Volt olyan csapat, melynek tagjai mindezek ellenére is nehezebben birkóztak meg az összefüggések átlátásával. A gyerekek reakciója ezzel a feladattal kapcsolatban volt a legeltérőbb, ami nem meglepő, mert a kérdések közül ez igényelte leginkább a helyes ábraértelmezést, az összetett, korábbi eredményekre is támaszkodó gondolkodást.

Tapasztalataim összegzéseként elmondhatom, hogy a gyerekek nagy érdeklődéssel fordultak a gömbi geometria témája felé, amihez véleményem szerint jelentősen hozzájárult, hogy önálló kísérletezéssel maguk is fontos eredményekhez jutottak. A csapatmunka, és ennek a számukra teljesen új világnak a megismerése láthatóan óriási motiváló erővel hatott a gyerekekre. Mindenki kivette a részét a közös munkából, egyeseket az új eszközök megismerése és használata, másokat a gömbön tapasztalt szokatlan összefüggések matematikai igazolása foglalkoztatta.

5.3.2 Összegzés

Ennek a néhány órának a megtartása is azt az elképzelésemet erősítette, hogy érdemes és hasznos a gömbi geometriát középiskolások, esetleg általános iskolások matematika oktatásába is beépíteni. A tantárgy iránt kevésbé elhivatott gyerekek fantáziáját is megmozgatja az a felismerés, hogy nem csak a már jól ismert papírlapon, a szokásos eszközökkel lehet szerkesztéseket végezni, hanem a gömbfelületen is. Az eszközök, és a szerkesztési lépések a síkbeli eset gömbfelületre specializált változatai, de a kapott eredmények lényeges eltéréseket mutatnak a síkban megszokottaktól. A gömbfelületen való vizsgálódás kiváló alkalmat nyújt arra is, hogy a diákok felelevenítsék és mozgósítsák euklideszi geometriai ismereteiket, valamint felismerjék, hogy bizonyos fogalmak eltérő definiálása milyen alapvető különbségeket eredményez a rájuk épülő összefüggésekben.