Affin transzformációk

Szakdolgozat

Készítette: Deák Dóra
Szak: Matematika BSc Tanári szakirány

Témavezető: Dr. Szeghy Dávid
(egyetemi tanársegéd)
tanszék: Geometria Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2011

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Az általános ill. középiskolában megismerkedtünk az egybevágósági és hasonlósági transzformációkkal. Egy kis emlékeztető:

Egybevágósági transzformáció: olyan távolságtartó transzformáció mely a síkot vagy teret önmagára képezi le, azaz $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vagy $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Hasonlóság: a sík vagy tér önmagára való leképezését $\lambda > 0$ arányú hasonlóságnak mondjuk, ha bármely X,Y pontpárra és $X' := \varphi(X)$, $Y' := \varphi(Y)$ képeire: $d(X',Y') = \lambda d(X,Y)$ teljesül. (Speciális eset, ha λ=1, akkor egybevágóságról beszélünk.)

Megállapíthatjuk tehát, hogy a hasonlósági transzformációk csoportja bővebb az egybevágóságokénál.

Mivel bizonyítható, hogy mind az egybevágóságok, mind a hasonlóságok bijektívek, felmerül a kérdés, hogy van-e ennél bővebb bijektív transzformációcsoport? (Persze akármilyen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vagy $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bijektív leképezéseket véve egy bővebb (általánosabb) csoportot kapunk, de ez nehezen kezelhető, érthető, illetve tanulmányozható.)

- Mi a közös egy egybevágóságban és egy hasonlóságban? Mindkettő egyenes-, ill. illeszkedéstartó transzformáció.
- Van olyan transzformáció ami nem egybevágóság és nem hasonlóság, de egyenes- és illeszkedéstartó? A válasz igen, például ha lefényképezünk egy négyzetrácsos lapot, a kapott kép nem feleltethető meg sem egybevágósággal, sem hasonlósággal. Mint később látni fogjuk, ez a példa nem teljesen jó, mert nem lesz bijektív ez a transzformáció, ami számtalan érdekes kérdést vet majd fel. Másik példa a merőleges tengelyes affinitás vagy a nyírás. Ezekre később visszatérünk.

2. fejezet

Affin geometria

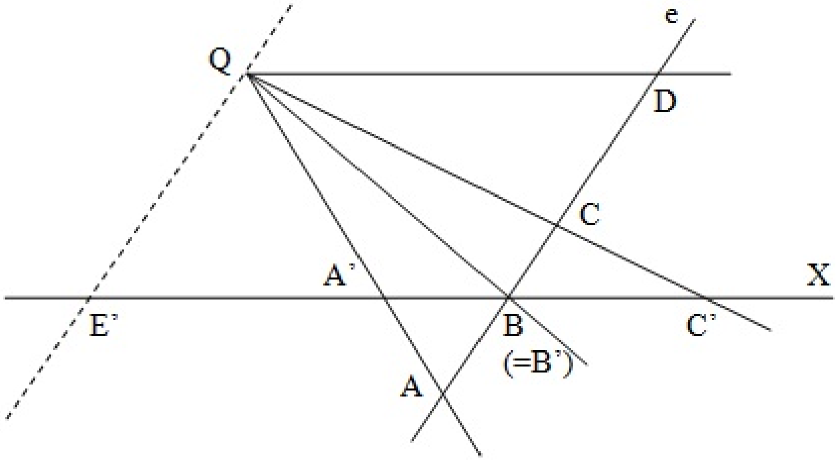
A geometria egyes fejezeteit osztályozhatjuk aszerint, hogy milyen transzformációk során meg nem változó, invariáns tulajdonságokkal foglalkoznak. Eszerint a geometria egyes fejezetei az egyes geometriai transzformációcsoportok invariánsaival foglalkoznak. Ezt az elvet az erlangeni programnak mondják, mert Felix Klein, az erlangeni egyetemen 1872-ben tartott tanári székfoglalójában mondta ki. Az erlangeni program értelmében a mozgáscsoporthoz a közönséges, metrikus geometria, a projektív transzformációk csoportjához a projektív geometria tartozik.

A geometriának azt az ágát, amely az alakzatoknak affin transzformációkor meg nem változó tulajdonságaival foglalkozik, *affin geometriának* nevezzük.

2.1. A kibővített tér

Mielőtt elkezdenénk az affin transzformációk vizsgálatát, érdemes picit messzebbről vizsgálni a kérdést, annak átfogóbb és a későbbiekben könnyebb tanulmányozásához. Ha már szóba került a fényképezés, azaz centrális vetítés két sík között, nézzük meg, hogy mi történik a párhuzamos egyenesekkel. Az emberek által látott kép is egy centrális vetületnek felel meg, igaz ekkor a teret képezzük le egy síkra, de ha csak egy síkot "nézünk", akkor annak képe már egy sík centrális vetülete lesz. Vegyük példának a hosszú, egyenes vasúti pályákat. Ha beállunk a sínek közé, a horizonton látunk egy pontot, ahol a két sín összeér, pedig tudjuk, hogy valójában nem érnek össze, azaz ilyen pont nem lehet. Erre a látni vélt pontra ad választ a projektív geometria.

Ha az euklideszi síkban az e egyenes pontjait az X tengelyre vetítjük, egy mindkettőn kívüli Q pontból, akkor az A, B, C-n átmenő átmenő vetítősugarak kimetszik az A',B',C' pontokat az X tengelyen (2.1 ábra). Az e egyenes minden pontjának megfelel egy vetületi pont, kivéve D-t, melynek vetítősugara párhuzamos a tengellyel.



2.1. ábra.

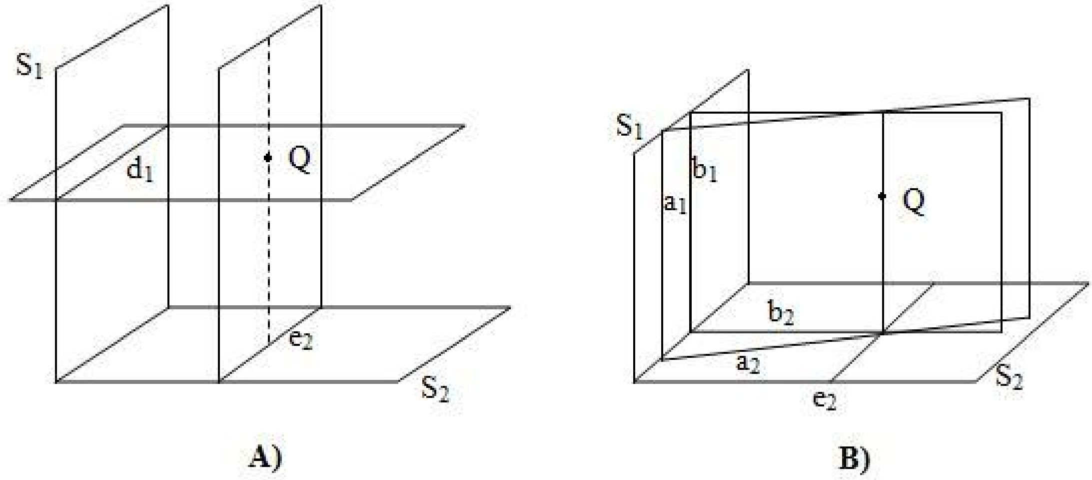
Továbbá az X tengely minden pontja előáll képként, kivéve azt az E' pontot, melyre $E'Q \parallel e$. Könnyen látható, hogy ha e mentén P_1,P_2,... olyan pontsorozat amelyre P_i "kifut a végtelenbe" az egyenes mentén, akkor a vetítősugarak, a QP_i egyenesek, tartanak a Q-n átmenő e-vel párhuzamos egyeneshez, így P'_1,P'_2,... $\longrightarrow E'$. Mindegy, hogy a P_i sorozat e mentén milyen irányban fut ki a végtelenbe. Azaz e "mindkét végtelen távoli pontja" E'-be vetülne.

Hasonlóan, ha most $P_i \in e$ és $P_i \longrightarrow D$ az egyik oldaláról, akkor P'_i kifut a végtelenbe X mentén és aszerint $+\infty$ vagy $-\infty$ irányban, hogy a P_i sorozat mely oldalról közelíti D-t.

Ezért, ha ki akarjuk valahogy terjeszteni a vetítést, hogy mindenkinek legyen képe és mindenki előálljon képként, akkor egy egyenes "két végtelen távoli pontját" *nem szabad megkülönböztetni.*

Tekintsük most térben a centrális vetítést két sík között. Ha Q-n keresztül átvetítjük S_1 síkot S_2-be, akkor a d_1 egyenesnek nincs képe és e_2 nem áll elő képként, (2.2 ábra **A)** része) ahol d_1-et a Q-n átmenő S_2-vel párhuzamos sík metszi ki S_1-ből és e_2-t pedig a Q-n átmenő S_1-vel párhuzamos sík metszi ki S_2-ből.

Ha $a_1 \subset S_1$ egyenes és S_{a_1Q} az a_1 és Q síkja, akkor ebben a síkban történik a_1 pontjainak átvetítése S_2-re. (2.2 ábra **B)** része) Az a_1 egyenes ∞ távoli pontja pedig a Q-n átmenő a_1-el párhuzamos egyenes mentén vetülne $e_2 \cap a_2$-be.



2.2. ábra.

Viszont, ha $b_1 \parallel a_1$, $b_1 \subset S_1$ egy másik egyenes, akkor ennek a végtelen távoli pontja a Q-n átmenő b_1-el (azaz a_1-el is) párhuzamos egyenes mentén vetülne. Tehát párhuzamos egyenesek ∞ távoli pontjai ugyanoda vetülnek, így *őket sem szabad megkülönböztetni.*

Az is látható, hogy az S_1 síkba lévő egyenesek ∞ távoli pontjai fognak e_2-re képződni, így ezek egy egyenest alkotnak az S_1 sík ideális egyenesét.
Hasonló $\mathbb{R}^4$-ben két $\mathbb{R}^3$ közötti vetítésre kapjuk, hogy párhuzamos síkok ideális egyenesei a vetítésnél egybeesnek, így őket sem szabad megkülönböztetni. Ezek a tapasztalatok motiválják a következő definíciót.

Az euklideszi teret, a tér pontjainak halmazát kibővítjük további pontokkal és így definiáljuk a *kibővített teret* vagy másnéven *projektív teret.* A kibővített térnek lesznek közönséges pontjai (ezek egyértelműen megfeleltethetők az euklideszi tér pontjainak) és lesznek ideális pontjai, melyeket az alábbiak szerint definiálunk.

- A tér minden egyenesének közönséges pontjaihoz még egy új plusz pontot veszünk hozzá, mely az egyenes *ideális pontja* lesz.
- Az egymással párhuzamos egyenesek ideális pontja megegyezik.

A fenti definícióból levezethető, amit a centrális vetítésnél láttunk, hogy:

- Egy sík ideális pontjainak halmaza a sík *ideális egyenese.*
- A tér ideális pontjainak halmaza a tér *ideális síkja.*
- Párhuzamos síkok ideális egyenesei megegyeznek.

2.2. Kollineációk

2.2.1. Definíció. *Az ideális síkkal kibővített euklideszi tér önmagára való, kölcsönösen egyértelmű, pont- , egyenes- ,sík- és illeszkedést tartó leképezéseit* kollineációk*nak nevezzük.*

A kibővített tér kollineációi a projektív transzformációk.

Az affin transzformációk ezeknek a projektív transzformációknak az az alcsoportja, mely elemei a kibővített tér euklideszi részét önmagára képezi le, vagyis az ideális síkot is önmagára képezi le.

Hasonlóan definiálható a kollineáció illetve az affin transzformáció két sík között.

3. fejezet

Affinitás

3.0.2. Definíció. *Egy síknak önmagára vagy egy másik síkra való affinitásán egy olyan* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *bijektív leképezést értünk, melynél minden e egyenes* $\varphi(e)$ *képére létezik olyan* e' *egyenes, melyre* $\varphi(e) \subset e'$.

Fontos megjegyezni, hogy a definícóban nincs szó a leképezés folytonosságáról, illetve az sem világos, hogy egy e egyenest az affinitás az e' egyenesre bijektíven képez, (a definícióban csak beleképezés van nem ráképezés), azaz nem tudjuk, hogy az e' egyenes minden pontja eltalálódik-e egy e beli pont által. Feltehetnénk ezt is a definícióban (azaz, hogy minden egyenes képe egyenes), de ez nem szükséges, mint látni fogjuk ez automatikusan következik majd. Ez a definíció gyengébb a szokásos definíciónál, ahol felteszik a előbb említett egyenestartást.
Mint azt említettük az affin transzformációk halmazának egy részhalmazát képzik a hasonlósági transzformációk, ezen belül az egybevágóságok, mert egyenestartó transzformációk.
Könnyen látható, hogy egy 2.2.1.-ben definiált kollineáció megszorítása a közönséges pontokra teljesíti a 3.0.2.-es definíció feltételeit, azaz egy affinitást ad.

3.1. Tulajdonságok

Először megpróbáljuk pusztán geometriailag jellemezni a síkbeli affinitásokat és elkerüljük az algebrai leírást, mely ugyan egy könnyebb út, de gyakran nehezebben érthető a bizonyítások lényege az algebrai bizonyításoknál.

Nyilvánvaló, hogyha adott egy $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ affinitás és vesszük két egyenes metszéspontját $A := e \cap f$, akkor ha $\varphi(e) \subset e'$ és $\varphi(f) \subset f'$, ahol e', f' egyenesek, akkor $A' := \varphi(A) = e' \cap f'$. Ezentúl egy P pont affinitásnál vett képét jelölje P'.

A definícióból közvetlenül levezethetőek az alábbi 3.1.1.-3.1.5. tulajdonságok:

3.1.1. Állítás. *Affinitás inverze is affinitás (részben ebből fog következni, hogy a síkbeli affinitások csoportot alkotnak)*

Biz.: A bijektivitás miatt létezik inverz. Azt kell megmutatnunk, hogy ez egy egyenest egy egyenesbe képez. Ha P', Q' egyenesét nézzük, akkor, egyrészt legyen P' és Q' őse P és Q. Tudjuk, hogy a PQ egyenes képe a $P'Q'$ egyenesbe megy az affinitásnál. Azonban még nem tudjuk, hogy minden pontját eltalálja-e az affinitás, de azt igen, hogy $P'Q'$ képe az inverznél lefedi a PQ egyenest, de lehet olyan pontja is, amely az inverznél máshova megy. Tegyük fel indirekt, hogy az e' egyenes képe az inverznél (azaz e' őse az eredeti affitásnál) nem egyenes. Ekkor van három olyan pont e'-n A', B', C' melyek őse nem kollineáris. Tehát az indirekt bizonyításhoz feltesszük, hogy A, B, C nem kollineárisak, de képeik az affinitásnál A', B', C' viszont igen. Vegyünk e'-n kívül egy Q' pontot. A Q' őse Q nem lehet az ABC háromszög oldalain, hiszen az AB, BC, CA egyenesek képei e'-be mennek. Legyen QA és BC metszéspontja M. (Ha $QA \parallel BC$, akkor vegyük QB vagy QC metszéspontját a megfelelő oldalallal.) Az M pont képe M' illeszkedik $B'C' \subset e$-re. Mivel $A \neq M \Longrightarrow A' \neq M'$ és $Q \in AM \Longrightarrow Q' \in A'M'$, így $Q' \in e'$, hiszen $A', M', B', C' \in e'$, de ezzel ellentmondásra jutunk $Q' \notin e'$ állítással. Azaz $P'Q'$ képe az inverznél PQ egyenesben van, ami a fenti meggondolásokkal együtt azt adja, hogy az affinitás PQ és $P'Q'$ között egy bijekció lesz. $\square$

Megj.: A bizonyításban kijött az a bijektivitási tulajdonság, amire a 3.0.2-es definíció után utaltunk. A fenti állítás miatt e egyenes képe is egyenes, jelölje e' ezentúl ezt az egyenest.

3.1.2. Állítás. *Két affinitás egymásutánja újból affinitást eredményez*

Biz.: Affinitások szorzata is affinitás, ugyanis egyenestartó transzformációk egymás utáni elvégzése során egyenes képe szintén egyenes kell legyen, ami a definíció szerint affin transzformáció. $\square$

Az előző két állításból következik, hogy az affinitások egy csoportot alkotnak.

3.1.3. Állítás. *Az affinitás illeszkedés- és párhuzamosságtartó*

Biz.: Az illeszkedéstartás a definícióból következik. Nem metsző egyenesek képe nem lehet metsző, különben a metszéspont őse az eredeti egyenesek közös pontja lenne. $\square$

Ebből az állításból az következik, hogy egy affinitás kiterjeszthető kollineációra.

Sajnos az affinitás nem távolságtartó, sőt a hasonlóság tulajdonságaival sem rendelkezik (lásd később merőleges affinitás), azért mégis megtart egy távolsággal kapcsolatos arányt, az osztóviszonyt.

Osztóviszony: Legyenek A,B,C különböző pontok egy egyenesen. Ha $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{BC}$ valamely $t \in \mathbb{R}$-re, akkor A,B,C *osztóviszonya* $(ABC) = t$. Másszóval $(ABC) = \frac{|AC|}{|CB|}$, ahol $|AC|$ és $|BC|$ irányított távolságok.

3.1.4. Lemma. *Paralelogramma képe paralelogramma.*

Biz.: Legyen $ABCD$ paralelogramma, azaz $AB \parallel DC$ és $AD \parallel BC$. A 3.1.3.-as állításnál bizonyítottuk, hogy az affinitás párhuzamosságtartó, ezért $A'B' \parallel D'C'$ és $A'D' \parallel B'C'$, tehát $A'B'C'D'$ is paralelogramma. $\square$

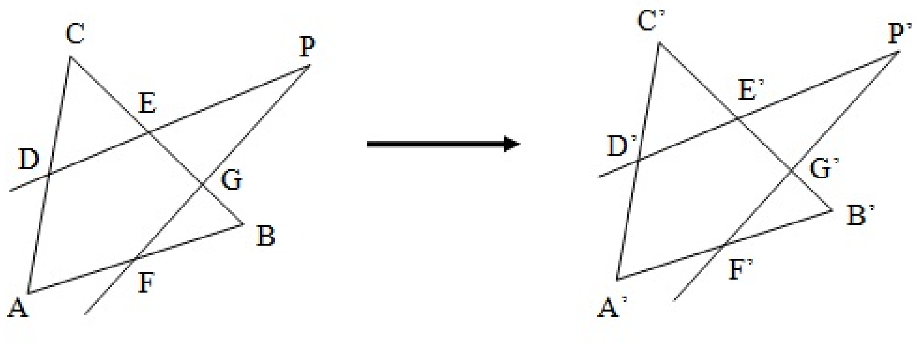
3.1.5. Állítás. *Az affinitás tartja az osztóviszonyt.*

Biz.: Ezt később bizonyítjuk.

3.1.6. Állítás. *Adott ABC és $A'B'C'$ nem elfajuló háromszögek $\Longrightarrow \exists!$ affin transzformáció, melyre $A \longrightarrow A'$, $B \longrightarrow B'$, $C \longrightarrow C'$*

Biz.: Két lépésben történik.

- Első lépésként az egyértelműséget bizonyítjuk. A 3.1 ábrán lévő D',E',F',G' egyértelmű a 3.1.5. állítás miatt. Így $D'E' \cap F'G' = P'$ is.



3.1. ábra.

- Második lépésben a létezést bizonyítjuk. Ennél a lépésnél egyszerűbb algebrai bizonyítást adni, mint geometriait ezért itt az egyszerűség kedvéért algebrailag bizonyítjuk a létezést.

Vegyünk fel egy koordinátarendszert, mely kezdőpontja $O := A$ és bázisvektorai $\underline{i} := AB$, $\underline{j} := AC$ és egy másik koordinátarendszert $O' := A'$ kezdőponttal és $\underline{i'} := A'B'$, $\underline{j'} := A'C'$ bázisvektorokkal. Jelölje a P pont koordinátáit az (O, i, j) koordinátrendszerben $P = (x_p, y_p)$, azaz $\overrightarrow{OP} = x_p\underline{i} + y_p\underline{j}$. Hasonlóan egy Q' pont koordinátái legyenek (O', i', j') koordinátarendszerben $Q' = (x'_q, y'_q)$, azaz $\overrightarrow{O'Q'} = x'_q\underline{i} + y'_q\underline{j}$. Ekkor egy R pontnak, melynek az (O, i, j) koordinátarendszerben $R = (x, y)$ a koordinátái, legyen képe az az R' pont, melynek az (O', i', j') koordinátarendszerben $R' = (x, y)$ a koordinátái. Ennek a leképezésnek a mátrixa az (O, i, j) és (O', i', j') koordinátarendszerekre vonatkoztatva Id (az identitás mátrix). Mivel ez a leképezés lineáris, ezért egyenes képe egyenes és bijektív is, így egy affinitás lesz. □

Megj.: A fenti bizonyításból az is következik, hogy egy affinitás folytonos leképezés, hiszen a 2. lépésben megkonstruált leképezés alapján az egyértelműségi rész miatt minden affinitás ilyen alakba írható.

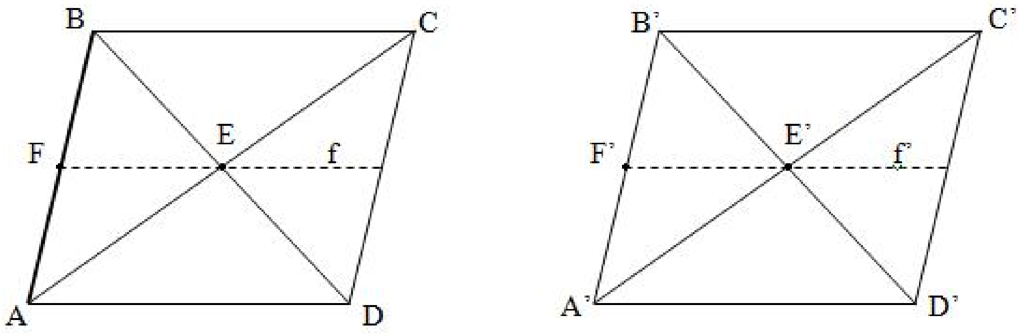
A fenti 3.1.6.-os állítás 2. lépéséből a linearitás miatt könnyen látható algebrailag, hogy az osztóviszonyt megtartja az ott definiált leképezést. Ekkor azonban a 3.1.5.-ös és 3.1.6.-os állításokat egymás bizonyítására használnánk fel.

Viszont ha az affin leképezés folytonosságát elfogadjuk, akkor egy geometriai bizonyítást is adhatunk. Sajnos a folytonosságot mi a 3.1.6.-ban bizonyítottuk, amihez a 3.1.5.-öt használtuk, az alábbi bizonyítás egy egyenes sűrű részhalmazán bizonyítja az osztóviszonytartást, majd a folytonosságra hivatkozunk. Egy 3.1.6.-tól független bizonyítás azonban túlságosan bonyodalmas lenne, így attól most eltekintünk.

3.1.4-es állítás bizonyítása

- Egy AB szakasz felezőpontját az affin transzformáció az $A'B'$ felezőpontjába viszi. Az AB szakaszt egészítsük ki paralelogrammává. Legyen $E := BD \cap AC$, f az E-n át AD-vel párhuzamos egyenes és $F := f \cap AB$, ahol F felezőpontja AB-nek. A 3.1.4.-es lemma miatt tudjuk, hogy paralelogramma képe paralelogramma lesz. E az átlók metszéspontja $\Longrightarrow$ E' is az átlók metszéspontja, $f \parallel AD \Longrightarrow f' \parallel A'D'$, valamint $E \in f \Longrightarrow E' \in f'$. Mivel $F = AB \cap f$, ezért $F' = A'B' \cap f'$ felezőpontja $A'B'$-nek (3.2 ábra).

- Az affinitás az AB $\frac{k}{2^n}$-edelő pontjait az $A'B'$ $\frac{k}{2^n}$-edelő pontjaiba viszi, ahol $0 < k < 2^n$, mert iterálva a fenti folyamatot az 1. pontban kapott új paralelogrammákra azt kapjuk, hogy a negyedelő, nyolcadoló... pontok negyedelő, nyolcadoló... pontokba mennek. Folytonosság miatt az AB szakasznak egy G pontjára, $(ABG) = (A'B'G')$ lesz igaz, mert a $\frac{k}{2^n}$-edelő pontokkal mindenki közelíthető és ezekre igaz



3.2. ábra.

az állítás. □

Az előző állítás miatt ha adott egy $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ affinitás (azaz itt a síknak egy önmagára való leképezése), amelynél $A = A'$, $B = B'$, akkor $AB = A'B'$ és AB egyenes minden pontja fix lesz! Könnyen látható, hogy 3 nem kollineáris A,B,C pont nem lehet fix, hiszen akkor AB,BC,CA egyenesek is azok. Ekkor egy tetszőleges $Q \notin AB \cup BC \cup CA$ ponton át vehetünk egy olyan e egyenest, amely elmetszi az AB,BC egyeneseket két különböző pontban. Mivel ezek a pontok fixek, így az e egyenes is fix, de így Q is fix. Azaz egy affinitásnak 1 fixpontja lehet, egy egyenese lehet fix vagy nincs fixpontja vagy minden pontja fixpont.

3.1.7. Definíció. Tengelynek *mondjuk azt az egyenest, aminek minden pontja fix.*

3.1.8. Definíció. *Egy affinitást tengelyesnek tekintünk, ha van tengelye és nem az identikus leképezés.*

3.2. Merőleges, ferde és párhuzamos affinitás

Térjünk vissza a 3.1.7.-es és 3.1.8.-as definícióhoz, melyekben a 3.1.4.-es állítás sugallatára definiáltuk a tengely fogalmát és vizsgáljuk meg a tengelyes affinitásokat.

3.2.1. Definíció. *Merőleges affinitásnak nevezünk egy olyan tengelyes affinitást,mely a tengelyre merőleges egyeneseket önmagába képezi le.*

Az alábbi bizonyításhoz felhasználjuk a párhuzamos szelők tételét.

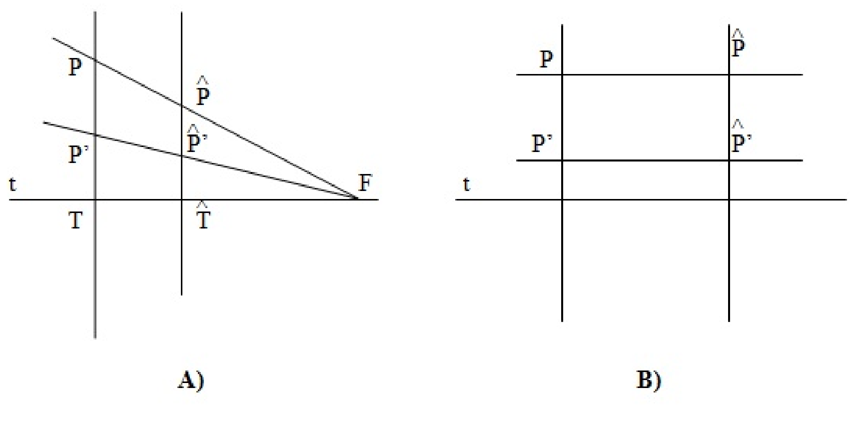
3.2.2. Tétel (Párhuzamos szelők). *Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.*

3.2.3. Állítás. *Ha a T tengelypontban emelt merőleges T-től különböző P pontjához az affinitás a P' pontot rendeli, akkor az előjeles távolságokra felírt $TP' : TP$ arány a T,P pontok megválasztásától független, 0-tól különböző állandó.*

Biz.: Legyen $\hat{P}$ egy tetszőlegesen megválasztott pont.

- Ha $\hat{P} \in PT \Longrightarrow$ az osztóviszonytartásból kijön az állítás.
- Ha $\hat{P} \notin PT$ két esetet vizsgálunk:

1. Legyen $F := P\hat{P} \cap t$, ha létezik, ekkor $F \subset t$ fix. $PF \longrightarrow P'F$ és $\hat{P}\hat{T} \longrightarrow \hat{P}'\hat{T}$ $\Longrightarrow PF \cap \hat{P}\hat{T} \longrightarrow P'F \cap \hat{P}'\hat{T}$ és erre alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét (3.3 ábra **A)** része).
2. Ha $P\hat{P} \parallel t \Longrightarrow$ képeik is párhuzamosak lesznek (3.3 ábra **B)** része), amire nyilvánvaló az állítás. □



3.3. ábra.

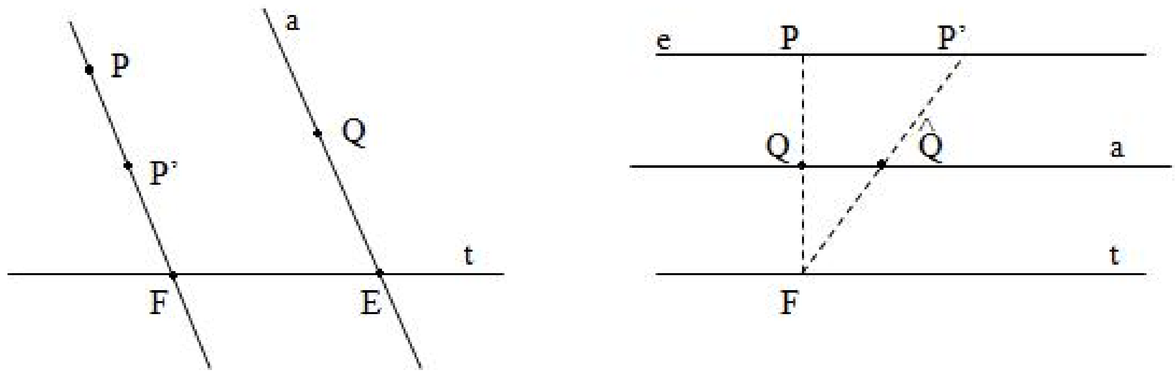
A helyben maradó pontok egyenese az *affinitás tengelye*, a rá merőleges irány az *affinitás iránya.*
A merőleges affinitás elnevezésben a merőleges jelző arra utal, hogy az affinitás iránya merőleges a tengelyre.
Felmerül a kérdés, ha van egy affinitásnak tengelye, akkor van iránya is? Mit jelenthet ez az irány geometriailag?

Kérdés, hogy van-e egy tengelyes affinitásnál olyan irány, melynek képe önmagával párhuzamos? Vagyis olyan $\underline{v}$ irány mellyel párhuzamos egyenesek önmagukba mennek (de pontonként nem feltétlen fixek).

3.2.4. Állítás. *Minden tengelyes affinitásnak van iránya.*

Biz.:

1.eset: $PP' \cap t \neq \emptyset$ (3.4 ábra **A)** része)
PP' lesz az irány, egyrészt $PF \longrightarrow P'F' = P'F = PF$. Tudjuk, hogy az affinitás párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez. Legyen Q tetszőleges pont, Q-n át PF-vel párhuzamos egyenes a. Legyen $E := a \cap t$. Egyrészt $PF \parallel QE \Longrightarrow P'F' \parallel Q'E'$ azaz $PF \parallel Q'E'$ de E fix, így $Q'E'$ kénytelen önmaga lenni, azaz $Q'E' = QE$, így $QQ' \parallel PP'$.



A) **B)**

3.4. ábra.

2.eset: $PP' \cap t = \emptyset$ (3.4 ábra **B)** része)
$e := PP'$, ez párhuzamos t-vel. Felhasználva, hogy párhuzamos képe párhuzamos azt kapjuk, hogy $PP' \parallel t$ és $t' = t$ miatt PP' képe is párhuzamos t-vel és átmegy P'-n,

azaz $e' = e$.

Ha $Q \notin e$, legyen $F := PQ \cap t$. Tudjuk, hogy $PF \longrightarrow P'F$. Ha a a Q-n átmenő t-vel párhuzamos egyenes és $\hat{Q} = FP' \cap a$ akkor a párhuzamos szelők tétele miatt $(PFQ) = (P'F\hat{Q})$, de $Q \in PF \longrightarrow Q' \in P'F$ és $(PFQ) = (PFQ') \Longrightarrow Q' = \hat{Q}$ kell legyen, azaz $QQ' \parallel PP'$.

Ha $Q \in e \Longrightarrow e' = e$ miatt $QQ' \parallel PP'$. $\square$

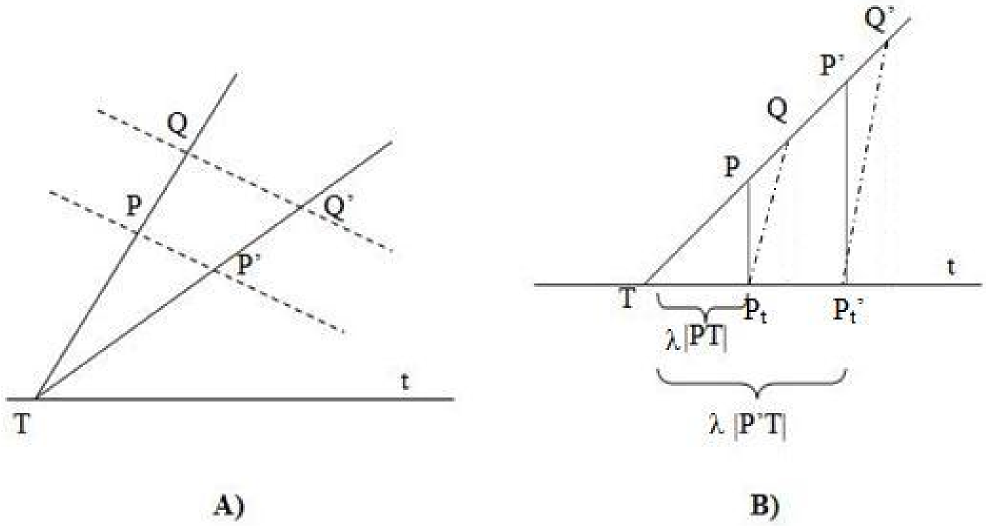
Feladat: Adott P, P' pontok és t tengely. Szerkesszük meg Q képét!

- Ha $PQ \parallel t$, de P, P', Q nem kollineáris, akkor egyrészt $P'Q' \parallel t' = t$, másrészt $PP' \parallel QQ'$, így a Q-n átmenő PP'-vel párhuzamos egyenes és P'-n átmenő t-vel párhuzamos egyenesek metszete lesz Q'.

- Tegyük fel, hogy PQ metszi t-t. Ha P, P', Q nem kollineáris, akkor legyen $T := PQ$, T fix (tengelypont) és egyenes képe egyenes $\Longrightarrow PT = P'T' = P'T$ így $Q \in PT \Longrightarrow Q' \in P'T' = P'T$ továbbá $\frac{|PT|}{P'T'} = \frac{|QT|}{Q'T'}$ miatt a PP'-vel párhuzamos Q-n át kimetszi Q'-t $P'T$-ből (3.5 ábra **A)** része).

- Ha P, P', Q kollineáris és $PP' \parallel t$, akkor a nyírás fejezetben látni fogjuk, hogy $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$.

- Ha P, P', Q kollineáris, és létezik $T := PP' \cap t$, akkor a TP egyenest az affin leképezés önmagába visz és ezért Q képe Q' is ezen az egyenesen van. Tehát Q'-t ezen az egyenesen keressük szintén, melyre $\frac{|PT|}{|P'T|} = \frac{|P_tT|}{|P_t'T|} = \frac{|QT|}{|Q'T|}$ (párhuzamos szelők tételének segítségével) (3.5 ábra **B)** része).



3.5. ábra.

3.2.5. Definíció. *Egy tengelyes affinitásnál legyen a $P \notin t$ pont merőleges vetülete a tengelyre P_t és P' vetülete P'_t . Ekkor a $\frac{|P'P'_t|}{|PP_t|}$ arányt az affinitás arányának mondjuk.*

Megj.: A fenti definícióban lévő arány független a $P \notin t$ pont megválasztásától, ezt az előző feladat A, B ábráin a T pontból vett nagyítások segítségével igazolhatjuk. Hiszen annál a T pontból történő λ arányú nagyításnál, melynél P pont a Q pontba megy a P' pont épp Q'-be megy. Így viszont $\frac{|P'P'_t|}{|PP_t|} = \lambda|P'P'_t|\lambda|PP_t| = \frac{|Q'Q'_t|}{|QQ_t|}$. A feladat másik két esetében könnyen látható, hogy P és Q esetében azonos a fenti arány.
Ha az affinitás aránya 1 vagy -1, akkor az azonosságot vagy az alapsíkra vonatkozó tükrözést jelent.
Ha λ pozitív és 1-nél kisebb, akkor a merőleges affinitás összenyomást jelent, ha pedig 1-nél nagyobb, akkor széthúzást.

3.3. Nyírás

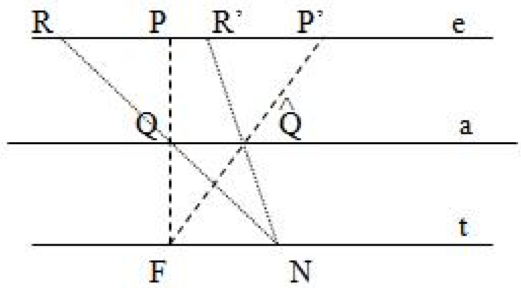
Hogyan tudnánk szemléltetni a hétköznapokban a nyírást? Vegyünk egy vízszintes felületen egy kártyapaklit és a kártyalapok egymáson való elcsúsztatásával láthatjuk, hogy a lapok a felülettől mért magasságuk arányában csúsznak el adott irányban.

3.3.1. Definíció. *Olyan tengelyes affinitást, ahol az affinitás iránya párhuzamos a tengellyel nyírásnak nevezzük.*

A 3.2.4.-es állítás 2. pontjában szereplő affinitásból és a 3.6 ábra alapján látszik, hogy R képe R' és

$$\left|\frac{PP'}{QQ'}\right| = \left|\frac{PF}{QF}\right| = \left|\frac{RN}{QN}\right| = \left|\frac{RR'}{QQ'}\right|$$

azaz $|PP'| = |RR'|$, így az e egyenesen minden pont a $\overrightarrow{PP'}$-ral tolódik odébb. Hasonlóan minden más t-vel párhuzamos egyenes úgy megy önmagába, hogy $\overrightarrow{PP'}$-ral párhuzamos és azonos irányú, de más nagyságú vektorral tolódik el, a vektor iránya pedig attól függ, hogy a tengely melyik oldalán helyezkedik el.



3.6. ábra.

3.3.2. Állítás. *Minden síkbeli affinitás előáll egy hasonlóság és egy tengelyes affinitás szorzataként.*

Biz.: Legyen egy adott affinitás A,B,C az A',B',C' megfelelő háromszögpárral. Létezik olyan ν hasonlóság, ami A-t A'-be, B-t B'-be visz. Ez a hasonlóság vigye C-t C^*-ba.

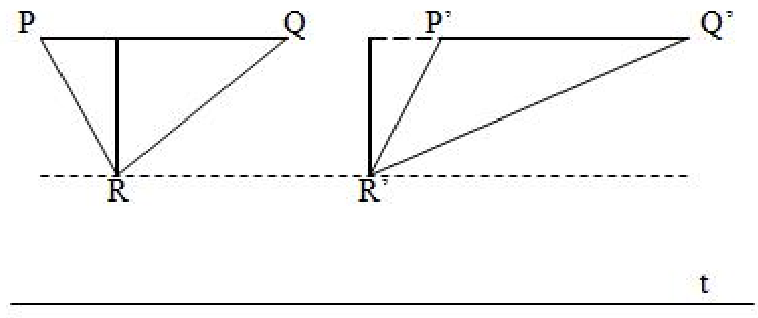
Ezután van olyan $A'B'$ tengelyű τ tengelyes affinitás, ahol C^* képe C'. Ekkor $\tau \circ \nu$ affinitás A,B,C-t A', B', C'-be viszi. $\square$

3.3.3. Definíció. *Egy tengelyes affinitásnál egy $P \notin t$ pontra a PP' egyenes irányát az affinitás irányának mondjuk.*

Megj.: Ez az irány nem függ a P pont választásától a fenti állítás miatt.

Hogyan változik a háromszögek területe nyírásnál?

- **1.eset:** Először vizsgáljuk azokat a háromszögeket, melyeknek egyik oldala párhuzamos a tengellyel.(3.7 ábra)
  Ha PQ párhuzamos a tengellyel, akkor $|PQ| = |P'Q'|$ és P, P', Q, Q' kollineáris,



3.7. ábra.

  és egy t-vel párhuzamos egyenesen vannak. Mivel $RR' \parallel t \Longrightarrow$ a $PQR_{\triangle}$ és $P'Q'R'_{\triangle}$ alapjai $|PQ| = |P'Q'|$, valamint az ehhez tartozó magasságok egyenlőek $\Longrightarrow$ $T_{PQR_{\triangle}} = T_{P'Q'R'_{\triangle}}$

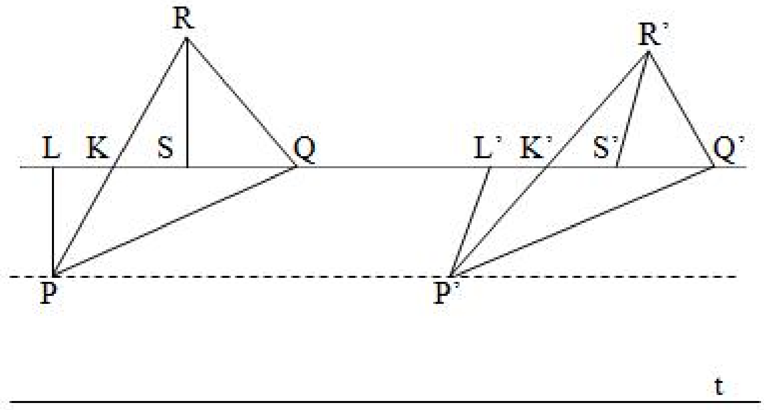
- **2.eset:** Általános háromszögekre vizsgáljuk meg a helyzetet. (3.8 ábra)

Az eredeti háromszög területét úgy kapjuk:

$$T_{PQR_{\triangle}} = T_{RSQ_{\triangle}} + T_{RSK_{\triangle}} + T_{LPQ_{\triangle}} - T_{LKP_{\triangle}}$$

Az előzőek alapján megállapíthatjuk, hogy

$$T_{P'Q'R'_{\triangle}} = T_{R'S'Q'_{\triangle}} + T_{R'S'K'_{\triangle}} + T_{L'P'Q'_{\triangle}} - T_{L'K'P'_{\triangle}}$$



3.8. ábra.

azaz $T_{PQR_\triangle} = T_{P'Q'R'_\triangle}$
Más állású háromszögekre analóg módon megy a bizonyítás.

Hogyan változik a terület λ arányú tengelyes affinitásnál?

Merőleges tengelyes affinitásra az előzőek alapján, ha $PQ \parallel t \Longrightarrow P'Q' \parallel t$ és $|PQ| = |P'Q'|$. Ha λ az arány $\Longrightarrow$ minden tengelyre merőleges szakasz a λ-szorosába megy, így a PQR háromszög PQ-hoz tartozó magassága is:

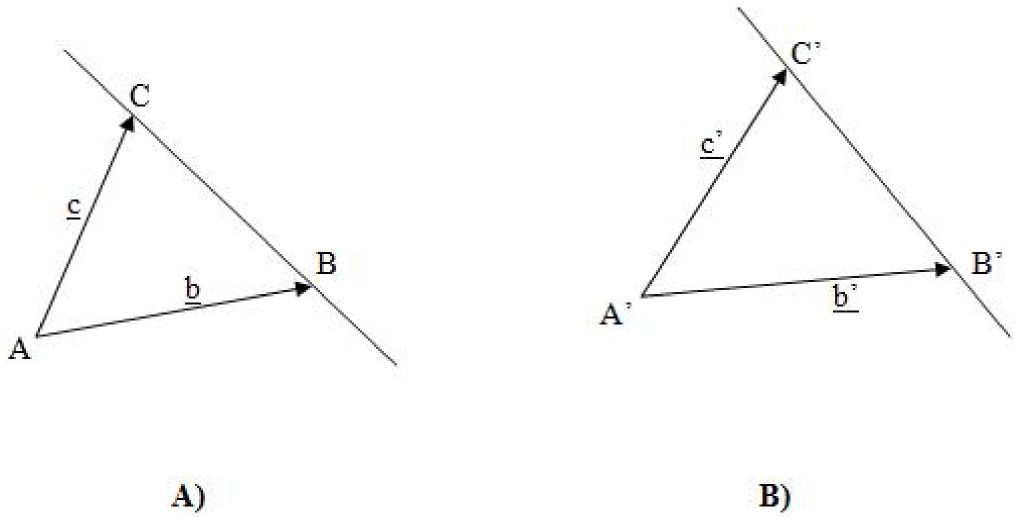
$$T_{P'Q'R'_\triangle} = \frac{|P'Q'|m_{P'Q'}}{2} = \frac{|PQ|\lambda m_{PQ}}{2} = \lambda T_{PQR_\triangle}$$

Ez egy általános háromszögre is igaz, a nyírásnál a 2. eset szerinti feldarabolást használva.
A λ arányú tengelyes affinitás egy nyírás és egy merőleges affinitás kombinációja. Tehát a λ arányú tengelyes affinitásnál a terület λ-szorosára változik.

3.4. Az affinitás mátrixa

Az affin transzformációk geometria megértése után algebrailag is megpróbáljuk őket leírni.

3.4.1. Tétel. *Tetszőleges Φ affin transzformációhoz, és tetszőleges koordinátarendszerhez található $\mathcal{A}$ invertálható mátrix és $\underline{v}$ vektor, hogy $\Phi(X) = \mathcal{A}\underline{x} + \underline{v}$.*



3.9. ábra.

Biz.: Az A origójú $\underline{b}, \underline{c}$ bázisú és A' origójú $\underline{b}', \underline{c}'$ bázisú koordinátarendszerbe leírva $\Phi(\underline{x}) = \underline{x}$ lesz az affinitást leíró leképezés, ahogyan azt a 3.1.6.-os állítás bizonyításának 2. részében láttuk. Azaz $\mathcal{A} = Id$ identitás lesz. Lineráis algebrából tudjuk, hogy más bázisokban $\Phi(x) = \mathcal{A}\underline{x} + \underline{b}$ alakú, ahol most egy $\mathcal{A}$ invertálható mátrix. $\square$

3.4.2. Lemma. *Ha egy tengelyes affinitás tengelye az első koordinátatengely, akkor az affinitás egy $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ mátrixszal való szorzás, azaz $P(x, y)$ képe $P'(x + \alpha y, \mu y)$.*

Megj.: Ha $\mu = 1$, akkor nyírásról van szó, lásd 3.4.1.-es definíció.

Biz.: Az affinitás az előző tétel alapján $\mathcal{A}\underline{x}+\underline{v}$ alakba írható, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \gamma & \mu \end{pmatrix}$, az origó képe $\underline{o} \Longrightarrow \underline{v} = \underline{o}$

Az első koordinátatengely képe önmaga $\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, vagyis $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

$P(x,y)$ képe $\mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x + \lambda y, \mu y)$

Itt μ a hasonlóság aránya, hiszen a 3.2.5.-ös definíció alapján $|PP_t| = y$ és $|P'P_t'| = \mu y$.

□

3.4.3. Definíció. *Ha Φ egy affin leképezés, akkor egy tetszőleges bázisban $\Phi(x) = \mathcal{A}\underline{x} + \underline{v}$ valamely invertálható $\mathcal{A}$ mátrixra. Ekkor $det\mathcal{A}$ értékét a Φ determinánsának nevezzük.*

Megj.: Az origó és a bázis megválasztása nem befolyásolja Φ determinánsát.

3.4.4. Tétel. *Ha K tetszőleges konvex síkidom és Φ egy affin leképezés a síkon, akkor a területe:*

$$T(\Phi(K)) = |det\Phi| T(K)$$

Biz.: Minden konvex síkidom közelíthető sokszögekkel, és minden sokszög háromszögekre bontható. Ezért elég azt az esetet nézni, ha K egy háromszög A,B,C csúccsal. Legyen A,B,C képe A',B',C'.

Feltehetően A az origó és AB egyenes az első koordinátatengely. Legyen C_0 olyan pont, hogy ABC_0 háromszög hasonló az $A'B'C'$ háromszöghöz, ilyen sorrendben.

Létezik egy első koordinátatengely tengelyű affinitás, mely A,B,C-t A,B,C_0-ba viszi, ez $\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ mátrixszal való szorzás. Mivel μ a tengelyes affinitás aránya, ha m az ABC-nek C-hez tartozó, m_0 az ABC_0-nak C_0-hoz tartozó magassága, akkor $m_0 = |\mu| \cdot m$

Így

$$T(ABC_{0\triangle}) = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot |\mu| \cdot mAB = |\mu| \cdot T(ABC_\triangle)$$

Legyen $\lambda > 0$ az $ABC_{0\triangle}$-et az $A'B'C'_\triangle$-be vivő hasonlóság aránya. Ha az A-nál fekvő szög α, akkor

$$T(A'B'C'_\triangle) = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot A'C' \cdot A'B' = \frac{1}{2} \sin\alpha(\lambda \cdot AC_0) \cdot (\lambda \cdot AB) = \lambda^2 \cdot T(ABC_{0\triangle})$$

Továbbá a hasonlóság felírható, mint $\underline{p} \longrightarrow \lambda\mathcal{M}_2\underline{p} + \underline{v}$, ahol $\mathcal{M}_2$ ortogonális mátrix, hiszen ismert, hogy minden egybevágóság felírható $p \mapsto \mathcal{M}_2\underline{x} + \underline{p}$ alakban, amiből könnyen adódik, hogy egy hasonlóság a fenti alakban írható fel. A fenti két kiemelt egyenletből adódik, hogy:

$$\frac{T(A'B'C'_\triangle)}{T(ABC_\triangle)} = \frac{T(A'B'C'_\triangle)}{T(ABC_{0\triangle})} \cdot \frac{T(ABC_{0\triangle})}{T(ABC_\triangle)} = \lambda^2 \cdot |\mu|$$

A Φ hasonlóság komponálva a tengelyes affinitással:

$$\lambda\mathcal{M}_2(\mathcal{M}_1) + \underline{v} \text{ , legyen } \mathcal{M} := \lambda\mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{M}_1 \text{ ekkor}$$

$$|det\mathcal{M}| = \left| det \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \mathcal{M}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \right| = \left| det \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \cdot |det\mathcal{M}_2| \cdot \left| det \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \right|$$
$$= \lambda^2 \cdot 1 \cdot |\mu| = \lambda^2 \cdot |\mu|$$

(mert $det\mathcal{M}_2$ ortogonális $\implies det\mathcal{M}_2 = 1)\square$.

3.5. Alakzatok affin képe

A 3.3.-as fejezetben láthattuk, hogy változnak a háromszögek területei nyíráskor. Tudjuk azt is, hogy egy háromszög képe háromszög. Vajon más alakzatoknak változik-e a képe affin transzformációkor? Hogyan változik meg? Mielőtt rátérnénk az alakzatok affin képére, nézzünk meg egy kis emlékeztetőt néhány alakzatról és tulajdonságaikról.

3.5.1. Definíció. *Adott F_1,F_2 fókusz és $a > 0$ úgy, hogy $2a > |F_1F_2|$. Az ellipszis azon P pontok halmaza, melyre $|PF_1| + |PF_2| = 2a$.*

3.5.2. Definíció. *Legyenek adottak az F_1, F_2 pontok, és a $2a$ úgy, hogy $0 < 2a < |F_1F_2|$. Ekkor azon P pontok, melyekre $|F_1P - F_2P| = 2a$ egy hiperbolát alkotnak.*

3.5.3. Definíció. *A parabola azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyek a sík egy adott egyenesétől (vezéregyenes) és a sík egy adott (a vezéregyenesre nem illeszkedő) pontjától (fókusz) egyenlő távolságra vannak.*

Kanonikus egyenleteik alkalmas koordinátrendszerben:

- ellipszis kanonikus egyenlete: $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$
- hiperbola kanonikus egyenlete: $\frac{(x)^2}{a^2} - \frac{(y)^2}{b^2} = 1$
- parabola kanonikus egyenlete: $4py = (x)^2$

Ahol a és b az ellipszis illetve hiperbola tengelyeinek hosszát jelentik.

3.5.4. Tétel. *Egy affin transzformációnál egy ellipszis (ill. hiperbola vagy parabola) képe ellipszis (ill. hiperbola vagy parabola), azaz ezen görbék milyenségét nem változtatja meg. Továbbá minden ellipszis, hiperbola vagy parabola átvihető egy affin transzformációval egy kanonikus egyenletű megfelelőjébe.*

Biz.: Lásd Hajós könyv 47.5, 492. oldal.

Példa: Legyen $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longrightarrow x' = ax$ és $y' = by$

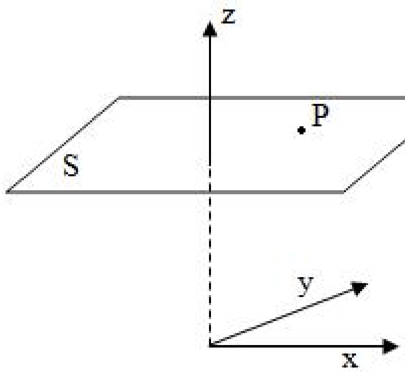
Keressük az egységkör ($x^2+y^2 = 1$) képét. Behelyettesítve az $x = \frac{x'}{a}$ és $y = \frac{y'}{b}$ értékeket az előző képletbe:

$$\Longrightarrow \left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

adódik. Tehát a kör képe az a és b tengelyű ellipszis.

3.6. Az affinitás kapcsolata a projektív sík kollineációival

A téma elején beszéltünk a tér kibővítéséről, miért is szükséges ez nekünk, valamint a kollineációkról. Most visszatérünk a kibővített sík kollineációihoz. Tudjuk, hogy $\varphi : x \mapsto \mathcal{A}\underline{x} + \underline{v}$ egy affin transzformációt ad a síkon. Tekintsük a $z = 1$ térbeli S síkot, melynek pontjait megfeleltetjük a kétdimenziós (x, y) sík pontjaival úgy, hogy $(x, y, 1) \mapsto (x, y)$, vagyis ennek az S síknak egy tetszőleges $P = (x, y, 1)$ pontjának az (x, y) pont felel meg (3.10 ábra).



3.10. ábra.

Bővítsük tovább az algebrai leírást, ezt a leképezést egy 3x3-as mátrix segítségével megadhatjuk (A mátrix első sorának első két eleme, valamint a második sorának első két eleme az $\mathcal{A}$ mátrix elemeinek a helye, a harmadik oszlop első két eleme pedig a $\underline{v}$ elemei lesznek):

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & & \underline{v} \\ & & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\underline{x} \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\underline{x} + \underline{v} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

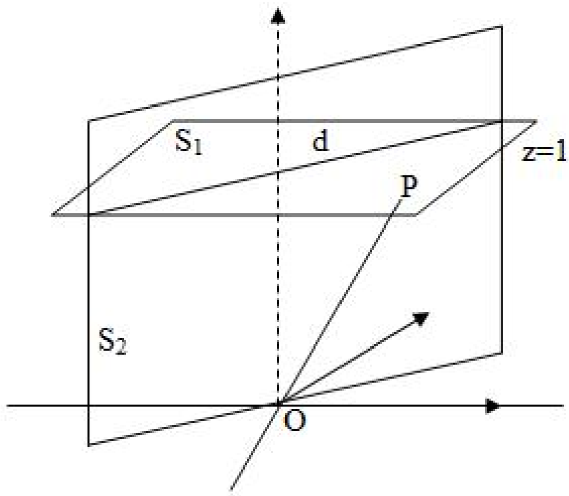
A φ inverze: $\varphi^{-1} \rightsquigarrow [\varphi^{-1}] = [\varphi]^{-1}$, valamint $[\varphi]^{-1}$ utolsó sora $(0, 0, 1)$ lesz. Létezik $[\varphi]^{-1}$ mátrix, mert $det[\varphi] = 1 \cdot (+1) \cdot det\mathcal{A} = det\mathcal{A}$, a kifejtési tétel miatt, az utolsó sor szerinti kifejtéssel és tudjuk, hogy $det\mathcal{A} \neq 0$, így $det[\varphi] \neq 0$, azaz invertálható.
Nézzük $[\varphi]$ transzponáltját:

$$[\varphi] \longrightarrow [\varphi]^T = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T & 0 \\ & 0 \\ \underline{v}^T & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow adj[\varphi] = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & det\mathcal{A}^T \end{bmatrix}$$

$$[\varphi]^{-1} = \frac{adj[\varphi]}{det\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & & \underline{w} \\ & & \\ 0 & 0 & \frac{det\mathcal{A}^T}{det\mathcal{A}} = 1 \end{bmatrix}$$

Ha itt is alkalmazzuk a kifejtési tételt az utolsó sor szerint akkor azt kapjuk, hogy $det[\varphi]^{-1} = \frac{1}{det[\varphi]} = 1 \cdot (+1) \cdot det\mathcal{B}$ ahol $det\mathcal{B} \neq 0$, vagyis $\mathcal{B}\underline{x} + \underline{w}$ affin transzformáció.

Legyen P az S_1 sík egy pontja, O az origó, és vegyük PO egyenesét. Így az S_1 sík minden közönséges pontjának egy O-n átmenő egyenest feleltettünk meg, és S_1 ideális pontjaihoz is rendelhetünk egyeneseket. A $\underline{v}$ vektorral párhuzamos egyenesek I_v ideális pontjához az O-n átmenő $\underline{v}$ irányú egyenes felel meg. Hasonlóan egy d egyeneshez rendeljük hozzá az S_2 síkot, mely az O-t és d-t tartalmazó sík. Az ideális pontok egyenesének pont az O-n átmenő S_1-sel párhuzamos sík felel meg. Így az O-n átmenő egyenesek a $\mathbb{P}^2$ pontjainak, az O-n átmenő síkok pedig $\mathbb{P}^2$ egyeneseinek felelnek meg (3.11 ábra).



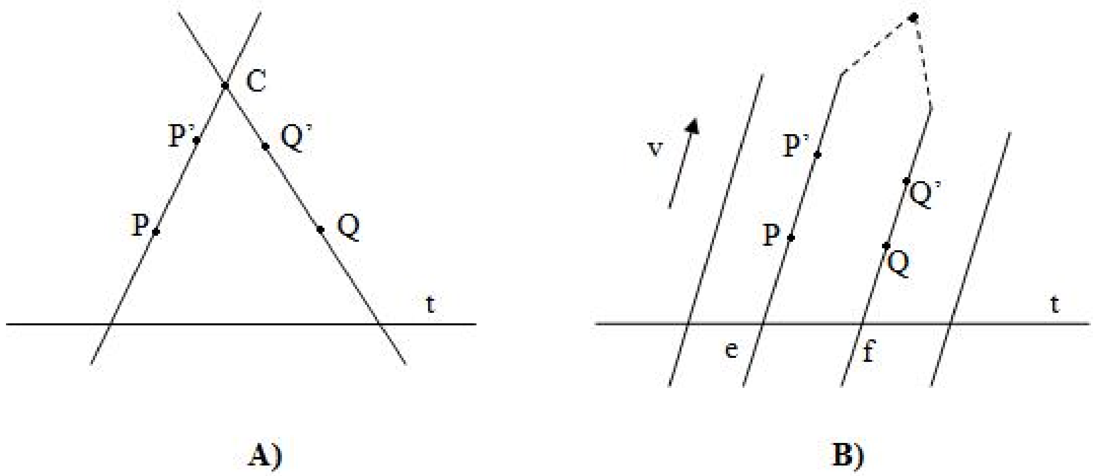
3.11. ábra.

Könnyen látható az is, hogy bármely két egyenes metszéspontjához a hozzájuk rendelt síkok metszésvonalát rendeltük hozzá. Hasonlóan megy a hozzárendelés visszafelé is.

Legyen $\hat{\mathcal{A}}$ egy invertálható 3x3-as mátrix, ekkor az O-n átmenő egyenesek O-n átmenő egyenesekbe, O-n átmenő síkok O-n átmenő síkokba mennek. Vagyis egy $\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ kollineációt ad a fenti megfeleltetést használva. Azaz látjuk, hogy az affinitások csoportja egy bővebb csoportba ágyazható be, és az algebrai leírás (amit korábban adtunk) is egy szebb, könnyebben kezelhető általánosabb leírásba illeszthető be. Vizsgáljuk tovább a kollineációkat.

3.6.1. Definíció (Centrális axiális kollineáció). *Ha egy kollineációnak van tengelye (fix egyenese) és egy C centruma (C akkor és csak akkor centrum, ha minden P-re PP' átmegy C-n) akkor centrális axiális kollineációnak nevezzük.*

Ezt láthatjuk a 3.12 ábra **A)** részén. Mi a helyzet a tengelyes affinitásokkal? Ha párhuzamosak az egyenesek, akkor nincs centrum?
Legyen t a tengely, v az affinitás iránya. Tudjuk, hogy $e' = e$ és $f' = f$. Azaz $e \cap f = e' \cap f' = Id_v$, így a centrum ideális lesz. (3.12 ábra **B)** része)



3.12. ábra.

Azaz a tengelyes affinitások is egy általánosabb leképezés osztálynak a részei. Ezzel teljessé válik a kép. Láttuk, hogy az egybevágóságoknál bővebb a hasonlóságok csoportja, és ennél is bővebb az affin transzformációké. Mint látjuk az affin transzformációk és tengelyes affinitások is egy bővebb struktúrába illeszkednek, ami számtalan új izgalmas kérdést vet fel.

4. fejezet

Összefoglalás

Szakdolgozatommal igyekeztem bevezetni az Olvasót az affin transzformációk világába. Nem minden tulajdonságát vizsgáltam ezeknek a transzformációknak, hiszen ez egy sokkal bővebb téma, de remélem felkeltettem az érdeklődését a további elmélyüléshez ebben a témában.
A matematika mellett a másik szakom az informatika, ahol találkoztam ezen transzformációk gyakorlati alkalmazásával számítógépes grafika által. Számítógépek segítségével ezek a transzformációk mind megrajzolhatók és láthatóvá válnak számunkra a képernyőn, de természetesen, amint már említettem néhány példát, az affin transzformációk a hétköznapjainkban és közvetlen környezetünkben is előfordulnak.

Végül szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek Szeghy Dávidnak, a segítségéért és útmutatásáért a szakdolgozatom megírásához.

Irodalomjegyzék

[1] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[2] Ifj. Böröczky Károly: Geometria 2. előadásjegyzet

[3] Krammer Gergely: Számítógépes grafika előadásjegyzet