# Másodrendű görbék a projektív síkon

Matematika BSc

Szakdolgozat

Írta: Deli Anikó

Matematika BSc, tanári szakirány

Témavezető: Dr. Verhóczki László egyetemi docens

Matematikai Intézet, Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011.

**Tartalomjegyzék**

Oldalszám

# Bevezetés

Szakdolgozatom témájául azért választottam projektív geometriai anyagrészt, mert az egyetemen folytatott négy féléves geometriai tanulmányaim során ez az anyagrész állt hozzám legközelebb, ezt tartottam a legérdekesebbnek.

Ismeretes, hogy ha a síkon veszünk öt általános helyzetű pontot, akkor egyértelműen létezik egy olyan nemelfajuló kúpszelet, amely mind az öt ponton áthalad. Felvetődik a kérdés, hogy ha a projektív síkot koordinátázzuk, akkor miként lehet egy viszonylag könnyű eljárással meghatározni az öt ponton áthaladó kúpszelet egyenletét. Célszerű itt megjegyezni, hogy a kúpszeletet meghatározó öt független adat lehet például négy pont és egyikben az érintőegyenes, vagy három pont és ezek közül kettőben az érintőegyenes. Szakdolgozatom fő célja az, hogy erre a problémára adjak egy jól kezelhető megoldást.

A probléma megoldásához a projektív sík másodrendű görbesorait használom fel eszközül. Ennek lényege, hogy ha például az öt adott ponton áthaladó kúpszelet egyenletét keressük, akkor ezen pontok közül kiválasztunk négyet és veszünk egy másodrendű görbesort, amelynek az összes eleme tartalmazza ezt a négy pontot. Ezt követően kijelöljük a görbesor azon elemét, amely az ötödik ponton is áthalad. Látni fogjuk, hogy ez a görbesoros eljárás megfelelő módosításokkal átvihető azokra az esetekre is, mikor a keresett kúpszeletet négy pontjával és egyikben az érintővel, illetve három pontjával és két érintőjével határozzuk meg.

Dolgozatom első fejezetében röviden ismertetem a projektív geometriának, mint a matematika egy tudományágának kifejlődését.

A második fejezet témája a projektív tér értelmezése. Legelőször ismertetem az ide tartozó fontosabb fogalmakat és jelöléseket. A fejezet vezérfonala az, hogy az euklideszi tér párhuzamos egyenesosztályaihoz ideális (más szóval végtelen távoli) pontokat rendelünk, és az euklideszi tér ezen ideális pontokkal való kibővítésével nyerjük a projektív teret. Az euklideszi síkon vett Descartes-féle koordináta-rendszer alapján bevezetjük a homogén koordinátákat azon a projektív síkon, melyet az euklideszi sík kiterjesztésével kapunk.

Ezt követően a harmadik fejezetben bevezetésre kerül a projektív síkon vett másodrendű görbék fogalma. Tárgyaljuk, hogy milyen kapcsolat van az euklideszi és a projektív másodrendű görbék között. Az egyenesek egyenleteit felhasználva példát adunk projektív másodrendű görbékre. A konjugáltság illetve a szinguláris pont fogalmának bevezetése után megmutatjuk, milyen egyenletekkel írhatók le az elfajuló másodrendű görbék. Ismertetjük az érintő fogalmát a projektív kúpszeleteknél, majd értelmezzük a ponthoz tartozó polárist, illetve az egyenes pólusát. Algebrai eszközöket használva bebizonyítjuk, hogy ha a projektív síkon adott öt pont, akkor létezik egy olyan másodrendű görbe, amely ezeken áthalad. Megjegyezzük, hogy ha az öt adott pont általános helyzetű, akkor a Pascal-tételből következik, hogy csak egy olyan másodrendű görbe van, amely átmegy az öt ponton, és ez a görbe egy (nemelfajuló) projektív kúpszelet.

A negyedik fejezetben bevezetjük a projektív másodrendű görbesorok fogalmát. Egy görbesort két másodrendű görbéből, illetve azok egyenleteiből lehet származtatni. Ez a fejezet tekinthető dolgozatom legfontosabb részének, mivel itt tárgyalom az előbbiekben már felvázolt problémát, azaz, hogy miként tudjuk viszonylag könnyen kiszámítani az öt független adattal meghatározott projektív kúpszelet egyenletét.

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Verhóczki László Tanár Úrnak azt a segítséget, melyet a konzultációk során nyújtott szakdolgozatom elkészítéséhez.

# I. fejezet: A projektív geometria kialakulásának rövid történeti áttekintése

A latin eredetű projekció szó magyarul kivetítést, vetítést jelent. Az emberi szem a térbeli tárgyak képét centrális vetítéssel készíti el. Ezt felhasználják a többek között a festészetben és az építészetben is.

A projektív geometria kialakulása már az ókorban elkezdődött, már ekkor ismerték néhány fogalmát és tételét.

A középkorban, a reneszánsz idején Filippo Brunelleschi (1377-1446) olasz mérnök és építőmester kezdte tanulmányozni a perspektivikus ábrázolás tulajdonságait.

Mintegy másfél évszázaddal később Gérard Desargues (1591-1661) francia építész, illetve Johannes Kepler (1571-1630) német csillagász javasolták - egymástól függetlenül - a végtelen távoli pontok fogalmának bevezetését.

Elsőként Jean-Victor Poncelet (1788-1867), francia matematikus rendszerezte a projektív geometriai ismereteket. „Traité des propriétés projectives des figures” (Értekezés az alakzatok projektív tulajdonságairól) című, 1822-ben készült tanulmányában leírta a projektív geometria főbb definícióit.

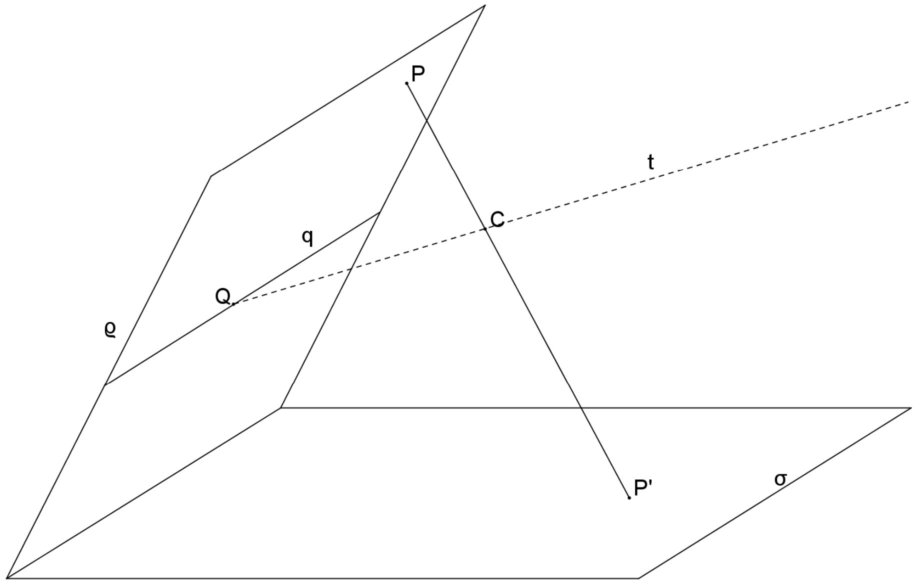
Az algebrai alapot Félix Christian Klein (1849-1925) német matematikus munkássága adta, ő ugyanis a korábban felfedezett homogén koordináták segítségével függetlenítette a projektív geometria rendszerét az euklideszi geometriától.

A projektív geometria újszerű megközelítése a szokásoshoz képest a kúpszeletek tanulmányozásánál is nagy jelentőséggel bír.

# II. fejezet: A projektív tér értelmezése. A projektív sík koordinátázása

## II.1. A centrális vetítés problémája

Tekintsünk egy centrális vetítést $C$ középponttal a $\sigma$ és $\varrho$ síkok között, vagyis a $\varrho$ síkot vetítsük rá $C$ centrumból a $\sigma$ síkra!




*1. ábra: ϱ sík vetítése C centrummal a σ síkra*

Tekintsük a $C$-n átmenő, $\sigma$-val párhuzamos $\sigma_2$ sík metszetét $\varrho$ -val! A két sík metszete egyenest ad, amit jelöljünk $q$-val! $q := \varrho \cap \sigma_2$.

*<u>Probléma:</u>* A $q$ egyenes bármely $Q$ pontjának nincs centrális vetülete a $\sigma$ síkon, mivel a $C$ és $Q$ pontok által meghatározott $t$ egyenes illeszkedik a $\sigma_2$ síkra, tehát fennál $\langle C; Q \rangle \parallel \sigma$. Eszerint a $Q$ ponthoz nem tudunk képpontot rendelni. Így a centrális vetítés nem ad bijektív leképezést két sík között.

Vegyük észre, hogy a $Q$ ponton átmenő $\varrho$-beli egyenesek centrális vetületei mind párhuzamosak a$\langle C; Q \rangle = t$ egyenessel, tehát egymással is.

*Ötlet:* A centrális vetítésnél a síkok közötti bijektív megfeleltetés úgy érhető el, hogy az euklideszi $\mathcal{X}$ teret kibővítjük végtelen távoli, úgynevezett ideális pontokkal. Egymással párhuzamos egyenesek esetében hozzájuk ugyanazt a végtelen távoli pontot rendeljük.
Ily módon azt kapjuk, hogy a $t$ egyeneshez (és a vele párhuzamos egyenesekhez) tartozó ideális pont lesz a $Q$-hoz tartozó $Q$' képpont a $\sigma$ síkon.

## II.2. Alapvető jelölések bevezetése

$\mathcal{X}$ jelölje az euklideszi tér pontjainak halmazát, $\mathcal{S}$ legyen az euklideszi síkok és $\mathcal{E}$ az euklideszi egyenesek halmaza.
Legyen $T$ egy rögzített pont $\mathcal{X}$-ben.

**Definíció:**
$\mathcal{E}(T) = \{e \in \mathcal{E} \mid T \in e\}$ a $T$ pontra illeszkedő egyenesek nyalábja, más néven sugárnyaláb. Ekkor $T$-t ezen sugárnyaláb tartópontjának nevezzük.

**Definíció:**
$\mathcal{S}(T) = \{\sigma \in \mathcal{S} \mid T \in \sigma\}$ a $T$ pontra illeszkedő síkok nyalábja. A $T$ pont a síknyaláb tartópontja.

**Definíció:**
$\mathcal{E}(T;\sigma) = \{g \in \mathcal{E} \mid T \in g;\ g \subset \sigma\}$ egy, a $T$ pontra illeszkedő sugársor.

**Definíció:**
$\mathcal{E}(g) = \{h \in \mathcal{E} \mid g \parallel h\}$ a g-vel párhuzamos egyenesek nyalábja.
Látható, hogy a tér egy tetszőleges egyenese benne van pontosan egy párhuzamos egyenesnyalábban.

## II.3. A projektív térelemek származtatása az euklideszi térelemekből

Az $\mathcal{E}(g)$ párhuzamos egyenesnyalábhoz rendelt ideális pont legyen $I_g$.
Ha a $h$ egyenes párhuzamos a $g$ egyenessel, tehát fennáll $\mathcal{E}(g) = \mathcal{E}(h)$ akkor $I_g = I_h$ .

A $\sigma$ síkbeli egyenesekhez rendelt ideális pontok halmaza legyen $i_\sigma$ , azaz $i_\sigma = \{I_g \mid g \subset \sigma\}$. Ezt az alakzatot a $\sigma$-hoz rendelt ideális egyenesnek mondjuk.

Ha az euklideszi egyeneshez hozzávesszük még a párhuzamos nyalábjához rendelt ideális pontot, úgy egy projektív egyenest kapunk: $\bar{g} = g \cup \{I_g\}$ .

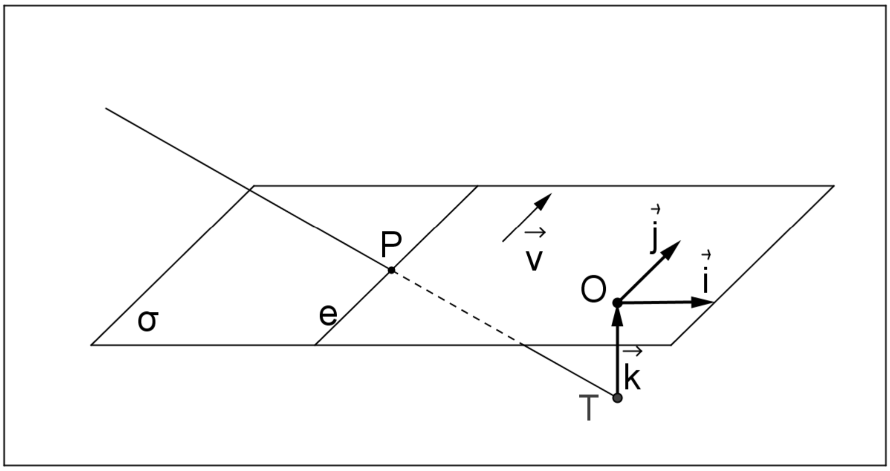
Az összes ideális pont halmazát jelölje $\iota$, ezt a projektív tér ideális síkjának mondjuk. Bővítéssel úgy kaphatjuk meg, hogy az euklideszi σ síkhoz hozzávesszük a sík egyeneseihez tartozó ideális pontokat, azaz $\bar{\sigma} = \sigma \cup i_\sigma$ .

Az $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \iota$ halmazt tekintjük a projektív térnek.

Ha az $\bar{\mathcal{X}}$ projektív térben egy pont, egyenes vagy sík eleme az $\mathcal{X}$ euklideszi térnek is, azaz nem ideális térelem, akkor közönséges pontnak, egyenesnek illetve síknak nevezzük.

## II.4. A projektív sík koordinátázása

A $\sigma$ euklideszi síkon legyen adva egy $\left(O, \underline{i}, \underline{j}\right)$ Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer! Vegyük a $\underline{k} = \underline{i} \times \underline{j}$ vektort és azt az ún. tartópontot, amelyre teljesül, hogy $\overrightarrow{TO} = \underline{k}$.




*2. ábra: A $\bar{\sigma}$ projektív sík koordinátázása a meghatározó vektorok segítségével*

A $\bar{\sigma} = \sigma \cup i_\sigma$ síkot szeretnénk most koordinátázni.

Ezt úgy tehetjük meg, hogy a $\bar{\sigma}$ projektív sík összes pontjához hozzárendeljük a térbeli vektorok $\mathcal{V}$ terének egy egydimenziós alterét.

**Definíció:**

A $\sigma$ sík egy $P$ pontjának meghatározó vektorain a $\langle T; P \rangle$egyenes irányvektorait értjük.

**Megjegyzés:** Vegyük észre, hogy a meghatározó vektor számszorostól eltekintve egyértelmű.

**Definíció:**

Ha veszünk egy $\sigma$-beli *e* egyenest és az ahhoz rendelt $I_e$ ideális pontot, akkor az $I_e$ pont meghatározó vektorain az *e* egyenes irányvektorait értjük.

**Definíció:**

A $\bar{\sigma}$ projektív sík egy pontjának homogén koordinátáin a hozzárendelt meghatározó vektoroknak az $\underline{i}$ , $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisra vonatkozó koordináta-hármasait értjük.

## II.5. A homogén koordináták nem egyértelműek

Ha $P \in \sigma$ és $P\ (x_P;\ y_P)$ a Descartes-féle koordináták, akkor $\overrightarrow{TP} = x_P\underline{i} + y_P\underline{j} + \underline{k}$ egy meghatározó vektora *P*-nek. Ugyanakkor $\lambda \cdot \overrightarrow{TP}\ (\ \lambda \neq 0\ )$ is egy meghatározó vektora *P*-nek. $P[x_P;\ y_P; 1]$ mellett $[\lambda x_P;\ \lambda y_P; \lambda]$ is egy homogén koordináta-hármasa a $P$ pontnak.

Vegyük az *e* egyeneshez rendelt $I_e$ ideális pontot!

$\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + 0\underline{k}$ teljesül, ugyanis $\underline{v}$ merőleges $\underline{k}$-ra. Így azt kapjuk, hogy az ideális pontok esetében a harmadik homogén koordináta eltűnik: $I_e\ [v_1;\ v_2; 0]$.

Mivel $\lambda \cdot \underline{v}$ párhuzamos az *e* egyenessel, ezért fennáll $I_e\ [\lambda v_1;\ \lambda v_2; 0]$ is tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}\ \ (\lambda \neq 0)$ szám esetén.

## II.6. Közönséges pont koordinátái a homogén koordináták segítségével

Fejezzük ki a $\bar{\sigma}$ projektív sík egy közönséges $P$ pontjának koordinátáit a homogén koordináták segítségével.

Tegyük fel, hogy a $P\ [z_1;\ z_2; z_3]$ pont nem ideális, azaz fennáll $z_3 \neq 0$ .
$P[x_P;\ y_P; 1]$ következtében $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0,$ hogy teljesül

$$\lambda x_P = z_1,\ \lambda y_P = z_2 \text{ és } \lambda = z_3.$$

Ez alapján fennállnak a következő egyenlőségek:

$$x_P = \frac{z_1}{z_3}, y_P = \frac{z_1}{z_3}.$$

## II.7. A projektív sík egyeneseinek homogén koordinátái

**Definíció:**
Az *e* egyenes meghatározó vektorain az $\mathcal{E} = \langle T; e\rangle$ sík normálvektorait értjük.

**Definíció:**
Legyen $\underline{u}$ egy meghatározó vektora az *e* egyenesnek! Fejezzük ki az $\underline{u}$-t az $\underline{i},\ \underline{j},\ \underline{k}$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként az $\underline{u} = u_1\underline{i} + u_2\underline{j} +\ u_3\underline{k}$ alakban!
Az $[u_1;\ u_2; u_3]$ számhármast az *e* egyenes egyik homogén koordináta-hármasának mondjuk.

A $\sigma$ euklideszi síkon az *e* egyenes egyenlete legyen $ax + by + c = 0$, ahol $a^2 + b^2 > 0$.
Határozzuk meg az *e* homogén koordinátáit!

Vegyük az *e* egyenes egy $P\ (x_P;\ y_P)$ pontját!Ennek koordinátáira nyilván fennáll

$$ax_P + by_P + c = 0,$$
$$c = -(\ ax_P + by_P).$$

A $b\underline{i} - a\underline{j}$ vektor egy irányvektora *e*-nek. A $\overrightarrow{TP}$ és $\underline{v}$ vektorok benne vannak az $\mathcal{E} = \langle T; e\rangle$ síkban, tehát a vektoriális szorzatuk egy meghatározó vektort ad, mivel az merőleges $\mathcal{E}$-ra.

$$\overrightarrow{TP} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_P & y_P & 1 \\ b & -a & 0 \end{vmatrix} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}.$$

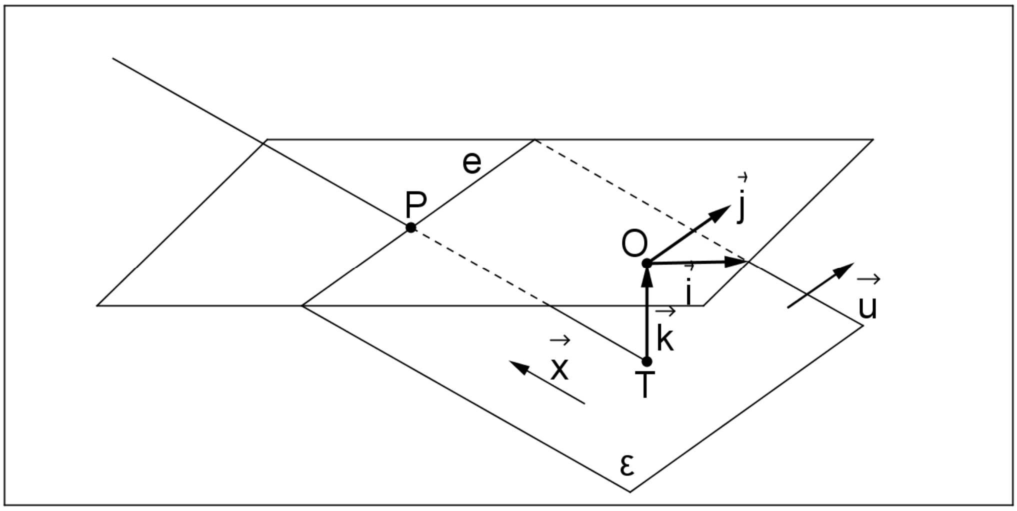
Eszerint az *e* egyenes homogén koordinátái: $e[a; b; c]$.

### II.8. Az ideális egyenes homogén koordinátái

Az $i_\sigma$ ideális egyenesnek a *T* talpponton átmenő, $\sigma$-val párhuzamos $\varrho$ sík felel meg.

Az $i_\sigma$ meghatározó vektorai a $\varrho$ síkra merőleges vektorok, vagyis a $\lambda\underline{k}$; $\lambda \neq 0$ vektorok.
Így tehát az $i_\sigma$ ideális egyenes homogén koordinátái: $[0;\ 0;\ \lambda]$.

### II.9. Pont és egyenes illeszkedése a projektív síkon




*3. ábra: Pont és egyenes illeszkedése a projektív síkon*

Legyen az *e* egyenes egyik meghatározó vektora $\underline{u} = u_1\underline{i} + u_2\underline{j} +\ u_3\underline{k}$, továbbá egy $\bar{\sigma}$ síkbeli *P* pont egyik meghatározó vektora $\underline{x} = x_1\underline{i} + x_2\underline{j} +\ x_3\underline{k}$.

Felírhatjuk, hogy a *P* pont illeszkedik az *e* egyenesre akkor és csak akkor, ha a $\langle T; P\rangle$ egyenes illeszkedik a $\langle T; e\rangle$ által meghatározott síkra.

Vegyük észre, hogy a $\langle T; P\rangle$ egyenes abban az esetben illeszkedik a $\langle T; e\rangle$ síkra, ha az irányvektora merőleges a sík normálvektorára. Eszerint $P$ eleme $e$-nek pontosan akkor, ha az $\underline{x}$ és az $\underline{u}$ meghatározó vektorok merőlegesek egymásra, vagyis ha skaláris szorzatukra fennáll

$$\underline{u} \cdot \underline{x} = 0 \Leftrightarrow u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \,.$$

A fenti összefüggés az $e$ egyenes homogén koordinátás egyenlete.
Ez az egyenlőség felírható az alábbi mátrixegyenlettel is:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

# III. fejezet: Másodrendű görbék a projektív síkon

## III.1. A projektív síkon vett másodrendű görbék értelmezése

A $\bar{\sigma} = \sigma \cup i_\sigma$ projektív síkon szeretnénk definiálni a másodrendű görbéket.
A $\bar{\sigma}$ síkot már koordinátáztuk, tehát értelmeztük a projektív síkon vett pontok és egyenesek homogén koordinátáit az euklideszi síkbeli $\left(O, \underline{i}, \underline{j}\right)$ Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer segítségével.

**Definíció:**
Legyenek adva olyan $a_{rs}$ $(1 \leq r \leq s \leq 3)$ valós együtthatók, melyek közül legalább egy különbözik 0-tól.
Az

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

egyenlettel leírt $\bar{\sigma}$-beli másodrendű görbén a $\bar{\sigma}$ sík azon pontjainak $\overline{\mathcal{M}}$ halmazát értjük, melyek homogén koordinátái kielégítik az egyenletet.

Az együtthatókból képezzünk egy $3 \times 3$-as

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

szimmetrikus mátrixot, ahol tehát fennáll $a_{rs} = a_{sr}$ !

Ekkor a fenti másodfokú egyenletet egy tömörebb alakban így írhatjuk fel:

$$\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs} \cdot x_r \cdot x_s = 0.$$

Vezessük be az $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ jelölést: eszerint $\underline{x}$ a továbbiakban egy $3 \times 1$-es oszlopmátrixot jelöl. Ekkor $\underline{x}^T = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$ lesz az $\underline{x}$ transzponáltja. Az $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe egyenlete ekkor felírható az $\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} = 0$ alakban is.

## III.2. Származtatás az euklideszi sík másodrendű görbéiből

Vegyünk a $\sigma$ euklideszi síkon egy $\mathcal{M}$ másodrendű görbét, melynek egyenlete

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + d = 0.$$

**Definíció:**

Tekintsük az $\mathcal{M}$ másodrendű görbe egyenletében lévő együtthatókból képzett $A_{33} = a_{11} \cdot a_{22} - {a_{12}}^2$ valós számot.

Az $\mathcal{M}$ másodrendű görbét

- elliptikus másodrendű görbének mondjuk, ha $A_{33} > 0$,
- hiperbolikus másodrendű görbének mondjuk, ha $A_{33} < 0$, illetve
- parabolikus másodrendű görbének mondjuk, ha $A_{33} = 0$ teljesül.

Amennyiben a $P \in \bar{\sigma}$ pont közönséges, azaz $P \in \sigma$, akkor $P$ koordinátáira fennáll

$$x_P = \frac{z_1}{z_3}, y_P = \frac{z_1}{z_3}.$$

Ezt beírva az $\mathcal{M}$ egyenletébe, továbbá azt $x_3$-mal beszorozva egy másodfokú homogén koordinátás egyenletet kapunk.

**Definíció:**

Az $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2b_1x_1x_3 + 2b_2x_2x_3 + dx_3^2 = 0$ egyenlettel leírt $\bar{\sigma}$-beli $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbét a $\sigma$ euklideszi síkon vett $\mathcal{M}$ másodrendű görbe projektív lezárásának illetve projektív kibővítésének mondjuk.

**Megjegyzés:** A lezárással nyert $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe mátrixa

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & d \end{pmatrix}, \text{ ahol } a_{12} = a_{21}.$$

**Megjegyzés:**

Bizonyítható, hogy amennyiben az $\overline{\mathcal{M}}$ egy

i. elliptikus másodrendű görbe, akkor $i_\sigma \cap \overline{\mathcal{M}} = \emptyset$ ,
ii. hiperbolikus másodrendű görbe, akkor $i_\sigma \cap \overline{\mathcal{M}}$ 2 pontot ad,
**iii.** parabolikus másodrendű görbe, akkor $i_\sigma \cap \overline{\mathcal{M}}$ egyetlen pont.

## III.3. A projektív sík másodrendű görbéi

Igazolható, hogy a $\bar{\sigma}$ projektív síkon 5 fajta másodrendű görbe van.
Eszerint az $\bar{\mathcal{M}}$ lehet

i. $\sigma$-beli ellipszis, hiperbola vagy parabola projektív lezárása;
ii. két egyenes uniója,
iii. egyetlen egyenes,
iv. egyetlen pont, illetve
v. üreshalmaz.

Példák másodrendű görbékre:

Az $e$ egyenes homogén koordinátás egyenlete legyen $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, és az $f$ egyenes egyenlete legyen $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$, ahol $e \neq f$.

1.) Ekkor az $(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) \cdot (v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3) = 0$ egyenlet egy másodrendű görbét ír le, amely megegyezik a két egyenes uniójával.

2.) Az $(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)^2 = 0$ egyenlet az $e$ egyenest adja meg.

3.) Az $(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)^2 + (v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)^2 = 0$ egyenlettel egy pontot, mégpedig az $e$ és $f$ egyenesek metszéspontját adhatjuk meg.

## III.4. A projektív másodrendű görbék két osztálya: a közönséges és az elfajuló másodrendű görbék

A projektív másodrendű görbéket a leíró mátrix determinánsa alapján két osztályba sorolhatjuk: vannak elfajuló és közönséges görbék.

**Definíció:**
A
$$\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs} \cdot x_r \cdot x_s = 0$$
egyenlettel leírt $\bar{\mathcal{M}}$ másodrendű görbét közönséges projektív kúpszeletnek mondjuk, ha az együtthatókból képzett $\underline{A}$ szimmetrikus mátrix determinánsára fennáll $det\,\underline{A} \neq 0$ és $\bar{\mathcal{M}} \neq \emptyset$.

**Definíció:**
Az $\bar{\mathcal{M}}$-másodrendű görbét elfajulónak mondjuk, ha az együtthatókból képzett $\underline{A}$ szimmetrikus mátrix determinánsára fennáll $det\,\underline{A} = 0$.

**Megjegyzés:**
Ha az $\bar{\mathcal{M}}$ projektív másodrendű görbe tartalmaz egyenest, akkor elfajuló.
Igazolható, hogy a közönséges projektív kúpszeletek a $\sigma$ euklideszi síkon vett ellipszis, hiperbola vagy parabola projektív lezárásaként jönnek létre.

## III.5. Konjugált pontok egy $\bar{\mathcal{M}}$ másodrendű görbére vonatkozóan

Legyen adott egy $\bar{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe a $\bar{\sigma}$ projektív síkon, melyet a
$$\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs} \cdot x_r \cdot x_s = 0$$
egyenlet ír le.

**Definíció:**
A $P\ [y_1;\ y_2\,;y_3]$ és $Q\ [z_1;\ z_2\,;z_3]$ pontok definíció szerint konjugáltak az $\bar{\mathcal{M}}$-re nézve, ha fennáll
$$\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs} \cdot y_r \cdot z_s = 0\,.$$
A konjugáltság jelölése: $P{\sim}Q$.

A konjugáltságra vonatkozó feltétel felírható a következő alakban is:
$\underline{y}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{z} = 0$, vagy $\underline{z}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{y} = 0$.

**Definíció:**

Az $S$ pontot az $\bar{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe szinguláris pontjának nevezzük, ha $S$ a $\bar{\sigma}$ sík összes pontjához konjugált $\bar{\mathcal{M}}$-re vonatkozóan.

**Megjegyzés:**

Vegyünk a $\overline{\sigma}$ projektív síkon egy $S$ pontot, melynek homogén koordinátái legyenek $[s_1;\ s_2\,;s_3]$.

Vegyük észre, hogy $S$ pontosan akkor szinguláris pont, ha fennáll $\underline{A}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = 0$ .

Eszerint a szinguláris pont eleme a görbének; továbbá a szinguláris pont létezésének feltétele $det\,\underline{A} = 0$ feltétel teljesülése. Így tehát az $\bar{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe elfajuló akkor és csak akkor, ha van szinguláris pontja.

## III.6. Konjugáltság elfajuló másodrendű görbéknél

Mint ismeretes, a $P\ [y_1;\ y_2\,;y_3]$ és $Q\ [z_1;\ z_2\,;z_3]$ pontok konjugáltak, ha koordinátáikra fennáll

$$(y_1\ \ y_2\ \ y_3)\cdot \underline{A}\cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Mivel az elfajuló másodrendű görbéknél az $S$ szinguláris pontra $\underline{A}\cdot\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; ezért az $S$ pont a görbe minden pontjához konjugált.

## III.7. Elfajuló másodrendű görbék konstrukciója

Ebben az alfejezetben azt szeretnénk megmutatni, hogy egy elfajuló görbe egyetlen pontból, egyetlen egyenesből, vagy két egyenesből áll, melyhez felhasználjuk a **III.** fejezet **3.** alpontjában szereplő, példaként hozott másodrendű görbék egyenleteit.

A $\overline{\sigma}$ projektív síkon elfajulók a következő projektív másodrendű görbék:

i. két egyenes uniója,
ii. egyetlen egyenes, vagy pedig
iii. egyetlen pont.

A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adva két egyenes, *e* és *f*, melyek nem egyenlők.
Az *e* egyenes egyenlete legyen $e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0$, és az *f* egyenlete pedig $f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 = 0$.
Mivel $e \neq f$, ezért nincs olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, amelyre fennállna $\lambda \cdot (e_1;\ e_2;\ e_3) = (f_1;\ f_2;\ f_3)$, ahol $(e_1;\ e_2;\ e_3)$ az *e* egyenes homogén koordináta-hármasa, $(f_1;\ f_2;\ f_3)$pedig az *f* egyenes homogén koordináta-hármasa.

i. <u>$\overline{\mathcal{M}}$ két egyenes uniója</u>

Tekintsük a $\overline{\sigma}$ projektív síkon azt az $\overline{\mathcal{M}} = \mathrm{e} \cup \mathrm{f}$ másodrendű görbét, melyet a következő egyenlettel adhatunk meg:$(e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3) \cdot (f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3) = 0$.
Erről az egyenletről már tudjuk, hogy ez egy olyan $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbét határoz meg, megy két egyenes uniója.
Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 2-vel!

$$2 \cdot (e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3) \cdot (f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3) = 0.$$

Kifejtve:
$2 \cdot (e_1f_1{x_1}^2 + e_2f_2{x_2}^2 + e_3f_3{x_3}^2 + e_1f_2x_1x_2 + e_1f_3x_1x_3 + e_2f_1x_2x_1 + e_2f_3x_2x_3 + e_3f_1x_3x_1 +$
$+ e_3f_2x_3x_2) = 0.$

Összevonva a következő egyenletet kapjuk:
$2 \cdot (e_1f_1{x_1}^2 + e_2f_2{x_2}^2 + e_3f_3{x_3}^2 +$
$+ (e_1f_2 + e_2f_1)\, x_1x_2 + (e_1f_3 + e_3f_1)x_1x_3 + (e_2f_3 + e_3f_2)x_2x_3) = 0.$
Írjuk fel ennek a másodrendű görbének a mátrixát!

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 \cdot e_1f_1 & e_1f_2 + e_2f_1 & e_1f_3 + e_3f_1 \\ e_1f_2 + e_2f_1 & 2 \cdot e_2f_2 & e_2f_3 + e_3f_2 \\ e_1f_3 + e_3f_1 & e_2f_3 + e_3f_2 & 2 \cdot e_3f_3 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} (f_1 \quad f_2 \quad f_3) + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} (e_1 \quad e_2 \quad e_3).$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy az $\underline{A}$ mátrix rangja 2, tehát a determinánsa 0.

Ugyanis az $\underline{A}$ mátrix oszlopai így írhatók fel:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} f_1 + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} e_1 \, ; \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} f_2 + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} e_2 \text{ illetve } \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} f_3 + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} e_3 \, .$$

Mivel a mátrix rangja 2, ezért a megoldó altér egydimenziós. Eszerint $\overline{\mathcal{M}}$-nek egyetlen szinguláris pontja van. Tudjuk, hogy egy görbe elfajuló, ha van szinguláris pontja: ebben az esetben a két egyenes uniójából álló másodrendű görbe szinguláris pontja a két egyenes metszéspontja. Ezt $S[s_1\,; s_2\,; s_3\,]$-mal jelölve ugyanis fennállnak a következő egyenlőségek: $e_1s_1 + e_2s_2 + e_3s_3 = 0$ illetve $f_1s_1 + f_2s_2 + f_3s_3 = 0$

ii. <u>$\overline{\mathcal{M}}$ egyetlen egyenes</u>

Tekintsük a $\overline{\sigma}$ projektív síkon az $(e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3)^2 = 0$ egyenlettel megadott $\overline{\mathcal{M}} = e$ másodrendű görbét.

Írjuk fel az együtthatókból képzett $\underline{A}$ szimmetrikus mátrixot!

Egy kis számolás után azt kapjuk, hogy

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} {e_1}^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_1e_2 & {e_2}^2 & e_2e_3 \\ e_1e_3 & e_2e_3 & {e_3}^2 \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $\underline{A}$ mátrix rangja 1, tehát fennáll a *det* $\underline{A} = 0$ egyenlőség.

Az $\underline{A}$ mátrix oszlopai átírhatók a következő alakba: $e_1 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ ; $e_2 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ és $e_3 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$.

A mátrix rangja 1, ezért a megoldó altér kétdimenziós. Tehát van egy olyan egyenes, melynek minden pontja szinguláris pont. Az egyenletbe behelyettesítve látszik, hogy ezt $S[s_1\,; s_2\,; s_3\,]$-mal jelölve fennáll, hogy $e_1s_1 + e_2s_2 + e_3s_3 = 0$. Eszerint az $\overline{\mathcal{M}} =$ e szinguláris pontjai éppen az $\overline{\mathcal{M}}$-re eső pontok.

iii. $\overline{\mathcal{M}}$ egyetlen pont

Vegyük most a $\overline{\sigma}$ síkon azt az $\overline{\mathcal{M}} = e \cap f$ másodrendű görbét, amelyet az $(e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3)^2 + (f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3)^2 = 0$ egyenlet ír le.

Tudjuk, hogy az egyenlet által leírt másodrendű görbe egyetlen pont, az *e* és *f* egyenesek metszéspontja.

Az egyenletet kifejtjük:

$$({e_1}^2{x_1}^2 + {e_2}^2{x_2}^2 + {e_3}^2{x_3}^2 + 2e_1e_2x_1x_2 + 2e_1e_3x_1x_3 + 2e_2e_3x_2x_3) +$$
$$+({f_1}^2{x_1}^2 + {f_2}^2{x_2}^2 + {f_3}^2{x_3}^2 + 2f_1f_2x_1x_2 + 2f_1f_3x_1x_3 + 2f_2f_3x_2x_3) = 0\,.$$

Tehát

$$({e_1}^2 + {f_1}^2){x_1}^2 + ({e_2}^2 + {f_2}^2){x_2}^2 + ({e_3}^2 + {f_3}^2){x_3}^2 +$$
$$+2(e_1e_2 + f_1f_2)x_1x_2 + 2(e_1e_3 + f_1f_3)x_1x_3 + 2(e_2e_3 + f_2f_3)x_2x_3 = 0\,.$$

Ebben az esetben is fel kell írnunk az $\underline{A}$ mátrixot:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} {e_1}^2 + {f_1}^2 & e_1e_2 + f_1f_2 & e_1e_3 + f_1f_3 \\ e_1e_2 + f_1f_2 & {e_2}^2 + {f_2}^2 & e_2e_3 + f_2f_3 \\ e_1e_3 + f_1f_3 & e_2e_3 + f_2f_3 & {e_3}^2 + {f_3}^2 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} (e_1 \quad e_2 \quad e_3) + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} (f_1 \quad f_2 \quad f_3)\,.$$

Ekkor a mátrix rangja 2, tehát újfent fennáll a $det\,\underline{A} = 0$ egyenlőség.

A mátrix oszlopai más alakban:

$$e_1 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + f_1 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}\;;\; e_2 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \text{ és } e_3 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + f_3 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a megoldó altér egydimenziós, eszerint $\overline{\mathcal{M}}$ -nek egyetlen szinguláris pontja van. Ez nyilvánvalóan maga az eredeti $e \cap f$ metszéspont.

## III.8. Projektív kúpszelet érintője

***Állítás:***

*Legyen adott egy* $P\,[y_1\,;y_2\,;y_3\,]$ *pont a* $\bar{\sigma}$ *projektív síkon. A P-hez konjugált pontok egy egyenest alkotnak, melynek az* $\underline{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *egyenlettel meghatározott*

$\underline{u}^T = [u_1\ ;\ u_2\ ;\ u_3]$ *számhármas az egyik homogén koordináta-hármasa.*

Bizonyítás:

Vegyünk egy $R\,[x_1\,;x_2\,;x_3\,]$ pontot a $\bar{\sigma}$ projektív síkon. A definíció alapján az *R* pont konjugált *P*-hez akkor és csak akkor, ha koordinátáikra fennáll a következő összefüggés:

$$\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}x_r y_s = 0\,.$$

Ezt átalakítva kapjuk:

$$\sum_{r=1}^{3} x_r\left(\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\,y_s\right) = 0\,.$$

Alkalmazzuk a következő jelölést:

$$\left(\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\,y_s\right) \coloneqq u_r$$

Ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{r=1}^{3} x_r\,u_r = 0\,.$$

Az *R* pont konjugált *P*-hez akkor és csak akkor, ha a koordinátái kielégítik az

$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ egyenletet.

Ezen egyenlet pedig egy *p* egyenest ír e, ahol $[u_1\ ;\ u_2\ ;\ u_3]$ *p*-nek egy homogén koordinátahármasa.

Ezen állítás ismeretében kimondhatjuk a következő definíciót:

**Definíció:**

Legyen adva egy $\bar{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet, továbbá egy $P \in \bar{\sigma}$ pont.

Azt az egyenest, melyet a *P*-hez konjugált pontok alkotnak, a *P* pont $\bar{\mathcal{M}}$-re vonatkozó polárisának mondjuk.

P pont és polárisa közti kapcsolat:

Beláthatók a következő állítások:

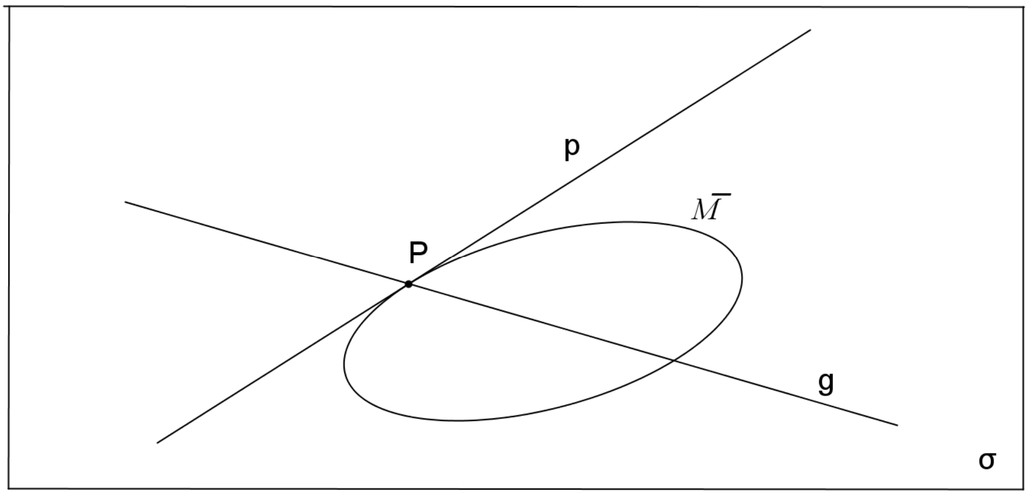
Legyen adva egy $\overline{\mathcal{M}}$ projektív kúpszelet, továbbá egy $P$ ($P \in \overline{\mathcal{M}}$) pont.

1.) A $P$ pont $\overline{\mathcal{M}}$-re vonatkozó $p$ polárisának a $P$-n kívül nincs más közös pontja $\overline{\mathcal{M}}$-mel, vagyis $\overline{\mathcal{M}} \cap p = \{P\}$.

2.) Legyen $g$ egy olyan $P$-n átmenő egyenes, amely különbözik a $P$-hez tartozó $p$ polárisától. Ekkor $g$-nek az $\overline{\mathcal{M}}$-mel pontosan 2 közös pontja van.

**Definíció:**

Egy $e$ egyenest az $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe érintőjének mondunk, ha $e$-nek egyetlen közös pontja van $\overline{\mathcal{M}}$-mel.




*4. ábra: Pont és polárisa egy másodrendű görbére vonatkozóan*

**Megjegyzés:**

A fentebbi 1.) állítás szerint a $P$ pontbeli $p$ poláris adja az $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe $P$-beli érintőjét.

**Definíció:**

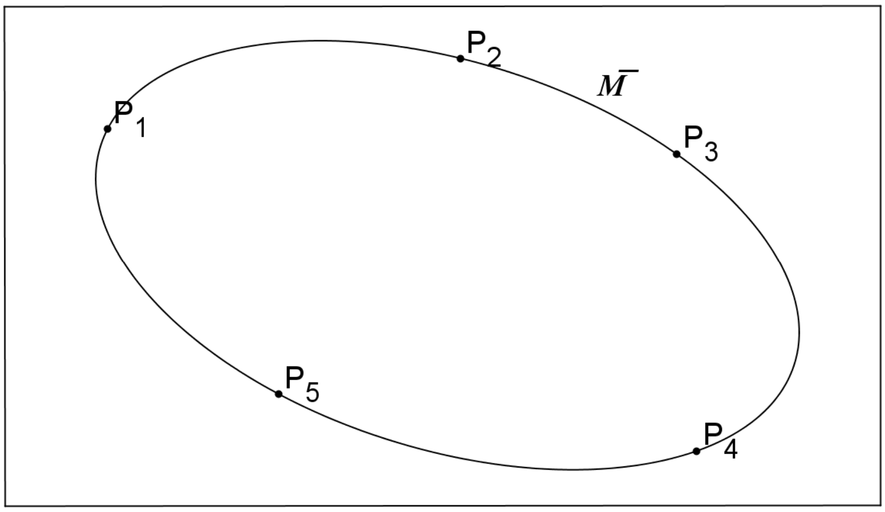
Egy $\bar{\sigma}$-beli $p$ egyenes pólusán a $\bar{\sigma}$ sík azon pontját értjük, melynek polárisa $p$.

## III.9. Az öt ponton áthaladó másodrendű görbe létezése

**Tétel:**

A $\bar{\sigma}$ projektív síkon legyen adva öt pont, $P_1; P_2; P_3; P_4$ és $P_5$.

Ekkor létezik olyan $\bar{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe, amely mind az öt ponton áthalad.




*5. ábra: Az öt ponton áthaladó projektív másodrendű görbe*

Bizonyítás:

Használjuk fel a $\bar{\sigma}$ projektív sík homogén koordinátázását!Vegyük az adott $P_1; \dots; P_5$ pontok egy-egy rögzített koordináta-hármasát:

$$P_k\ [y_{k1};\ y_{k2};\ y_{k3}]\ ;\ k = 1; 2; \dots; 5$$

A másodrendű görbét leíró $\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} = 0$ egyenletben 6 független együttható van, mégpedig a következők: $a_{11};\ a_{22};\ a_{33};\ a_{12};\ a_{13};\ a_{23}$, mivel tudjuk, hogy $\underline{A}$ szimmetrikus mátrix.

A $P_k$ pontnak a másodrendű görbére való illeszkedése esetén a következő mátrixegyenletet kapjuk:

$$(y_{k1}\ \ y_{k2}\ \ y_{k3})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{k1} \\ y_{k2} \\ y_{k3} \end{pmatrix} = 0$$

A $P_k$ pont rajta van a leírt görbén, ha fennáll:

$$y_{k1}{}^2 a_{11} + y_{k2}{}^2 a_{22} + y_{k3}{}^2 a_{33} + 2y_{k1}y_{k2}a_{12} + 2y_{k1}y_{k3}a_{13} + 2y_{k2}y_{k3}a_{23} = 0\ .$$

Az öt rögzített ponton átmegy az $\overline{\mathcal{M}}$, ha a fenti öt egyenlet $(k = 1; 2; \ldots; 5)$ teljesül.

Mivel az $\overline{\mathcal{M}}$-et keressük, ezért most az $a_{rs}$ $(1 \leq r \leq s \leq 3)$ együtthatók az ismeretlenek. Így tehát egy 5 egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani 6 ismeretlenre.

A megoldó számhatosok $\mathbb{R}^6$-ban egy $H$ lineáris alteret alkotnak, melyre fennáll

$$dimH \geq 6 - 5 = 1 \, .$$

Ebből következik, hogy létezik nem triviális megoldás, tehát van olyan $(a_{11};\ a_{22};\ a_{33};\ a_{12};\ a_{13};\ a_{23})$ megoldó számhatos, melynek nem minden eleme 0.

Az általuk meghatározott $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe átmegy a $P_k$ $(k = 1\,; 2\,; \ldots; 5)$ pontokon.

**<u>Megjegyzés:</u>**

Ha adott az $\overline{\mathcal{M}}$ projektív kúpszelet öt pontja, akkor a Pascal-tétel alkalmazásával meg lehet szerkeszteni a kúpszelet további pontjait. Ily módon egyértelműen meghatározható öt pont segítségével a kúpszelet.

# IV. fejezet: Projektív másodrendű görbesorok

Ebben a fejezetben arra a kérdésre keresünk választ, hogy ha ismerjük egy projektív másodrendű görbe öt független adatát, akkor ezek segítségével hogyan tudjuk meghatározni a görbe egyenletét. Ezt a kérdést a projektív másodrendű görbesorok segítségével tudjuk megválaszolni. Ehhez szükség van a másodrendű görbesorok fogalmának bevezetésére és néhány alapvető definíció ismertetésére.

## IV.1. Alapvető definíciók

Mint tudjuk, ha veszünk a $\overline{\sigma}$ projektív síkon két másodrendű görbét, $\overline{\mathcal{M}_1}$-et és $\overline{\mathcal{M}_2}$-t, akkor ezek egyenletét felírhatjuk a következő alakban:

$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\, \underline{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ ; illetve $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\, \underline{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ .

**Definíció:**

Tekintsük az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ szimmetrikus mátrixokat, melyekre teljesül, hogy nem minden elemük 0 illetve nem egymás skalárszorosai. Vegyük az általuk meghatározott $\overline{\mathcal{M}_1}$ és $\overline{\mathcal{M}_2}$ projektív másodrendű görbéket. $\overline{\mathcal{M}_1}$ és $\overline{\mathcal{M}_2}$ által meghatározott másodrendű görbesornak nevezzük azon másodrendű görbék összességét, melyeknek egyenlete felírható $\lambda \cdot \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} + \mu \cdot \underline{x}^T \underline{B}\, \underline{x} = 0$ alakban, ahol $\lambda$ és $\mu$ valós számok, és $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ .

**Megjegyzés:**

Nyilvánvaló, hogy ekvivalens a következő átalakítás:

$\lambda \cdot \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} + \mu \cdot \underline{x}^T \underline{B}\, \underline{x} = \underline{x}^T (\lambda \cdot \underline{A} + \mu \cdot \underline{B}) \underline{x} = 0.$

**Megjegyzés:**

Látható, hogy amennyiben $\mu = 0$ , akkor az $\overline{\mathcal{M}_1}$ másodrendű görbét nyerjük az egyenletből, illetve $\lambda = 0$ esetén az $\overline{\mathcal{M}_2}$ -t.

Ha $\lambda$ és $\mu$ a valós számok halmazán futnak, akkor az egyenletből megkapjuk a projektív másodrendű görbesor minden elemét.

Vegyük észre, hogy adott $(\lambda;\mu)$ számpár esetén az együtthatókat $(c\cdot\lambda;c\cdot\mu)$ -ra változtatva ugyanazt az elemét kapjuk a projektív másodrendű görbesornak.

**Definíció:**

$\overline{\mathcal{M}_1}$ és $\overline{\mathcal{M}_2}$ adott projektív kúpszeletek a $\overline{\sigma}$ síkon, melyek egyik közös pontja $R$ .

Az $R$ pontot a görbék duplapontjának nevezzük, ha a az $\overline{\mathcal{M}_1}$ és $\overline{\mathcal{M}_2}$ $R$-beli érintőegyenesei egybeesnek.

**Definíció:**

A másodrendű görbesor alappontjainak nevezzük az $\overline{\mathcal{M}_1} \cap \overline{\mathcal{M}_2}$ halmazbeli pontokat.

**Megjegyzés:**

A görbesornak maximum 4 alappontja van.

## IV.2. Az öt ponttal meghatározott másodrendű görbe egyenletének meghatározása

A $\bar{\sigma}$ projektív síkon adott öt pont, *A, B, C, D* és *E*, melyek közül semelyik három nem kollineáris. Olyan $\bar{\mathcal{M}}$ másodrendű görbét keresünk, amely áthalad mind az 5 ponton. Hogyan lehet meghatározni ezen másodrendű görbe egyenletét?

*Ötlet:*

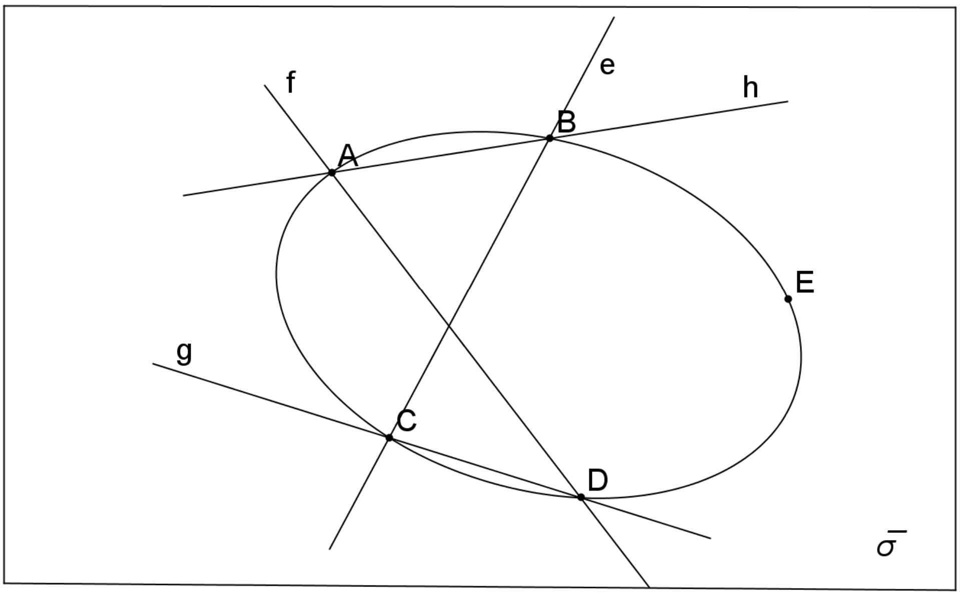
Vegyünk fel 4 egyenest az ábrán látható módon!

$$e = \langle B;C\rangle$$
$$f = \langle A;D\rangle$$
$$g = \langle C;D\rangle$$
$$h = \langle A;B\rangle$$

Az *e* egyenes egyenlete legyen $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, *f* egyenlete legyen $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$.

Ha összeszorozzuk a két egyenes egyenletét, egy $\bar{\mathcal{M}}_1$ másodrendű görbét leíró egyenletet kapunk:

$$(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)\cdot(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3) = 0\,.$$




*6. ábra: Projektív másodrendű görbe meghatározása*

Ugyanígy írjuk fel a *g* és *h* egyenesek egyenleteit és szorozzuk őket össze. Ekkor szintén kapunk egy $\bar{\mathcal{M}}_2$ másodrendű görbét leíró egyenletet. Ekkor a definíció szerint az *A, B, C,* és *D* pontok az alappontok az $\bar{\mathcal{M}}_1$ és $\bar{\mathcal{M}}_2$ által meghatározott görbesornál.

<u>*Összegezve:*</u>

Az $\bar{\mathcal{M}}_1$ görbét és az $\bar{\mathcal{M}}_2$ görbét két egyenes uniójaként állítottuk elő, az előbbit
*e* és *f*, utóbbit *g* és *h* egyenesek segítségével.

Így ezen görbék egyenletei a következő alakba írhatók:

$$\bar{\mathcal{M}}_1 \text{ egyenlete: } f_1(x_1; x_2;\ x_3) = 0$$

$$\bar{\mathcal{M}}_2 \text{ egyenlete: } f_2(x_1; x_2;\ x_3) = 0$$

Az alábbi tételhez felhasználjuk az itt leírt alapgondolatot és a *6. ábrát*.

**<u>Tétel:</u>**

Tekintsük a $\bar{\sigma}$ projektív síkon az $\bar{\mathcal{M}}_1$ és $\bar{\mathcal{M}}_2$ másodrendű görbéket. *E* legyen egy olyan pontja a projektív síknak, mely nem közös pontja az $\bar{\mathcal{M}}_1$-nek és $\bar{\mathcal{M}}_2$-nek.

Ekkor az általuk meghatározott másodrendű görbesornak pontosan egy olyan eleme van, amely áthalad az *E* ponton.

Bizonyítás:

Vegyük az előbbiekben megadott $\bar{\mathcal{M}}_1$ és $\bar{\mathcal{M}}_2$ görbék egyenleteinek lineáris kombinációját a $\lambda$ és $\mu$ valós együtthatókkal, ahol $\lambda\,;\mu \neq 0$.

$$\lambda \cdot f_1(x_1;\ x_2;\ x_3) + \mu \cdot f_2(x_1;\ x_2;\ x_3) = 0.$$

A fenti egyenlet egy másodrendű görbesort ír le.

$\bar{\mathcal{M}}_1$ és $\bar{\mathcal{M}}_2$ egyenleteire fennáll az alábbi két összefüggés:

*1. egyenlet:*

$$\bar{\mathcal{M}}_1 : \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0$$

*2. egyenlet:*

$$\bar{\mathcal{M}}_2 : \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} b_{rs}x_r x_s = 0\,.$$

A másodrendű görbék másik, ekvivalens definíciója alapján az $\bar{\mathcal{M}}_1$ görbét leíró egyenletet átírhatjuk az $\underline{x}^T \underline{A}\ \underline{x} = 0$ alakba, hasonló módon az $\bar{\mathcal{M}}_2$ görbét leíró egyenletet pedig $\underline{x}^T \underline{B}\ \underline{x} = 0$ alakba.

Vegyük az *1.* és *2. egyenlet*ek lineáris kombinációját a $\lambda$ és $\mu$ valós együtthatókkal, ahol fennáll $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ . Ekkor megkapjuk az $\bar{\mathcal{M}}_1$ és $\bar{\mathcal{M}}_2$ görbék által meghatározott másodrendű görbesor egyenletét $\lambda$ és $\mu$ paraméterrel.

*3. egyenlet:*

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + \mu \cdot \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} b_{rs}x_r x_s = 0\,.$$

Az egyenletet egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}(\lambda \cdot a_{rs} + \mu \cdot b_{rs})x_r x_s = 0\,.$$

Az egyenletet kielégítik a 4 alappont, *A*, *B*, *C* és *D* koordinátái, tehát ezek a pontok rajta vannak a kapott másodrendű görbesor minden elemén.

Az egyenletben az $a_{rs}$ és $b_{rs}$ együtthatók definíció szerint az $\overline{\mathcal{M}}_1$és $\overline{\mathcal{M}}_2$ másodrendű görbék egyenletében szereplő $\underline{A}$ és $\underline{B}$ szimmetrikus mátrixok *r.* sorbeli és *s.* oszlopbeli elemei, ahol $r; s = 1;\ 2;\ 3$ .

Így a *3.* egyenletet mátrixos formába a következőképpen írhatjuk:

$$\lambda \cdot (\underline{x}^T \underline{A}\ \underline{x}) + \mu \cdot (\underline{x}^T \underline{B}\ \underline{x}) = 0$$

$$\underline{x}^T (\lambda \cdot \underline{A} + \mu \cdot \underline{B})\ \underline{x} = 0\ .$$

Most azt szeretnénk megkeresni, hogy ezt az egyenletet milyen $\lambda$ és $\mu$ paraméterértékekkel elégítik ki az *E* pont $[e_1;\ e_2;\ e_3]$ koordinátái, ehhez hogyan kell megválasztanunk a $\lambda$ és $\mu$ paramétereket?

Vezessük be az $\alpha$ és $\beta$ valós számokat, melyekre fennáll

$$\alpha \coloneqq \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\, e_r e_s \text{ és}$$

$$\beta \coloneqq \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} b_{rs}\, e_r e_s\ .$$

Mivel az *E* pont nincs rajta mindkét görbén, ezért az $\alpha$ és $\beta$ közül legalább az egyik különbözik 0-tól.

A $\lambda \cdot (\underline{x}^T \underline{A}\ \underline{x}) + \mu \cdot (\underline{x}^T \underline{B}\ \underline{x}) = 0$ egyenlettel leírt másodrendű görbe pontosan akkor halad át az *E* ponton, ha a fenti behelyettesítésekkel nyert $\alpha$ és $\beta$ valós számokra fennáll a

$\lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \beta = 0$ egyenlőség. Ez a $\lambda;\ \mu$ ismeretlenekre egy homogén lineáris egyenlet.

A megoldó $(\lambda;\ \mu)$ számpárok egy egydimenziós alteret alkotnak ℝ-ben, vagyis egymás számszorosai.

A $\lambda;\ \mu$ együtthatókkal meghatározott másodrendű görbe és a $c\lambda;\ c\mu\ (c \neq 0)$ együtthatókkal meghatározott görbe ugyanaz. (Lásd: 27. oldal l. és 2. sor)

Mivel a megoldó számpárok egymásnak számszorosai, egyetlen olyan másodrendű görbe van a görbesoron, amely az *E* ponton is áthalad.

Célszerű nekünk ezek közül a $\lambda = \beta$ és $\mu = -\alpha$ megoldó számpárt választani.

Ily módon beláttuk, hogy a görbesornak kizárólag a $\beta \cdot \underline{A} - \alpha \cdot \underline{B}$ mátrix által leírt eleme tartalmazza az *E* pontot.

**Példa:**

Legyen adva a $\sigma$ euklideszi síkon öt nem kollineáris pont, *A, B, C, D* és *E*.

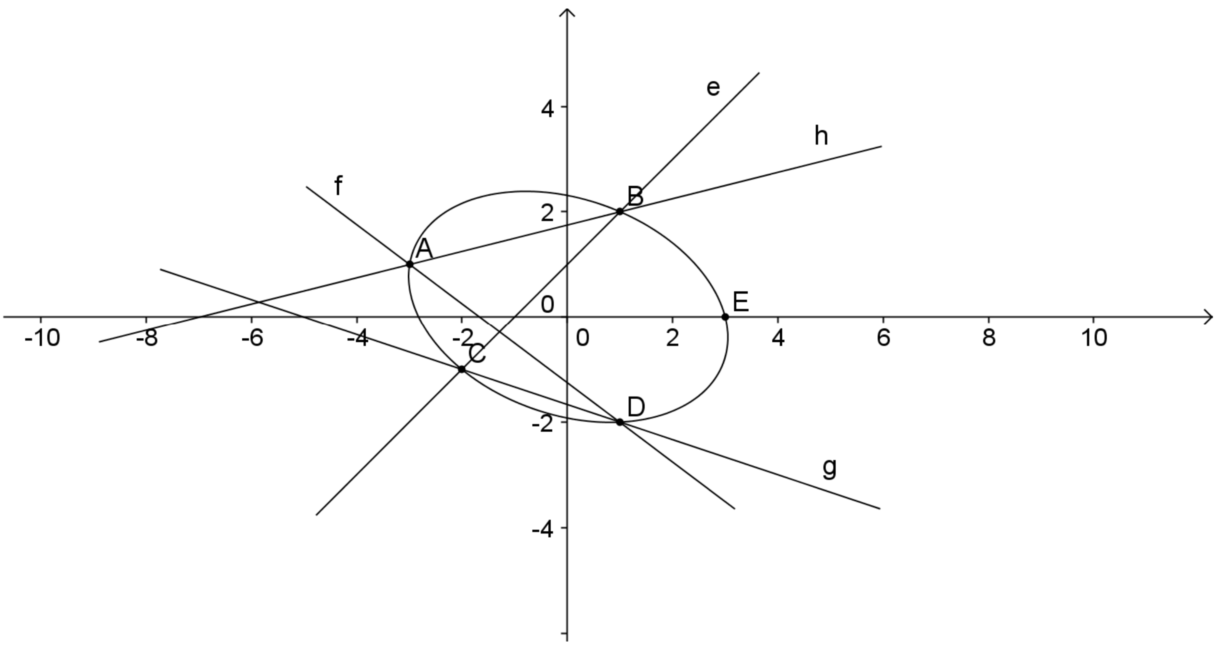
Az euklideszi síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben a pontok koordinátái legyenek most *A*(-3;1) ; *B*(1;2) ; *C*(-2;-1) ; *D*(1;-2) ; *E*(3;0).

Határozzuk meg azon másodrendű görbe egyenletét, amely áthalad mind az öt ponton!

Megoldás:

Használjuk fel a megoldáshoz az előbbi tétel bizonyításában alkalmazott módszert!

A megoldás menete: felírjuk az $\overline{\mathcal{M}}_1$ és $\overline{\mathcal{M}}_2$ görbéket, majd az általuk meghatározott másodrendű görbesort. Megkeressük ennek a görbesornak azt az elemét, amely áthalad az *E* ponton. Az előző tételből már tudjuk, hogy pontosan egy ilyen elem van a görbesoron.




Az $e \cup f$ és $g \cup h$ egyenespárok meghatároznak két másodrendű görbét.

Az egyenesek egyenletei:

$e = \langle B; C\rangle$ ; egyenlete: $x - y + 1 = 0$ ; homogén koordinátákkal: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ .

$f = \langle A; D\rangle$ ; egyenlete: $3x + 4y + 5 = 0$ ; homogén koordinátákkal: $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0$ .

$g = \langle C; D\rangle$ ; egyenlete: $x + 3y + 5 = 0$ ; homogén koordinátákkal: $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ .

$h = \langle A; B\rangle$ ; egyenlete: $x - 4y + 7 = 0$ ; homogén koordinátákkal: $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0$ .

Az alappontok a görbesoron: *A, B, C, D.*

$\bar{\mathcal{M}}_1$ egyenlete: $(x_1 - x_2 + x_3)(3x_1 + 4x_2 + 5x_3) = 0$, tehát

$3{x_1}^2 - 4{x_2}^2 + 5{x_3}^2 + x_1x_2 + 8x_1x_3 - x_2x_3 = 0$

$\bar{\mathcal{M}}_1$ mátrixa: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$

$\bar{\mathcal{M}}_2$ egyenlete: $(x_1 + 3x_2 + 5x_3)(x_1 - 4x_2 + 7x_3) = 0$ , vagyis

${x_1}^2 - 12{x_2}^2 + 35{x_3}^2 - x_1x_2 + 12x_1x_3 + x_2x_3 = 0$

$\bar{\mathcal{M}}_2$ mátrixa: $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 6 \\ -\frac{1}{2} & -12 & \frac{1}{2} \\ 6 & \frac{1}{2} & 35 \end{pmatrix}$

$\bar{\mathcal{M}}_1$ és $\bar{\mathcal{M}}_2$ görbék által meghatározott görbesor egyenlete:

$\underline{x}^T(\lambda \cdot \underline{A} + \mu \cdot \underline{B})\ \underline{x} = 0$ ; ahol $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$ ; $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

Ennek a görbesornak azt az elemét keressük, mely átmegy az $E$ ponton. $E$ Descartes-féle koordinátái: (3;0) , így homogén koordinátái: $[3\ ;0\ ;1]$.

$\alpha \coloneqq (3 \quad 0 \quad 1)\underline{A}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 56$

$\beta \coloneqq (3 \quad 0 \quad 1)\underline{B}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 80$

A keresett görbe mátrixa: $\beta \cdot \underline{A} - \alpha \cdot \underline{B} = 80 \cdot \underline{A} - 84 \cdot \underline{B}$, a túl nagy együtthatók miatt egyszerűsítsünk 8-cal: $10 \cdot \underline{A} - 7 \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 23 & \frac{17}{2} & -2 \\ \frac{17}{2} & 44 & -\frac{17}{2} \\ -2 & -\frac{17}{2} & -195 \end{pmatrix}$.

Eszerint a keresett másodrendű görbe egyenlete:

$23{x_1}^2 + 44{x_2}^2 - 195{x_3}^2 + 17x_1x_2 - 4x_1x_3 - 17x_2x_3 = 0$.

Az euklideszi síkon vett koordinátákkal: $23x^2 + 44y^2 + 17xy - 4x - 17y - 195 = 0$.

Mivel a $D = a_{11} \cdot a_{22} - {a_{12}}^2$ determináns értékére fennáll

$D = 21 \cdot 44 - (\frac{17}{2})^2 = 851{,}75 > 0$ ; ezért egy ellipszist kaptunk.

## IV.3. Projektív másodrendű görbe egyenletének meghatározása négy pontjával és az egyikben vett érintőjével

Az előbbiekben beláttuk, hogy a projektív síkon vett öt nem kollineáris pont esetében a másodrendű görbesorok módszerének segítségével egyértelműen meghatározható az öt ponton átmenő másodrendű projektív kúpszelet.

Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor adott a görbéről négy pont, és az egyikben a görbe érintője.

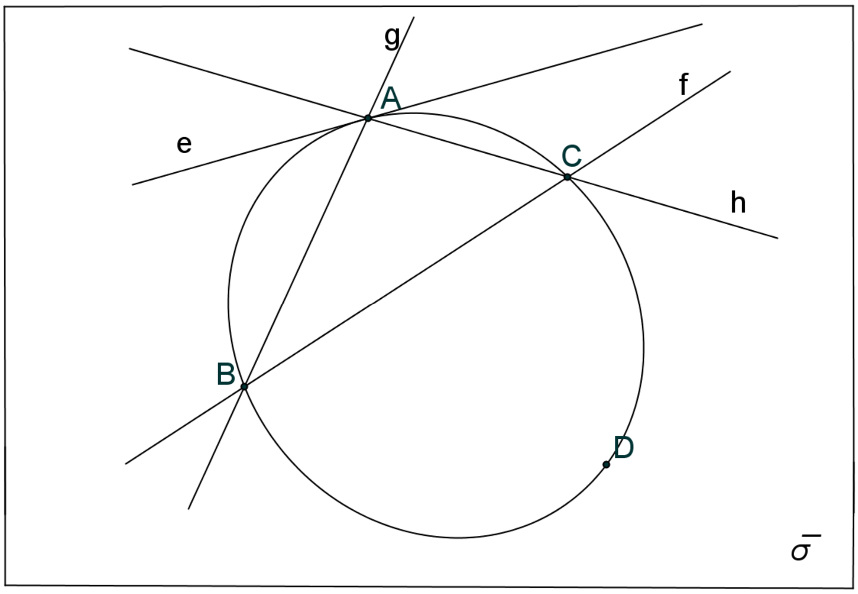
Ezen öt adat alapján szeretnénk meghatározni a projektív kúpszeletet, illetve annak egyenletét.

**Tétel:**

Legyen adott a $\bar{\sigma}$ projektív síkon négy egyenes, *e; f*; *g* és *h*, melyek közül *e; g* és *h* illeszkednek a sík egy *A* pontjára, de az *f* egyenes már nem. Tekintsük az $\overline{\mathcal{M}_1} = e \cup f$ és $\overline{\mathcal{M}_2} = g \cup h$

két-két egyenes uniójaként előállított elfajuló másodrendű görbéket.

Ekkor az $\overline{\mathcal{M}_1}$ és $\overline{\mathcal{M}_2}$ görbék által meghatározott görbesor minden elemének az *A* pontbeli érintője azonos *e*-vel.




*7. ábra: Másodrendű görbe meghatározása négy pontjával és egyikben az érintővel*

Bizonyítás:

A $g$ és $h$ egyenesek az $A$ pontban metszik egymást. A **III.7.** alfejezetben már láttuk, hogy ekkor az $\overline{\mathcal{M}_2} = g \cup h$ elfajuló másodrendű görbe szinguláris pontja az $A$ pont.

$A$ egy homogén koordinátahármasa legyen $[s_1 \,;\, s_2 \,;\, s_3\,]$.

Ekkor definíció szerint fennáll, hogy $\underline{B}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = 0$ .

Az $e$ és $f$ egyenesek metszéspontját jelölje $P$. Tudjuk, hogy az $\overline{\mathcal{M}_1}$ görbe szinguláris pontja ez a $P$ pont. Mivel $A$ nem azonos $P$-vel, ezért az $A$ nem szinguláris pontja az $\overline{\mathcal{M}_1}$-nek.

Az $A$ pont konjugált $\overline{\mathcal{M}_1}$-re nézve a $P$ ponthoz, ezért az $A$ pont polárisa az $\overline{\mathcal{M}_1}$-re vonatkozóan az $e = \langle A\,;P \rangle$ egyenes. Ennek egy homogén koordinátahármasát a következő egyenlettel adhatjuk meg: $\underline{A}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

Legyen $\overline{\mathcal{M}_3}$ az az $\overline{\mathcal{M}_1}$ és $\overline{\mathcal{M}_2}$ görbék által meghatározott görbesor egy nemelfajuló eleme, melyet a $\lambda \cdot \underline{A} + \mu \cdot \underline{B}$ mátrixszal határozunk meg, $\lambda$-ra és $\mu$-re vonatkozó szokásos feltételekkel.

Tudjuk, hogy mivel $\underline{B}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = 0$ illetve $\underline{A}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, ezért fennáll a

$\left(\lambda \cdot \underline{A} + \mu \cdot \underline{B}\right)\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \underline{A}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ összefüggés.

Így tehát azt kaptuk, hogy az $\overline{\mathcal{M}_3}$ közönséges másodrendű görbének az $A$ pontbeli érintőegyenese azonos az $e$ egyenessel.

**Példa:**

Legyen adva a $\sigma$ euklideszi síkon négy nem kollineáris pont, *A, B, C,* és *D* és az *e* egyenes.

Az euklideszi síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben adottak a pontok koordinátái: $A$(0;2) ; $B$(1;1) ; $C$(-2;-1) ; $D$(1;-1), illetve az $e$ egyenlete: $x - 3y + 6 = 0$.

Határozzuk meg azon másodrendű görbe egyenletét, amely áthalad mind a négy ponton és $A$-beli érintője éppen az $e$ egyenes!

Megoldás:

Tekintsük az $f = \langle B; C \rangle$ , $g = \langle A; B \rangle$ és $h = \langle A; C \rangle$ egyeneseket. Az $e \cup f$ és $g \cup h$ egyenespárok meghatároznak két másodrendű görbét, $\overline{\mathcal{M}_1}$-et és $\overline{\mathcal{M}_2}$-t.

Használjuk fel a megoldáshoz az előbbi alfejezetben alkalmazott görbesorok módszerét, továbbá azt az eredményt, miszerint az $\overline{\mathcal{M}}_1$ és $\overline{\mathcal{M}}_2$ görbék által meghatározott görbesor minden elemének érintője az *A* pontban az *e* egyenes!

A megoldás menete: felírjuk az $\overline{\mathcal{M}}_1$ és $\overline{\mathcal{M}}_2$ görbéket, majd az általuk meghatározott másodrendű görbesort. Megkeressük ennek a görbesornak azt az elemét, amely áthalad a *D* ponton.

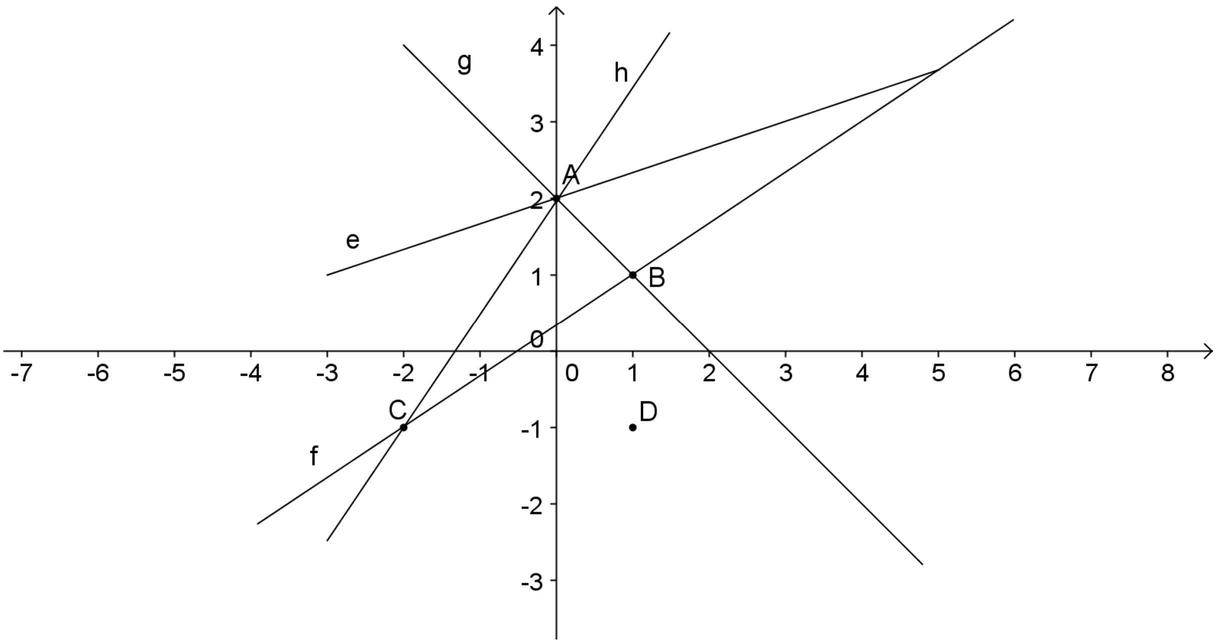
Az egyenesek egyenletei:

$e$ egyenlete: $x - 3y + 6 = 0$.; homogén koordinátákkal: $x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$

$f = \langle B; C\rangle$ ; egyenlete: $2x - 3y + 1 = 0$ ; homogén koordinátákkal: $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$

$g = \langle A; B\rangle$; egyenlete: $x + y - 2 = 0$ ; homogén koordinátákkal: $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

$h = \langle A; C\rangle$ ; egyenlete: $3x - 2y + 4 = 0$ ; homogén koordinátákkal: $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$




Az alappontjaink: *A, B,* és *D* pontok, ez az a három pont, ami az $\overline{\mathcal{M}}_1$ és $\overline{\mathcal{M}}_2$ görbék közös pontja.

$\overline{\mathcal{M}}_1$ egyenlete: $(x_1 - 3x_2 + 6x_3)(2x_1 - 3x_2 + x_3) = 0$

$$2{x_1}^2 + 9{x_2}^2 + 6{x_3}^2 - 9x_1x_2 + 13x_1x_3 - 21x_2x_3 = 0$$

$\overline{\mathcal{M}}_1$ mátrixa: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{9}{2} & \frac{13}{2} \\ -\frac{9}{2} & 9 & -\frac{21}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{21}{2} & 6 \end{pmatrix}$

$\overline{\mathcal{M}}_2$ egyenlete: $(x_1 + x_2 - 2x_3)(3x_1 - 2x_2 + 4x_3) = 0$

$3{x_1}^2 - 2{x_2}^2 - 8{x_3}^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3 = 0$

$\overline{\mathcal{M}}_2$ mátrixa: $\underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

Írjuk fel az $\overline{\mathcal{M}}_1$ és $\overline{\mathcal{M}}_2$ görbék által meghatározott görbesor egyenletét:

$\underline{x}^T(\lambda \cdot \underline{A} + \mu \cdot \underline{B})\ \underline{x} = 0$ ; ahol $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$ ; $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

Ennek a görbesornak azt az elemét keressük, mely átmegy az $D$ ponton. $D$ Descartes-féle koordinátái: (1;-1) , így homogén koordinátái: $[1\,; -1\,; 1]$.

$$\alpha \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 60$$

$$\beta \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{B} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -18$$

A keresett görbe mátrixa: $\beta \cdot \underline{A} - \alpha \cdot \underline{B} = -18 \cdot \underline{A} - 60 \cdot \underline{B}$, a nagy együtthatók miatt egyszerűsítsünk 6-tal: $-3 \cdot \underline{A} - 10 \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} -36 & \frac{17}{2} & -\frac{19}{2} \\ \frac{17}{2} & -7 & -\frac{17}{2} \\ -\frac{19}{2} & -\frac{17}{2} & 62 \end{pmatrix}$

Eszerint a keresett másodrendű görbe egyenlete:

$-36{x_1}^2 - 7{x_2}^2 + 62{x_3}^2 + 17x_1x_2 - 19x_1x_3 - 17x_2x_3 = 0.$

Az euklideszi síkon vett koordinátákkal:

$-36x^2 - 7y^2 + 17xy - 19x - 17y + 62 = 0.$

Mivel a $D = a_{11} \cdot a_{22} - {a_{12}}^2 = 36 \cdot 7 - \frac{17^2}{4} = 179{,}25 > 0$ ; ezért egy ellipszist kaptunk.

## IV.4. Projektív másodrendű görbe egyenletének meghatározása három pontjával és két érintőjével

A **IV.2.** és **IV.3.** alfejezetekben kapott eredmények felhasználásával most adunk egy módszert arra, hogy ha adott a $\overline{\sigma}$ projektív síkon három általános helyzetű pont, $A$, $B$, $C$ és ezek közül kettőben egy-egy egyenes, akkor egyértelműen meg tudjuk határozni azt a projektív másodrendű görbét, aminek a megadott három pont eleme illetve a két egyenes az érintője.

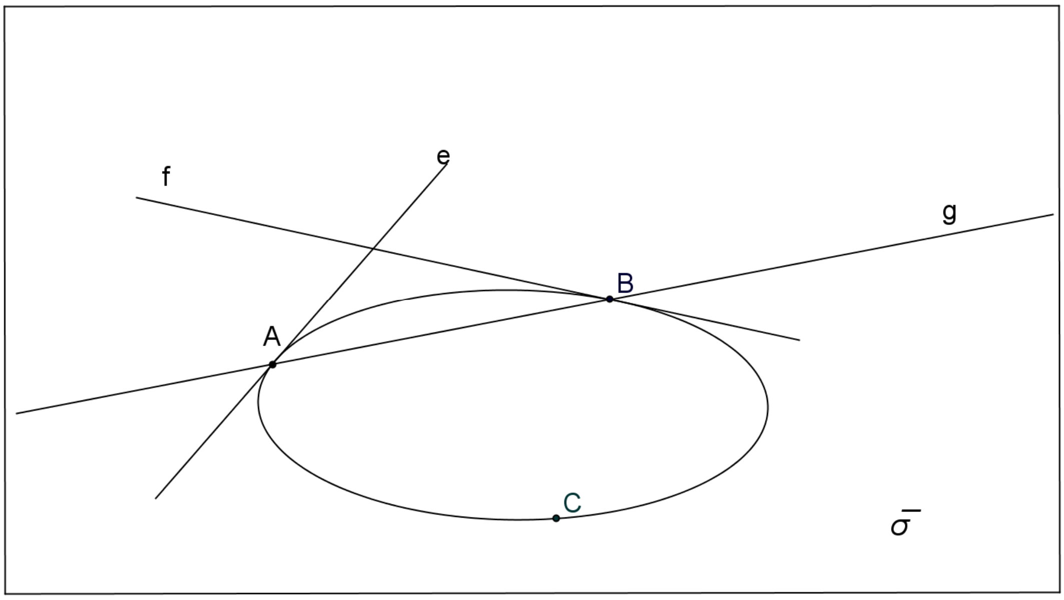
**Tétel:**

A $\bar{\sigma}$ projektív síkon legyenek adva az $e; f$ és $g$ egyenesek, melyek nem illeszkednek a sík egyazon pontjára. A $g$ egyenes messe az $e$; $f$ egyeneseket az $A = g \cap e$ és $B = g \cap f$ pontokban.

Tekintsük az $\overline{\mathcal{M}_1} = e \cup f$ és $\overline{\mathcal{M}_2} = g$ elfajuló másodrendű görbéket. Ekkor az $\overline{\mathcal{M}_1}$ és $\overline{\mathcal{M}_2}$ görbék által meghatározott görbesor minden elemének az *A, B* pontbeli érintőegyenesei azonosak az *e* egyenessel illetve az *f* egyenessel.

Bizonyítás:

Tekintsük a két megadott egyenest, $e$-t és $f$-et. Ezen egyenesek uniója meghatároz egy elfajuló másodrendű görbét, ezt jelölje $\overline{\mathcal{M}}_1$, és ennek meghatározó mátrixa pedig legyen $\underline{A}$ . Vegyük fel az ábrán látható módon egy harmadik egyenest, $g$-t, amire fennáll: $g = \langle A\,; B \rangle$.




*8. ábra: Másodrendű görbe meghatározása három pontjával és kettőben egy-egy érintővel*

Ekkor a $g$ egyenes is egy elfajuló másodrendű görbét határoz meg, amit jelöljünk $\overline{\mathcal{M}}_2$-vel. Ennek mátrixa legyen $\underline{B}$ . Az *A* pont egy homogén koordinátahármasa legyen $[a_1\,;\ a_2\,;\ a_3]$ .

Mivel $A$ illeszkedik az $\overline{\mathcal{M}}_2$ egyenesre, ezért ő egy szinguláris pont az $\overline{\mathcal{M}}_2$-re vonatkozóan, tehát fennáll a $\underline{B}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$ összefüggés.

$A$ pont illeszkedik az $\overline{\mathcal{M}}_1$-re és nem szinguláris pont $\overline{\mathcal{M}}_1$-re vonatkozóan, mivel nem esik egybe az $e$ és $f$ egyenesek $P$ metszéspontjával.

Az $A$ pont konjugált $\overline{\mathcal{M}_1}$-re nézve a $P$ ponthoz, ezért az $A$ pont polárisa az $\overline{\mathcal{M}_1}$-re vonatkozóan az $e = \langle A\,; P \rangle$ egyenes. Ennek egy homogén koordinátahármasát a következő egyenlettel adhatjuk meg: $\underline{A}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

Így azt kapjuk, hogy igaz a következő egyenlőség:

$$\left(\lambda \cdot \underline{A} + \mu \cdot \underline{B}\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \underline{A}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Hasonló módon láthatjuk be, hogy a $B$ pont $[b_1\,;\, b_2\,;\, b_3]$ koordinátáira

$\left(\lambda \cdot \underline{A} + \mu \cdot \underline{B}\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \underline{A}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, ahol $[v_1\,;\, v_2\,;\, v_3]$ az $f$ egyenes homogén koordinátái.

Így azt kaptuk, hogy az $e$ és $f$ egyenesek az $\overline{\mathcal{M}}_1$ és $\overline{\mathcal{M}}_2$ görbék által meghatározott görbesor minden eleméhez érintők.

**<u>Példa:</u>**

Legyen adva a $\sigma$ euklideszi síkon három általános helyzetű pont, *A, B,* és *C* és az *e* és *f* egyenesek az ábrán látható módon.

Az euklideszi síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben adottak a pontok koordinátái:

*A*(-1;1) ; *B*(2;3) ; *C*(2;1) illetve az $e$ egyenlete: $x - y + 2 = 0$ ,

$f$ egyenlete: $3x + 2y - 12 = 0$ .

Határozzuk meg azon másodrendű görbe egyenletét, amely áthalad mind az 3 ponton és *A*-beli érintője az *e* egyenes, *B*-beli érintője az *f* egyenes!

A megoldás során használjuk fel a **<u>IV.2</u>**. alfejezetben megfogalmazott tételt.

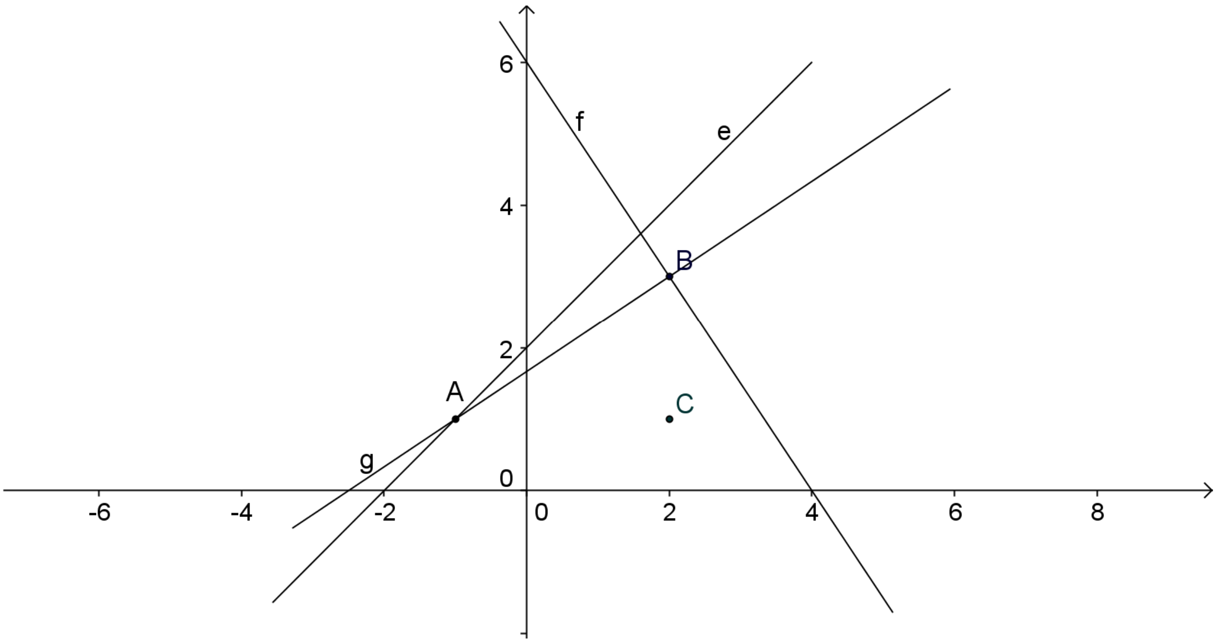
Az $e \cup f$ és $g = \langle A; B \rangle$ meghatároznak két másodrendű görbét, $\overline{\mathcal{M}}_1$-et és $\overline{\mathcal{M}}_2$-t.

Az egyenesek egyenletei:

$e$ egyenlete: $x - y + 2 = 0$ .; homogén koordinátákkal: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

$f$ egyenlete: $3x + 2y - 12 = 0$ ; homogén koordinátákkal: $3x_1 + 2x_2 - 12x_3 = 0$

$g$ egyenlete: $2x - 3y + 5 = 0$ ; homogén koordinátákkal: $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$




$\bar{\mathcal{M}}_1$ egyenlete: $(x_1 - x_2 + 2x_3)(3x_1 + 2x_2 - 12x_3) = 0$

$3{x_1}^2 - 2{x_2}^2 - 24{x_3}^2 - x_1x_2 - 6x_1x_3 + 16x_2x_3 = 0$ .

$\bar{\mathcal{M}}_1$ mátrixa: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -3 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 8 \\ -3 & 8 & -24 \end{pmatrix}$.

$\bar{\mathcal{M}}_2$ egyenlete: $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^2 = 0$ , vagyis kifejtve

$4{x_1}^2 + 9{x_2}^2 + 25{x_3}^2 - 12x_1x_2 + 20x_1x_3 - 30x_2x_3 = 0$ .

$\bar{\mathcal{M}}_2$ mátrixa: $\underline{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 10 \\ -6 & 9 & -15 \\ 10 & -15 & 25 \end{pmatrix}$.

Írjuk fel az $\bar{\mathcal{M}}_1$ és $\bar{\mathcal{M}}_2$ görbék által meghatározott görbesor egyenletét:

$\underline{x}^T(\lambda \cdot \underline{A} + \mu \cdot \underline{B})\, \underline{x} = 0$ ; ahol $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$ ; $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

Ennek a görbesornak azt az elemét keressük, mely átmegy a *C* ponton. *C* Descartes-féle koordinátái: (2;1) , így homogén koordinátái: $[2\,;1\,;1]$.

$$\alpha \coloneqq (2 \quad 1 \quad 1)\underline{A}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = -12$$

$$\beta \coloneqq (2 \quad 1 \quad 1)\underline{B}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 36$$

A keresett görbe mátrixa: $\beta \cdot \underline{A} - \alpha \cdot \underline{B} = 36 \cdot \underline{A} + 12 \cdot \underline{B}$, a nagy együtthatók miatt egyszerűsítsünk 12-vel: $3 \cdot \underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix}13 & -\frac{15}{2} & 1\\ -\frac{15}{2} & 3 & 9\\ 1 & 9 & -47\end{pmatrix}$.

Eszerint a keresett másodrendű görbe egyenlete:

$13{x_1}^2 + 3{x_2}^2 - 47{x_3}^2 - 15x_1x_2 + 2x_1x_3 + 18x_2x_3 = 0.$

Az euklideszi síkon vett koordinátákkal:

$13x^2 + 3y^2 - 15xy + 2x + 18y - 47 = 0.$

$D = a_{11} \cdot a_{22} - {a_{12}}^2 = 13 \cdot 3 - \frac{15^2}{4} = -17{,}25 < 0$ ; ezért ebben az esetben egy hiperbolát kapunk.

## Forrásjegyzék

1. H. S. M. Coxeter: Projektív geometria
(Gondolat; Budapest, 1986.)

2. Horvay Katalin - Reiman István: Projektív geometria (egyetemi jegyzet)
(Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest, 1999.)

3. Reiman István: A geometria és határterületei
(Gondolat; Budapest, 1986.)

4. Hajós György: Bevezetés a geometriába
( Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest, 1999.)

5. Sain Márton: Matematikatörténeti ABC
(Tankönyvkiadó; Budapest, 1974.)