Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei

SZAKDOLGOZAT

Készítette: **Kapitány Benedek**

Matematika Bsc, Tanári szakirány

Témavezető: **Maus Pál**

(műszaki tanár)

Matematikatanítási és Módszertani Központ

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

2011

Tartalomjegyzék

1.1. Bevezetés

Szakdolgozatom célja, hogy a közép- és emelt szintű képzés tükrén keresztül átfogó rendszert adjak a szélsőérték feladatokról az ismeretek általános iskolai bevezetésétől kezdve, a középiskolai kiszélesítésen át, az egyetemi specializációig.

Ezért dolgozatom első szakaszában a Nemzeti alaptanterv rövid ismertetése után a szélsőérték feladatok NAT-ban megfogalmazott bevezetését, alkalmazását követem nyomon úgy horizontálisan, mint vertikálisan, a különböző tankönyvcsaládok és iskolatípusok, illetve az egymásra épülő évfolyamok vizsgálatával. A középiskolai tanulmányokat lezáró közép- és emelt szintű érettségik témámhoz kapcsolódó követelményeit is példákkal illusztrálom.

A középső szakaszban kiegészítést adok a szélsőérték számítás felsőoktatás-beli bemutatásával, felvázolva a középiskolában megismert módszerek általánosításait, folyományait, ismertetve az új módszereket.

Az utolsó szakaszban középiskolai matematika versenyek feladatai közül válogatok, melyek ugyan nem igényelnek szélesebb tudásanyagot, de megoldásukhoz több kreatívitás, intuíció szükséges, nem elegendő a sablonok használata.

A dolgozat megírásával reményeim szerint egyben segítő kezet nyújtok önmagamnak a tanárrá válásban, a rendszerezéssel számomra is nyilvánvalóbbá válnak az összefüggések.

A képleteket a Lyx program segítségével készítettem.

Köszönetet mondok konzulensemnek, Maus Pálnak, aki nélkülözhetetlen segítőm volt a megírásban, szempontrendszert, látásmódot adott, és mindig rendelkezésemre állt. Köszönetet mondok még középiskolai matematika tanáromnak, Kötél Tamásnak, illetve egyetemi professzoraimnak és tanáraimnak, akik segítették a tanárrá válásomat.

1.2. A Nemzeti alaptanterv

A közoktatás szabályozására létrejött NAT legutóbb kiadott, 2007-es dokumentuma már harmadik a rendszerváltás óta kiadott modern tantervek sorában. Nem árt tudni, hogy a második, 2003-as NAT bevezetése az oktatásba a mai napig folyamatban van. Ezért dióhéjban összefoglalom az eddig kiadott három NAT lényeges pontjait.

- Az első NAT-ot 1995-ben adták ki. Egy Magyarországon akkor új, ú.n. kétpólusú szabályozás központi, relációs oldalát deklarálta - az iskolák ehhez a központi oldalhoz viszonyítva definiálhatták önmagukat, pedagógiai programjukat, tantervüket. A dokumentum általános fejlesztési és részletes követelményeket fogalmazott meg az első 10 osztály számára. A hagyományos oktatás tantárgyakat elkülönítő gondolkodása helyett a teljes tanítási tartalom integrált szemléletére szólított fel.

- A NAT-2003-ban megmaradt a kétpólusú rendszer, de a követelmények helyét fejlesztési feladatok vették át, amelyeket immár a teljes közoktatásra, 1-12. osztályig dolgoztak ki, mivel időközben a tankötelezettséget a 18. életévig meghosszabbították. A hangsúly a tanulás kompetencia alapú jellegére került, ezzel szinkronban megnőtt a kiemelt fejlesztési feladatok, vagyis a kereszttantervek jelentősége és szerepe.

- A NAT-2007 továbbfejlesztette az általános fejlesztési feladatok és a kereszttantervek koncepcióját. A dokumentum megalapozta az EU által javasolt kulcskompetenciák rendszerét, illetve az élet egészére kiterjedő tanulás szemléletét.

1.3 Alapelvek, célok

A dokumentum alapvetésként fogalmazza meg, hogy a matematikai gondolkodást, mint sajátos emberi megismerési formát közvetítsük. Kívánatosnak tartja a tudáshalmaz spirális felépítését, vagyis az absztrakciós képességek fejlődésével, a matematika területeinek folyamatos összeépülése közben szélesíteni az ismeretanyagot. Az első 6 osztálynál hangsúlyozza a későbbi ismeretanyag kellő megalapozásának fontosságát, a felsőbb évfolyamoknál pedig a tananyag differenciálását, úgy a hasznosíthatóság elvének, mint a tanuló egyedi igényeinek megfelelően.

2.1. Tantervek

Az általános iskola 7-8. osztályos, a gimnáziumi és az emelt szintű tanterveket a szélső-érték feladatokhoz kapcsolódó témakörök szempontjából vizsgáltam, a Mozaik Kiadó által kiadott, illetve a Magyar Közlönyben megjelent tanterveket használva. Az emelt szint témakörei közül csak azokat jelzem, amelyek nem szerepelnek a középszintűek között.

2.2. Általános iskola 7-8. osztály

Összefüggések, függvények, sorozatok

Függvények egyszerű tulajdonságai (tengelymetszetek, növekedés, csökkenés, szimmetriák, függvényérték vizsgálata).
Egyismeretlenes egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása.

2.3.1. Gimnázium 9.osztály

Függvények, sorozatok

Középszint	Emelt szint
A függvény fogalma, elemi tulajdonságai; abszolútérték függvény, másodfokú függvény.	Az elsőfokú-, másodfokú függvények grafikonjainak elkészítése és a függvények elemi tulajdonságai. A monotonitás, a szélsőértékek, a korlátosság fogalma. Kétismeretlenes egyenletrendszerek, egyenlőtlenségrendszerek grafikus megoldása.

2.3.2. Gimnázium 10.osztály

Logika

Emelt szint
A teljes indukció módszere, alkalmazása különböző típusú feladatok megoldásában.

Számelmélet, algebra

Középszint	Emelt szint
A másodfokú egyenlet megoldása, a megoldóképlet, összefüggés két pozitív szám számtani és mértani közepe között. Másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatok. Egyszerű másodfokú egyenlőtlenség megoldása.	Másodfokú egyenletek, a megoldóképlet, a diszkrimináns. Másodfokúra visszavezethető magasabbfokú egyenletek megoldása. Másodfokú egyenletrendszerek. Szöveges feladatok. Másodfokú egyenlőtlenség megoldása. Másodfokúra vezető szélsőérték problémák. Másodfokú függvényre visszavezethető gyakorlati és fizikai szélsőérték problémák megoldása. n db pozitív szám számtani és mértani közepének összehasonlítása.

Függvények

Középszint
A négyzetgyök függvény. A szögfüggvények tulajdonságai (monotonitás, zérushelyek, szélsőértékek), a függvények ábrázolása.

2.3.3. Gimnázium 11. osztály

Algebra

Középszint
Másodfokúra visszavezethető egyenletek.

Függvények

Középszint	Emelt szint
A tanult függvények tulajdonságai (zérushely, szélsőérték, monotonitás).	A monotonitás, a szélső értékek, a korlátosság fogalma.

Sorozatok

Emelt szint
Az *n*-edik tag és az összegképlet. Fibonacci-sorozat, rekurzív sorozatok. Számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép összehasonlítása. Sorozatok korlátossága, monotonitása. A sorozat határértékének fogalma. A konvergens sorozatok tulajdonságai. Határértékszámítási módszerek. Sorozatok konvergenciája. A végtelen mértani sor.

Geometria

Középszint
Távolság, szög, terület meghatározása gyakorlati feladatokban (fizikában).

Analízis

Emelt szint
A függvény folytonossága, a folytonos függvények tulajdonságai. Függvény határértéke a véges helyen és a végtelenben. Függvény határértéke jobbról és balról, a határérték tulajdonságai, kiszámítási módjai. A differenciálhányados, a differenciálhatóság, a deriváltfüggvény. Összeg, szorzat, hányados, polinomok, algebrai törtfüggvények, trigonometrikus függvények deriváltja. Az összetett függvény deriválási szabálya. Az inverz függvény deriváltja. Az exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. Konvexitás, konkavitás. Inflexiós pontok. A függvénymenet vizsgálatára, a szélsőértékekre vonatkozó tételek. Teljes függvényvizsgálat az analízis eszközeivel.

2.3.4. Gimnázium 12. osztály

Számelmélet, algebra

Középszint
Másodfokú egyenlet és egyenlőtlenség. Négyzetgyökös kifejezések és egyenletek. Az egyenlet-megoldás módszerei. Egyszerű kétismeretlenes elsőfokú és másodfokú egyenletrendszer.

Függvények, sorozatok

Tartalom
Számtani és mértani sorozat, az n. tag, az első n elem összege.
A függvényekről tanultak áttekintése, rendszerezése. Függvényvizsgálat függvényábrák segítségével.

Geometria

Középszint	Emelt szint
A tanult poliéderek, illetve a forgáshenger és a forgáskúp, a csonkagúla, a csonkakúp, a gömb felszíne, térfogata.	Görbevonalú síkidomok területe. Összetett feladatok térben.

3.1. Tankönyvek

A NAT begyökereztetésének kiemelt célja, hogy az országosan alkalmazott kerettantervek és taneszközök megfeleljenek a kulcskompetenciáknak és figyelembe vegyék a fejlesztési feladatokat is. A tankönyv fogalma éppenezért nagy változáson ment át az elmúlt évtizedben. Erősödött a fejlesztő jelleg, több funkcionális tudást nyújt, nagyobb teret kapnak a megértést segítő feladatok, képek, ábrák. A különböző tankönyveket, egy 8. osztályost, két középiskolás négy évfolyamát és egy emelt szintű négy évfolyamát ugyancsak a szélsőérték feladatokra koncentrálva vizsgáltam. Általánosságban elmondhatjuk, hogy, a kerettanterveknek megfelelően vertikálisan a tankönyvcsaládokon belül fokozatos felépítésben, horizontálisan pedig a tankönyvcsaládok közötti reláció függvényében változó mennyiségben találhatunk szélsőérték feladatokat.

3.2.1. Csahóczi, Csatár, Kovács, Morvai, Szeredi – Matematika

Ebben a könyvben csak egy-két szélsőérték feladatot találhatunk, azok is inkább nagyobb feladatok részeként jelennek meg, külön meg nem nevezve, de felhívva a figyelmet a szélsőérték számítás fontosságára illetve felkeltve az érdeklődést az újdonsága iránt.

<u>3.2.2. 8. osztály</u>

Geometria

- I./91.o./3. Mekkora lehet egy háromszög legnagyobb szögének legkisebb értéke?
  (m.o.: háromszög belső szögeinek összege $180°$, szimmetria)

Függvények

- II./17.o./3. Ha egy követ $30\frac{m}{s}$ -mal ferdén felfelé hajítunk, a mozgást leíró függvény: $t \mapsto 30t - 5t^2$ Milyen maximális magasságot ért el a kő?
  (m.o.: $30t - 5t^2 = 0$ szorzattá alakítva $t(30-5t)=0$, aminek zérushelyei $t_1=0$ és $t_2=6$, szimmetria miatt a maximum $\frac{t_1+t_2}{2}$ -ben lesz)

3.3.1. Hajnal, Számadó, Békéssy – Matematika

A tankönyvcsalád a hagyományosabb kiadványok csoportjába sorolható, mely a gimnáziumok számára íródott. A 9. osztályos könyv az első nyolc osztály anyagának összefoglalásával indít. A 10. osztályos könyv a másodfokú egyenletek, geometria és trigonometria témaköreiben tárgyal szélsőérték feladatokat. A könyv végén tartalmaz egy ú.n. kis érettségit, ami kevesebb feladatból áll, mint az érettségi feladatsor, és kevesebb tananyagot is ölel fel, illetve nagyobb arányban vannak benne a 10. osztály tananyagához kapcsolódó feladatok. Ezek között is szerepel egy, másodfokú egyenlet szélsőértékével foglalkozó feladat. A 11-es könyv alig tartalmaz szélsőérték feladatokat, ami valószínűleg a nagy terjedelemben tárgyalt, teljesen új témának, a koordináta geometriának köszönhető. A 12-es könyv a terület-, felszín-, térfogatszámítás, függvények és a geometria témakörökben tárgyal szélsőérték feladatokat.

3.3.2. 9.osztály

Algebra

- 140.o/143. $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqslant 4$, igazoljuk, hogy pozitív a,b-re fennáll!
  (m.o.: elemi átalakításokkal $b^2 - 2ab + a^2 \geqslant 0$, teljes négyzetté alakítható)

Függvények

- 255.o/248. Két szám összege 6. Határozzuk meg őket úgy, hogy négyzetösszegük minimális legyen!
  (m.o.: kell $x^2 + (6-x)^2$ minimuma, rendezve $\frac{-b}{2a}$ -nál szélsőérték hely, behelyettesítve szélsőérték, ami minimum, mert a parabola felfelé nyílik)
- 255.o. /247. Egyenes falhoz kapcsolódóan 16 m hosszú kerítéssel maximális területű téglalap alakú részt akarunk három oldalról bekeríteni. Mekkorák az oldalak?
  (m.o.: téglalap területe $x(16-2x)$, szélsőérték $\frac{-b}{2a}$ -nál, ami maximum, mert a parabola lefelé nyílik)

3.3.3. 10. osztály

Függvények

- 73.o./ 120 Adott *42 cm* hosszú szakaszt 2 részre osztunk, majd a két rész fölé négyzeteket rajzolunk. Keressük meg, milyen hosszú szakaszoknál lesz a két négyzet területének összege minimális!
  (m.o.: kell $x \mapsto x^2 + (42 - x)^2$ minimuma, $\frac{-b}{2a}$ szélsőérték hely → szélsőérték (mivel *a>0*, ezért mininum)
- 73.o./121. Tudjuk, hogy a körcikk területe, ívhossza és sugara között a $t = \frac{i \cdot r}{2}$ összefüggés van. A 80 cm kerületű körcikkek közül milyen sugarú körben, milyen ívhosszú körcikknek lesz maximális a területe?
  (m.o.: kell $T = (80 - 2r)\frac{r}{2}$ maximuma, $\frac{-b}{2a}$ szélsőérték hely, ami maximum hely, mert *a < 0*)

Algebra

- 82.o./ 126. $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geqslant 4$, igazoljuk, hogy pozitív a,b-re fennáll!
  (m.o.: az értelmezési tartományon megengedett elemi átalakításokkal éppen a számtani- és harmonikus közepek közti egyenlőtlenséget kapjuk 2 tagra:
  $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$)

Geometria

- 158.o./236. A kör egy húrját a P pont *6 cm* és *54 cm* hosszú szakaszra bontja. Számítsuk ki a P-re illeszkedő legrövidebb húr hosszát!
  (m.o.: a P-n átmenő húrok közül a sugárirányúra merőleges, legyen AB a legrövidebb, ha nem így lenne, akkor P-n keresztül rajzolhatnánk egy CD húrt, ami rövidebb. CD-re is merőleges egy sugár. De, a sugarakon mérve, CD közelebb van a kör középpontjához, tehát hosszabb, mint AB. A szelőtétellel, vagy Pitagorasz tételekkel és a sugárral, mint paraméterrel felírhatóak egyenletek, melyekből *AB = 36*)

3.3.4. 11. osztály

Geometria

- 155.o./166. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $(x+3)^2+(y+2)^2=r$ egyenletű körnek a $4x+y-7=0$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképe. Mekkora lehet az r sugár, hogy a két körnek két közös pontja legyen?
  (m.o.: a két kör akkor érinti egymást, ha az egyenest is érintik, tehát egy-egy kör sugara egyenlő a középpont és az egyenes távolságával. Akkor metszik egymást, ha nagyobb.)

3.3.5. 12. osztály

Geometria

- 94.o./17. Adott egy 20 egység alapélű és 25 egység magasságú négyoldalú szabályos gúla. Ebbe úgy helyezünk egyenes hengereket, hogy azok tengelye illeszkedjék a gúla magasságára. A lehetséges hengerek közül melyiknek maximális a palástterülete?
  (m.o.: ha x a henger magassága, y az alapkörének sugara, és tekintjük azt a síkmetszetet, ami a gúla egy alapjával párhuzamos, és tartalmazza a magasságvonalát, akkor a szelő szakaszok tételéből $\frac{25-x}{25}=\frac{y}{10}$, ebből a hengerpalást $\pi(\frac{-12}{25}x^2+4x+200)$, sz.é. $\frac{-b}{2a}$ helyen,maximum, mert a parabola lefelé nyílik)

Tehát, mint láttuk, a feladatok megoldásához a másodfokú függvény szélsőértékét, az indirekt bizonyítást, a Pitagorasz-tételt és a heurisztikus gondolkodást használtuk.

3.4.1. Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán - Sokszínű matematika

A tankönyv világos, jól követhető, egyszerűen szerkesztett, a tananyagot a spiralitás jegyében építi fel. A fejezetek elején rövid matematikatörténeti bevezetést ad, a nem kötelező anyagrészek mesélős leírásával színesít, és kapcsolatot teremt matematikán kívüli területekkel is.

A definíciókat és tételeket mindig bevezető feladatok után mondja ki, majd ezek begyakorlására bőven ad anyagot. Az egyes tankönyvek az adott korcsoportnak megfelelő didaktikai módszerekkel készülnek. A tanár számára nem ír elő konkrét tanítási módszert, de pályakezdőként is jól használható, tanári kézikönyv is tartozik minden évfolyamhoz.

3.4.2. 9.osztály

Geometria

- 206. o/10. Az A és B pontok az e egyenes által meghatározott ugyanazon félsíkban találhatóak. Szerkesszük meg az e egyenes azon P pontját, amelyre nézve *AP+PB* távolságösszege minimális. (m.o.: B-t tükrözve e-re B'-t kapunk, amire igaz, hogy *AP+PB=AP+PB'* , *AP+PB'* minimuma pedig úgy áll elő, hogy P rajta van AB'-n)

3.4.3. 10. osztály

Algebra

- 81.o/6. Az m paraméter milyen értéke mellett elégíti ki az x bármely értéke a következő egyenlőtlenséget? $(4-m)x^2-3x+m+4>0$
  (m.o.: kell, hogy a bal oldalnak x-re ne legyen gyöke, tehát a diszkrimináns<0, és kell *(4-m)>0* , hogy felfelé nyíló legyen a parabola)
- 99.o./1. Határozzuk meg az $f(x)=x^2+2x-3$ függvény szélsőértékét, ha a, $x \in \mathbb{R}$ b, $x\epsilon(0,2)$
  (m.o.: a, sz.é.hely: $x=\frac{-b}{2a}=-1$ b, a függvény $x\epsilon(0,2)$ -n szig. mon. nő, tehát $x_1=0$ sz.é.hely , ami minimumhely és $x_2=2$, ami maximumhely)

- 100.o./3. Két egymásra merőleges úton a kereszteződés felé egyenletes sebességgel halad két kerékpáros. Egyszerre indultak, az egyik 30 km/h sebességgel 20 km távolságból, a másik 40 km/h sebességgel 10 km távolságból. Mikor és hol lesznek egymáshoz a legközelebb?
  (m.o.: ha a keresett idő x, az aktuális távolság *d(x)*, akkor a Pitagorasz tételből:
  $d(x) = \sqrt{(20-30x)^2 + (10-40x)^2}$, felbontva
  $d^2(x) = 2500x^2 - 2000x + 500$ $d^2(x)$ sz.é.helye ugyanaz, mint *d(x)*-nek,
  tehát $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{5}$)
- 101.o./4. A drágakövek ára egyenesen arányos a tömegük négyzetével. Egy 1 gramm tömegű követ, melynek az ára 100 euró, kettévágunk. Mennyire csökkenhet így le a drágakő értéke?
  (m.o.: ha a keletkező két kő tömege grammban mérve x és *1-x* , akkor a két darab együttes értéke $y(x) = 100x^2 + 100(1-x)^2 = 200x^2 - 200x + 100$,
  sz.é. helye: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$)
- 102.o./8. Egy 20 cm hosszú szakaszt két részre osztunk, majd az egyes részek, mint átmérők fölé félköröket rajzolunk. Legalább mekkora lesz a két félkör területének az összege?
  (m.o.: ha x az egyik kör átmérője, akkor a két kör területe
  $\frac{\pi(\frac{x}{2})^2}{2} + \frac{\pi(\frac{20-x}{2})^2}{2} = \frac{\pi}{8}(2x^2 - 40x + 400)$, aminek minimuma -nál $\frac{-b}{2a}$ van)

<u>3.4.4. 11. osztály</u>

Függvények

- 169.o./4. Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját és jellemezzük őket (fogyás, növekedés, szélsőértékek) a, $x \mapsto \log_2(x-2)$, x>2 b, $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$, *x>-1*
  (m.o.: a logaritmus függvény folytonossága, a pozitív alapú logaritmus szigorú monoton csökkenése és a negatív alapú szigorúan monoton növekedése miatt nincsen sem globális, sem lokális szélsőértéke, ez transzformálva is így marad)

3.4.5. 12. osztály

Számsorozatok

- 45.o./7. Igazoljuk, hogy az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ sorozat monoton fogyó és alulról korlátos!
  (m.o.: a sorozat minden tagja pozitív. Az a_{n+1} -et két pozitív szám számtani közepének vesszük, és alkalmazzuk rá a számtani- és mértani közepek közti összefüggést: $\frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}}$ A $\sqrt{2}$ tehát alsó korlátja a sorozatnak a második tagtól kezdve. Az első tag is nagyobb $\sqrt{2}$ -nél, tehát a sorozat korlátos. Emellett $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2-2}{2a_n} \geq 0$, mivel $a_n \geq \sqrt{2}$, tehát a sorozat monoton fogyó.)

Térgeometria:

- 101.o./3. Az egyenlő felszínű egyenes körkúpok között melyiknek a térfogata a legnagyobb?
  (m.o.: a kúp felszínéből $a = \frac{A}{r \cdot \pi} - r$. A sugárra (r), magasságra (m), alkotóra (a) a Pitagorasz tétel: $m^2 = r^2 - a^2$ A $V = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{3}$ az $r^2 \cdot m$ maximális értékétől függ, ami megegyezik $f(r) = r^4 \cdot m^2$ maximálisával. Átalakításokkal és teljes négyzetté alakítással $f(r) = -\frac{2A}{\pi}(r^2 - \frac{A}{4\pi})^2 + \frac{A^3}{8\pi^3}$, ami akkor maximális, ha , $r^2 = \frac{A}{4\pi}$ tehát *3r=a*)

Mint láttuk, a másodfokú függvény szélsőértékét, a Pitagorasz tételt, a teljes négyzetté alakítást, geometriai- és függvénytranszformációkat és a számtani- és mértani közepek közötti összefüggést használtuk.

3.5.1. Czapáry, Gyapjas – Matematika (emelt szintű)

Ez a könyv kifejezetten azzal a szándékkal készült, hogy integrálják a közép- és emelt szintű érettségire való készüléshez megfelelő tananyagot. Ezúttal az emelt szintnek megfelelő példákból válogatok.

3.5.2. 9. osztály

Egyenletek:

- 131.o./5. A valós paraméter mely értékei mellett van a *2x-7=a(x+4)* egyenletnek pozitív valós gyöke?
  (m.o.: rendezve *x(2-a)=7+4a*, ha *a=2*, akkor nincs m.o., különben $x = \frac{7+4a}{2-a}$ Ez akkor pozitív ha a számláló és a nevező is pozitív, vagy mindkettő negatív. A második esetben nincs m.o., az elsőben $-\frac{7}{4} < a < 2$,ez a végeredmény is.)
- 134.o./3. Hogyan kell a $t - 4 = \frac{2}{x-1}$ egyenlet t paraméterét megválasztani, hogy az egyenletet x-re megoldva, a gyöke legalább 5 legyen?
  (m.o.: beszorzással *(t-4)(x-1)=2*, ahol ha $x \geq 5$, akkor $x - 1 \geq 4$,tehát $t - 4 \leq \frac{1}{2}$ vagyis $t \leq 4,5$.És mivel *x-1>0*, ezért *t-4>0*, tehát *t>4.* Vagyis $x \geq 5$, $4 < t \leq 4,5$ ha)

3.5.3. 10. osztály

Egyenletek:

- 60.o./7. 200m hosszú kerítésdróttal téglalap alakú síkidomot akarunk bekeríteni. Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait, ha a rendelkezésre álló dróttal a lehető legnagyobb területet szeretnénk körülkeríteni?
  (m.o.: a téglalap területe $T = x(100 - x)$, amire a számtani- és mértani közepek közti összefüggésből $\sqrt{x(100 - x)} \leq \frac{x+100-x}{2}$ tehát $T_{max} = 50^2$, amit akkor vesz fel, ha a közepek egyenlőek, tehát *x=50*)

- 63.o./9. Igazoljuk, hogy ha *x>0*, akkor az $x + \frac{1}{x}$ összeg minimuma 2, és ha *x<0*, akkor az összeg maximuma -2.

  (m.o.: x>0 esetén a számtani- és mértani közepek közti összefüggésből következik, hogy , $\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$, tehát $x + \frac{1}{x} \geq 2$, ebből következik , hogy ha *x<0*, akkor $x + \frac{1}{x}$ negatív értékei között -2 a legnagyobb)

3.5.4. 11. osztály

Egyenletek:

- 17.o./14. Határozzuk meg azokat az x,y,z valós számokat, amelyek kielégítik a $7x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 7xy + 5yz = 0$ egyenletet, és amelyekre az $(x + 2y - z - 1)^2 + (y - 2z + x - 1)^2 + (z + 2x - y - 1)^2$ kifejezés a szélsőértékét veszi fel!

  (m.o.: először teljes négyzetté alakítjuk az első egyenletet, $7(x + \frac{y}{2})^2 + 5(z + \frac{y}{2})^2 = 0$, ebből $x = -\frac{y}{2}$, $z = -\frac{y}{2}$. Ezeket behelyettesítjük a második kifejezésbe, amit rendezve: $(2y - 1)^2 + (\frac{3}{2}y - 1)^2 + (-\frac{3}{2}y - 1)^2 = \frac{17}{2}y^2 - 4y + 3$, tehát $y = \frac{4}{17}$, x és z pedig kifejezhető)

Koordinátageometria:

- 211.o./372. Egy háromszög egyik oldalának végpontjai az (1;4) és a (9;20) koordinátájú pontok. A harmadik csúcsa az x tengelyen mozog. Melyik háromszög területe a legkisebb és melyiké a legnagyobb?

  (m.o.: $T = a \cdot m_a$, ahol az *a* oldal az (1;4) és (9;20) pontok által meghatározott szakasz, m_a pedig ezen szakasz és az *x* tengelyen mozgó pont távolsága. Így a terület m_a-tól függ. Maximuma nincs, mert *x* tetszőlegesen távolra tud kerülni *a*-tól, minimuma pedig az *a*-ra illeszkedő egyenes és az *x* tengely metszéspontjában van, de ott a terület 0 lenne, ami nem háromszög, tehát minimuma sincs)

3.5.5. 12.osztály

Térfogatszámítás:

- 55.o./128. Azon téglatestek közül, melyek térfogata 1000cm^3, melyik testátlója a legkisebb?
  (m.o.: három egy csúcsból induló él x, y és z. *xyz=1000*, és keressük $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ minimumát. A mértani és négyzetes közepek közötti összefüggésből $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$, amit rendezve látható, hogy a kockáé a legrövidebb testátló)

Függvények:

- 155.o./13. Határozzuk meg a következő függvények lokális, illetve totális szélsőértékének helyét, minőségét és nagyságát! a, $f(x) = (x+2)^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$
  j, $\frac{6}{x^2+2x+3}$, $x \in \mathbb{R}$
  (m.o.:
  a, A teljes négyzet miatt a függvény minimuma *x=-2* helyen -3, ami globális minimum, mert mínusz végtelentől *x=-2* -ig szigorúan monoton csökken, *x=2* -től plusz végtelenig szigorúan monoton nő a függvény.
  j, A nevezőbeli kifejezésnek nincs gyöke , szélsőérték helye -1, mínusz végetlentől -1 -ig szigorúan monoton csökken, -1 -től plusz végtelenig szigorú monoton nő a függvényérték. Ezért a teljes kifejezésnek is csak *x=-1* -nél lesz szélsőértéke, ami globális és maximum.)

- 156.o./16. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + (2p-1)x + 1 - 2p = 0$ egyenlet valós gyökei négyzetének összege a legkisebb legyen! Mekkora ez a legkisebb érték?
  (m.o.: Először felírjuk az egyenlet diszkriminánsát: $(2p-1)^2 + 4(2p-1) \geq 0$, amiből vagy $2p-1 \leq -4$, vagy $2p-1 \geq 0$. Viete-formulákkal a gyökök négyzetösszege: $(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2p-1)^2 - (2-4p) = 4p^2 - 1$ ami $p = \pm\frac{1}{2}$ esetén minimális. A negatív p nem felel meg a diszkriminánsból adódó kikötésnek, a pozitív p-re $x^2 = 0$. Tehát $4p^2 - 1$ függvénynek ezen a halmazon a minimuma p=1/2-nél a 0)

- 158.o./42. Határozzuk meg azokat az x,y valós számokat, amelyek mellett a következő kifejezés értéke a legkisebb! $2x^2 - 8xy + 17y^2 - 16x - 4y + 2070$
  (m.o.: a kifejzés teljes négyzetek összegévé alakítható
  $(x-4y)^2 + (x-8)^2 + (y-2)^2 + 2002$ formában, ennek a lehetséges minimuma 2002, amit fel is vesz *x=8* és *y=2* -nél)

Algebra:

- 170.o./39. Négy pozitív szám négyzetének összege 400. Határozzuk meg a négy szám összegének maximumát!
  (m.o.: a négy számra a számtani és négyzetes közepek közötti összefüggést írjuk fel)

Ebben a kiadványban újdonság volt a Viete-formulák, a négyzetes-, számtani- és mértani közepek közti összefüggés illetve különböző függvénytulajdonságok használata a szélsőérték feladatokban.

4.1. Érettségi követelmények

A következőkben az alap- illetve az emelt szintű érettségik követelményeit vizsgáltam végig a szélsőérték feladatokat kiemelve, figyelve arra, hogy vajon milyen jellegű feladatokat tartalmaznak a középiskolai tanulmányokból. Példákat az elmúlt pár év központi érettségi feladatsoraiból válogattam.

4.2.1. Egyenletek

	Középszint	Emelt szint
Egyenletek, egyenlet-rendszerek, egyenlőtlen-ségek, egyenlőt-lenség-rendszerek	Kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldása. Ismerje az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakját.Ismerje és alkalmazza a megoldóképletet. Használja a teljes négyzetté alakítás módszerét. Tudjon másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatokat megoldani. Másodfokú egyenletrendszerek megoldása. Egyszerű, másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása. Egyszerű első- és másodfokú egyenlőtlenségek és egyszerű egyismeretlenes egyenlőtlenség-rendszerek megoldása.	Két- és háromismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek megoldása. Egyszerű kétismeretlenes lineáris paraméteres egyenletrendszer megoldása. Igazolja a másodfokú egyenlet megoldóképletét. Másodfokú paraméteres feladatok megoldása. Tudjon másodfokúra visszavezethető egyenletrendszereket megoldani. Abszolútértékes egyenletek algebrai megoldása. Tudjon egyszerű négyzetgyökös, abszolútértékes, exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus) egyenlőtlenségeket megoldani.
Középérté-kek, egyen-lőtlenségek	Két pozitív szám számtani és mértani közepének fogalma, kapcsolatuk, használatuk.	Tudjon megoldani feladatokat számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján.

4.2.2. Függvények, az analízis elemei

	Középszint	Emelt szint
Egyváltozós valós függvények Sorozatok	Egyszerű függvények jellemzése (grafikon alapján) értékkészlet, zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, periodicitás, paritás szempontjából. Az an-re, illetve az Sn-re vonatkozó összefüggések használata.	Függvények jellemzése korlátosság szempontjából. A függvények tulajdonságait az alapfüggvények ismeretében transzformációk segítségével határozza meg. Használja a konvexség és konkávság fogalmát a függvények jellemzésére. Egyszerűbb, másodfokú függvényre vezető szélsőérték-feladatok megoldása. Sorozat jellemzése (korlátosság, monotonitás), a konvergencia szemléletes fogalma. Ismerje a végtelen mértani sor fogalmát, összegét.
Az egyváltozós valós függvények analízisének elemei		Ismerje a végesben vett véges, a végtelenben vett véges és a tágabb értelemben vett határérték szemléletes fogalmát. A folytonosság szemléletes fogalma. Tudja a differencia- és differenciálhányados definícióját. Alkalmazza az összeg, konstansszoros, szorzat- és hányadosfüggvény deriválási szabályait. Alkalmazza egyszerű esetekben az összetett függvény deriválási szabályát. Ismerje a trigonometrikus függvények deriváltját. Alkalmazza a differenciálszámítást: érintő egyenletének felírására, szélsőérték-feladatok megoldására, polinomfüggvények (menet, szélsőérték, alak) vizsgálatára.

Példák:

2011 május, emelt szint, 5. feladat

- Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30°-os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2. Az A_2C_1 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljuk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3. Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzoljuk. Ez az eljárás tovább folytatható.

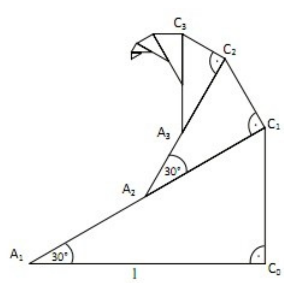
  a) Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe)!

  b) Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2\dots C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív egész n-re kisebb, mint 1,4.

  (m.o.: a, Az $A_1C_0C_1$ háromszög területe $T_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszöget $\frac{1}{\sqrt{3}}$ arányű hasonlósággal lehet átvinni az $A_{n+1}C_nC_{n+1}$ háromszögbe ($n \in \mathbb{N}^+$). A hasonló síkidomok területének arányára vonatkozó tétel szerint az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszög területe: $T_n = (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 \cdot T_{n-1}$ (ha $n>1$). A területek összegéből képezett ($t_1+t_2+\dots+t_n+\dots$) olyan mértani sor, amelynek hányadosa $\frac{1}{3}$ .A végtelen sok háromszög területének összege tehát $T = (\frac{\sqrt{3}}{6})(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

  b, Jelölje d_n a $C_{n-1}C_n$ szakasz hosszát ($n \in \mathbb{N}^+$), $d_1=C_0C_1=$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$. A hasonlóság miatt minden $n>1$ esetén $d_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d_{n-1}$. A $\{d_n\}$ tehát olyan mértani sorozat, amelynek első tagja és hányadosa is $\frac{1}{\sqrt{3}}$. A $S_n=d_1+d_2+\dots+d_n+\dots$ olyan mértani sor, melynek hányadosa $\frac{1}{\sqrt{3}}$, tehát van határértéke. Az $\{S_n\}$ sorozat határértéke

  : $\lim S_n = (\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}})$ ami kisebb, mint 1,4. Az $\{S_n\}$ szigorúan növekvő, egy tagja sem lehet nagyobb a sorozat határértékénél.)



2010 október, emelt szint, 7. feladat

- Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi mennyisége (x kilogramm) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: *(36–0,03x)* euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) a
  $0,0001x^3 + 30,12x + 13000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.
  a) Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel?
  b) Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? (nyereség=bevétel–kiadás)
  (m.o.: a, Az eladásból származó havi bevétel: *x(36-0,03x)*, maximuma a $\frac{-b}{2a} = 600$ helyen, ami a feltételek szerinti intervallumba esik, 10800.
  b, A havi nyereség függvénye:
  $x \mapsto -0,03x^2 + 36x - (0,0001x^3 - 30,12x + 13000)$, (*100<x<700*).
  Ennek deriváltja: $x \mapsto -0,0003x^2 - 0,06x + 66,12$, (*100<x<700*). Ennek a kifejezésnek gyökei az $x_1 = -580$ és $x_2 = 380$.
  Ezért a deriváltfüggvény a]100;380[intervallumon pozitív, a]380;700[intrevallumon negatív, tehát a nyereségfüggvény 380-ig szigorúan nő, majd szigorúan csökken, tehát egy abszolút maximum hely van, ez a 380. Legnagyobb függvényérték 2306,4)

2010 május, emelt szint, 6. feladat

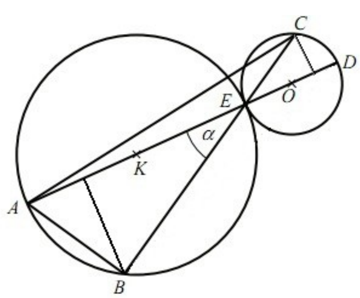
- Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $g(x) = -x^3 + x$ függvénynek lokális maximuma?
  (m.o.: A nyílt intervallumon értelmezett $x \in \mathbb{R}$ + függvény differenciálható.
  A lehetséges szélsőértékhely $g'(x) = -3x^2 + 1$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ez benne van az értelmezési tartományban. $g"(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$, tehát az $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ lokális maximumhely.)

4.2.3 Geometria, koordináta geometria, trigonometria

Síkbeli és térbeli alakzatok	Ismerje és alkalmazza az alapvető összefüggéseket háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között (háromszögegyenlőtlenség, belső, illetve külső szögek összege).Tudja és alkalmazza feladatokban a Thalész tételt és megfordítását, illetve a Pitagorasz tételt.	
Kerület, terület	Háromszög területének kiszámítása különböző adatokból. Nevezetes négyszögek területének számítása. Szabályos sokszögek kerületének és területének számítása. Kör, körcikk, körszelet kerülete, területe. Kerület- és területszámítási feladatok.	
Felszín, térfogat	Ismerje a felszín és a térfogat szemléletes fogalmát. Hasáb, gúla, forgáshenger, forgáskúp, gömb, csonkagúla és csonkakúp felszínének és térfogatának kiszámítása képletbe való behelyettesítéssel.	Térgeometriai feladatok megoldása.

<u>Példák:</u>

2009 május, emelt szint, 8. feladat

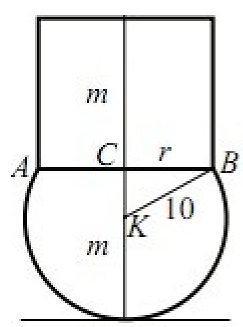
- 

A K középpontú és R sugarú kört kívülről érinti az O középpontú és r sugarú kör (R>r). A KO egyenes a nagy kört A és E, a kis kört E és D pontokban metszi. Forgassuk el a KO egyenest az E pont körül α hegyesszöggel! Az elforgatott egyenes a nagy kört az E-től különböző B pontban, a kis kört C pontban metszi. Mekkora α szögnél lesz az ABC háromszög területe maximális, adott R és r esetén?
(m.o.: $T_{ABC} = \frac{AE\cdot m_1 + AE\cdot m_2}{2}$ maximális, ha m_1+m_2 maximális. m_1 és m_2 külön-külön akkor maximálisak, ha K-ban, illetve O-ban merőlegesek AD-re, ekkor BE és CE is 45 fokot zár be AD-vel, így az összegük is ekkor maximális)

2009 október, emelt szint, 9. feladat

- Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott m magasságú ($m > 10$) gömbszelet határoló köréhez egy szintén m magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszeletet határoló kör sugarával. Mekkorának válassza Jancsi a gömbszelet m magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő formájú üreges fatalpra fogják állítani.) Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m, a határoló kör sugara pedig r, akkor a térfogata $V = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2)$

  (m.o.: A KBC derékszögű háromszög befogóinak hossza m −10 és r, átfogója 10 cm. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét a KBC háromszögre: $(m-10)^2 + r^2 = 100$. Ebből $r^2 = 20m - m^2$ A váza térfogata: $V = \frac{\pi}{6} \cdot m \cdot (3r^2 + m^2) + r^2 \cdot \pi \cdot m$ A váza térfogata m függvényében: $V(m) = \frac{\pi}{6} \cdot m \cdot (3 \cdot (20m - m^2) + m^2) + \pi \cdot (20m - m^2) \cdot m$, ahol $10<m<20$. V differenciálható a]10;20[nyílt intervallumon: $V'(m) = \pi \cdot (-4m^2 + 60m) = 4\pi \cdot (15 - m) \cdot m$, ami a]10;20[intervallumon pontosan akkor 0, ha $m=15$. V(m) szigorúan nő $m=15$-ig, utána szigorúan csökken, így $m=15$ az abszolút maximumhely is, $V_{max} = 2250\pi$)



Összességében elmondhatjuk, hogy az érettségi követelmények, várakozásunknak megfelelően ugyanolyan típusú szélsőérték feladatokat tartalmaznak, mint amilyeneket középiskolai tantervekben és tankönyvekben találhatunk, azzal a kiegészítéssel, hogy az emelt szintű érettségi példák között előfordulnak olyanok, melyeket kifejezetten deriválás segítségével ajánlott megoldani.

5.1. Felsőoktatás

A következőkben pár felsőoktatásbeli példával szemléltetem, hogy a középiskolai szélsőérték feladatok hogyan nyernek folytatást az egyetemi tanulmányokban. Egy- és kétváltozós függvény szélsőértékére és sorozat konvergenciájára, illetve végtelenben vett határértékére kérdező feladatokat, illetve a megoldáshoz a számtani- és mértani közepek közti összefüggés n tagú formáját alkalmazó feladatokat választottam.

1.Példa

Határozd meg az alábbi függvény lokális szélsőértékét, ha az létezik!

$$f(x) = x \cdot \log_3 \sqrt{x}$$

megoldás.: Először az értelmezési tartományt kell megadni.

$$\sqrt{x} > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x > 0$$
$$D_f : x \in R^+$$

Alkalmazzuk a szorzatfüggvény deriválási szabályát:

$$f'(x) = \left[x \cdot \log_3 \sqrt{x}\right]' = \left[x \cdot \log_3 x^{\frac{1}{2}}\right]' = \left[x \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_3 x\right]' == \left[\frac{x}{2} \cdot \log_3 x\right]'$$

A deriváltfüggvény az egyszerűsítések után:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{2}\right)' \cdot \log_3 x + \frac{x}{2} \cdot (\log_3 x)' = \frac{1}{2} \cdot \log_3 x + \frac{\cancel{x}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x} \cdot \ln 3} = \frac{\log_3 x}{2} + \frac{1}{2 \cdot \ln 3}$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy:

$$f'(x) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\log_3 x}{2} + \frac{1}{2 \cdot \ln 3} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\log_3 x}{2} = -\frac{1}{2 \cdot \ln 3}$$

Ebből *x=0,3679*, tehát *x>0* teljesül. Ezután vizsgáljuk, mikor pozitív az első deriváltfüggvény.

$$\frac{\log_3 x}{2} + \frac{1}{2 \cdot \ln 3} > 0$$

Kifejezzük a logaritmust, amiből *x>0,3679* . Ahol tehát a az első derivált előjelet vált, a monotonitás megváltozik, ezzel teljesül a szélsőérték létezésének elégséges feltétele is.

$$\text{ha } x \in]0; 0,3679[\Rightarrow f(x) \text{ monoton csökken}$$
$$\text{ha } x \in]0,3679; +\infty[\Rightarrow f(x) \text{ monoton nő}$$

Tehát a keresett szélsőérték lokális minimum, *f(min)=-0,1674*

2 Példa

Határozzuk meg az alábbi többváltozós függvény szélsőérték helyeit!

$$f(x;y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$$

megoldás: Először felírjuk az f(x;y) kétváltozós függvény elsőrendű parciális deriváltjait

$$f'_x(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 3x^2 + 0 - 12 - 0 = 3x^2 - 12$$
$$f'_y(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0 + 3y^2 + 0 - 3 = 3y^2 - 3$$

A kétváltozós függvény szélsőértéke (lokális minimum vagy maximum) létezésének szükséges feltétele, hogy az elsőrendű parciális deriváltak zérusak legyenek.

Szükséges feltétel vizsgálata:

$$\left.\begin{array}{r} f_x'(x;y)=0 \\ f_y'(x;y)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 3x^2-12=0 \\ 3y^2-3=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x^2=4 \\ y^2=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} |x|=2 \\ |y|=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{array}\right\}$$

Az előbbi egyenletrendszernek 4 számpár megoldása van, ezek mind lehetséges szélsőérték helyek. Ezek a P1(2,1), P2(2,-1), P3(-2,1), P4(-2,-1) pontok. Tehát a szükséges feltétel legalább egy pontban teljesül. Felírjuk a másodrendű deriváltakat.

$$f_{xx}''(x;y)=\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2}=3\cdot 2x=6x$$

$$f_{xy}''(x;y)=\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x \partial y}=0$$

$$f_{yx}''(x;y)=\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y \partial x}=0$$

$$f_{yy}''(x;y)=\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2}=3\cdot 2y=6y$$

Az elégséges feltétel vizsgálatához felírjuk a Hesse-mátrix determinánsát.

$$D(x;y)=\begin{vmatrix} f_{xx}''(x;y) & f_{xy}''(x;y) \\ f_{yx}''(x;y) & f_{yy}''(x;y) \end{vmatrix}=f_{xx}''(x;y)\cdot f_{yy}''(x;y)-f_{xy}''^{\,2}(x;y)=6x\cdot 6y=36xy$$

Ha a D(x,y) függvény a vizsgált pontban pozitív, akkor van szélsőérték. Ha negatív, akkor nincs.

$P_1(2;1) \Rightarrow D(2;1)=36\cdot 2\cdot 1>0 \Rightarrow$ van szélsőérték

$P_2(2;-1) \Rightarrow D(2;-1)=36\cdot 2\cdot (-1)<0 \Rightarrow$ nincs szélsőérték

$P_3(-2;1) \Rightarrow D(-2;1)=36\cdot (-2)\cdot 1<0 \Rightarrow$ nincs szélsőérték

$P_4(-2;-1) \Rightarrow D(-2;-1)=36\cdot (-2)\cdot (-1)>0 \Rightarrow$ van szélsőérték

P1(2,1)-ben az f "xx függvény előjele pozitív tehát lokális minimum lesz, P4(-2,-1)-ben az f "xx függvény előjele negatív, tehát lokális maximum lesz.

$$\mathrm{P}_1(2;1) \quad \Rightarrow \quad f''_{xx}(2;1) = 6x = 6 \cdot 2 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{LOKÁLIS MINIMUM}$$

$$\mathrm{P}_4(-2;-1) \quad \Rightarrow \quad f''_{xx}(-2;-1) = 6x = 6 \cdot (-2) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{LOKÁLIS MAXIMUM}$$

Legvégül kiszámítjuk a függvényértékeket, meghatározva a minimum és maximum értékét:

$$\mathrm{P}_1(2;1) \quad \Rightarrow f(2;1) = 2^3 + 1^3 - 12 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -18 \quad \Rightarrow \text{MIN.} \quad \mathrm{P}_1(2;1;-18)$$

$$\mathrm{P}_1(-2;-1) \quad \Rightarrow f(-2;-1) = (-2)^3 + (-1)^3 - 12 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = 18 \quad \Rightarrow \text{MAX.} \quad \mathrm{P}_4(-2;-1;-18)$$

3. Példa

Állítás – Ha *a* > *0*, akkor $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$

Bizonyítás. *a* = *1*-re az állítás triviális módon igaz. Legyen először *a* > *1*. Ekkor a számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenséget használjuk:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1 \quad \mathrm{db}} \cdot a} \leq \frac{n-1+a}{n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{a}{n}$$

ahol a gyökjel alatt *n-1*-szer vettük az 1-et szorzótényezőül azzal a céllal, hogy a gyök alatt *n* tényezős szorzat álljon. Ekkor az *n*-edik gyök szigorú monoton növő volta miatt

$$1 < \sqrt[n]{a} \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{a}{n} \to 1$$

és a rendőrelv miatt így

$$\sqrt[n]{a} \to 1$$

Állítás - $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$

Bizonyítás. A gyök alatti kifejezés alá alkalmas darab 1-et írva majd a számtani-mértani egyenlőtlenség növelve, a rendőrelvet kell alkalmaznunk:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-2 \quad \mathrm{db}}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} \to 1$$

4. példa

Bizonyítsuk be, hogy $(e_n) := \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, $n \in \mathbb{N}^+$ konvergens!

Megoldás: bizonyítandó, hogy a sorozat konvergens, tehát kell, hogy monoton, és korlátos.
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint:

$$e_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_{n} \leq \left(\frac{1+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}$$

Tehát a sorozat monoton növő.

A sorozat korlátos is, bármely $n \in \mathbb{N}^+$ -re $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4$. Mivel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből:

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n}}_{n} \leq \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n+2}\right)^{n+2} = 1$$

Így a sorozat monoton és korlátos, tehát konvergens.

6.1. Matematika versenyek

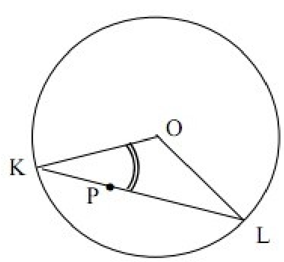
Ebben a fejezetben olyan példákat sorolok fel, melyek többsége nem feltételez a középiskolai középszintű tanulmányoknál szélesebb ismereteket, de megoldásukhoz valamilyen trükkre, meglátásra, intuícióra van szükség. A példákat az elmúlt évek Kalmár László, Varga Tamás, OKTV és Matematikai Olimpia versenyek feladatai közül válogattam.

Kalmár László matematika verseny, 8. évfolyam, megyei, 4. feladat

- Határozzuk meg a következö függvény legkisebb értékét: $f(x)=\frac{x^2-6x+10}{2x-6}, x>3$
  (m.o.: A megadott értelmezési tartományon a tört nevezöje nem nulla, tehát minden *x* > *3* esetén a tört értelmezett. Átalakítva a következő:
  $f(x)=\frac{(x-3)^2+1}{2(x-3)}=\frac{(x-3)+\frac{1}{x-3}}{2}$ Mivel *x* > *3*, ezért a tört számlálójában álló két szám pozitív, felírjuk a számtani- és mértani közepek közti összefüggést.
  $\frac{(x-3)+\frac{1}{x-3}}{2}\geq\sqrt{(x-3)\cdot\frac{1}{x-3}}=1$ Ebből következik, hogy $x-3=\frac{1}{x-3}$, ami a kikötéssel összevetve megfelel.

Varga Tamás matematika verseny, 8. évfolyam, megyei, 2. feladat

- Az O középpontú körnek O-tól különbözı belsı pontja a P. A körvonal mely K pontjára lesz az OKP szög a legnagyobb ?
  (m.o.: Az OKP szög akkor és csak akkor a legnagyobb, ha a KOL középponti szög a legkisebb. Mivel kisebb középponti szöghöz kisebb húr tartozik, ezért a KL húr akkor a legkisebb, ha O-tól a legtávolabb van. A P-n átmenő húrok közül az OP-re merőleges húr a legrövidebb, mert minden más P-n átmenő húrra OP nem merőleges, lévén átfogója egy olyan derékszögű háromszögnek, amelynek egyik befogója a húrnak O-tól való távolságát méri. Így az OP-re merőleges, P-n átmenő húr két végpontja adja a keresett K pontokat.



OKTV, 2008-2009, 3. kategória, 1. forduló

- Mennyi $2\cos\alpha + 6\cos\beta + 3\cos\gamma$ minimuma, ha $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ és $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$?

  (m.o.: A nagyobb együtthatójú szögeket úgy választva, hogy a koszinuszuk a lehető legkisebb, azaz -1 legyen, azt kapjuk, hogy $\beta = \gamma = \pi$, $\alpha = 0$ esetén a fenti összeg -7. Megmutatjuk, hogy ez a minimum. Ha α, β és γ a feltételeknek eleget tevő tetszőlegesen adott valós számok, válasszuk meg az origóból kiinduló a, b és c vektorokat, amelyek hossza rendre 3, 1, illetve 2 úgy, hogy az a vektort a b vektor irányába γ szögű, b-t c irányába α szögű, és c-t a irányába β szögű pozitív forgatás vigye. Ekkor az $(a + b + c)^2$ skaláris szorzatra $0 \leq (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 9 + 1 + 4 + 2(3\cos\gamma + 6\cos\beta + 2\cos\alpha)$, ahonnan átrendezéssel a kívánt $2\cos\alpha + 6\cos\beta + 3\cos\gamma \geq -7$ adódik (itt x^2 és xy a megfelelő skaláris szorzatot jelöli) .

OKTV 2008-2009 2. kategória, 2. forduló

- Az a, b, c oldalú t területű hegyesszögű háromszögre $abc = a + b + c$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{\frac{3}{2}} < t < \frac{3}{2}$.

  (m.o.: Nem megy az általánosság rovására, ha feltételezzük, hogy $a \leq b \leq c$. Kifejezzük ab-t a feladatban megadott $abc = a + b + c$ feltételből, és felülről becsüljük a $a \leq b \leq c$ feltétel felhasználásával: $ab = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \leq 3$. Használjuk ki, hogy $0 < \sin\gamma < 1$, így a terület felülről becsülhető: $t = \frac{ab\sin\gamma}{2} < \frac{3\cdot 1}{2}$ A feladatban szereplő $abc = a + b + c$ feltételből $c = \frac{a+b}{ab-1}$ Ezt beírjuk a háromszög egyenlőtlenségbe $c < a + b$, azaz $\frac{a+b}{ab-1} < a + b$ amiből $2 < ab$. Mivel a legnagyobb szög γ és a háromszög hegyesszögű, így $60\circ \leq \gamma < 90\circ$, így $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\gamma < 1$. Ennek megfelelően $t = \frac{ab\sin\gamma}{2} > \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$ azaz $t > \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Brit Matematikai Olimpia, 2000, 2. forduló

- x, y, z pozitív valós számok, $xyz = 32$. Határozzuk meg $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$ minimumát! (m.o.: Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget az x^2, $2xy$, $2xy$, $4y^2$, z^2, z^2 számokra! $(x, y, z) = (4, 2, 4)$ esetén 96 a minimum.)

Japán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló

- Határozzuk meg az alábbi kifejezés minimumát:

  $$x + y + \frac{2}{x+y} + \frac{1}{2xy}$$

  (m.o.:

  $$x + y + \frac{2}{x+y} + \frac{1}{2xy} \geq x + y + \frac{2}{x+y} + \frac{2}{(x+y)^2}$$

  , és $a = x + y$ helyettesítéssel $\frac{a^3+2a+2}{a^2}$ minimumát keressük. Célt érhetünk pl. deriválás segítségével.A minimális érték $x = y = 1$ esetén 4,5 .)

Összefoglalás

Mint láttuk, a középiskolai tanulmányokat végigkísérik a szélsőérték feladatok. Az általános iskolai alapismeretek után, melyek olykor alapvető szélsőérték feladatok megoldását is lehetővé teszik, a középiskolában spirálisan épül fel a tananyagok és ezen belül a szélsőérték számításhoz kapcsolódó tananyagok rendszere. Mindig újra és újra érintve egyazon témát, egyre bővítve, általánosítva azt. A másodfokú egyenleteket például kilencedikben tanulják meg a diákok, tizedikben veszik a megoldóképletet, tizenkettedikben a másodfokú egyenletrendszereket – közben pedig, ugyanígy elosztva a többi matematikai területet, köztük a szélsőérték problémákhoz vezetőket. A közepek közti egyenlőtlenségeket, a függvényeket, geometriai módszereket, stb...

A közép- és emelt szint közti különbség a teljes képzés folyamán jól megfigyelhető, de a végzős tananyagoknál és az érettségi követelményeknél jelentkezik markánsan. Az emelet szint tanulóinak szélsőértéket már a deriválás segítségével is kell tudni keresni, boldogulniuk kell sok olyan témakörrel, melyek ismerete nélkülözhetetlen a szakirányú felsőoktatásban való érvényesüléshez.

Irodalomjegyzék

[1] Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, Vincze : Sokszínű Matematika 9, Mozaik Kiadó, 2003

[2] Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, Vincze : Sokszínű Matematika 10, Mozaik Kiadó, 2002

[3] Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, Vincze : Sokszínű Matematika 11, Mozaik Kiadó, 2003

[4] Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, Vincze : Sokszínű Matematika 12, Mozaik Kiadó, 2004

[5] Czapáry, Gyapjas : Matematika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2001

[6] Czapáry, Gyapjas : Matematika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002

[7] Czapáry, Gyapjas : Matematika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003

[8] Czapáry, Gyapjas : Matematika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2004

[9] Csahóczi, Csatár, Kovács, Morvai, Széplaki, Szeredi: Matematika 8, Apáczai Kiadó, 2005

[10] Hajnal, Számadó, Békéssy: Matematika 9, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006

[11] Hajnal, Számadó, Békéssy: Matematika 10, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007

[12] Hajnal, Számadó, Békéssy: Matematika 11, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007

[13] Hajnal, Számadó, Békéssy: Matematika 12, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007

[14] http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/tantervek/nemzeti-alaptanterv-nat

[15] http://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPtmttsa.php?type=TT#6

[16] http://www.oh.gov.hu/letolt/okev/doc/erettsegi_40_2002_201001/matematika_vk_2010.pdf

[17] http://erettsegizz.com/erettsegi-feladatsorok/

[18] http://www.cs.elte.hu/org/depts.html?tsz=alkanal

[19] http://www.oh.gov.hu/kozoktatas/oktv/oktv-korabbi

[20] http://195.199.207.10/09honlap/versenyeink/vargatamas/

[21] http://matek.fazekas.hu/