# Játékok és statisztikák

Szakdolgozat

Készítette: Kiss Péter Norbert
Matematika BSc, Tanári szakirány

Témavezető: Wintsche Gergely, adjunktus
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2011

*„Az élet egy* ***játék****, melyet egy hatalmas szabálykönyvből igazgatnak – de meg kell találni a módját annak, hogyan lehet megszegni a szabályokat, és mégis tovább játszani. Minden* ***játék*** *unalmas, ha a szabályokat betartva játsszák – a Monopoly, römi, baseball. De ha az ember elemel egy-két kártyát, anélkül, hogy észrevennék, vagy megcseréli a számokat a dobókockán, mikor a másik nem figyel, az ostoba* ***játék*** *élvezetessé válhat*."

*- Dean Ray Koontz -*

*„A* ***játék*** *akkor felhőtlen, akkor lesz a képzelet paradicsoma, ha szabályait mindenben betartják."*

*- Philip Grant -*

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

Azt gondolom, hogy nincs olyan ember, aki ha elkezd játszani valamiféle játékkal, ne latolgatna magában előzetesen, vagy a játék folyamán esélyeket, ne igyekezne minél jobb pozíciót kiharcolni magának azáltal, hogy megpróbálja kiszámítani a játék számára kedvező alakulásához szükséges – optimális lehetőségeket. Természetesen a győzelem alatt nem csak a mindent elsöprő diadalt értem, hanem egy esetleges vesztes helyzet előfordulása kapcsán azon lehetőségeket is melyekkel minél inkább szűkíteni tudja ránézve hátrányos tényezők körét. Természetesen az egyes várható események nem pontosan kiszámíthatók a külső tényezők miatt, nem elhanyagolható a „szerencse elem" sem, ezért hívták segítségül a statisztikát elméleteik megalkotása kapcsán a témakör kutatói.

Számos tudományág foglalkozik valamilyen szinten ezzel a problémakörrel, leginkább talán a közgazdaságtan, hiszen mind a mikro-, mind a makrogazdaság szereplői azzal az alapvető céllal vesznek részt a piaci versenyben, hogy vagy a profitjukat maximalizálják, vagy a veszteségeiket minimalizálják.

Jelen dolgozatom fő célja nem az, hogy egzakt módon vizsgálja, akár a játékelmélet, akár más matematikai játék minden apró szegmensét. Sokkal inkább arra törekedtem, hogy néha egyszerűbb, néha bonyolultabb példákon keresztül érzékeltessem, hogy az oly gyakran emlegetett 'józan paraszti észnek' is megvannak a maga korlátai.

A dolgozat tematikáját és nyelvezetét próbáltam úgy megalkotni, hogy alkalmas legyen akár felső tagozatos, akár gimnazista diákok figyelmét is felkelteni a matematika iránt, hiszen a feladatok eredményeinek egy része ellent mond az emberi intuíciónak, amire azért sokan felkapják a fejüket.

A dolgozat két fő egységből tevődik össze. Az első rész Monty Hall paradoxonra épül, míg a második rész néhány példán keresztül, (tényleg csak) belekóstol a játékelmélet alapvető megoldásaiba.

# I. Fejezet

# Feltételes valószínűség

A valószínűségszámítás mai, általánosan elfogadott (Kolmogorov-féle) elmélete a valószínűség fogalmát így határozza meg:

Tekintsünk egy kísérletet, és ehhez kapcsolódóan egy *A* eseményt. A kísérletet egymástól függetlenül, azonos körülmények között *n*-szer végrehajtjuk. Jelölje $k_A$ az *A* bekövetkezéseinek számát. Ha $\frac{k_A}{n}$ relatív gyakoriság nagy *n* esetén egy fix szám körül ingadozik, akkor ezt az *A*-ra jellemző számot *P(A)*-val jelöljük és *A* valószínűségének nevezzük. [1] A Kolmogorov-féle valószínűségszámítás három axiómára épül:

1. $P(A) \geq 0$ minden *A* eseményre.

2. A biztos esemény $(\Omega)$ mindig bekövetkezik $P(\Omega) = 1$.

3. Ha *A* és *B* egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

A valószínűség értéke 0 és 1 közötti szám, egy *P(A)* jelölje *A* esemény bekövetkezésének valószínűségét. $P(A) = 0$ azt jelenti, hogy az *A* esemény a kísérletsorán nem következhet be, míg $P(A) = 1$ esetén *A* bekövetkezése elkerülhetetlen (biztos esemény).

Tegyük fel, hogy *A* és *B* események bekövetkezésének valószínűségét *P(A)* és *P(B)* jelöli. Az a kérdés, hogy milyen valószínűséggel következik be *A* esemény, ha *B* esemény is bekövetkezett? Legyen $P(B) \geq 0$, ekkor *A* esemény *B* eseményre vonatkozó feltételes valószínűségét $P(A|B)$-vel jelöljük. A feltételes valószínűség a következő módon adható meg:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

ahol $P(A \cap B)$ az *A* és *B* események szorzatát jelölik, vagyis$(A \cap B)$ akkor következik be, ha mind az *A*, mind a *B* bekövetkezik

## Példák:

**1. 1** Ötös lottó sorsoláson négy számunkat már kihúzták. Mennyi a valószínűsége, hogy telitalálatunk lesz?

Legyen A = {ötösünk lesz}

B = {az első négy számot eltaláltuk}

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\dfrac{1}{\binom{90}{5}}}{\dfrac{\binom{5}{4}}{\binom{90}{4}}}=\frac{1}{86}.$$

(Ugyanezt az eredményt kapjuk úgy is, ha a következőképpen gondolkodunk: Mivel már négy számunk adott, a maradék 86 számból már csak egyet kell eltalálnunk. Ennek szintén $\frac{1}{86}$ az esélye.)

**1. 2** Két dobókockát egyszerre feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik kockával ötöst dobunk, ha tudjuk, hogy a dobott pontok összege 9?

**Megoldás:**

**a)** Feltételes valószínűséget alkalmazzuk.

$$P(5|9):=\frac{P(5\cap 9)}{P(9)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{4}{36}}=\frac{1}{2}\text{, mert}$$

$P(9)=\dfrac{kedvező}{összes}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$, hiszen összesen 36 hat dobáslehetőség van és ebből mindössze négy esetben kapunk 9-et.

Ezek:

(6; 3), (3; 6), (4; 5), (5; 4).

$P(5 \cap 9) = \dfrac{kedvező}{összes} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$, hiszen fent is láthatjuk, hogy pusztán két olyan eset van, hogy a dobások összege kilenc, és az egyik kockán szerepel az 5.

**b)** Ha felsoroljuk a feltétel mellett lehetséges kimeneteleket, akkor láthatjuk, hogy csupán kétszer következik be, hogy 5-öt is dobtunk. A klasszikus képletet erre az esetre alkalmazva szintén ezt az eredményt kapjuk.

## Néhány további feladat:

**1. 3** Egy 32 lapos kártyacsomagból kihúzunk egymás után 5 lapot. Mennyi az esélye annak, hogy a kihúzott lapok között lesz a tök király, ha elsőre makkot húztunk?

**1. 4** Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy egyenlő számokat dobtunk feltéve, hogy
a) csak páros számok fordulnak elő
b) csak prímszámokat dobtunk?

**1. 5** Húsvéti nyuszi piros és sárga színű tojásokat fest, rendre 210 és 290 db-t, majd azokat két kosárba rakja. Egyik kosárba 130 db pirosat és 120 db sárgát db rak. Véletlenszerűen kiesik egy tojás az egyik kosárból. Mennyi az esélye annak, hogy a kiesett tojás sárga színű?

# Bayes-tétel

A következő tétel feltételes valószínűségben a kérdéses esemény és a feltétel felcserélését teszi lehetővé, vagyis a Bayes-tétellel kiszámíthatjuk az egyik feltételes valószínűséget a másik feltételes valószínűség és a nem feltételes valószínűségek segítségével:

$$P(B|A) = P(A|B)\frac{P(B)}{P(A)}$$

A tétel viszonylag egyszerűen belátható, hiszen levezethető a feltételes valószínűség képletéből:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ ugyanakkor}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A),$$

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(B|A) = P(A|B)\frac{P(B)}{P(A)}$$

QED.

Ugyan ezt kapjuk, ha

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

jobb oldalát bővítjük P(B)-vel

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)P(B)}{P(A)P(B)}, \text{ebből } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ - kiemelve kapjuk, hogy}$$

$$P(B|A) = P(A|B)\frac{P(B)}{P(A)}$$

QED.

<u>Példa:</u>

(Bár a következő példának semmi köze a játékokhoz, a közérthetősége miatt alkalmas a fenti tétel szemléltetésére.)

Legyen annak a valószínűsége, hogy valaki EHEC baktériummal fertőződik meg $10^{-4}$. A vérvizsgálat a pozitív eredmények 87 % -ánál helyesen ismeri fel a kórokozót (vagyis 13%-ban az egészséges emberben is kórt jelez). Mennyi a valószínűsége annak, hogy Sári ténylegesen megfertőződött, ha a vérteszt eredménye pozitív lett?

Megoldás:

Jelölje $P(M)$ annak a valószínűségét, hogy valaki ténylegesen megfertőződött, $P(\overline{M})$, hogy nem. Ezen kívül $P(K)$ adja annak a valószínűségét, hogy valakiben kimutatták a baktériumot. Írjuk fel az adatokat:

$P(M) = 0{,}0001$

$P(\overline{M}) = 0{,}9999$

$P(K|M) = 0{,}87$

$P(K|\overline{M}) = 0{,}13.$

$P(M|K) = ?$

Helyettesítsünk be a képletbe:

$P(M|K) = P(K|M)\dfrac{P(M)}{P(K)}$, $P(K)$ értékét nem ismerjük, de a feltételes valószínűség képletéből levezetve azt kapjuk, hogy

$$P(K) = P(K|M)P(M) + P(K|\overline{M})P(\overline{M}).$$

Azaz:

$$P(M|K) = P(K|M)\frac{P(M)}{P(K)}$$

$$P(M|K) = \frac{P(K|M)P(M)}{P(K|M)P(M) + P(K|\overline{M})P(\overline{M})}$$

Az adott értékeket felhasználva:

$$P(M|K) = \frac{0{,}87 \cdot 0{,}0001}{0{,}87 \cdot 0{,}0001 + 0{,}13 \cdot 0{,}9999} = \frac{0{,}000087}{0{,}130074} = 0{,}00067$$

Nagyon kicsi a valószínűsége, hogy a pozitív teszt ellenére Sári valóban elkapta a betegséget.

# Monty Hall paradoxon

A paradoxon egy az Egyesült Államokban az 1960-as években nagy sikerrel futott televíziós vetélkedő utolsó játékán alapszik. Nevét a show házigazdájáról kapta.

A probléma alaphelyzete a következő:

A játékosnak mutatnak három zárt ajtót, melyek közül kettő mögött egy-egy citrom van, a harmadik pedig egy vadonatúj autót rejt. A hangulat fokozása érdekében a választást, illetve a felnyitást egy kicsit megbonyolították. A játékos kiválaszt egy ajtót, de mielőtt ezt kinyitná, a műsorvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, mely mögött biztos nem az autó van (természetesen a showman a kezdettől tisztában van azzal, hogy melyik ajtó rejti az autót). Ezt követően megkérdezi a már amúgy is ideges vendéget, hogy jól meggondolta-e a választását, vagyis nem akar-e váltani. A játékos dönt, hogy változtat, vagy sem, végül feltárul az így kiválasztott ajtó, mögötte a nyereménnyel. A paradoxon kérdése az, hogy érdemes-e változtatni, illetve van-e ennek egyáltalán jelentősége.

Egyszerű „józan paraszti ésszel" kapásból arra gondolhatunk, hogy két ajtónk van egy nyereménnyel, vagyis az esélyek megegyeznek, ám egyszerű valószínűségi számításokkal megkaphatjuk, hogy igen, mindig érdemes váltanunk, az itt felmerülő ellentét miatt nevezzük a helyzetet paradoxnak.

*Lássuk miről is van szó:*

Jelölje a három ajtót A, B és C. Tegyük fel, hogy a játékos elsőre az A jelűt választja.

Mikor a műsorvezető először felteszi a kérdést: „Melyik ajtót választja?" a három ajtó mögött azonos valószínűséggel rejtőzhet a kocsi, vagyis annak a valószínűsége, hogy a kocsi az A mögött van ugyanannyi, mint annak, hogy B mögött van vagy, hogy C mögött van.

Játsszuk le a lehetséges kimeneteleket!

Ha az autó az A mögött van, akkor a műsorvezető B-t vagy C-t tetszőlegesen kinyithatja, hiszen mindkettő mögött ugyan az van. Ebben az esetben a maradás a jó döntés.

Ha az autó a B mögött van, akkor a műsorvezető már csak a C jelűt nyithatja ki. Ebben az esetben, ha vált nyer.

Ha az autó a C mögött van, akkor a műsorvezető már csak a B jelűt nyithatja ki. Ebben az estben is igaz, hogy ha vált övé az autó.

Tehát három esetből kétszer érdemes váltani. Ez azt jelenti, hogy ha váltunk nagyobb eséllyel lesz miénk a nyeremény.

*Igazoljuk a már belátott eredményeket a valószínűség-számítás segítségével.*

Tegyük fel, hogy az A jelű ajtót választottuk, és, hogy a műsorvezető a B jelűt nyitja ki

Legyen $\Omega = \{A, B, C\}$ teljes eseményrendszer, ahol
$A$ esemény: az autó az A ajtó mögött van,
$B$ esemény: az autó a B ajtó mögött van és
$C$ esemény: az autó a C ajtó mögött van.
$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$. Valamint jelölje $Z$ azt a feltevést, hogy műsorvezetőnk a B-t nyitja ki. Ekkor a Bayes-tétel alapján:

$$P(A|Z) = \frac{P(Z|A)P(A)}{P(Z)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|Z) = \frac{P(Z|B)P(B)}{P(Z)} = \frac{0\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 0$$

$$P(C|Z) = \frac{P(Z|C)P(C)}{P(Z)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Itt is megkaptuk, hogy a váltással nő az esélyünk a nyereményre.

## N ajtó

Mi történik, ha nem 3 hanem 100 vagy akár $n$ db ajtó közül kell választani? A játék menete természetesen nem változik, hiszen minden ajtónyitás után Monty ugyanúgy felteszi a kérdést: „Maradjunk vagy váltsunk?” mindaddig, amíg már csak két ajtó marad. Az amelyiket utoljára választottuk, és még egy. Hogyan érdemes ebben az esetben taktikázni?

*Itt a következő gondolatmenetet érdemes követni:*

A játék kezdetén $n$ esetből $(n - 1)$-szer citromot választunk és csak egyszer találjuk el az autót. Ha a játék végéig kitartunk a választott ajtónk mellett, akkor az utolsó döntés előtt a helyzet így alakul: A mi ajtónk mögött még mindig $n$-ből $(n - 1)$-szer van autó, míg az egyetlen másik csukva maradt ajtónál az arány épp fordított, vagyis ott $n$ esetből $(n - 1)$-szer ott az autó és csak 1 esetben járunk pórul.

Bapeswara Rao és Bhaskara Rao bizonyította, hogy ez a legjobb stratégia.

## 2 játékos

Az alaphelyzetet úgy is bonyolíthatjuk, ha a 3 ajtó közül nem egy, hanem két játékos választ, természetesen különböző ajtókat.

Ilyenkor az első kör után az egyik játékos, aki a citromot választotta automatikusan kiesik. Ha mindketten rosszul választanak, akkor a műsorvezető véletlenszerűen dönti el, hogy ki folytatja és ki nem a játékot.

A kérdés ezután ugyanaz, érdemes-e a bennmaradt játékosnak váltani?

A válasz az eddigiek után elég meglepő, de nem érdemes megváltoztatni a döntését, hiszen a bennmaradt játékos csak akkor nyerhet, ha az autót az az ajtó rejti, melyet korábban egyik játékos sem választott. Ennek $\frac{1}{3}$ az esélye. Ha marad $\frac{2}{3}$ eséllyel viheti haza az autót.

*Itt a lehetséges játékmenetek a következők:*

Tegyük fel, hogy az 1. játékos mindig az A, míg a 2. játékos a B jelű ajtót választja.

Ha az autó az A-nál van, akkor 2. kiesik, és ha 1. vált akkor nem nyer.

Ha az autó a B-nél van, akkor az 1. játékos kiesik, és ha 2. vált, akkor nem nyer.

Ha az autó a C-nél van, akkor 1. vagy 2. kiesik, és ha a bennmaradt játékos vált, akkor nyer.

Azt az eredményt kaptuk, hogy két játékos esetén, aki vált, az az esetek $\frac{2}{3}$ részében gyalog megy haza.

Az igazsághoz hozzá tartozik, hogy a televíziós műsor játékosainak nem volt lehetősége ajtót váltani.

# Három fogoly

Monty Hall paradoxonnal megegyező problémát vet fel az úgynevezett három fogoly probléma.

Három halálraítélt, X, Y és Z, raboskodik egy börtön három cellájában. Mivel választási év van a kormányzó kegyelmet ad az egyik, tetszőlegesen kiválasztott elítéltnek. Az őr tudja, hogy melyik rab szabadulhat, de parancsba kapta, hogy nem árulhatja el a fogvatartottaknak. Az X jelű elítélt könyörögni kezd az őrnek, hogy legalább annyit mondjon meg neki, hogy ki a másik kettő közül ki nem jut ki élve. „Ha Y szabadul mondja, hogy Z. Ha Z szabadul, mondja, hogy Y. Ha pedig ő szabadulna, akkor dobjon fel egy érmét, és úgy döntse el, hogy milyen nevet mond."

Az őr azt mondja X-nek, hogy Y-t kivégzik. X ennek nagyon megörült, hiszen azt hitte túlélési esélye $\frac{1}{3}$-ról $\frac{1}{2}$-re emelkedett, hiszen most már csak ő és Z közül kerül ki a szabaduló. X nem bírja tartani a száját, és titokban mindent elmond, amit tud Z-nek, aki szintén örül a hírnek, hiszen úgy gondolkodik, hogy X esélye változatlanul $\frac{1}{3}$, míg az ő túlélési esélye megduplázódott, $\frac{2}{3}$-ra ugrott.

Melyik gondolatmenet a helyes? Igaza van-e Z-nek abban, Hogy A esélye nem változott?

Mielőtt az őr bármit is mondott volna mindhárom elítéltnek azonos esélye volt a szabadulásra$\left(\frac{1}{3}\right)$. Ezt követően az őr vagy azért mondott Y-t, mert Z-t elengedik, (ennek $\frac{1}{3}$ az esélye), vagy azért, mert X szabadul $\left(\frac{1}{3}\right)$ és a pénzfeldobás eredménye Y-t adta $\left(\frac{1}{2}\right.$ eséllyel; így összesítve $\frac{1}{6}$ a valószínűsége annak, hogy az őr azért mondta Y-t, mert X szabadul $\left.\right)$. Tehát az állítással, hogy Y-t kivégzik Z esélyét dupla akkorára növelte, mint X esélyét. Ez azt jelenti, hogy a két fogoly közül, Z-nek volt igaza, hisz szabadulási esélye megduplázódott.

*Az előbb leírtakat így igazolhatjuk:*

Jelölje X, Y, Z azt az eseményt, hogy a megfelelő fogoly kegyelmet kap, és h azt, hogy az őr Y-t nevezi meg, mint halálraítélt. Bayes-tételt felhasználva a két esélyes fogoly szabadulásának valószínűsége a következő:

$$P(X|h)=\frac{P(h|X)P(X)}{P(h|X)P(X)+P(h|Y)P(Y)+P(h|Z)P(Z)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

$$P(Z|h)=\frac{P(h|Z)P(Z)}{P(h|X)P(X)+P(h|Y)P(Y)+P(h|Z)P(Z)}=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

Ezzel igazoltuk, hogy Z-nek valóban igaza van.

# II. Fejezet

# Játékelmélet

A játékelmélet, mint a matematika új ága viszonylag fiatal, körülbelül 100 éve kezdett kialakulni. Ennek ellenére más tudományok már jóval korábban, igaz közvetetten, de foglalkoztak vele. Így például Adam Smith 1700-as években publikált „Láthatatlan kéz” [1]

elmélete.

A matematikai játékelmélet alapja a modellezés, modellalkotás. Már a reneszánsz korában megkezdődtek a kísérletek a „szerencsén”, véletlenen alapuló játékok elemzésére. Később e játékok vizsgálata vezetett a véletlen törvényszerűségeinek felismeréséhez, a valószínűségszámítás kialakulásához.

A XX. század elején kezdtek el olyan stratégiai játékokkal foglalkozni, melyekben a véletlennek nincs vagy elhanyagolható a szerepe. Az ilyen játékokban a végső kimenetelek döntő mértékben a játékosok tudásán, ravaszságán múlik. Mivel a stratégiai játékokban általában a résztvevők érdekei eltérőek vagy ellentétesek, így megtalálhatóak bennük a különböző konfliktusok főbb elemei, leírásuk és tanulmányozásuk viszonylag egyszerű. Tehát a játékelmélet megpróbálja meghatározni egy adott helyzetben a legoptimálisabb döntések sorozatát.

Nem szabad azonban összekeverni a játékelméletet a döntéselmélettel. Utóbbiban egy személy vagy csoport választ két vagy több lehetséges lépés közül, melyeknek egyértelműen tisztában vannak a következményeivel.

[1] A **"láthatatlan kéz"** Adam Smith, XVIII. századi skót közgazdász által létrehozott gazdasági kifejezés, amelyet *A nemzetek gazdagsága* (1776) című művében vezetett be. Adam Smith szerint a piacot a láthatatlan kéz irányítja oly módon, hogy a kereskedő a saját érdekét szem előtt tartva minél több profitra szeretne szert tenni, ám ennek érdekében minél jobb minőségű terméket kell előállítania, hiszen arra nagyobb a kereslet. Természetesen termékeit minél kisebb áron kell kínálnia a kereslet, és ezzel a profit maximalizálása érdekében. Ezek a gazdasági folyamatok alakítják ki a "természetes árat" és biztosítják a piacon lévő termékek minőségét.

# A játék nyeregpontja

**2, 1 Példa**: (Campingezők)

Az egyetemista fiú és barátnője - legyenek ők Zsolti és Juci - campingezni szeretne, de míg Zsolti magasan, Juci alacsonyan szeretne tábort ütni. A kiszemelt területen észak-dél és kelet-nyugati irányban is három-három út halad át. A pár abban állapodik meg, hogy valamelyik útkereszteződésnél fognak sátrazni. Illetve megállapodnak abban is, hogy táborhelyüket a következőképpen választják: Zsolti kiválaszt egy kelet-nyugat irányú utat, Juci egy észak-dél irányút, és sátrukat ezek kereszteződésében ütik fel.

A Zsolti számára elérhető útkereszteződések magassága (100 méterekben) a következő:

| 1 (út) | 2 (út) | 3 (út) |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 |
| 6 | 4 | 3 |
| 8 | 9 | 2 |

Ezt a mátrixot Zsolt *fizetési mátrixának*, vagy *nyereségmátrixának* nevezzük.

A táblázatban szereplő értékeket Zsolti *kifizetőfüggvény-értékeinek* nevezzük, hiszen ezeket úgy kapjuk, hogy minden lehetséges kimenetelhez egy értéket társítunk. Zsolti számára a három lehetséges útvonal három *tiszta stratégiának* tekinthető, hiszen bármelyiket is választja a későbbiekben már nem változtathat döntésén, a játék során minden pillanatban egyértelműen meg lesz határozva lépéseinek sorrendje.

Első pillantásra gondolhatnánk, hogy Zsoltinak a 8, 9, 2 magasságú útkereszteződésekből álló Zsolt 3 utat kell választania, hiszen így akár 900 méter magasra is kerülhet a táborhely. Ám érdemes jobban odafigyelnie, hiszen ha Juci ügyes megakadályozhatja Zsoltit céljainak elérésében. Tehát Zsoltinak úgy kell utat választania, hogy figyelembe veszi, Juci is ésszerűen gondolkodik ő is a számára legelőnyösebb választást keresi. Igaz hogy a Zsolt 3 út választásával 900 méterre is feljuthat, de lehet, hogy csak 200 méteres magasságra kerül a táborhelyük. Gondosabb elemzés után Zsolti úgy dönt, hogy a Zsolt 2 utat kell választania, hiszen így 300 méternél alacsonyabbra biztosan nem kerülhet tábor, ám ha Juci figyelmetlen, akkor ennél magasabbra is juthatnak.

Juci előtt a következőképpen sorakoznak a választható utak magasságpontjai:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 (út) | 1 | 5 | 2 |
| 2 (út) | 6 | 4 | 3 |
| 3 (út) | 8 | 9 | 2 |

Juci a Juci 1 út választásával elérheti, hogy a sátor a lehető legalacsonyabbra kerüljön. Ésszerűen gondolkodva azonban rá jön, hogy így nagyon kedvezőtlen helyzetbe is kerülhet. Célszerűbb, ha a Juci 2 utat választja: így ugyanis biztos, hogy nem kerül 300 méternél magasabbra. Ha Juci bármilyen más utat választana, akkor ennél kedvezőtlenebb helyzetbe kerülne.

Vizsgáljuk meg a kialakult eredményt. Zsoltinak olyan stratégiája van, mely biztosítja, hogy a táborhely legalább 300 méter magasan lesz, Jucinak pedig olyan, mely azt garantálja, hogy 300 méternél nem kerül magasabbra. Másképp szólva: mindegyik játékos elérheti, hogy ha a másik is ügyes, akkor 300 méter magasra, ha a másik nem ügyes, akkor a maga számára kedvezőbb helyre kerüljön a sátor.

Ha két játékos garantált minimális, illetve maximális nyeresége pontosan egyforma, akkor azt mondjuk, hogy a játéknak *nyeregpont*ja van. Ha valamelyik játékos eltérne a nyeregpont stratégiától, akkor feleslegesen veszít, ha mindketten eltérnek, akkor lehet, hogy az egyik, lehet, hogy a másik veszít feleslegesen.

Tekintsük át kissé szabatosabban, hogy mi is történt az előző példában.

A két játékost jelöljük Z-vel (Zsolti) és J-vel (Juci).

Z úgy keresheti meg a legelőnyösebb stratégiát, hogy megnézi az egyes stratégiáknál a kifizetőfüggvény-értékek közül melyik a legkisebb és igyekszik ezt a lehető legnagyobbra választani. Vagyis megnézi az egyes sorminimumokat (1, 3, 2) és azt a sort választja, melyre ez a minimum a legnagyobb (3). Az ilyen stratégiát *maximin stratégiának* nevezzük.

Hasonló elgondolás alapján választ magának J is stratégiát. Megnézi, hogy számára az egyes stratégiák legrosszabb kimenetelei közül melyik a legkevésbé kellemetlen. Tehát kiválasztja az oszlopmaximumok (8, 9, 3) közül melyik a legkisebb (3). Ez a játékos *minimax stratégiája*.

Általánosítsuk az előző gondolatmenetet!

Ha Z az $i$-edik stratégiát játssza, akkor a kifizetőfüggvény-értéke (nyereménye) legalább annyi lesz, mint az $i$-edik sor legkisebb eleme

$$\min_j a_{ij} .$$

A Z játékos azt az $i$ stratégiát igyekszik választani, melyre ez a minimum a lehető legnagyobb lesz. Keresi tehát a sorminimumok közül a legnagyobbat.

$$\max_i \min_j a_{ij} .$$

Ha ezt az $i'$ stratégia esetén találja meg, akkor $a_{i'j}$ nyereséget tud magának biztosítani, függetlenül attól, hogy milyen stratégiát játszik J. Ez az $i'$ stratégia Z *maximin stratégiá*ja.

Ugyanígy, ha J választ egy $j$ stratégiát, akkor vesztesége legfeljebb

$$\max_i a_{ij} \text{ lesz.}$$

Ezért azt a $j$ stratégiát keresi, amelynél ez az érték a legkisebb.

$$\min_j \max_i a_{ij} .$$

Ha ezt az értéket a $j'$ stratégia esetén találja meg, akkor $a_{ij'}$ veszteséget tud magának biztosítani, függetlenül attól, hogy Z milyen stratégiával játszik.

Egy $(i', j')$ stratégiapárt *nyeregpont*nak nevezünk, ha bármely $i$ és bármely $j$ esetén

$$a_{ij'} \leq a_{i'j'} \leq a_{i'j} .$$

**Tétel.** Ha egy mátrixjátéknak $(i_0, j_0)$ és $(i_1, j_1)$ tiszta nyeregpontjai, akkor

$$\mathrm{v} = a_{i^0 j^0} = a_{i^1 j^1} \quad \text{(ekvivalencia), továbbá}$$

$(i_0, j_1)$ és $(i_1, j_0)$ szintén nyeregpontok (felcserélhetőség).

**Bizonyítás.** Mivel $(i_0, j_0)$ nyeregpont, ezért

$$a_{i^1 j^0} \le a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j^1} .$$

Hasonlóan, mivel $(i_1, j_1)$ nyeregpont, ezért

$$a_{i^0 j^1} \le a_{i^1 j^1} \le a_{i^1 j^0} .$$

A két egyenlőségből viszont

$$a_{i^0 j^1} \le a_{i^1 j^1} \le a_{i^1 j^0} \le a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j^1}$$

QED.

# Kevert stratégia

**Minden játék megoldásának első lépése a nyeregpontok vizsgálata! Ha van nyeregpont, akkor megoldottuk a játékot!**

Megoldható-e a játék, ha nem rendelkezik nyeregponttal?

Matematikai értelemben a kérdés elsőre elgondolkodtató, ám ha a mindennapi életben előforduló konfliktusokra gondolunk, tudjuk, hogy található olyan kompromisszum, mely mindkét fél számára előnyösnek tekinthető.

**2, 2 Példa.**

| I\II | 1. | 2. |
|---|---|---|
| 1. | 1 | 9 |
| 2. | 8 | 2 |

A sorminimumok (1, 2) és az oszlopmaximumok (8, 9) számbavétele után rögtön láthatjuk, hogy semelyik kettő sem egyenlő. Hogy alakul ilyenkor a játék? Hogyan gondolkodhatnak a játékosok?

Ha az első játékos csak az I 1. stratégiát játssza, akkor számítania kell arra, hogy II. ezt észreveszi, így nyeresége 9 egységről 1 egységre csökken. Ha csak az I 2. stratégiát alkalmazza, akkor 8 egység helyett csak 2-őt nyerhet. Hiszen mindkét játékos racionális, tehát arra törekszik, hogy számára a lehető legjobb eredménnyel záruljon a játszma.

A probléma magában hordozza a megoldás kulcsát, hiszen ha II kitart valamelyik tiszta stratégia mellett, akkor I túlságosan jól jár, II kénytelen a fennmaradó másik lehetőséghez folyamodni, vagyis ahhoz, hogy mindkét stratégiát alkalmazza.

Tegyük fel, hogy II felváltva alkalmazza egyik, illetve másik stratégiáját, míg I csak az I 1. stratégiát használja. Így az esetek egyik felében II vesztesége 1 másik felében 9 egység. Megfelelően nagyszámú játszma után veszteségének várható értéke:

$$\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 9}{1 + 1} = 5$$

egység. Ezt úgy kaptuk meg, hogy meghatároztuk a nyereségek valószínűségi arány szerinti súlyozott átlagértékét.

Ha I az I 2.-t alkalmazza, akkor az átlagos nyereség:

$$\frac{1 \cdot 8 + 1 \cdot 2}{1 + 1} = 5$$

egység, vagyis annyi, mint az előző esetben. Tehát II jobban jár, ha felváltva alkalmazza az II 1. és II 2. stratégiát, így ugyanis átlagosan 5 egységnél semmiképpen sem kell többet fizetnie, függetlenül attól, hogy I melyik stratégiát alkalmazza. Ez az 5 egység pedig nyilván kevesebb, mint az oszlopmaximumok legkisebbike, ami ebben a példában 8 egység volt.

A megoldás kulcsa újabb kérdést vet fel, hogyan érdemes II-nek a saját stratégiáit keverni? Ha adott mintával játszik, akkor I felfedezheti ezt és a számára kedvezőbb válasszal reagálhat erre. Feltettük, hogy II felváltva játssza az II 1. és az II 2. stratégiát. Ezt néhány kör alatt I észreveheti és ő is felváltva kezdi el játszani a maga stratégiáit.

Így jutottunk el a *kevert stratégia* fogalmáig, mely a tiszta stratégiák valamilyen arányú, véletlenszerűen váltakozó alkalmazását jelenti.

Tehát a 2, 2 Példához visszatérve, II kitart amellett, hogy fele-fele arányban játssza az egyik, illetve másik stratégiát, akkor úgy lehet a legeredményesebb, ha a véletlenre bízza magát, és egy pénzfeldobással dönti el, hogy épp melyik stratégiát választja.

Hogy dönthetjük el, hogy milyen arányban érdemes a stratégiákat választani?

**a) Megoldás.** Ez a módszer nem igényel mély matematikai ismeretket, ám kissé hosszadalmas is lehet, már az általános iskolában is könnyen elsajátítható.

Kezdjük az I játékossal.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | 1 | 9 |
| 2. | 8 | 2 |

Vonjuk ki a második oszlopot az elsőből. A kapott számokat írjuk fel külön egy új mátrixban:

| | |
|---|---|
| 1. | -8 |
| 2. | 6 |

I 1. gyakoriságát a

| | |
|---|---|
| 1. | |
| | 6 |

mátrix 2. sorában kapott elem, I 2. gyakoriságát pedig a mátrix másik eleme adja.

| | |
|---|---|
| | -8 |
| 2. | |

A két szám közül az egyik mindig negatív. Hagyjuk el a negatív előjelet. Az így kapott gyakoriságok azt jelentik, hogy I-nek 14 játékból 6-szor az 1. míg 8-szor a 2. stratégiát kell megjátszani. Azaz a stratégiák aránya 6 : 8, ami ekvivalens a 3 : 4 aránnyal.

II legjobb stratégiáit hasonló módszerrel kereshetjük meg:

| | |
|---|---|
| 1. | 2. |
| 1 | 9 |
| 8 | 2 |

Most az első sorból vonjuk ki a másodikat:

| | |
|---|---|
| 1. | 2. |
| -7 | 7 |

Itt II 1. gyakoriságát a második oszlop

| | |
|---|---|
| 1. | |
| | 7 |

II 2. stratégia gyakoriságát pedig az első oszlop eleme adja:

| | |
|---|---|
| | 2. |
| -7 | |

A negatív előjel itt is elhagyható, vagyis II 1. és II 2. gyakoriságának aránya 7 : -7, azaz 7 : 7 adja, ami ekvivalens az 1 : 1 aránnyal, tehát a két stratégiát egyformán kell alkalmazni.

**b) Megoldás.** Általánosítva

Tekintsük a következő mátrixot:

| I\II | 1. | 2. |
|---|---|---|
| 1. | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| 2. | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

Mivel a mátrixnak nincs nyeregpontja, így célunk az átlagos (várható) nyeremény (E) maximalizálása, azaz minden stratégiához rendeljünk valószínűséget és azt vizsgáljuk, hogy ez a valószínűség mekkora legyen, hogy az átlagos nyereményünk maximális legyen.

Ha I az I 1. tiszta stratégiát $q$ valószínűséggel játssza, akkor az I 2. stratégiát nyilván $1 - q$ valószínűséggel választja, ugyan ez elmondható II-re is, aki az II 1. és 2. stratégiákat $p$, $1 - p$ arányban alkalmazza.

Vagyis az egyes nyeremények $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ várható értékét a következő táblázattal kapjuk.

| I\II | | 1. | 2. |
|---|---|---|---|
| | | $p$ | $1 - p$ |
| 1. | $q$ | $qpa_{11}$ | $q(1 - p)a_{12}$ |
| 2. | $1 - q$ | $(1 - q)pa_{21}$ | $(1 - q)(1 - p)a_{22}$ |

Innen könnyen leolvashatjuk az egyes felekhez tartozó várható eredményeket:

$$\mathrm{E}\,(q, p) = p\,[a_{11}q + a_{21}(1 - q)] + (1 - p)[a_{12}q + a_{22}(1 - q)]$$

I nyeremény a q függvénye, így q-ban kell szélsőértéket keresnünk:

$$\mathrm{E}'\,dq = pa_{11} + (1 - p)a_{12} - pa_{21} - (1 - p)a_{22} = 0$$

$p$-re megoldva:

$$p = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}\,.$$

Az eredeti mátrix értékeit behelyettesítve:

$$p = \frac{2 - 9}{1 - 9 + 2 - 8} = \frac{-7}{-14} = \frac{1}{2}$$

Ez megerősíti az előző megoldás eredményét, hiszen a két stratégiát felváltva kell egyenlő arányban kell alkalmazni.

# Egyforma-Másforma

Két játékos, *Egyforma* és *Másforma* társasjátékot játszik: Mindketten, titokban a kezükbe vesznek 1 vagy 2 kavicsot, majd megmutatják egymásnak, hogy hányat vettek fel. Ha egyforma sok kavics van a markukban, akkor *Egyforma* nyer; ha nem, akkor *Másforma*. A vesztes annyi pénzt ad társának, ahány kavics a kezeikben összesen volt. Tehát *Egyforma* nyer két pénzt, ha mindketten egy kavicsot emeltek fel, míg négy pénzt, ha mindketten kettőt vettek a markukba; különben *Másforma* nyer három pénzt.

*Egyforma* elmagyarázta partnerének, hogy ez egy igazságos játék, hisz az esetek 50%-ában *Másforma* nyer 3-at, 25-25%-ában veszít 2-t és 4-et, tehát az átlagos nyereség nulla.

Magában viszont így okoskodik: én az esetek többségében 2-t választok. Ha *Másforma* az esetek felében 1-et, másik felében 2-t választ, akkor az esetek felében én nyerek, mégpedig 4-et, s így túljárok *Másforma* eszén.

Ezt a taktikát *Másforma* hamar kiismerte és a maga javára fordította. Az esetek többségében ő egyet vett kézbe, s így többnyire ő nyert. Erre *Egyforma* is taktikát váltott, csak egy kavicsot használt, és nyert. Ezt jó ideig így folytatták, míg végül rá nem jöttek, hogy úgy kell választaniuk, hogy minden időpillanatban véletlenszerűen, az előzményektől teljesen függetlenül választanak 1 vagy 2 kavicsot.

*Egyforma* választ egy $p$ valószínűségű $A$ eseményt, és ezt figyeli meg egymás után, egymástól függetlenül. Ha bekövetkezik $A$, akkor egy kavicsot vesz a markába; ha nem, akkor kettőt. *Másforma* hasonlóan jár el. Ő egy $q$ valószínűségű $B$ eseményt figyel meg, és aszerint tippel. Az $A$ és $B$ események is függetlenek egymástól. Ezért

*Egyforma* akkor nyer kettőt, ha $AB$ következik be;

*Egyforma* akkor nyer négyet, ha $\overline{A}\,\overline{B}$ következik be;

*Egyforma* hármat veszít (úgy is mondhatjuk: mínusz hármat nyer), ha $A\overline{B}+\overline{A}B$ következik be.

Tehát a korábbi gondolatmenetet követve:

| Egyforma nyereménye | 2 | -3 | 4 |
|---|---|---|---|
| ennek valószínűsége | $P(AB) = pq$ | $p(1 - q) + q(1 - p)$ | $(1 - p)\,(1 - q)$ |

Ezért *Egyforma* várható nyereménye:

E(*Egyforma* nyereménye) = $2pq - 3p(1 - q) - 3q(1 - p) + 4\,(1 - p)(1 - q) = 12pq - 7p - 7q + 4$.

*Egyforma* ezt a nyereményt maximalizálni, míg *Másforma* minimalizálni szeretné. E két ellentétes törekvést „békíti” össze a maximin-elv és a minimax-elv:

*Egyforma* így okoskodik: *Másforma* viszonylag hamar tud jó becslést adni $p$-re; az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy pontosan ismeri is. Ekkor olyan $q_p$-t választ, amelyre

$$12pq_p - 7p - 7q_p + 4 = \min_{0 \le q \le 1}(12pq - 7p - 7q + 4).$$

Ez számomra a legkedvezőtlenebb eset, ezért olyan $p$-t akarok választani, amelyik ebben a legrosszabb esetben is a lehető legnagyobb nyereményt hozza. Ekkor ugyanis legalább:

$$\text{maximin} = \max_{0 \le p \le 1}\left[\min_{0 \le q \le 1}(12pq - 7p - 7q + 4\right]$$

nyereményre számíthatok, bárhogy játsszon is *Másforma*.

Határozzuk meg rendre $q_p$, a maximumot adó $p$ és maximin értékét.

$$12pq - 7p - 7q + 4 = q(12p - 7) + (4 - 7p).$$

Itt a második összeadandó nem függ $q$-tól, az első összeadandó pedig $q$-nak számszorosa. Ez a [0; 1]-ban a minimumát az intervallum valamelyik végpontjában veszi fel:

$$q_p = 1, \text{ ha } 12p - 7 < 0; \quad q_p = 0, \text{ ha } 12p - 7 > 0.$$

A $12p - 7 = 0$ esetben a nyeremény nem függ $q$-tól. Így

$$\min_{0 \le q \le 1}\left(12pq - 7p - 7q + 4\right) = 5p - 3, \text{ ha } 12p < 7;$$

$$\min_{0\le q\le 1}\left(12pq-7p-7q+4\right) = 4 - 7p, \text{ ha } 12p > 7.$$

Ennek a minimumnak a maximumát kell megkeresni a $0\le q \le 1$ intervallumban. Ehhez ki kell számítani a

$$\max_{0\le p\le \frac{7}{12}}(5p-3) \text{ és a } \max_{\frac{7}{12}\le p\le 1}(4-7p)$$

maximumokat, és közülük a nagyobbikat venni.

Az első függvény monoton növekvő, a második monoton csökkenő. Így mindkettő a $p_0 = \dfrac{7}{12}$ pontban veszi fel legnagyobb értékét. Ezek:

$$5\cdot\frac{7}{12}-3=-\frac{1}{12} \text{ és } 4-7\cdot\frac{7}{12}=-\frac{1}{12}.$$

Ez azt jelenti, hogy *Egyforma* tud úgy játszani, hogy játékonként átlagosan nem veszít többet $\dfrac{1}{12}$ -nél. Bele kell-e ebbe törődnie? Tud-e *Másforma* úgy játszani, hogy ennél nagyobb veszteségre kényszerítse *Egyformát*? Erre a kérdésre úgy válaszolunk, hogy *Másforma* szempontjából is végigkövetjük az előző gondolatmenetet. Bármilyen $q$-t is választ, ezt *Egyforma* hamar felismerheti. Ekkor olyan $p_q$ -t fog választani, ame*l*yikre

$$12p_q q-7p_q-7q+4=\max_{0\le p\le 1}(12pq-7p-7q+4).$$

*Másforma* olyan $q$-t keres, amelyre ez a maximum a lehető legkisebb. A

$$\text{minimax} = \min_{0\le q\le 1}\left[\max_{0\le p\le 1}(12pq-7p-7q+4\right]$$

nyerésnél nagyobbra nem számíthat ugyanis Egyforma bármilyen $p$-t választ.

Ezt a minimax feladatot ugyanúgy oldjuk meg, mint az előbbi maximin feladatot:

$$12pq - 7p - 7q + 4 = p(12q - 7) + (4 - 7q).$$

Ez $p$-nek lineáris függvénye, tehát növekvő, ha $p$ együtthatója pozitív, és csökkenő, ha negatív. Ezért

$$\max_{0 \le p \le 1}(12pq - 7p - 7q + 4) = 5q - 3, \text{ ha } 12q - 7 > 0;$$

$$\max_{0 \le p \le 1}(12pq - 7p - 7q + 4) = 4 - 7q, \text{ ha } 12q - 7 < 0.$$

Így

$$\text{minimax} = \min\left[\min_{\frac{7}{12} \le q \le 1}(5q - 3)\,;\ \min_{0 \le q \le \frac{7}{12}}(4 - 7q)\right].$$

A szögletes zárójelben lévő mindkét lineáris függvény minimumhelye: $q_0 = \frac{7}{12}$, és mint láthatjuk, ekkor a két függvény értéke azonos: $-\frac{7}{12}$. Ha tehát *Másforma* egy $\frac{7}{12}$ valószínűségű esemény független valószínűségei szerint választja a kavicsokat, akkor játékonkénti $\frac{1}{12}$ pénz vesztésére tudja kényszeríteni *Egyformát*, bárhogyan is játsszon az.

Könnyen találhatunk olyan véletlen esemény generátort, amellyel $\frac{7}{12}$ valószínűségű $A$ esemény generálható. Ehhez például egy érmére és egy dobókockára van szükség. Legyen $A$ az az esemény, hogy az érme fejre esik, vagy az érme írást mutat és a kockán 6-ost dobunk.

Ezt a játékot két személy játszhatja. Nyereményük összege minden játékban nulla. Az ilyen játékokat kétszemélyes *zérus összegű* játékoknak nevezzük. Az ilyen játékokban a minimax = maximin elv mindig alkalmazható.

# Fogoly dilemma

A legismertebb játékelméleti probléma az úgynevezett fogolydilemma.

Egy bankrablás után a rendőrség őrizetbe vesz két férfit, Sándort és Józsefet. A letartóztatást követően a két személyt elkülönítik egymástól. Mivel a nyomozók csak közvetett bizonyítékokkal rendelkeznek, de pontosan tudják, hogy mindkét gyanúsított számára a szabadság fontosabb, mint a társ hogyléte, ötletes tervet eszelnek ki.

A kihallgatás során mindkettőjüknek ugyan azt az alkut ajánlják:

„Választhat: vall, vagy hallgat. Ha tanúskodik és a társa nem mond semmit, akkor minden vádat ejtenek Ön ellen, de társa komoly büntetést kap. Ugyanígy, ha hallgat, de a társa vall, akkor ő elmehet, Ön pedig hosszú időre itt marad. Ha mindketten vallanak azt enyhítő körülménynek tekintjük, kisebb büntetésre számíthatnak. Abban az esetben, ha egyikük sem hajlandó vallomást tenni kénytelenek leszünk ejteni a vádak nagy részét, így csak korábbi bűncselekményeikért kell rövid időre börtönbe vonulniuk. Fontolja meg a lehetőségeit, és holnap délig értesítsen hogy döntött."

Láthatjuk, hogy a rabok a következő problémával szembesülnek: a másik döntésétől függetlenül, személy szerint akkor járnak jobban, ha társukat elárulva vallomást tesznek. Hiszen, ha Sándor abban bízik, hogy József kooperál, hallgat, akkor az optimális stratégia az, ha vallomást tesz, így azonnal szabadul, míg társa hűsöl. Amennyiben azzal számol, hogy társa vallomást tesz, akkor is a vallomástétel a legjobb döntés, mert így csökkenetett büntetésre számíthat. Igen ám, de döntéseik kimenetele ebben az esetben nem független. Ha mindketten a hallgatást választják kedvezőbb büntetést kapnak, mint mikor vallanak.

Mindképpen a vallomás lesz a meghatározó stratégia mindkét résztvevő számára. Mindegy, hogyan dönt a másik játékos, a vallomással elkerülhető a rosszabb lehetőség. A foglyok számára sajnálatos módon pont ez fog elvezetni ahhoz a szerencsétlen végkimenetelhez, mikor mindkettő vall és mindkettő súlyos büntetést kap. Ez a fogolydilemma gyökere

Általános tekintetben a probléma jól érzékelteti a csoport és az egyén között gyakran fennálló ellentétes helyzeteket. Ezt a konfliktust használja fel alaphelyzetnek szinte az összes csapatsportról szóló hollywoodi mozifilm. Vagyis amikor egy csapat, amelynek tagjai, bár nem olyan tehetségesek, szerves egységként együtt dolgozva legyőzik a jóval erősebb, „egyéniségekből” álló ellenfelet is.

Esetünkben erről persze nincs szó, hiszen foglyaink mindketten elég önzőek ahhoz, hogy ha esetlegesen lehetőségük lenne megegyezni, akkor sem biztos, hogy megtartanák az egymásnak tett ígéretüket.

# Történeti áttekintés

A mai játékelmélet „természetesen” nem alakulhatott volna ki magyar közbenjárás nélkül. Az 1920-as években Borel több rövid cikket publikált az addig csak hobby matematikai témának tekintett stratégiai játékokról. Ő vezette be a stratégiai játékok és a kevert stratégia fogalmát. Ám munkássága teljesen feledésbe merült volna, egy magyar matematikus, Neumann János tevékenysége nélkül. 1928-as cikkében ugyanis Neumann bizonyítást adott az úgynevezett minimax tételre, mellyel tulajdonképpen egyértelművé tette, hogy mely nyerő stratégiát kell egy játékosnak választani.

A cikk és benne a játékelmélet alaptételének bizonyítása önmagában nem keltett nagy visszhangot, hiszen nem volt egyértelmű az elmélet alkalmazhatósága. Talán még itt is megszakadhatott volna ennek a fiatal tudománynak a fejlődése, ám Neumannal kapcsolatba lépett Oskar Morgenstein, aki felismerte a téma közgazdaságtani hasznosságát. Több évnyi közös munka után eredményeiket egy könyvben publikálták, melyet The Theory of Games and Economic Behavior (Játékelmélet és gazdasági viselkedés, 1944) címmel adtak ki.

Az ’50-es évektől kezdve sorra jelentek meg az újabb és újabb fontos eredmények.

1950-ben a fiatal John Nash a játékelmélet segítségével forradalmasította a közgazdaságtant. Elméletét nem kooperatív problémákra alkotta és bizonyította.

1988-ban Harsányi János és Reinhard Selten Nash munkáját kritizálva újabb bizonyítást adott, mely már figyelembe veszi a játékosok közti együttműködés és nem együttműködés problematikáját.

A játékelmélet hasznos tudományként való elismertetése utóbbi három személyhez köthető, akik játékelméleti tevékenységük miatt több egyéb díj mellett 1994-ben elnyerték a Közgazdasági Nobel-díjat.

A játékelmélet ismertségét nagyban elősegítette a John Nash életét – hollywoodi stílusban – bemutató 2001-es Egy csodálatos elme című film, melynek sikerét az izgalmas történet mellett a sikeres Gladiátor, Russel Crowe alakítása biztosította.

# Összegzés

Mikor kiválasztottam a szakdolgozatom címét, még úgy gondoltam, hogy a téma pusztán összegyűjti az általános- és a középiskolában előforduló egyszerű matematikai játékokat.

Az első „megbeszélésen” tudatosodott bennem, hogy ez a téma nem pusztán erről szól.

Előkerült a „játékelmélet” kifejezés, melyről addig nem sokat hallottam. Néhány cikk és könyv elolvasása után úgy gondoltam, hogy tanár szakosként nagy hasznát venném a téma egyszerű bevezetését tartalmazó „jegyzet”-nek, elkerülendő azt a lehetetlennek tűnő helyzetet, miszerint el lehet végezni 2 év gimnáziumi matematika fakultációt és 3 év matematika BSc-t anélkül, hogy valaha is kapcsolatba kerültünk volna ezzel az egyre befolyásosabb matematikai ágazattal.

A játékelmélet mondhatni felszínes megismerése után úgy gondolom, hogy ha nem is a szakkifejezések mentén haladva, de ez a témakör mindenképpen érdemeses lenne arra, hogy a magyar középiskolák tananyagának részét képezze.

Ezt többek között az indokolja, hogy néhány kivételtől eltekintve a felsőoktatás legtöbb természettudományi, közgazdaságtudományi, informatikai szakának tananyagában, előfordul, illetve az, hogy az egyszerűbb játékok érdekes példának tekinthetők, melyek segítségével, még viszonylag korán, azok figyelmét is fel lehetne kelteni a matematika, mint tudományág iránt, akik addig kevésbé voltak fogékonyak rá. Ugyanakkor az egyszerű, hétköznapi példák azokban is fenntartják az érdeklődést az anyag iránt, akik az átlagosnál gyengébb logikai gondolkodással rendelkeznek.

# Függelék

## Életrajzok

**Félix Edouard Justin Émile Borel** (Saint Affrique, 1871. január 7. – Párizs, 1956. február 3.) francia matematikus, politikus. 1893-ban a Lille-i Egyetemen kapott segédprofesszori állást, 1897-ben az École Normale Supérieure-ben. 1901-ben vette feleségül Marguerite Appellt (álnevén Camille Marbo), Paul Émile Appell matematikus lányát. 1905-ben a Francia Matematikai Társaság elnökévé nevezték ki. 1909-ben a Sorbonne Függvényelmélet Tanszékét kapta meg, amelyet kifejezetten neki alapítottak, ezt az állást 1941-ig megtartotta. 1921-ben a Francia Tudományos Akadémia tagja lett, 1933-ban megválasztották az intézmény alelnökének, 1943-tól pedig az elnökének. Részt vett az Institut de Statistique de l'Université de Paris statisztikai intézet 1922-es, illetve az Institut Henri Poincaré 1928-as megalapításában. A háború után Francia Becsületrenddel tüntették ki. 1948-ban az UNESCO Tudományos Bizottságát vezette.

René-Louise Baire-rel és Henri Lebesgue-gel egyetemben a mértékelmélet, illetve annak a valószínűségelmélet terén történő alkalmazásának úttörője, a két tudós mellett a modern valós függvénytan egyik megalapozója. Habár előtte is definiálták már divergens számsorok összegét, ő dolgozta ki az első szisztematikus módszert ezek tanulmányozására 1899-ben.

1913 és 1914 között összekapcsolta a hiperbolikus geometriát és a speciális relativitás elméletét.

1921 és 1927 között a játékelmélet területén ért el eredményeket, több írása jelent meg ebben a témában, a bridzs kártyajáték tanulmányozásával is foglalkozott. Nevéhez fűződik az a gondolatkísérlet, ami az angol nyelvben Végtelen Majom Tétel néven vonult be a köztudatba: ültessünk egy képzeletbeli örökéletű majmot egy olyan írógép elé, amelyből sohasem fogy ki a szalag és a papír. Ha a majom véletlenszerűen üti le a billentyűket, akkor egészen biztosak lehetünk benne, hogy egyszer (sőt, végtelen sokszor!) megjelenik Shakespeare összes műve a papírokon.

**Neumann János** (Budapest, Lipótváros, 1903. december 28. – Washington, 1957. február 8.) magyar származású matematikus.

Édesapja 1913-ban nemesi címet kapott, és felvette a *margittai* előnevet. Így lett hivatalosan margittai Neumann János, később külföldi tartózkodása idején vette fel a John von Neumann nevet. A világ nagyobbik részén ma is így ismerik.

1913-ban szülei beíratták a híres Fasori Evangélikus Főgimnáziumba. Ebbe az iskolába járt a Nobel-díjas Wigner Jenő (1963, fizikai) és Harsányi János (1994, közgazdasági) is, ahol mindhárman Rátz László tanár úrtól tanultak matematikát. Egyetemi évei alatt sokat tartózkodott Berlinben, ahol Fritz Habertnél kémiát, Albert Einsteinnél statisztikus mechanikát és Erhardt Schmidtnél matematikát hallgatott. 1923-ban Zürichbe ment, hogy a zürichi Szövetségi Műszaki Egyetemen vegyészetet tanuljon. Vegyészmérnöki diplomáját 1925-ben szerezte, matematikából pedig egy évvel később doktorált Budapesten.

1930-ban meghívták vendégprofesszornak az Egyesült Államokba, Princeton-ba. Hamarosan az ottani egyetem professzora, majd az újonnan megnyílt a princetoni Institute for Advanced Studies professzora lett. A II. világháború idején bekapcsolódott a haditechnikai kutatásokba. Rendszeresen járt Los Alamosba, ahol részt vett az első atombomba megépítésében. Az 1930-as évek végétől érdeklődése egyre jobban az alkalmazott matematikai problémák felé fordult. Megkapta az Egyesült Államok Érdemérmét (1954), 1955-ben az öttagú Atomenergia Bizottság (AEC) tagjává nevezték ki.

Tudományos pályafutása kezdetén behatóan foglalkozott kvantumelmélettel és a matematika alapjaival, halmazelmélettel és matematikai logikával. Tőle származik a halmazelmélet egzakt megalapozása. Jelentős eredményeket ért el az ergódelelméletben és kifejlesztette a *„folytonos geometria”* elméletét is. Az ő nevéhez fűződik a *„játékelmélet”* megteremtése *(minimax elv,* 1928). A koreai háború idején például ennek az elméletnek a kiértékelése volt az oka, hogy az USA nem támadta meg Kínát!

1955. augusztus 15-én egy orvosi vizsgálat alkalmával csontrákra utaló elváltozást találtak a nyakában, amely feltehetőleg a korábban diagnosztizált prosztatarák áttéte volt.

Neumann János 1957. február 8-án halt meg Washingtonban, nyughelye Princetonban van.

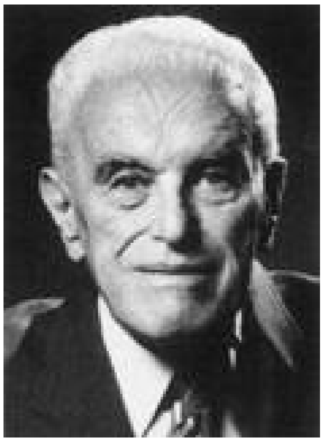
**Oskar Morgenstern** (Görlitz, 1902. január 24. – Princeton, 1977. július 26.) német születésű osztrák közgazdász.

Bécsi tanulmányai után az Österreichischen Instituts für Konjunkturforschung igazgatója, 1935 és 1938 között a Bécsi Egyetem professzora.

Ausztria német megszállása idején az Egyesült Államokban tartózkodott. A háború miatt az emigráció mellett döntött. A Princeton Egyetem, és az Institute for Advanced Studies professzora lett.

1944-ben Neumann Jánossal közösen publikálták a *Theory of Games and Economic Behaviourcímű* könyvet, mellyel megalapozták a játékelméletet.

1963-ban Paul F. Lazarsfelddel megalapította a bécsi Institut für Höhere Studien-t (IHS), melynek 1970-ig igazgatója volt. Később visszatért az USA-ba. 1977-ben Princetonban halt meg.



**Harsányi János** (Budapest, 1920. május 29. – Berkeley, 2000. augusztus 9.) magyar származású Nobel-díjas amerikai közgazdász, a korlátozott információjú játékelmélet kutatója.

1938-ban érettségizett a Fasori Evangélikus Gimnáziumban. 1942-ben gyógyszerészi oklevelet szerzett Budapesten.

Zsidó származása miatt 1944 májusától novemberéig munkaszolgálatos. 1945-ben megszökött. A Katolikus Hittudományi Főiskolán 1946-tól filozófiát hallgatott, 1947-ben doktorált. 1948-ban leendő feleségével Ausztriába menekült. 1950-ben Ausztráliába emigrált. 1954-1956 között a Brisbane-i Egyetemen közgazdaságtant tanított. 1956-ban Stanford Egyetemre került. Kenneth Arrow mellett 1958-ban közgazdasági doktorátust szerzett. Főként matematikát és statisztikát tanult. 1958-ban a Camberrai, 1961-ben a Detroiti Egyetemen kapott állást. 1964-ben a kaliforniai Berkeley Egyetem professzora lett.

1994-ben – John Forbes Nashel és Reinhard Seltennel megosztva – „A nem-kooperatív játékok elméletében az egyensúly-analízis terén végzett úttörő munkásságért” Nobel-díjat nyert.

Élete végén Alzheimer-kórban szenvedett. 80 éves korában szívroham következtében hunyt el.

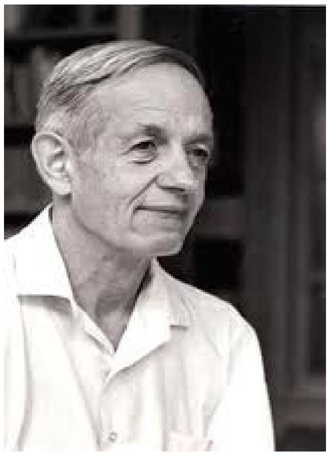
**Reinhard Selten** (1930. október 5. Breslau, -) német közgazdász.

1957-ben a Frankfurti Egyetemen matematikából mesterfokozatot szerzett.

1961-ben szerezte meg a PhD fokozatát matematikából. A kísérleti közgazdaságtan egyik alapító tagjának lehet tekinteni.

Jelenleg a Bonni Egyetem emeritus professzora, és számos tiszteletbeli doktori cím tulajdonosa.

1994-ben megosztva kapta a közgazdasági Alfred Nobel-emlékdíjat a játékelmélet terén élert kutatásainak eredményéért.



**John Forbes Nash Jr.** (1928. június 13. Bluefield, Nyugat-Virginia –) amerikai matematikus.

Már gyerekkorában kitűnt, hogy nem kedveli az embereket, és hogy egyedül szeret dolgozni. 20 évesen már megszerezte diplomáját a Carnegie Mellon Universityn, Pirrsburgben. Ezután a Princeton Egyetemen tanult, ahol PhD fokozatot szerzett matematikából. 1950-ben a nem kooperatív játékelmélet témakörben írt dolgozata által kapta meg a fokozatot. Ezt az eredményt később Nash-egyensúlynak nevezték el. Témavezetője Albert W. Tucker volt. Legfontosabb eredményeit a játékelmélet terén alkotta. A Nash-féle beágyazási tétel szerint minden Riemann-sokaság izometrikusan beágyazható a megfelelő eukleidészi térbe. Munkássága kiterjedt a nemlineáris parabolikus parciális differenciálegyenletekre és az algebrai geometriára is.

Nash 1959-ben elmegyógyintézetbe került paranoid skizofréniája miatt. Nem sokkal ezután megszületett a fia, John Charles Nash, később ő is matematikussá vált és nála is diagnosztizálták a skizofréniát.

A – Neumann János által megalapított - játékelmélet terén elért kiemelkedő eredményeiért 1994-ben (Harsányi Jánossal és Reinherd Seltennel megosztva) megkapta a közgazdasági Alfred Nobel-emlékdíjat. Mégsem ez hozta meg neki a világhírt, hanem az életét feldolgozó film, a 2001-es Egy csodálatos elme.

# Hivatkozások


MÉSZÁROS József: Játékelmélet, Gondolat Kiadó, 2005

Dr. FELIP László: Játékelmélet, Filum Kiadó,

J. D. Williams: Játékelmélet, Műszaki Könyvkiadó, 1972

FAZEKA I.: Valószínűségszámítás, MobiDIÁK könyvtár, 2003

NEMETZ T.- WINTSCHE G.: Valószínűségszámítás mindenkinek, Polygon Kiadó

http://hu.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall-paradoxon

http://en.wikipedia.org/wiki/Three_Prisoners_problem

http://hu.wikipedia.org/wiki/L%C3%A1thatatlan_k%C3%A9z

http://hu.wikipedia.org/wiki/%C3%89mile_Borel

http://hu.wikipedia.org/wiki/Neumann_J%C3%A1nos

http://en.wikipedia.org/wiki/Oskar_Morgenstern

http://hu.wikipedia.org/wiki/John_Forbes_Nash

http://www.ccs.neu.edu/course/cs1800/10F/handouts/Probability/ConditionalProbability.pdf


A szakdolgozatomban esetlegesen előforduló szó szerinti idézések nincsenek jelölve. A tételek, bizonyítások, állítások egyértelműsége, és az hogy az e témában és ezen a szinten elérhető szakirodalom elég egysíkú, szinte lehetetlenné teszi a szó szerinti idézés elkerülését.