VERSENYFELADATOK AZ ÁLTALÁNOS ÉS KÖZÉPISKOLÁBAN

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Besenyei Beáta

Témavezető: Dr Kiss Emil

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematika Alapszak Tanári Szakirány

2011

„Mint a matematika vagy a zene, az etnográfia az egyik ritka, valódi hívatás.”

(Claude Lévi-Strauss)

Bevezetés

Azért ezzel az idézettel kezdem a dolgozatomat, mert néprajz minorosként gyakran kellett szembesülnöm az emberek döbbenetével és értetlenségével, mikor megtudták, hogy matematikát tanulok. Ezek után nagy örömet okozott számomra, hogy korunk egyik legjelentősebb etnográfusa a fenti gondolatot nyilatkozta a matematikával kapcsolatban.

Téma választásomban jelentős szerepet játszott, hogy egyetemi tanulmányaim folyamán leginkább az érdekelt, hogy az itt megszerzett tudásanyag mennyiben könnyíti meg, teszi egyszerűbbé a középiskolás feladatok megoldását. A feladatok megoldása számomra segített közelebb kerülni az egyetemi tananyaghoz azáltal, hogy egyszerűbb feladatok megoldásához felhasználtam, hasznosságukat megtapasztaltam.

Másrészt mindig is érdekelt, hogy milyen feladatok megoldása által lehetne az emberekhez, a tanulókhoz közelebb vinni, legalább egy kicsit megkedveltetni a matematikát. Minden tanár számára fontos, hogy megtudja kedveltetni az általa oktatott szaktárgyat. Ez a matematika tanítása során különösen fontos, mert eddigi tapasztalataim birtokában a tanulók jelentős részénél ez a legkevésbé kedvelt tantárgy.

Ennek érdekében dolgozatomhoz igyekeztem leginkább megoldási módszereket bemutató feladatokat összeválogatni, melyek megoldásához nincs szükség unalmas monoton számolásokra.

Leendő tanárként is a későbbiekben munkám során a dolgozatom megírásakor alkalmazott alapelveket szeretném alkalmazni.

Köszönet a szakdolgozatom példáinak összeválogatásához, megoldásához jelentős segítséget nyújtó témavezető tanáromnak, Kiss Emilnek.

Tartalom

IV. Komplexszámok segítségével megoldható geometriai feladatok

V. Polinomokkal kapcsolatos feladatok

I. Oszthatóság vizsgálata

I. 1. Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy ha egy 7-tel osztható háromjegyű szám utolsó két számjegye egyenlő, akkor számjegyeinek összege szintén osztható 7-tel?

Megoldás:

Modulo 7 vizsgálatával:

A feladatban szereplő szám felírható a következő alakban:

$100a+10b+b\equiv 0 \quad (\text{mod } 7)$

Ez modulo 7-re ekvivalens a következővel:

$2a+4b\equiv 0 \quad (\text{mod } 7)$

Mivel 2 és 7 relatív prímek, a kongruencia leosztható 2-vel:

$a+2b\equiv 0 \quad (\text{mod } 7)$

Ez egyenértékű azzal, hogy a számjegyek összege osztható 7-tel. A kongruenciák azonosságainak felhasználásával nagyon egyszerűen, gyorsan eljuthatunk a megoldáshoz.

I.2.Feladat:

Ha egy négyjegyű (egész) szám két-két számjegye egyenlő, akkor a szám osztható vagy 11-gyel vagy 101-gyel.

Megoldás:

A 11-el oszthatósági szabály (egy szám pontosan akkor osztható 11-el, ha a számjegyei váltakozó előjellel összeadva szintén oszthatóak 11-el) maradékok vizsgálatával könnyen belátható:

$10^0 \equiv 1 \quad (\text{mod } 11)$

$10^1 \equiv 10 \quad (\text{mod } 11)$

$10^2 \equiv 1 \quad (\text{mod } 11)$

$10^3 \equiv 10 \pmod{11}$

Akármeddig is folytatható, de a maradékok ugyanígy változnak, azaz 11-el oszthatóság szempontjából ekvivalens átalakításokat végezve:

$\ldots 10^3a+10^2b+10^1c+10^0d \equiv 10a+b+10c+d \equiv -a+b-c+d \pmod{11}$

A számjegyeket a-val illetve c-vel jelölve, négyjegyű szám esetén a következő variációk lehetnek:

$\overline{aacc} \rightarrow -a+a-c+c=0 \rightarrow$ 11-gyel osztható

$\overline{acca} \rightarrow -a+c-c+a=0 \rightarrow$ 11-gyel osztható

$\overline{ccaa} \rightarrow -c+c-a+a=0 \rightarrow$ 11-gyel osztható

$\overline{caac} \rightarrow -c+a-a+c=0 \rightarrow$ 11-gyel osztható

$\overline{caca} \rightarrow -c+a-c+a=2a-2c$

$\overline{acac} \rightarrow -a+c-a+c=2c-2a$

Az utolsó két variáció kivételével, mindegyik osztható 11-gyel. De erre a kettőre könnyen belátható, hogy oszthatóak 101-gyel.

$\overline{acac}$: $1000a+100c+10a+c=1010a+101c=101\times(10a+c)$

$\overline{caca}$: $1000c+100a+10c+a=1010c+101a=101\times(10c+a)$

I.3. Feladat:

Legyen $a_n=5^n+7^n$ (n pozitív egész). Határozzuk meg a_{1999}-nek 216-tal való osztásakor kapott maradékát.

1.Megoldás:

$216=27\times8$ és $(8, 27)=1$, ezért vizsgálhatjuk az oszthatóságot szimultán kongruencia rendszer alkalmazásával.

$5^{1999}+7^{1999} \equiv x \pmod{8}$

$(5, 8)=1$ és $(7,8)=1$, így alkalmazható az Euler-Fermat tétel.

$\varphi(8)=2^3-2^2=4$

$5^4 \equiv 1 \pmod{8}$

$7^4 \equiv 1 \pmod{8}$

Ezt felhasználva az eredeti egyenlet ekvivalens a következő kongruenciával:

$5^3+7^3 \equiv x \pmod 8$

Ezek már nem nagy számok, egyszerű hatványozással kiszámolható:

$125+343 \equiv x \pmod 8$

$4 \equiv x \pmod 8$

$x=8t+4$

Ugyanígy ki számoljuk az egyenlet osztási maradékát 27-tel osztás esetére:

$\varphi(27)=3^3-3^2=18$

$5^{18} \equiv 1 \pmod{27}$

$7^{18} \equiv 1 \pmod{27}$

$5^{1999}+7^{1999} \equiv x \pmod{27}$

$5+7 \equiv x \pmod{27}$

$12 \equiv x \pmod{27}$

Behelyettesítjük a mod 8-ra kapott eredményt:

$8t+4 \equiv 12 \pmod{27}$

$8t \equiv 8 \pmod{27}$ $(8, 27)=1$

$t \equiv 1 \pmod{27}$

$x \equiv 8(27k+1)+4=216k+12$

$x \equiv 12 \pmod{216}$

Azaz $5^{1999}+7^{1999}$-et 216-tal elosztva maradékul 12-t kapunk.

2. Megoldás:

Binomiális-egyenlet felírásával.

$216=6^3$

$5^{1999}=(6-1)^{1999}=6^{1999}-1999\times6^{1998}+\ldots-\binom{1999}{2}\times6^2+1999\times6-1$

7^{1999}=$(6+1)^{1999}$=6^{1999}+1999×6^{1998}+…$\binom{1999}{2}$×6^2+1999×6+1

Mindkét egyenlet az utolsó három tag kivételével osztható 6^3-el.

5^{1999}+7^{1999} ≡2×6×1999≡12   (mod 216)

I.4.Feladat:

Legyen A egy legalább kétjegyű (tízes számrendszerbeli) egész szám. Tekintsük azt a B számot, amely úgy keletkezik, hogy az A szám számjegyeit fordított sorrendben írjuk le. Bizonyítsa be, hogy ha A első és utolsó számjegyeinek különbsége páros szám, akkor |A-B| osztható 18-cal!

Megoldás:

A és B számjegyeinek összege egyenlő, ezért 3-mal és 9-cel való osztással keletkező maradékuk is egyenlő. Ezért érdemes a két számot modulo 9 vizsgálni.

A≡B   (mod 9)

A-B≡0   (mod 9)

Azaz A és B különbsége osztható 9-cel.

Az első és utolsó szám különbsége páros szám:

A=10^na+10^{n-1}b+…+10e+f

B=10^nf+10^{n-1}e+…+10b+a

|f-a| páros szám, azaz 2-vel osztható és ez elegendő ahhoz, hogy |A-B| is páros szám legyen, azaz 2-vel osztható.

Mivel (2,9)=1, így egy szám 18-cal oszthatóságához elegendő 2-vel és 9-cel való oszthatóságát külön-külön bebizonyítani.

Ez a feladat számolgatással is egyszerűen megoldható, de ilyenkor sokkal nagyobb esély van az elszámolásra, és egyébként is sokkal elegánsabb a fenti megoldás.

Megoldás számolgatással:

A=10^na+10^{n-1}b+…+10e+f

B=10^nf+10^{n-1}e+…+10b+a

|A-B|=a×(10^n-1)+b×(10^{n-1}-10)+…+e×(10^{n-1}-10)+f×(10^n-1)=

=a×(…999)+b×(…990)+…+e×(…990)+f×(…999)

Az a és f után álló számokon kívül az egyenlet jobb oldalának minden tagja osztható 18-cal, mert mind páros és számjegyeik csak a 0 és 9, így 9-cel is oszthatóak.

De a és f azonos paritású, ezért összegük minden esetben páros szám lesz.

a×(…999)+f×(…999)=(a+f)(…999) páros szám és 9-cel is osztható, azaz osztható 18-cal.

I.5.b. Feladat:

Legyen A=n^5-5n^3+4n+1, ahol n természetes szám. Igazoljuk, hogy bármely n esetén az A szám ugyanarra a számjegyre végződik!

Megoldás:

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy a kifejezés értéke 10-el osztva mennyit ad maradékul. Mivel 10=2×5 és 2 és 5 relatív prímek, ennél a feladatnál is legcélravezetőbb az osztási maradékot külön-külön ezekre a számokra megvizsgálni.

A=n^5-5n^3+4n+1

Egyszerűen belátható, hogy A értéke páratlan szám lesz, azaz 2-vel osztva maradékul 1-et ad.

n^5-5n^3 n minden értékére osztható 2-vel, mert két páratlan szám és két páros szám különbsége is páros szám és 4n is osztható 2-vel.

mod 5:

Kis-Fermat tétel szerint, 5 prím, így n^5 ≡n (mod 5) és 4n≡-n (mod 5).

Ezeket felhasználva:

n^5-5n^3+4n+1≡1 (mod 5)

Azaz az egyenlet 2-vel és 5-tel osztva is 1-et ad maradékul.

Szimultán kongruencia rendszer használatával kiszámoljuk 10-el osztás maradékát.

x≡1 (mod 2)

x=2t+1

x≡1 (mod 5)

2t+1≡1 (mod 5)

2t≡5 (mod 5)

$x \equiv 2 \times 5+1 \pmod{10}$

$x \equiv 1 \pmod{10}$

Eredményül azt kaptuk, hogy az egyenlet 10-el osztva 1-et ad maradékul, ezért az A szám utolsó számjegye minden esetben 1 lesz.

I.6. Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy 2^{2n} +15n-1 osztható 9-cel, bármilyen természetes szám is n.

1. Megoldás:

$$2^{2n} = 4^n = (3+1)^n = \binom{n}{0} 3^n + \binom{n}{1} \times 3^{n-1} + \binom{n}{2} 3^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2} 3^2 + \binom{n}{n-1} 3 + 1$$

Az így kapott egyenlet minden tagja osztható 9-cel az utolsó két tag kivételével.

Az eredeti egyenletbe beírva:

2^{2n} +15n-1=3n+1+15n-1=18n

Ennek a feladatnak ez a legegyszerűbb megoldása, bár ehhez szükség van a binomiális tétel ismeretére. Ennek ismeretében könnyen felismerhető, hogy$4^n = (3+1)^n$ binomiális egyenletének a felírásával számunkra kedvező eredményre juthatunk.

2. Megoldás:

Maradékok vizsgálatával.

A táblázatban az egyenletnek 9-cel való osztás maradékai láthatóak.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
4^n	4	7	1	4	7	1	4	7
15n	6	3	0	6	3	0	6	3
4^n+15n+1	0	0	0	0	0	0	0	0

4^n-nek és 15n-nek a maradékai mod 9-re periódikusan változnak, ezért megállapíthatjuk, hogy 2^{2n} +15n-1 kifejezés n minden értékére osztható 9-cel.

3. Megoldás:

Teljes indukcióval.

1.lépés:

n=1-re ellenőrizzük igaz-e az állítás:

4+15-1=18 osztható 9-cel, az állítás igaz.

2.lépés:

Feltesszük, hogy n-re igaz az állítás, azaz $9|4^n$+15n-1 és ez alapján belátjuk, hogy ekkor n+1-re is igaz.

4^{n+1}+15×(n+1)-1=4×4^n+15n+15-1=4×(4^n+15n-1)-9×(5n-2)

Ez minden n-re osztható 9-cel, mert a zárójelben lévő tagról feltettük ezt, a második tag esetén triviális.

I.7. Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy egy természetes szám négyzetét követő szám nem osztható sem 3-mal, sem 7-tel.

1. Megoldás:

Maradékok alapján:

3: a négyzetszámok 3-mal osztva maradékul 1-et vagy 0-t adnak, ehhez 1-et adva nem kapunk 3-mal osztható számot.

7: négyzetszámok 7-tel osztva maradékul 0-t, 1-et, 2-t vagy 4-et adnak, ezekhez 1-et adva 7-tel osztható számot nem kaphatunk.

Az osztási maradékokat táblázatban elhelyezve, látható, hogy ezek periódikusan változnak.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2+1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
mod 3	2	2	1	2	2	1	2	2	1
mod 7	1	5	3	3	5	2	1	2	5

2. Megoldás:

Ha $7|a^2 + 1$, ebben az esetben felírható a következő kongruencia:

a^2 ≡-1 (mod 7)

A kongruencia mindkét oldalát harmadik hatványra emelve:

a^6 ≡-1 (mod 7)

Mindkét oldalt beszorozzuk a-val:

a^7 ≡-a (mod 7)

De ez nem lehet igaz, mert Kis-Fermat tétel szerint

a^7 ≡a (mod 7)

Ugyanígy fel lehet írni 3-ra.

a^2 ≡-1 (mod 3)

a^3 ≡-a (mod 3)

Bármely 4k+3 alakú prímszámra felírva a kongruenciát, ellentmondáshoz jutunk.

Tetszőleges p prímszámra n^2 ≡-1 (mod p) kongruenciát (p-1)/2-edik hatványra emelve, majd n-nel beszorozva a következő kongruenciát kapjuk:

p=4k+1 esetén n^p ≡n (mod p)

p=4k+3 esetén n^p ≡-n (mod p)

Ennek a magyarázata az, hogy 4k+3 esetén (p-1)/2=4k+2/2=4k+1 alakú azaz páratlan szám, (-1) páratlan hatványon (-1).

De 4k+1 esetén (p-1)/2=2k alakú számot kapunk, (-1) minden páros hatványa 1.

Tehát a^2+1-nek csak 4k+1 alakú prímosztója van.

3. Megoldás:

Gauss-prímek segítségével

4k+3 alakú prímszámok egyúttal Gauss-prímek is.

A Gauss-egészek körében a^2+1=(a+i)(a-i), *p* prím, ezért csak úgy lehet osztója két egész szám szorzatának, ha legalább az egyik tényezőnek osztója.

Ezért p|a+i vagy p|a-i.

p|a+i:

Legyen a+i=p(b+ci)=pb+pci

Ez az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha a=pb és pc=1. Azaz p|a és p|1, 1-nek a természetes számok között csak 1 az osztója, de *p* 4k+3 alakú szám.

Egy valós szám csak abban az esetben lehet osztója egy komplex számnak, ha a valós és képzetes résznek is osztója.

Ezért *p* csak abban az esetben lehetne osztója (a-i)-nek, ha *a*-nak és (-1)-nek is osztója lenne.

I.8. Feladat:

Hány olyan 1993-nál kisebb pozitív *n* szám van amelyre $1^n+2^n+3^n+4^n$ osztható 30-cal?

Megoldás:

30=2×3×5

2, 3 és 5 páronként relatív prímek, így elegendő az oszthatóságot ezekre külön-külön vizsgálni.

mod 2-re:

$1^n+2^n+3^n+4^n \equiv 0 \pmod 2$

$1+0+1+0 \equiv 0 \pmod 2$

n minden értékére a kifejezés értéke osztható 2-vel.

mod 3-ra:

$1^n+2^n+3^n+4^n \equiv 0 \pmod 3$

n páratlan: $1+2+0+1 \equiv 0 \pmod 3$ ez nem teljesülhet

n páros: $1+1+0+1 \equiv 0 \pmod 3$ minden páros szám jó lesz

mod 5-re:

$1^n+2^n+3^n+4^n \equiv 0 \pmod 5$

3-mal oszthatóság vizsgálatánál már beláttuk, hogy *n* nem lehet páratlan, ezért csak azokkal a lehetőségekkel foglalkozunk, ahol *n* páros.

n=2k: $1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+4^{2k}=1^k+4^k+9^k+16^k$

k páratlan esetén:

a fenti oszthatósági szabály ismételt használatával

1+9|1^k+9^k és 4+16|4^k+16^k, azaz n=4k+2 alakú hatványokra a kifejezés értéke osztható 5-tel.

k páros esetén:

1^{4m}+2^{4m}+3^{4m}+4^{4m}=1^m+16^m+81^m+256^m

Ez nem jó megoldás, mert ezek a számok mind 5k+1 alakúak és az összes hatványuk szintén ilyen lesz, azaz az összegük soha nem lesz 5-tel osztható. Tehát 4-el osztható n-ekre a kifejezés értéke nem osztható 5-tel.

Másképp:

1^n+2^n+3^n+4^n ≡x (mod 5)

Euler-Fermat tétel felhasználásával: (a,p)=1 $a^{\varphi(p)}$ ≡1 (mod p)

Azaz a^4 ≡1 (mod 5), mert φ(5)=4.

1, 2, 3, 4 számok mindegyike relatív prím 5-tel, ezért mindegyikre felírható a tétel.

De 4 minden többszörösére is igaz a kongruencia, azaz a^{4m} ≡1 (mod m).

1^{4m}+2^{4m}+3^{4m}+4^{4m} ≡x (mod 5)

1+1+1+1≡x (mod 5)

4≡x (mod 5)

Az eredmény most is ugyanaz, 4-el osztható *n*-ek esetén a kifejezés 4-et ad maradékul.

Összegezve: 1^n+2^n+3^n+4^n akkor pontosan osztható 30-cal, n=4k+2 alakú szám.

1993-tól kisebb *n* pozitív számok száma, amelyekre a feltétel teljesül: 498.

I.9.Feladat:

Az *a, b, c* és *d* egészek olyanok, hogy az ac, bc+ad, bd mindegyike osztható az *n* egésszel.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a bc+ad összeg tagjai külön-külön is oszthatók *n*-nel, azaz n|bc és n|ad.

1. Megoldás:

Ahhoz, hogy n|ad elég megmutatni, hogy minden *p* prím kitevője legalább akkora, mint *n*-ben.

Legyen p kitevője a, b, c, d, n-ben rendre α_a, α_b, α_c, α_d, α_n.

n|ac, ezért α_a+α_c $\geq$ α_n

n|bd, ezért α_b+α_d $\geq$ α_n

Összeadva: (α_a+α_d)+(α_b+α_c)≥2α_n

Vagyis (α_a+α_d) és (α_b+α_c) közül az egyik legalább α_n .

Tehát p^{α_n}|ad vagy p^{α_n}|bc.

De ekkor n|ad+bc miatt a másiknak is.

2.Prímszámok vizsgálata

2.1.Feladat:

Melyek azok a *p*, *q* pozitív prímszámok, amelyekre 7p+q és pq+11 is prím?

Megoldás:

p csak 2 lehet, mert csak ebben az esetben lesz 7p+q páratlan szám.

Behelyettesítve a két megadott kifejezésbe 14+q és 2q+11 alakú kifejezéseket kapunk.

Mivel mindkét kifejezés nagyobb, mint, ezért 3 egyiknek sem lehet osztója.

3ł14+q →q≠3k+1

3ł2q+11 →q≠3k+2

3k alakú számok közül csak a 3 prímszám.

Azaz q=3 és p=2.

Ezeket behelyettesítve mindkét kifejezésbe egyaránt 17-et kapunk.

2.2. Feladat:

Mely p, q és r prímszámokra teljesül, hogy p^2+q^2+r^2=10235?

Megoldás:

10235 modulo 8 vizsgálva könnyen belátható, hogy p, q és r közül egyik sem lehet 2, mert:

10235≡3 (mod 8)

$(2k+1)^2$ ≡1 (mod 8)

2^2 ≡4 (mod 8)

Csak 3 páratlan szám négyzetének összege lesz 3 8-cal osztva.

Valamelyik számnak 5-nek kell lennie, mert a páratlan számok négyzetének utolsó számjegye 1, 5 és 9 és ezek összege csak akkor végződhet 5-re ha mindegyik egyszer szerepel az egyenletünkben vagy mindhárom 5-re végződik. De ez nem lehet, mert 5-re csak az 5-tel osztható számok végződnek, ezek közül csak az 5 prímszám.

r=5: p^2+q^2=10210

10210 3-mal osztva 1-et ad maradékul, így p és q közül az egyiknek 3-mal osztva 0-t kell adnia maradékul, azaz az egyik szám 3.

p=3: behelyettesítés után 3^2+q^2+5^2=10235

q=101

2.3. Feladat:

Milyen maradékot ad 72-vel osztva a *p* prímszám, ha p=n^2+2n+3 alakú, ahol *n* természetes szám?

Megoldás:

p≥6, mert n≥1

p nem osztható sem 3-mal, sem 2-vel.

p=n^2+2n+3=$(n+1)^2$+2

A négyzetszámok 3-mal osztva maradékul 0-t vagy 1-t adnak.

Ha $(n+1)^2$ ≡1   (mod 3)

$(n+1)^2$+2≡0 (mod 3)

Azaz p osztható 3-mal.

$(n+1)^2$ ≡0   (mod 3)

Tehát 3|n+1, és így p 9-cel osztva maradékul 2-t ad.

Mivel p 2-vel sem osztható, n páros szám, ezért 8-cal osztva a maradék 3.

72=8×9

Érdemes a feladatot (mod 8)-ra és (mod 9)-re külön vizsgálni.

(8,9)=1, ezért a szimultán kongruenciarendszer megoldható.

n^2+2n+3≡2   (mod 9)

n^2+2n+3=9t+29t+2≡3   (mod 8)

t≡1   (mod 8)

p≡9(8k+1)+2=72k+11

p≡11   (mod 72)

Azaz p 72-vel osztva maradékul 11-et ad.

Legkisebb feltételeinknek eleget tevő prímszám 83.

2.4. Feladat:

Jelöljön p és q két különböző páratlan törzsszámot, továbbá jelöljenek a és b olyan pozitív egész számokat, amelyekre

$$a+b=q.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a^p+b^p nem lehet egyenlő semmilyen természetes számnak 1-nél nagyobb egész kitevőjű hatványával!

Megoldás:

$p \neq q$ feltétel szükséges, mert ellenkező esetben lehet a^p+b^p lehet egyenlő x^n-nel.

Példa: $2^3+1^3=3^2$.

Legyen p=2k+1, páratlan szám, ezért az egyenlet felírható a következő formában:

$a^{2k+1}+b^{2k+1}$=(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b-…-ab^{2k-1}+b^{2k})

Az így kapott szorzat csak akkor lenne egyenlő $x^n - nel$, ha a szorzat második tagja is osztható lenne q-val, mert q prímszám, ezért x^n felbontásában q-nak is szerepelnie kell n-edik hatványon.

A szorzat második tagja tovább alakítható

a^{2k}-a^{2k-1}(q-a)+$a^{2k-2}(q-a)^2$-…-a$(q-a)^{2k-1}$+$(q-a)^{2k}$

(q-a)-k Binomiális egyenletének felírásával, olyan egyenletekhez jutunk, melyek minden tagja, az utolsó kivételével osztható q-val. Mivel a q-val oszthatóságot vizsgáljuk, ezért számunkra csak az utolsó tag érdekes.

Ezek kitevője megegyezik (q-a) kitevőjével, előjelük páros kitevő esetén +, páratlan kitevő estén -.

a^{2k}-a^{2k-1}(…-a)+a^{2k-2}(…+a^2)…….+a^2(…+a^{2k-2})-a(…-a^{2k-1})+a^{2k}=

=a^{2k}+a^{2k}+a^{2k}…+a^{2k}+a^{2k}+a^{2k}=(2k+1)a^{2k}=p×a^{2k}

Ez a szorzat soha nem lesz osztható q-val, mert

- (p,q)=1 és

-(a^{2k},q)=1, mert csak abban az esetben lehetne más szám a legnagyobb közös osztó, ha a^{2k} többszöröse lenne q-nak. (Ebben az esetben lnko=q.) De ez nem lehetséges, mert a≠q és a<q, ezért a prímtényezős felbontásában nem szerepel q. a^{2k} prímtényezős felbontásában ugyanazok a prímszámok szerepelnek, mint a-ban csak a kitevőjük 2k-val beszorozva.

Azaz sem p, sem a^{2k} nem osztható q-val és szorzatuk sem, mert egy prímszám csak abban az esetben lehet osztója két egész szám szorzatának, ha legalább egyiknek osztója. Másrészt következik (c,ab)=1↔(c,a)=1 és (c,b)=1 összefüggésből.

3.Négyzetszámok vizsgálata

3.1. Feladat:

Bizonyítsa be, hogy bármely közvetlenül egymás után következő 1997 darab pozitív egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám!

Megoldás:

1997 szomszédos szám felírása: n-998, n-997, …n-1, n, n+1, …n+997, n+998

Ezek négyzetösszegének felírása:

$(n-998)^2+(n-997)^2+\ldots+(n+997)^2+(n+998)^2=1997n^2+2\times\frac{998\times999\times1997}{6}$ (az első n pozitív egész szám négyzetösszegének megoldó képlete alapján)

Ennek az összegnek kellene egyenlőnek lennie egy négyzetszámmal.

$a^2=1997(n^2+998\times333)$

1997 prímszám, ezért $n^2+998\times333$ kifejezésnek is oszthatónak kell lennie 1997-tel ahhoz, hogy a szorzat értéke négyzetszám lehessen.

$n^2\equiv-998\times333 \pmod{1997}$

$n^2\equiv1165 \pmod{1997}$

Ez a kongruencia pontosan akkor megoldható a kvadratikus maradékokra vonatkozó tétel alapján, ha

$1165^{(1997-1)/2} \equiv 1 \pmod{1997}$

Ez ekvivalens a következő kongruenciával:

$\left(\frac{1165}{1997}\right) \equiv 1 \pmod{1997}$

A Legendre-szimbólum értékének kiszámolása:

$\left(\frac{1165}{1997}\right)=\left(\frac{5}{1997}\right)\left(\frac{233}{1997}\right)$

$\left(\frac{5}{1997}\right)=\left(\frac{1997}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=-1$

$\left(\frac{233}{1997}\right)=\left(\frac{1997}{233}\right)=\left(\frac{-100}{233}\right)=\left(\frac{-1}{233}\right)\left(\frac{2}{233}\right)^2\left(\frac{5}{233}\right)^2=1$

Azaz:

$\left(\frac{1165}{1997}\right) \equiv -1 \pmod{1997}$

Az eredeti kongruencia: $n^2 \equiv 1165 \pmod{1997}$ nem megoldható, így $n^2+998\times333$ nem osztható 1997-tel.

3.2. Feladat:

Legyen *n* természetes szám, s legyen *d* osztója $2n^2$-nek. Bizonyítandó, hogy n^2+d nem négyzetszám.

Megoldás:

Legyen $2n^2$=dk, ahol k egész szám.

Ekkor $a^2=n^2+d=n^2+\frac{2n^2}{k}$

k^2-tel beszorozva az egyenletet:

k^2a^2=k^2n^2+2kn^2=n^2(k^2+2k)

Mivel k egész szám, k^2+2k-nak is négyzetszámnak kell lennie. Az a^2=b^2c egyenlőség természetes számok esetén csak akkor teljesül, ha c is négyzetszám.

De k^2+2k nem lehet négyzetszám, mert

$k^2 < k^2$+2k< $(k+1)^2$=k^2+2k+1

két szomszédos szám négyzete között nem található négyzetszám.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy n^2+d nem lehet négyzetszám.

3.3. Feladat:

Adja meg az összes olyan n természetes számot, amelyre a 3^n+63 kifejezés értéke négyzetszám!

Megoldás:

n csak páros szám lehet, mert

n=2k+1: 3^{2k+1}+63≡3+7≡2 (mod 8)

Négyzetszám 8-cal osztva nem adhat 2-t maradékul.

Páros számok vizsgálata esetén nem jutunk ellentmondásra mod 8 vizsgálatával.

n=2k: 3^{2k}+63≡1+7≡0 (mod 8)

3^{k^2}+3^2×7=a^2

3^2×(3^{2k-2}+7)=a^2

A zárójelben lévő kifejezésnek is négyzetszámnak kell lennie (ugyanúgy, mint az előző feladatnál).

3^{2k-2}+7=b^2

7=b^2-3^{2k-2}

7=(b-3^{k-1})($b+3^{k-1}$)

7 prímszám, szorzatra bontása csak a következő lehet 7=7×1 (egységszeresektől eltekintve)

7=b+3^{k-1}

1=b-3^{k-1}

b=4, k=2, n=4 és csak ez egyetlen megoldás van.

Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe:

3^4+63=81+63=144=12^2

3.4. Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy ha *n* pozitív egész számot jelent, akkor 2^n+3^n nem lehet négyzetszám!

Megoldás:

n=1 és n=2 esetben egyszerű számolással bebizonyítható, hogy az összegük nem négyzetszám.

n=1 2^1+3^1=5 nem négyzetszám

n=2 2^2+3^2=13 nem négyzetszám

n≥3 esetén 2 minden hatványa 8-cal osztható, azaz 0-t ad maradékul, 3 hatványai 8-cal osztva páratlan kitevő esetén 3, páros kitevő esetén 1. A feltételeinknek csak a páros kitevők felelnek meg, így a feladatunk átírható a következő alakban:

$2^{(2k)}+3^{(2k)}=a^2$

$(2^k)^2+(3^k)^2=a^2$

Erre az egyenletre tudjuk alkalmazni a pitagoraszi számhármasok tételét, mert (2,3)=1.

$x^2+y^2=z^2$

x=2mn, y=m^2-n^2, z=m^2+n^2

Csak x^2 lehet egyenlő 2^{k^2}, mert a másik két tényező páratlan szám.

m és *n* relatív prímek (m> n), ezért 2^k=2mn csak m=2^{k-1} és n=1 esetén teljesül.

Az így kapott eredményeket felhasználva y értéke a következőkkel egyenlő.

y=$3^k=m^2-n^2=(2^{k-1})^2$-1=$(2^{k-1}$-1)(2^{k-1}+1)

A szorzat mindkét tagjának 3-mal oszthatónak, sőt 3 hatványnak kellene lennie, de a két szám különbsége 2. Így a 3-mal oszthatóság sem teljesülhet egyszerre mindkét számra, ezért az eredeti kifejezés nem lehet négyzetszám.

3.5. Feladat:

Legyenek p és q olyan törzsszámok, melyekre $3 \leq p < q$, továbbá p+1 és q+1 egyaránt oszthatóak 4-gyel. Bizonyítsuk be, hogy q^2-p^2 nem lehet négyzetszám.

Megoldás:

p+1 és q+1 osztható 4-el, ezért mindkettő szám 4k+3 alakú.

1. Megoldás:

q^2-p^2=a^2

q^2-a^2=p^2

(q-a)(q+a)=p^2

Ez az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

a, (q-a)=(q+a)=p

ez csak a=0 és p=q esetén teljesülhetne, de ez nem felel meg a feladat feltételeinek

b, (q-a)=1 és (q+a)=p^2

de ekkor 2q=$p^2 + 1$

Ezt az egyenletet modulo 8 vizsgálva:

q 4k+3 alakú, ennek kétszerese 8k+6 alakú,

p páratlan szám, négyzete 8k+1 alakú

2. Megoldás:

Az egyenlet egyszerű átrendezése után és mert (q,p)=1 itt is lehet alkalmazni a primitív pitagoraszi számhármasok megtalálására szolgáló képletet.

a^2+p^2=q^2

a=2mn, mert csak ez az egy szám lehet páros p=m^2-n^2

q=m^2+n^2

p=m^2-n^2=(m+n)(m-n)

Mivel p prímszám, ezért p szorzatra bontásában, csak ez a prímszám és az egység szerepelhet.

m+n=p

m-n=1 ↔ m=1+n

p=2n+1

q=$(1+n)^2$+n^2=2n^2+2n+1

a=2n(n+1)=2n^2+2n

De ebben az esetben q nem lehet 4k+3 alakú.

n páros, n=2m: $4m^4$+4m+1 azaz 4k+1 alakú

n páratlan, n=2m+1: 2×(4m^2+4m+1)+2×(2m+1)+1=8m^2+8m+2+4m+2+1   4k+1 alakú

3. Megoldás:

Gauss-prímek segítségével.

q^2=a^2+p^2

q=a^2+p^2/q

q|a^2+p^2=(a+pi)(a-pi)

q 4k+3 alakú prímszám, ezért egyben Gauss-prím is.

Ezért, ha q osztója (a+pi)(a-pi)-nek, akkor osztója valamelyik tényezőnek.

De *q* nem osztója *p*-nek, mert csak abban az esetben lehetne osztója *p*-nek, ha létezne olyan *d* egész szám, amelyre p=dq. Mivel az egész számok körében a prímszámok felbonthatatlanok is egyben, *d* csak egység lehet. Ebben az esetben *p* és *q* egymás egységszerese lenne.

3.6. Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy ha *k* pozitív egész szám, akkor k^3+2k^2+2k+1 nem négyzetszám.

Megoldás:

A feladatban szereplő egyenletet a következő módon lehet szorzattá alakítani.

$k^3+2k^2+2k+1=(k^2+k+1)(k+1)$

A szorzat két tagjának legnagyobb közös osztója 1, mert a szorzat első tagja átalakítható:

$k^2+k+1=(k+1)^2-k$

és, ha egy *n* szám osztója (k+1)-nek, akkor *k*-nak is osztójának kell legyen, de nincs olyan természetes szám, amely két egymást követő számnak is osztója az 1-en kívül.

Ebben az esetben (k+1)-nek és (k^2 +k+1)-nek is négyzetszámnak kell lennie.

k^2+k+1 nem lehet négyzetszám, mert pozitív egész számok esetén

$k^2 < k^2+k+1 < (k+1)^2=k^2+2k+1$

Két szomszédos szám négyzete között nem lehet négyzetszám.

3.7. Feladat:

Igaz-e, hogy a következő alakú, tízes számrendszerben felírt számok mind négyzetszámok: 49, 4489, 444889, 44448889, ...?

Megoldás:

A 4-esek száma legyen n és így a 8-asok száma n-1.

$4\times10^{2n}+4\times10^{2n-1}+\ldots+4\times10^{n}+8\times10^{n-1}+\ldots+8\times10+8+1$

A feladat sokkal áttekinthetőbben, egyszerűbben kezelhetően felírható, ha a feladatunkban szereplő számot beszorozzuk 9-cel. Ez a megoldásunkat nem befolyásolja, mert ha egy négyzetszámot beszorzunk egy négyzetszámmal, ismét négyzetszámot kapunk.

$4\times(10^{2n}-10^{n})+8\times(10^{n}-1)+9=x^2$

Zárójeleket felbontva a következő egyenlethez jutunk:

$4\times10^{2n}-4\times10^{n}+8\times10^{n}-8+9=x^2$

Egyszerű átrendezve az egyenletet, egy olyan másodfokú egyenlethez jutunk, amiből könnyen leolvasható a megoldás.

$4\times10^{2n}+(8-4)\times10^{n}+1=x^2$

$(2\times10^{n}+1)\times(2\times10^{n}+1)=x^2$

Azaz, akármeddig folytatjuk az újabb 48-asok beírását a szám közepébe mindig négyzetszámot kapunk.

Ismeretlen *a* és *b* számokra felírva ugyanezt az egyenletet:

$a\times(10^{2n}-10^{n})+b\times(10^{n}-1)+9=x^2$

a=1, b=5 választása esetén is elmondható a következő:

16 négyzetszám, 1156 négyzetszám és szám közepébe 15-öt írva akármeddig folytatva is mindig négyzetszámot kapunk.

Ez a feladat elég érdekesnek tűnik ahhoz, hogy megpróbáljam általánosítani.

Első eset:

Van-e olyan *n* jegyű négyzetszám, amelynek számjegyei azonosak?

Megoldás:

$a\times10^{n}+a\times10^{n-1}+\ldots+a\times10+a=x^2$

A négyzetszámok utolsó számjegye csak 0, 1, 4, 5, 6 és 9 lehet, ezekkel behelyettesítve az egyenletet és az így kapott egyenleteket modulo 8 megvizsgálva az egyenleteket, azt kapjuk, *a* csak 0 és 4 lehet. 0 választása esetén nincs értelme a feladatnak.

$111\ldots111\times4\neq x^2$, mert 4 négyzetszám ezért 111…111-nek is négyzetszámnak kellene lennie, de ezt 8-cal osztva maradékul 7-et kapunk maradékul, így nem lehet négyzetszám.

Mivel 10^3 osztható 8-cal, ezért 8-cal oszthatóság szempontjából elegendő az utolsó 3 tagot vizsgálni.

Második eset:

Van-e olyan 2n jegyű négyzetszám, amelynek az első és második n számjegye is egyenlő?

Megoldás:

a×10^{2n-1}+a×10^{2n-2}+…+a×10^{n}+b×10^{n-1}+…+b×10+b=x^2

Ebben az esetben is kedvező számunkra, ha a megadott számot beszorozzuk 9-cel.

a×(10^{2n}-10^{n})+b×(10^{n}-1)=x^2

(10^{n}-1)(10^{n}a+b)=x^2

Az előző feladatnál beláttuk, hogy az utolsó számjegy csak 0 és 4 lehet. Ebben az esetben van értelme az utolsó számjegyeket 0-nak választani.

b=0:

(10^{n}-1)(10^{n}a)=x^2

10^{n}-1 és 10^{n} egymással relatív prímek.

a×10^{n}×(10^{n}-1)=x^2 csak abban az esetben teljesülhetne, ha *a* 10^{n} és 10^{n}-1 prímtényezős felbontásában szereplő összes prímszámot tartalmazná. De *a* 0 és 9 közé eső szám, így ez nem teljesülhet, mert n=1 esetén 10=2×5>9. Tehát b nem lehet egyenlő 0-val.

b=4:

(10^{n}-1)(10^{n}a+4)=x^2

Ha a szorzat két tagja egymással relatív prím, akkor a szorzat mindkét tagjának külön-külön is négyzetszámnak kell lennie. 10^{n}-1 8-cal osztva 7-et ad maradékul, így ez nem lehet négyzetszám.

Ha nem relatív prímek van egy közös osztójuk, *d*.

Ezzel a közös osztóval leosztva mindkét kifejezést egymáshoz relatív prímszámokat kapunk, amelyeknek külön-külön négyzetszámnak kell lennie.

10^{n}-1/d=y^2

10^{n}a+4/d=z^2

10^{n}-1 csak páratlan szám lehet, de 5-tel nem osztható, ezért utolsó számjegye csak 1, 3, 7 vagy 9 lehet.

Páratlan számnak csak páratlan szám lehet osztója, így *d* is páratlan szám és szintén nem osztható 5-tel.

d osztója 10^{n}a+4-nek is, ezt elosztva ismét négyzetszámot kell, hogy kapjunk.
Figyelembe véve, hogy egy négyzetszám milyen számjegyre végződhet, azt kapjuk, hogy *d* utolsó számjegye csak 1 vagy 9 lehet.

d| 10^{n}-1 és d|10^{n}a+4, ezért tetszőleges *r*, *s* egész számokra d|r(10^{n}-1)+s(10^{n}a+4)

Legyen r=-a, s=1

d|-a(10^n-1)+(10^na+4)=a+4, azaz d|a+4.

Mivel a<9, ezért d≤13.

d utolsó számjegye 1 és 9 lehet csak, ezért d= 9 vagy d=11 .

d=9:

Nem lehet, mert 10^n-1-et 9-cel osztva $111\ldots111$ alakú számot kapunk, és ezt már tudjuk, hogy nem lehet négyzetszám.

d=11:

d|a+4 és a≤9, ezért d=11 és a=7

(10^n-1)(10^n7+4)=x^2

(10^n-1)/11=y^2

Csak n=2 esetén van megoldás, mert

n=1: 11-től kisebb számot kapunk.

n>2: 8-cal osztva maradékul 7-et kapunk.

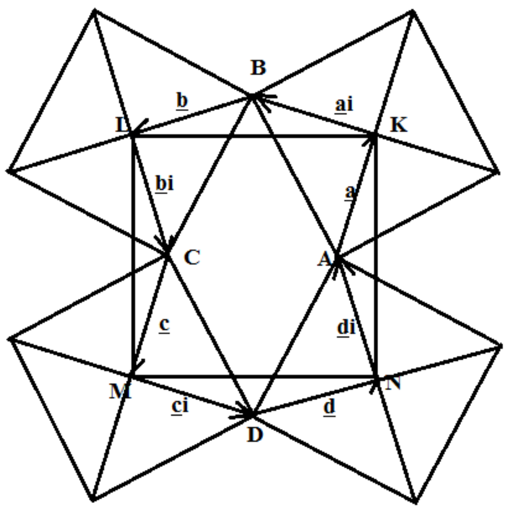
Eredményül azt kaptuk, hogy egyetlen olyan 2n jegyű négyzetszám van, amelynek az első és második n tagja is ugyanaz a szám. Ez a szám $7744=88^2$.

IV. Komplexszámok bevezetésével megoldható geometriai feladatok

IV.1 Feladat:

Jelentsék K, L, M, N valamely rombusz oldalai fölé (kifelé) emelt négyzetek középpontjait; bebizonyítandó, hogy a KLMN négyszög maga is négyzet.

Megoldás:



Legegyszerűbb azt bebizonyítani, hogy $\overrightarrow{NK}$ merőleges elfordítottja $\overrightarrow{KL}$, azaz i$\overrightarrow{NK}$=$\overrightarrow{KL}$

(90°-kal elfordítás algebrai megfelelője az i-vel szorzás).

Vezessük be a következő jelöléseket:

$\overrightarrow{AK}=\underline{a}$, $\overrightarrow{BL}=\underline{b}$, $\overrightarrow{CM}=\underline{c}$, $\overrightarrow{DN}=\underline{d}$

$\overrightarrow{KB}$ az $\underline{a}$ vektor 90°-os elforgatottja, ezért $\overrightarrow{KB}=\underline{a}i$.

Ugyanígy $\overrightarrow{LC}=\underline{b}i$, $\overrightarrow{MD}=\underline{c}i$, $\overrightarrow{NA}=\underline{d}i$.

$\overrightarrow{NK}=\underline{d}i+\underline{a}$, ennek 90°-os elfordítottja $i\overrightarrow{NK}=i(di+a)=ai-d$

$\overrightarrow{KL}=\underline{a}i+\underline{b}$

Be kellene bizonyítani, hogy $\underline{b}=-\underline{d}$.

Az ABCD négyszög rombusz, így oldalai egyenlő hosszúak és a szemben lévő oldalak párhuzamosak, ezért $\overrightarrow{BC}$ =-$\overrightarrow{DA}$.

$\overrightarrow{BC}=\underline{b}+\underline{b}i=\underline{b}(1+i)$

$-\overrightarrow{DA}=-(\underline{d}+\underline{d}i)=-\underline{d}(1+i)$

Azaz $\underline{b}=-\underline{d}$.

IV.2. Feladat:

A következő ábrán ABC és BDE szabályos háromszögek. Az AE szakasz felezőpontját jelöljük F-fel, a DC szakasz felezőpontját jelöljük G-vel. Bizonyítsuk be, hogy a BGF háromszög is szabályos háromszög!

Megoldás:

A 60°-os forgatás algebrai megfelelője ($\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$)=($1/2+i\sqrt{3}/2$)-vel szorzás. Ezt röviden ε-nal jelöljük.

Számolási szabályok:

$\varepsilon^3=-1$

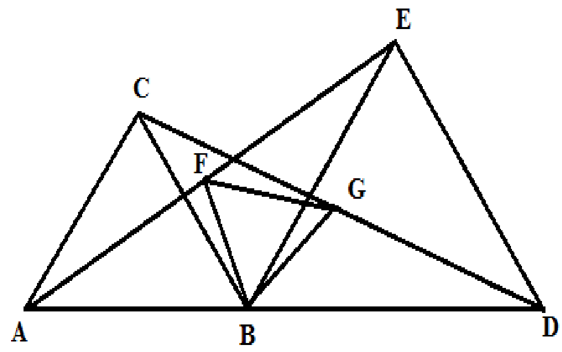
$\varepsilon^4=-\varepsilon$

$\varepsilon^5=-\varepsilon^2$

$\varepsilon^6=1$

Ezeket felhasználva a feladat nagyon egyszerűen megoldható, sokkal egyszerűbben, mint valamely geometriai módszer alkalmazásával.

A feladatban szereplő háromszögek:



A B pontot válasszuk az origónak.

$\overrightarrow{BD}$=1

$\overrightarrow{BE}$=ε

$\overrightarrow{BC}$=$\varepsilon^2\gamma$

$\overrightarrow{DA}$=-γ=$\varepsilon^3\gamma$

F=ε+γ/2

G=1-$\varepsilon^2\gamma$/2

Könnyen bebizonyítható, hogy F 60°-os elfordítottja G-nek.

$\varepsilon G=\varepsilon(1-\varepsilon^2\gamma)/2=\varepsilon-\varepsilon^3\gamma/2=\varepsilon+\gamma/2$

F és G egyenlő hosszúságú és az általuk bezárt szög 60°, így BGF háromszög szabályos háromszög.

V. Polinomokkal kapcsolatos feladatok

V.1.Feladat:

Keressük meg az összes olyan valós együtthatós f polinomot, melyre teljesül, hogy bármely olyan valós a, b, c számokra, melyekre ab+bc+ca=0

igaz, hogy

f(a-b)+f(b-c)+f(c-a)=2f(a+b+c)

Megoldás:

ab+bc+ca=0

Triviális esetek:

a=b=c=0: f(0)+f(0)+f(0)=2f(0)

3f(0)=2f(0)

a=b=0: f(0)+f(-c)+f(c)=2f(c)

f(-c)=f(c)

Azaz f-ban csak páros fokú tagok lehetnek.

Ha a, b és c közül egyik sem egyenlő 0-val.

ab+bc=-ca

b×(a+c)=-ca

b=$\frac{-ca}{a+c}$

Legyen b=12x, a=-3x, c=4x

f(-15x)+f(8x)+f(7x)=2f(13x)

Ezt behelyettesítve f(x)=a_0+a_1x+…+$a_n x^n$ polinomba, a polinomok azonossági tétele következtében a két oldal együtthatóról együtthatóra megegyezik. Speciálisan az x^n-es tag együtthatója a bal oldalon: $a_n((-15)^n$+8^n+7^n)

a jobb oldalon: $2a_n 13^n$

Mivel n nem nulla, ezért $(-15)^n$+8^n+7^n=13^n.

De n nem lehet nagyobb 4-nél, mert

$(-15x)^6$=11390625>2×$(13x)^6$=2×4826809=9653618

és ez az egyenlőtlenség minden 6-nál nagyobb n számra is fenn áll, sőt minél nagyobb az n , annál nagyobb eltérés.

6-tól kisebb számokra ellenőrizve az egyenletet kedvező eredményeket kapunk:

n=2: $(-15)^2$+$(8)^2$+$(7)^2$=2×$(13)^2$

225+64+49=338

n=4: $(-15)^4$+$(8)^4$+$(7)^4$=2×$(13)^4$

50625+4096+2401=2×28561=57122

Ezért az f(x)=$a_2 x^2$+$a_4 x^2$ polinom a megoldás.

V.2. Feladat:

Létezik-e olyan fϵZ$[x]$ polinom, melyre f(10)=400, f(14)=440 és f(18)=520?

Megoldás:

Azaz f(x)=(x-14)g(x)+440 ahol q is egész együtthatós polinom. A másik két feltételt behelyettesítve átrendezéssel g(10)=10 és g(18)=20 adódik. Felhasználva az

a-b|g(a)-g(b) összefüggést 10|8 ellentmondás adódik. Ilyen polinom tehát nem létezik.

V.3. Feladat:

Legyen f(x)=x^n+5x^{n-1}+3, ahol n>1 egész. Igazoljuk, hogy f irreducibilis Z$[x]$-ben.

Megoldás:

Legyen f(x)=x^n+5x^{n-1}+3=g(x)h(x), ahol g, h egész együtthatós nem konstans polinom.

Mod 3-ra nézve f(x)=x^n+2x^{n-1}. Ennek a polinomnak gyöke 0 és -2.

f gyökeit kiadják g és h gyökei. Tegyük föl g gyöke -2.

Azaz, g(x)=x^k(x+2) és h(x)=x^m.

f főegyütthatója 1, ami g és h főegyütthatójának szorzata, ezért g főegyütthatója nem lehet 3-mal osztható. Ezért g-nek nem csökken a foka, ha mod 3-ra vesszük.

Ha g és h konstans tagja is 0 lenne, mod 3-ra nézve, akkor az eredeti polinom konstans tagja is osztható lenne 9-cel. Ezért csak az lehet, hogy g mod 3 elsőfokú, h mod 3 n-1-ed fokú. Tehát ekkor az eredeti g is elsőfokú. De x^n+5x^{n-1}+3-nak nem lehet elsőfokú faktora, mert

p|1→p=$\pm$1

q|3→p=$\pm$1 vagy p=$\pm$3

Ezért p/q lehetséges értékei: $\pm 1, \pm 3$.

Ezeket behelyettesítve nem kapunk megoldást.

Irodalomjegyzék:

Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet

Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

Reiman István: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon

Czapáry Endre- Gyapjas Ferenc: Matematika feladatgyűjtemény

http://matek.fazekas.hu

www.versenyvizsga.hu