EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKATANÍTÁSI ÉS MÓDSZERTANI KÖZPONT

A KÖR FOGALMÁNAK BEVEZETÉSE KÜLÖNBÖZŐ GEOMETRIAI RENDSZEREKBEN. KÖRREL KAPCSOLATOS TÉTELEK BIZONYÍTÁSA SÍKON ÉS GÖMBÖN.

Nagy Veronika

Budapest

2010. 06. 04.

Konzulens: Lénárt István

Belső témavezető: Dr. Vásárhelyi Éva

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A gömbi geometriával először első éves hallgatóként találkoztam a geometria kurzus előadásain. A téma felkeltette az érdeklődésem, ezért szerettem volna elmélyedni a gömb geometriájának vizsgálatában, amire később lehetőségem is nyílt Lénárt István „Nem-euklideszi geometriák tanítása az iskolában” nevezetű kurzusán. Már ezeken a gyakorlatokon felmerült bennem, milyen érdekes lenne a jól ismert euklideszi-sík és a számomra új geometria összehasonlítása. Emellett mindig közel állt hozzám a kör, hiszen még iskolába alig jártam, már megláttam benne a számomra tökéletes alakzatot. E két téma találkozása szinte kézenfekvő módon adta meg a választ arra a kérdésre, milyen munkával szeretném zárni matematika alapszakos tanulmányaimat.

Az elmúlt évek során egyre több általános és középiskola beépítette a matematika órák tantervébe a gömbi geometria tanítását, hiszen a diákok földrajz órán már hatodik osztályban megismerkednek a gömbi pólusokkal, egyenlítővel és körökkel. A térképek és a földgömb tanulmányozása során már ekkor felismerhető a két geometria kapcsolata.

Szakdolgozatom elsősorban azoknak a pedagógusoknak nyújt segítséget, akik szeretnék, hogy diákjaik megbarátkozzanak a gömbbel, és ezáltal mélyebben megismerjék bolygónkat. Emellett mindazoknak, akik még csak érintőlegesen találkoztak a témával, segítséget nyújt abban, hogy átfogóbb képet kapjanak a síkbéli és a gömbi kör tulajdonságairól. A következőkben így elsősorban olyan jellemző vonásokat, tételeket, tételbizonyításokat hasonlítok össze, melyek felmerülnek a középiskolai tanulmányok során, vagy bizonyos szempont szerint érdekességet rejtenek. Néhány tételt bizonyítás nélkül közlök – mint például a Feuerbach-kör tulajdonságairól szóló állításokat –, hiszen ezek az igazolások túllépik a szakdolgozat kereteit. Ez azonban nem okoz akadályt, hogy felismerhessük a két geometriai rendszer közti különbséget, vagy meglássuk a köztük húzódó kapcsolatot, hasonlóságot.

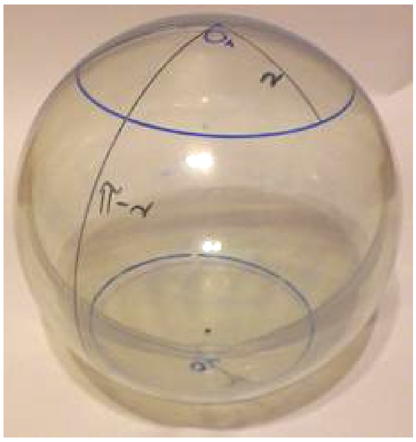
A közölt elmélethez nagy segítséget nyújthatnak az ábrák, melyeket a síkon a szokásos eszközökkel készítettem, a gömbön pedig a Lénárt-gömb nevezetű gömbi szerkesztő készlettel.

A szakdolgozatom megértése bizonyos szintű matematikai tudást feltételez, mivel nem térek ki témámat érintő alapvető fogalmak definiálására. Fontos továbbá a gömbi geometria alapszintű ismerete, mivel a cél nem más, mint a témakörben való elmélyülés.

1. A kör tulajdonságai

Definíció: A *kör* (körvonal) egy adott ponttól egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok mértani helye.

A síkon a körnek egy középpontja van, az adott O pont, sugara pedig az állandó távolság, melyet r-rel jelölünk, és tetszőlegesen nagyra választhatunk. Ezzel szemben a gömbön a körvonal pontjai az adott pont átellenesétől is azonos, $(\pi - r)$ gömbi távolságra helyezkednek el (1. ábra). Így a gömbi körnek két gömbi középpontja, és két gömbi sugara van. A gömbön, mivel véges, a sugár maximuma π (ebben az esetben a körvonal egyetlen pontból áll). Emellett létezik legnagyobb kerületű kör, ennek sugara $\frac{\pi}{2}$. Ekkor a kör főkör, azaz gömbi egyenes. Tehát a gömbön (a síkkal ellentétben) találunk olyan kört, mely egyben egyenes is.



1. ábra

Fontos különbség még, hogy egy adott pontnak és adott kerületnek a síkon pontosan egy kör felel meg, a gömbön két ilyen kört találunk. Ha az egyik kör sugara r, akkor ugyanarra a középpontra nézve, a vele megegyező kerületű kör sugara $(\pi - r)$. Tehát adott pontra, mint középpontra tekintve két egybevágó körvonal létezik.

Egy kör a sík pontjait és a gömb pontjait is három diszjunkt halmazra osztja. A sík esetében ez egyértelmű: azok a P pontok, melyekre

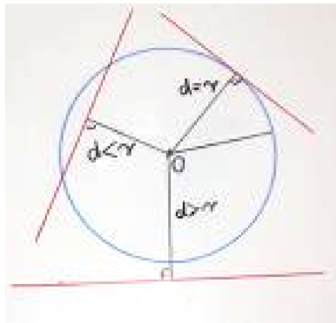
- $d(O, P) < r$, a kör belső pontjai
- $d(O, P) = r$, a kör kerületi vagy érintési pontjai
- $d(O, P) > r$, a kör külső pontjai.

A gömbön hasonlóan osztályozhatjuk a pontokat, de a két középpont miatt problémát jelenthet, hogy mit tekintünk a kör belsejének, illetve külsejének. Más szempontból viszont éppen egy előnyös tulajdonságát tapasztalhatjuk a gömbi körnek, hiszen erről a kérdésről szabadon dönthetünk. Azonban sokszor célra vezető ($r \neq \frac{\pi}{2}$ estén), ha az $r < \frac{\pi}{2}$ sugárhoz tartozó középpontot emeljük ki.

1.1. Kör és egyenes kölcsönös helyzete

Olyan köröket vizsgálunk, melyek nem elfajulók, így feltesszük, hogy a síkon $r > 0$, illetve a gömbön $0 < r < \pi$.

Legyen a síkon az r sugarú k kör középpontja O, e tetszőleges egyenes, és jelöljük $d(O, e)$ távolságot d-vel.



2. ábra

Ekkor ha

- $d > r$, e és k diszjunktak, az e egyenes k külsejében van,
- $d = r$, $e \cap k$ egyetlen közös pont (érintkeznek),
- $d < r$, e két pontban metszi k-t.

Az egyes eseteket a 2. ábra szemlélteti.

Tekintsük most a gömböt, alkalmazzuk a korábbi jelöléseket.

Ha az $r < \frac{\pi}{2}$-nek megfelelő középpontra vizsgáljuk, akkor ugyanazt kapjuk, mint a sík esetében. Azonban ha $r > \frac{\pi}{2}$, akkor

- $d < \pi - r$ esetén az egyenes a kör belsejében van,
- $d = \pi - r$ esetén e érinti (belülről) k-t,
- $d > \pi - r$ esetén pedig két metszéspontot kapunk.

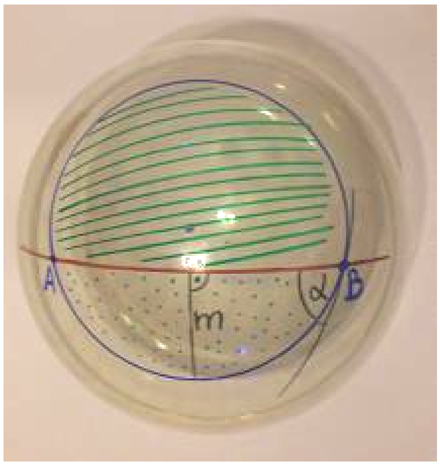
(Meg kell jegyeznünk, hogy a gömbön egy pont és egyenes távolsága nem lehet nagyobb $\frac{\pi}{2}$-nél, így $d < \frac{\pi}{2}$ mindig teljesül.)

A harmadik lehetőség, ha r éppen $\frac{\pi}{2}$. Ekkor két eset fordulhat elő:

- ha $d = \frac{\pi}{2}$, akkor e és k egybeesnek
- ha $d < \frac{\pi}{2}$, akkor e két átellenes pontban metszi k-t

Ez tulajdonképpen két egyenes kölcsönös helyzetének feleltethető meg.

Egyik lehetséges eset a síkon és a gömbön is, amikor egy egyenes két pontban metszi a kört (3. ábra). Ekkor az egyenest szelőnek nevezzük. A síkon a két metszéspontot összekötő szakasz a kör húrja. A gömb esetében a két metszéspont az egyenest két részre osztja, ezek közül azt nevezzük húrnak, amelyik a kör belsejében van. Mivel a gömbi szakasz hossza legfeljebb π, így a gömbön a $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb sugarú körök esetében a húr nem a két metszéspontot összekötő szakasz, hanem egy egyenes, π-nél hosszabb részhalmaza. A körlemezt minden húr két körszeletre osztja. A körszelet magassága a húrra merőleges átmérőnek a körszeletbe eső része, mértéke pedig ennek a szakasznak a hossza.

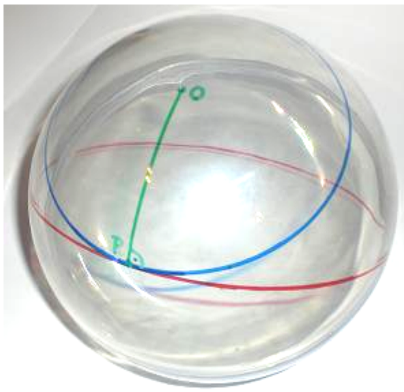


3. ábra

Metsző estben definiálhatjuk a kör és egyenes hajlásszögét, ami a metszéspontba húzott érintőnek és a szelőnek a hajlásszöge (ez nyilvánvalóan legfeljebb $\frac{\pi}{2}$).

Tekintsük most azt az esetet, mikor a kör és az egyenes érintik egymást.

Tétel. A síkon és a gömbön is az O középpontú kör bármely P pontjához egyértelműen létezik olyan egyenes, melynek a körrel való metszete pontosan P. Ez az egyenes a kör P-beli érintője, és merőleges a P érintési pontba húzott sugárra (4. ábra).



4. ábra

Meg kell jegyezni, hogy a gömbön az $r = \frac{\pi}{2}$ esetben ez természetesen nem igaz, hiszen ekkor a körnek egyáltalán nem létezik érintője.

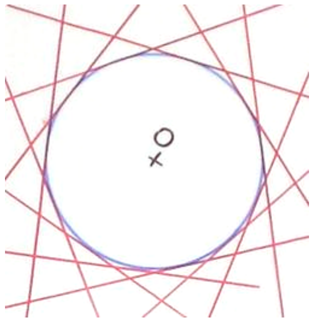
Egy másik észrevétel is leegyszerűsíti a bizonyítást a gömbön. Már korábban felmerült, hogy a gömbön egy körnek két középpontja van. Most tüntessük ki ezek közül azt, amelyikhez az $r < \frac{\pi}{2}$ sugár tartozik.

Bizonyítás.

Ha merőlegest állítunk P-ben az OP sugárra, akkor az egyenesnek csakis P lesz a közös pontja a körrel, hiszen ez a legrövidebb szakasz O és az egyenes között. Az egyenes többi pontja pedig a körön kívül helyezkedik el.

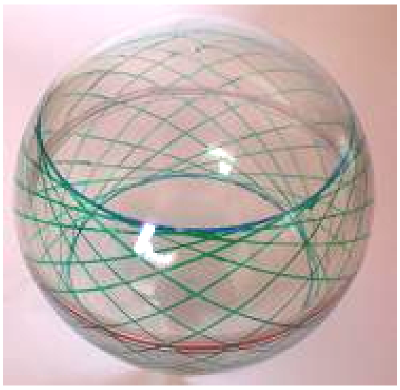
Tegyük fel, hogy létezik még egy egyenes, ami érinti a kört P-ben, de nem merőleges az OP átmérőre. Ekkor az egyenes O-tól való távolsága kisebb, mint a sugár. Azt már tudjuk, hogy az ilyen tulajdonságú egyenesek két pontban metszik a kört. Ez azonban ellentmond annak az állításnak, miszerint az egyenes érinti a kört. Tehát ez a szög szükségképpen merőleges is.

A síkon egy kör összes érintője lefedi az érintési pontokat, illetve a kör külső pontjait, előbbieket egyszeresen – mivel a kör minden pontjában egyértelműen húzható érintő –, utóbbiakat pedig kétszeresen – hiszen egy külső pontból, adott körhöz pontosan két érintő létezik (5. ábra).



5. ábra

A gömbön egy érdekes különbséget találhatunk a síkkal szemben. Bár a kör pontjait itt is egyszeresen fedik le az érintők – ugyanabból az okból kifolyólag, mint a síkon –, azonban a kör külső pontjait nem fedik le maradéktalanul. Jelöljük a k kör $r < \frac{\pi}{2}$ sugarához tartozó középpontot O-val, ennek átellenesét pedig O'-vel. Ekkor a k egy tetszőleges P pontjába húzott érintő illeszkedik P átellenesére (P'-re) is. Ekkor O'P' éppen r-rel egyenlő, valamint az O' és az egyenes távolsága szintén r. Ez bármely P pontról, illetve a hozzá tartozó érintőről elmondható, ezért k érintői az O' középpontú r sugarú körnek is érintői. Ez a k' kör az O pont egyenlítőjére, mint tengelyre nézve a k kör tükörképe. Az érintők e két kör közé eső pontokat kétszeresen fedik le, hiszen ezekből a pontokból két érintő húzható a kör(ök)höz. Ebből is láthatjuk, hogy a gömbön egyáltalán nem igaz, hogy egy kör bármely külső pontjából két érintő húzható, hiszen k' belső pontjaiból egyetlen érintőt sem tudunk húzni a körhöz. Ezt szemlélteti a 6. ábra.



6. ábra

2. Kör és háromszög

Az előző fejezetben láthattuk, hogyan viszonyul egymáshoz a két geometriában a kör és az egyenes. Most megvizsgáljuk milyen kapcsolatban áll a kör a legegyszerűbb sokszöggel, a háromszöggel.

Négy nevezetes körrel fogunk foglalkozni, név szerint a körülírt, a beírt, a hozzáírt körökkel, valamint a Feuerbach-körrel. Ezek után egy feladat kapcsán megismerkedhetünk a gömbön egy újfajta körrel, az úgynevezett Lexell-körrel.

2.1. A körülírt kör

A síkon a háromszöget egyértelműen meghatározza a három csúcsa. Így megközelíthetjük a háromszög körülírt körét, mint három pontra (mint csúcsokra) illeszkedő kört. A gömbön az iménti észrevétel nem igaz, hiszen léteznek konkáv háromszögek is. Ezeknek ugyan nincs körülírható körük, de létezik a csúcsaikra illeszkedő kör.

Egy másik észrevétel, hogy ha három pontra illeszkedő kört keresünk, akkor a síkon ezek nem lehetnek egy egyenesen, de a gömbön kollineáris ponthármas esetén is kapunk megoldást.

Tétel. Ha adott az euklideszi síkon A, B, és C különböző, nem kollineáris pontok, akkor egyértelműen létezik olyan kör, ami a három pontra illeszkedik. Ekkor AB, AC, BC szakaszok felezőmerőlegesei egy ponton mennek át, ami éppen a pontokra illeszthető kör középpontja.

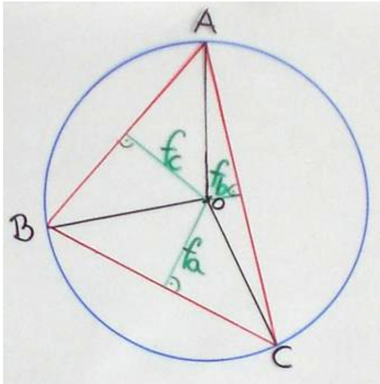
A gömbön kimondott tételben néhány módosításra van szükségünk.

A gömbi egyenesek tulajdonságaiból következően a felezőmerőlegesek nem egy pontban, metszik egymást, hanem annak átellenesében is. A másik érdekesség, hogy itt az A, B és C pontok kollineáris volta is eredményhez vezet, hiszen minden gömbi egyenes egyben kör is, melynek középpontjai az egyenes sarkpontjai.

A tétel megközelítésének egyik előnye, hogy pontokra illeszkedő kört vizsgálunk, így az állítás a gömbi konkáv háromszögekre ugyanúgy érvényes, mint az Euler-féle „szép" háromszögekre. Fontos azonban, hogy konkáv esetben ez nem körülírható kör lesz, hanem csúcsokra illeszkedő kör.

Az iménti észrevételek figyelembevételével a tétel a következőképpen hangzik.

Tétel. Ha adott a gömbön A, B, és C különböző pontok, akkor egyértelműen létezik olyan kör, ami a három pontra illeszkedik. Ekkor AB, AC, BC szakaszok felezőmerőlegesei egy pontpáron mennek át, ami éppen a pontokra illeszthető kör két középpontja.



7. ábra

Bizonyítás.

Elsőként bizonyítsuk a síkbéli esetet.

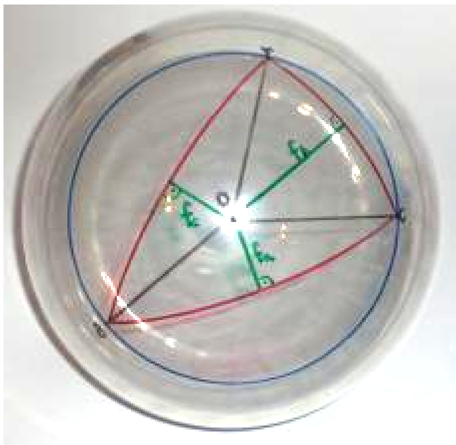
Jelölje az AB, AC, BC oldalak felezőmerőlegesét rendre f_c, f_b és f_a, a 7. ábrán látható módon. Mivel A, B, C nem kollineáris pontok, ezért bármely két felezőmerőlegesnek létezik metszéspontja. Legyen az f_a és f_b egyenesek metszéspontja O. Ez a pont egyenlő távolságra van a B és C csúcsoktól, mivel illeszkedik a BC oldal felezőmerőlegesére. Hasonlóan OA=OC, mivel O az AC oldal felezőmerőlegesén nyugszik. Az OB=OC és OC=OA egyenlőségekből következik, hogy OB=OA, azaz O f_c-re is illeszkedik. Ezek szerint f_a, f_b és f_c egy ponton mennek át, és ez a közös metszéspont egyenlő távolságra van az A, B és C pontoktól. Tehát létezik egy O középpontú OA sugarú kör, ami illeszkedik az A, B, C pontokra.

Már csak az egyértelműséget kell bizonyítanunk. Tegyük fel, hogy létezik egy O' középpontú kör, amire illeszkedik a három megadott pont. Ekkor O' nyilván egyenlő távolságra van A-tól és B-től a kör definíciójából adódóan, azaz O'A=O'B. Ebből következik, hogy O rajta fekszik f_c-n. Hasonlóan O'A=O'C ill. O'B=O'C, azaz O' illeszkedik f_a-ra és f_b-re. Vagyis O' mindhárom felezőmerőlegesnek pontja. A felezőmerőlegesek viszont pontosan egy közös metszéspontja van, ezért szükségképpen O'=O.

A gömbön a bizonyítás szinte ugyanaz, mint a síkon.

Ha a három pont nem kollineáris, akkor az állítás imént közölt igazolása elmondható a gömbön is. A másik középpontot a kör gömbbéli definíciója adja.

Ha viszont a három pont kollineáris, azaz egy gömbi egyenesen fekszenek, akkor máris készen vagyunk, hiszen bármely gömbi egyenes más néven főkör nyilván kör is.


8. ábra

2.2. A beírt kör

A háromszögek másik nevezetes köre a beírt kör, ami szintén egyértelműen létezik mindkét geometriában, a gömbön természetesen két középponttal. Ettől az egy észrevételtől eltekintve az alábbi tétel kimondása és a bizonyítás levezetése a két vizsgált geometriában azonos módon történik.

Fontos megjegyezni, hogy a következőkben a gömbön kizárólag Euler-féle háromszögekkel foglalkozunk. Így viszont egyértelművé tehetjük a tételt, ha a kör „elsődleges” középpontjának a háromszög egy belső pontját tekintjük, a másikat pedig a gömbbéli velejárójának.

Ezekkel a pontosításokkal a tétel így hangzik (síkon és gömbön egyaránt).

9. ábra

Tétel. Adott ABC háromszöghöz pontosan egy olyan kör létezik, ami a háromszög oldalait érinti. A háromszög szögfelezői ennek a körnek a középpontjában metszik egymást.

Bizonyítás.

Jelölje a háromszög szögeit rendre α, β és γ, a hozzájuk tartozó szögfelezőket f_α, f_β és f_γ (9. ábra). Mivel a háromszög szögei kisebbek π-nél, így a szögfelezők az oldalakkal hegyesszöget zárnak be. Emiatt bármely két szögfelezőnek létezik metszéspontja. Legyen f_α és f_β metszéspontja O. Tudjuk, hogy két egyenes szögfelezőjének bármely pontja egyenlő távolságra van a két egyenestől, így $d(AB,O)=d(AC,O)$ illetve $d(AB,O)=d(BC,O)$. Ebből következik, hogy $d(AC,O)=d(BC,O)$, ami nem mást jelent, minthogy O illeszkedik f_γ-ra is, valamint azt, hogy O egyenlő távolságra helyezkedik el a háromszög oldalaitól. Így az O középpontú $d(AB,O)$ sugarú kört a háromszög oldalai érintik, másképp megfogalmazva, ez a kör a háromszög beírt köre. Ez a kör pedig egyértelmű, hiszen O-nak a háromszög oldalaitól azonos távolságra kell lennie, így szükségképpen illeszkednie kell a három szögfelezőre. Mivel azok egy pontban metszik egymást, így O csak és kizárólag ez a metszéspont lehet. A kör sugara szintén egyértelműen meghatározott, nem más mint az előbb említett metszéspontnak az oldalaktól vett távolsága.

2.3. A hozzáírt körök

A háromszög nevezetes körei közé tartoznak a hozzáírt körök is. Ezek a háromszög egy-egy oldalával érintkeznek, illetve a másik két oldalegyenest az oldalak meghosszabbításában érintik. Az ilyen körök középpontja a háromszög külső pontja.

Tétel. Tetszőleges ABC síkháromszöghöz pontosan három hozzáírt kör létezik. Ezek középpontja egy belső szögfelező, ill. a vele szemközti két külső szögfelező metszéspontja.

A tételben a középpontra vonatkozó tulajdonság szinte ugyanúgy bizonyítható, mint a háromszög beírt körének középpontjára vonatkozó állítás.

A beírt és hozzáírt körök összességükben a háromszög érintőkörei. Így egy síkháromszögnek pontosan négy érintőköre létezik.

A fenti definíció alkalmazásával a gömbön is három hozzáírt kört találunk. Azonban több érintő kör létezik, mint síkon, hiszen itt az is előfordulhat, hogy egy kör mindhárom oldalegyenest az oldalak meghosszabbításában érintik. Három nem egy sugársorhoz tartozó egyenes a gömbfelületet nyolc diszjunkt tartományra osztja, mely tartományok háromszögek. Vagyis ezen háromszögek beírható körei, az eredeti háromszög érintő körei.

Ezek szerint a gömbön egy adott ABC háromszöghöz összesen nyolc érintőkör tartozik. Ezeket az alábbi osztályokba sorolhatjuk.

- az ABC háromszög beírt köre
- az ABC háromszög három darab hozzáírt köre
- az A'B'C' háromszög beírt köre, ahol A', B', C' az A, B és C csúcsok átellenesei
- az A'B'C' háromszög három hozzáírt köre.

2.4. A Feuerbach-kör

A háromszögnek az euklideszi geometriából ismert köre az úgynevezett Feuerbach-kör, vagy más néven a kilenc pont köre.

Tétel. Egy háromszög oldalfelező pontjai, magasságainak talppontjai valamint a magasságpontot és a csúcsokat összekötő szakaszok felezőpontjai egy körre illeszkednek;

melynek középpontja a magasságpontot és a körülírt kör középpontját összekötő szakasz felezőpontja; sugara pedig a körülírt kör sugarának a fele.

Ez a tétel valójában Eulertől származik, ezért magát a kört Euler-féle körnek is nevezhetjük. Azonban Feuerbach volt az, aki az 1800-as évek első felében bebizonyította, hogy minden háromszög esetében ez a kör érinti a háromszög érintőköreit, azaz a beírt és a hozzáírt köröket.

A tétel emellett azt is kimondja, hogy egy háromszög körülírt körének középpontja, magasságpontja, illetve Feuerbach-körének középpontja egy egyenesen vannak.

Már korábban Euler is felismerte, hogy egy tetszőleges háromszög három nevezetes pontja, mégpedig a körülírt kör középpontja, a súlypont és a magasságpont egy egyenesre illeszkednek. A magasságpont és a körülírt kör középpontja által meghatározott szakaszt a súlypont a magasságponttól távolabb harmadolja. Ezt az egyenest Euler-féle egyenesnek nevezzük. Az Euler-egyenes egyetlen esetben nem meghatározott, éspedig akkor, ha a háromszög szabályos, hiszen ekkor az említett pontok egybeesnek.

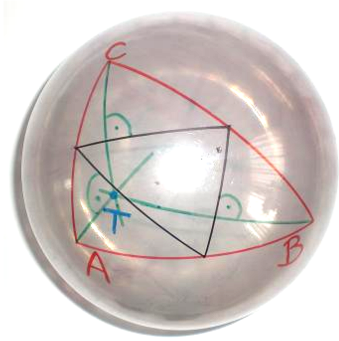
Az előbbiek alapján láthatjuk, hogy erre az egyenesre illeszkedik a Feuerbach-féle kör középpontja is, így a síkháromszögek esetében négy nevezetes pont egy egyenesen helyezkedik el. Ha szabályos háromszöget vizsgálunk, akkor a Feuerbach-kör egybeesik a háromszög beírt körével, és bár továbbra is igaz, hogy a kiemelt kilenc pontra illeszkedik, valamint a hozzáírt köröket érinti, a beírt körről ez nem mondható el.

A kilenc pont köre a gömbön is létezik, és hasonló tulajdonságokkal bír, mint a sík esetében. A síkhoz hasonlóan itt is igaz, hogy a kilenc pont köre érinti a beírható kört, és a háromszög hozzáírt köreit, meg kell viszont jegyezni, hogy a gömb esetében nem mondhatjuk, hogy az érintőköröket érinti, hiszen azoknak csak a felére igaz az állítás.

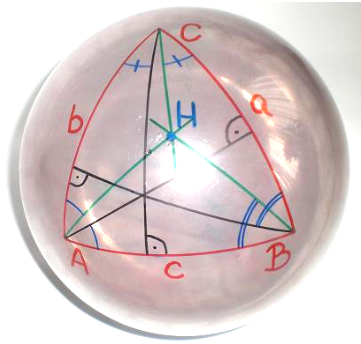
Akárcsak a síkon, a gömbön is egy egyenesre illeszkedik a súlypont a magasságpont és a kilenc pont körének középpontja. Egy másik olyan gömbi egyenest, amelyre a Feuerbach-kör középpontján kívül további két nevezetes pont is illeszkedik, a következő módon szerkeszthetünk.

Jelöljük a kilenc pont körének középpontját P-vel.

A gömbi háromszög adott csúcsából bocsássunk a vele szemközti oldalhoz tartozó középvonalra merőlegest (10. ábra). Az így kapott három egyenes egy pontpáron megy át. A pontpár két pontja közül a háromszög belsejébe esőt jelölje T.
A harmadik pontot a következő módon kaphatjuk meg. Mérjük fel az a oldalhoz tartozó magasságvonal és az egyik szomszédos oldal által közrezárt szöget a másik oldalra az 11. ábrán látható módon. Ismételjük ezt meg a b és c oldalakra vonatkozólag is. Ezek az egyenesek szintén egy pontpáron mennek át, a háromszög belsejébe eső legyen H.
Tetszőleges gömbi háromszögben P, T és H egy főkörre illeszkednek.



10. ábra



11. ábra

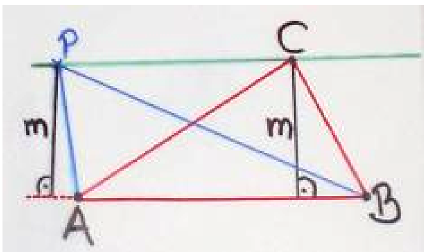
A Feuerbach-féle kör ill. annak középpontja, mint láthattuk több érdekes tulajdonsággal is bír mindkét geometriai rendszerben, hiszen nemcsak pontokkal, de körökkel és egyenesekkel is szoros kapcsolatban áll.

2.5. A Lexell-kör

A következőkben az euklideszi geometria egyik alapvető feladatát oldjuk meg a vizsgálni kívánt geometriákban. Ezzel a gömbön a háromszög egy olyan körét ismerhetjük meg, aminek a síkbéli megfelelője egy egyenes.

Feladat. Adott ABC háromszöghöz, rögzített AB alap mellett keressük azon P pontok mértani helyét, melyekre az ABP és ABC háromszögek területe egyenlő.

A síkon a háromszög területe egy oldaltól (esetünkben AB) és a hozzátartozó magasságtól (m) függ. Így azok a pontok felelnek meg, melyek az AB oldalegyenestől m távolságra helyezkednek el. Ezek a pontok két, az AB oldallal párhuzamos egyenesen nyugszanak.



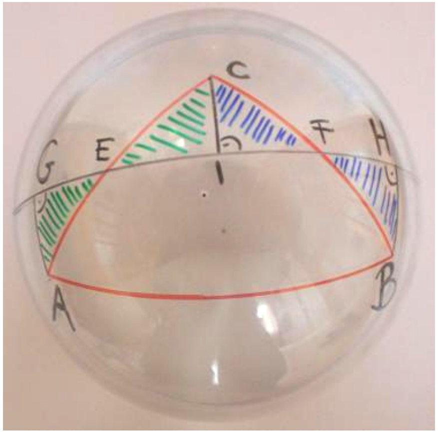
12. ábra

Ha az imént végig gondoltakat megpróbáljuk a gömbre alkalmazni, több problémával is szemben találjuk magunkat. Az egyik, hogy egy gömbi háromszög területét egészen más módszerekkel határozzuk meg, másrészről a gömbön nincsenek párhuzamos egyenesek.

Közelítsük meg a síkbéli esetet egy másik oldalról.

Az alábbi gondolatmenet a síkon és a gömbön egyaránt megállja a helyét.

Legyen az ABC (síkbeli vagy gömbi) háromszög AC ill. BC oldalfelező pontjai E és F. Bocsássunk merőlegest az A, B, C csúcsokból az EF egyenesre, talppontjait pedig jelöljék rendre a G, H valamint I pontok.



13. ábra

Ekkor az ABC háromszög átdarabolható az ABHG négyszöggé, így területük megegyezik.
Ehhez mindössze az kell, hogy AEG háromszög legyen egybevágó a CEI háromszöggel, valamint BHF háromszög CIF háromszöggel.
Tudjuk, hogy az AE és EC szakasz egyenlő hosszú, hiszen E oldalfelező pont, emellett az E-nél fekvő szögeik csúcsszögek, így azonos nagyságúak. A síkon az egybevágóság bizonyításához ezek után elég, hogy az AE ill. EC oldallal szemközti szögük megegyezik. A gömbön ez még nem ad egyértelműséget, de ha hozzávesszük, hogy ez a szög derékszög, azzal már biztosítjuk az egybevágóságot.
A BHF és CEI háromszögek egybevágóságát ugyanígy igazolhatjuk.
Az ABC háromszög területére ekkor:

$$T_{ABC} = T_{ABFE} + T_{CEI} + T_{CIF} = T_{ABFE} + T_{AEG} + T_{BHF} = T_{ABHG}$$

Meg kell még nézni, mi történik, ha C talppontja a háromszögön kívülre esik. A korábbi jelölésekkel ugyanígy belátható AEG és CIE háromszögek valamint BFH és CFI háromszögek egybevágósága. Ilyenkor az ABC háromszög területe:

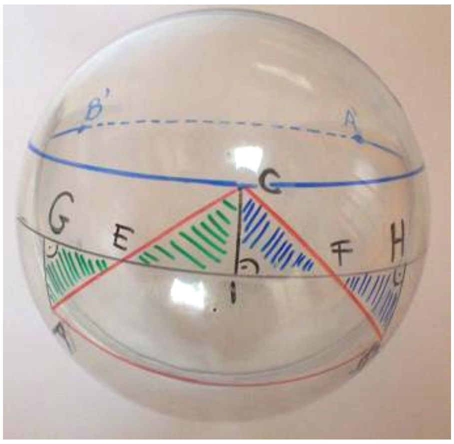
$$T_{ABC} = T_{ABHE} + T_{EFC} + T_{BFH} = T_{ABHE} + T_{EFC} + T_{CFI} = T_{ABHE} + T_{AEG} = T_{ABHG}$$

Az ABHG négyszög úgynevezett Saccheri-négyszög, melynek alapvető tulajdonsága, hogy két szemközti oldala egyenlő hosszúságú, és derékszögben metszik a harmadik oldalt. Ekkor a negyedik oldalt is azonos szögben metszik, azonban a szög nagysága, függ attól, hogy milyen geometriai rendszerben dolgozunk. A síkon ez a szög a szögösszeg 2π állandósága miatt éppen $\frac{\pi}{2}$, a gömbön a derékszögnél nagyobb. Felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e olyan geometria, ahol a harmadik lehetőség valósul meg, miszerint a másik két azonos szög $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb, erre pedig a Bolyai-féle geometria ad választ. Saccheri a 17-18. század fordulóján foglalkozott ezzel a problémával, és közel állt ahhoz, hogy felfedezzen egy nemeuklideszi geometriát.

Az iménti gondolatmenet szerint, a kitűzött feladatot így fogalmazhatjuk meg:
Ha AB rögzített, keressük azokat a C' pontokat, amelyekre ABC' háromszög ugyanazzá az ABHG négyszöggé darabolható át, mint az ABC háromszög. Ezek a pontok az EF egyenes A, B pontoktól különböző félsíkján – gömb estén félgömbön – az EF egyenestől azonos, CI távolságra vannak – a gömbön pedig az Euler-féle szép háromszögek definíciója miatt az is szükséges, hogy C' A-tól és B-től vett távolsága legfeljebb π legyen. Szimmetriai okok miatt ezen pontok AB egyenesre vett tükörképe is eleget tesz a követelményeknek.

Az euklideszi síkon a pontok mértani helye két, az EF egyenessel, azaz a középvonallal és így AB-vel is párhuzamos egyenes, melyek az AB egyenestől $d(AB,C)$ távolságra fekszenek.

A gömbön ezek a pontok egy köríven, illetve AB egyenesre vett tükörképén helyezkednek el. A körök középpontja megegyezik az EF egyenes póluspontjával, sugaruk $\frac{\pi}{2} \pm d(AB,C)$. Ezt a két kört Lexell-köröknek nevezzük. A köröknek csak az A-tól és B-től legfeljebb π távolságra lévő pontjai felelnek meg. Ez a két határpont éppen A és B átellenes pontjai.

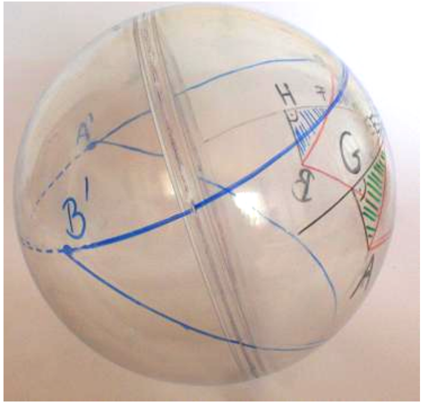


14. ábra

Állítás. A Lexell-körök illeszkednek A és B átelleneseire.

Bizonyítás.
Jelölje A és G átelleneseit A^* és G^*. Tudjuk, hogy A^* illeszkedik az AB egyenesre, valamint G^* az EF egyenesre, továbbá $d(A^*,G^*) = d(A,G)$, ami egyenlő CI-vel.

Ugyanez látható be B és H átelleneseire. Ezek alapján A^* és B^* az EF egyenessel határolt A-tól (és B-től) különböző félgömbön, EF egyenestől CI távolságra helyezkednek el, azaz illeszkednek a Lexell-körre.



15. ábra

Ezek szerint ABC háromszög Lexell-körei megszerkeszthetők, mint A és B átellenes pontjaira valamint C-re vagy a C pont AB-re vett tükörképére illeszkedő körök. A két kör azon A^*,B^* végpontú köríve felel meg amelyre C (illetve C tükörképe) illeszkedik.

Néhány érdekes kérdést is feltehetünk a Lexell-körrel kapcsolatban.
Mi történik, ha C'=A^*?
Ekkor $ABA^*\measuredangle = \pi$, az AA^* oldal pedig végtelen sok egyenesen lehet, de ezek közül pontosan egy felel meg, nyilván az, amelyik érinti a kört (hiszen ha metszené, akkor a metszéspontot kellene összekötni A-val és B-vel).
Előfordulhat-e, hogy a két Lexell kör egybeesik?
Ehhez az kell, hogy a körök középpontja az AB egyenesre illeszkedjen, amivel ekvivalens, hogy az EF egyenes merőlegesen metszi az AB egyenest. A távolságegyenlőség miatt viszont ekkor C-nek illeszkednie kell az AB egyenesre. Vagyis ekkor a háromszög csúcsai egy főkörre esnek, a Lexell-kör pedig egyetlen ponttá fajul el.

Ha a fejezet elején kitűzött feladatunkat átfogalmazzunk, ismét érdekes eredményeket kaphatunk.

Feladat. Rögzített AB oldal, illetve egy szám, mint terület mérőszám mellett hol mozoghat a C csúcs, hogy az adott mérőszámmal egyenlő területű háromszöget kapjunk?

A gömbön a választ a kiegészítő háromszögek adják, így azok területét kell megvizsgálnunk.
Tehát adott ABC háromszög mellett keressük a kiegészítő háromszögek területét.
Legyen az ABC háromszög köré írható kör középpontja O. Ekkor az OA=OB=OC egyenlőség miatt AOB, AOC, BOC egyenlőszárú háromszögek, így a háromszögek alapjain

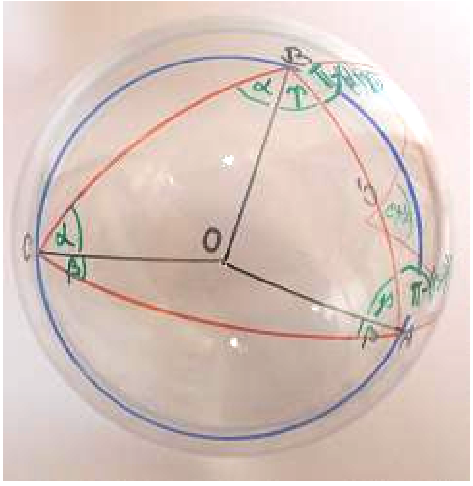
azonos nagyságú szögek fekszenek. Eszerint $OAB\measuredangle = OBA\measuredangle$, $OBC\measuredangle = OCB\measuredangle$ ill. $OAC\measuredangle = OCA\measuredangle$, jelöljük ezeket ebben a sorrendben γ-val, α-val és β-val.

Az O pont háromszöghöz való viszonyától függően az alábbi eseteket különböztetjük meg:

1) az O pont az ABC háromszög belső pontja

2) az O pont illeszkedik az egyik oldalra

3) az O pont az ABC háromszög külső pontja



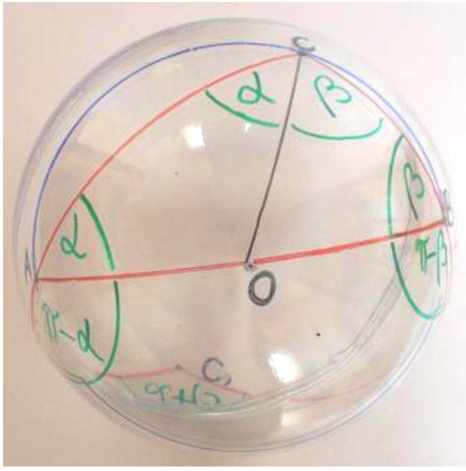
16. ábra

1) Ha az O pont az ABC háromszög belső pontja (16. ábra), akkor a három kiegészítő háromszög területe azonos módon kapható meg, így elég egy estet végig nézni, például az AB oldalhoz tartozó területét.

Az ABC' háromszög szögei alapján a terület.

$$T = \left(\pi - (\beta + \gamma)\right) + \left(\pi - (\alpha + \gamma)\right) + (\alpha + \beta) - \pi = \pi - 2\gamma$$

Ezek szerint ilyenkor csak az OAB szögtől függ a terület.

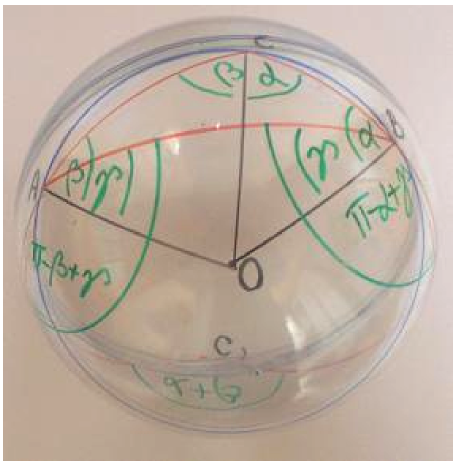


17. ábra

2) Tegyük fel, hogy O az AB oldalra illeszkedik (17. ábra). Ekkor az AB oldalhoz tartozó kiegészítő háromszög területe:

$$T = (\pi - \beta) + (\pi - \alpha) + (\alpha + \beta) - \pi = \pi$$

Vagyis az átmérőre emelt kiegészítő háromszög területe a körtől és az ABC háromszögtől függetlenül állandó.



18. ábra

A másik két oldal kiegészítő háromszögének területe szintén szimmetrikus módon kapható meg, így számoljuk ezt ki például a BC oldalra. Ekkor a terület az alábbi módon alakul:

$$T = \left(\pi - (\alpha + \beta)\right) + (\pi - \alpha) + \beta - \pi = \pi - 2\alpha$$

Ez tulajdonképpen ugyanaz az eredmény, mint az 1) esetben.

3) Abban az esetben, ha az O pont az ABC

háromszög külső pontja (18. ábra), akkor szintén két lehetőséget kell megvizsgálni. Tegyük fel, hogy az AB szakasz elválasztja OC-t. Az AB oldal kiegészítő háromszögének területe:

$$T = \left(\pi - (\beta - \gamma)\right) + \left(\pi - (\alpha - \gamma)\right) + (\alpha + \beta) - \pi = \pi + 2\gamma$$

Illetve a BC oldalra:

$$T = \left(\pi - (\alpha + \beta)\right) + \left(\pi - (\alpha - \gamma)\right) + (\beta + \gamma) - \pi = \pi - 2\alpha + 2\gamma$$

Ezekből az eredményekből hármat használhatunk fel a feladat megoldásához, mégpedig aszerint, hogy a megadott terület mérőszám kisebb, vagy egyenlő, vagy nagyobb mint π.

I) Legyen $t < \pi$. Írjuk fel ezt $t = \pi - 2\varphi$ alakban.

Az adott AB szakasz két végpontjára mérjük fel a φ szöget. A két egyenes metszéspontját jelöljük O-val, majd szerkesszünk kört O körül OA sugárral. Ekkor Tetszőlegesen választhatunk egy C pontot a kör azon ívén, melynek végpontjait az OA és OB szakasz metsz ki a körből. Az ABC' háromszög területe – ahol C' a C pont átellenese – pontosan $(\pi - 2\varphi)$. Ezt már visszavezethetjük az eredeti feladatra, és keressük az ezzel azonos területű háromszögeket. Ezek a két Lexell-kör megfelelő ívein helyezkednek el.

II) Ha a megadott területre $t = \pi$, akkor a 2) pont alapján mindössze annyi a dolgunk, hogy az AB szakaszra, mint átmérőre kört emelünk. Ebben az esetben a kör bármely A-tól és B-től különböző C pontját kiválaszthatjuk. A C pont átellenesével vett az ABC' háromszög területe π lesz. Ettől kezdve a dolgunk ugyanaz, mint korábban: ABC'-vel azonos területű háromszögek keresése, rögzített AB mellett.

III) Végül tekintsük a $t > \pi$ esetet. Hozzuk $t = \pi + 2\varphi$ alakra.

A I)-hez hasonlóan szerkesszünk a szakasz végpontjaira φ szöget. Az egyenesek metszéspontja (jelölje O) körül ismét szerkesszünk kört az OA távolsággal, mint sugárral. A különbség mindössze annyi, hogy C-t úgy kell megválasztanunk, hogy az AB szakasz válassza el OC-t. Így az ABC' háromszög területe a fenti feltételnek megfelelő $\pi + 2\varphi$. Ahogy már megszokhattuk, a feladat megoldása a Lexell-kör megszerkesztésével folytatódik.

Mint láthatjuk, a gömbön néhány feladat megoldása nem olyan egyszerű, mint a síkon, de mindenképp érdekes eredményt kaphatunk, mint azt az eddigiekben tapasztaltuk.

3. Dualitás

Az euklideszi sík kibővítésével és a meghatározó vektorok fogalmának bevezetésével igazolhatjuk, hogy ha a projektív síkban egy pontokra, egyenesekre, illeszkedésre vonatkozó igaz állításban a pont szót egyenesre, az egyenes szót pontra cseréljük, ismét igaz állítást kapunk. Erre egy egyszerű példa a következő illeszkedési tulajdonság.

Bármely két különböző ponthoz pontosan egy olyan egyenes létezik, amely illeszkedik a két pontra.

Az mondat duálisa pedig szintén igaz.

Bármely két különböző egyeneshez pontosan egy olyan pont létezik, amely illeszkedik a két egyenesre.

Nem csak egyszerű állításokat, hanem összetettebb tételeket is dualizálhatunk, így például Desargues perspektív háromszögekre vonatkozó tételét, vagy Papposz kollineáris ponthármasokra vonatkozó megállapítását. Az előbb említett szerint, ha két háromszög egy pontra nézve perspektív, akkor egy egyenesre nézve is az. A tétel duálisa tulajdonképpen nem más, mint annak megfordítása, így háromszögek pontra illetve egyenesre vonatkozó perspektivitásának ekvivalenciáját mondhatjuk ki.

A gömb geometriájában is értelmezhető a dualitás. Itt viszont nincs feltétlenül szükség a meghatározó vektorok bevezetésére, elegendő arra támaszkodnunk, hogy bármely pont (pontpár) egyértelműen meghatároz egy egyenest és fordítva. Ez a pont(pár) az egyenes sarkpontja(i), illetve az egyenes a pont(pár) egyenlítője.

A gömbi geometria egy másik előnye, hogy hasonló könnyedséggel tudunk nem csak pontokra, egyenesekre és illeszkedésre vonatkozó állításokat dualizálni, hanem olyanokat is melyek a távolság és a szög fogalmát is felhasználják, hiszen bármely AB gömbi szakasz hossza pontosan akkora, mint az általa meghatározott főkör S sarkpontjával vett ASB szög.

Ezekkel az észrevételekkel már megfogalmazhatjuk a duális kör fogalmát, előtte azonban mondjuk ki ismét a kör definícióját.

Definíció. A *kör* azoknak a pontok halmaza, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra helyezkednek el.

Definíció. A *kör duálisa* azoknak az egyeneseknek a halmaza, amelyek egy adott egyenessel egyenlő szöget zárnak be. Ezeknek az egyeneseknek halmazát a kör *polárkör*ének nevezzük.

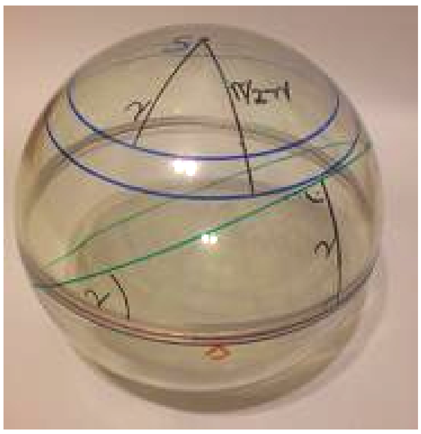
Vagyis egy S középpontú r sugarú k kör duális köre, az S egyenlítőjével (jelöljük s-sel) r szöget bezáró egyenesek alkotta halmaz (19. ábra).

19. ábra

Ha $r = 0$, akkor elfajuló kört kapunk, a duális maga az s egyenes lesz.

Ha $r = \frac{\pi}{2}$, akkor a k kör egybeesik az s egyenessel, a duálisa pedig az s-sel (magával a körvonallal) $\frac{\pi}{2}$ szöget bezáró egyenesek halmaza, vagyis a sarkpontok kivételével az egész gömböt egyszeresen fedi le, előbbieket pedig végtelen sokszor.

Nem elfajuló kör esetén (ha $0 < r < \frac{\pi}{2}$) ezek az egyenesek két, S középpontú, egybevágó körvonalat határoznak meg. Az egyenesek a két kört érintik, a köztük levő területet kétszeresen fedik le.
Könnyen belátható (20. ábra), hogy a körök sugara ekkor ugyanabból a középpontból mérve $\frac{\pi}{2} - r$ illetve $\frac{\pi}{2} + r$.

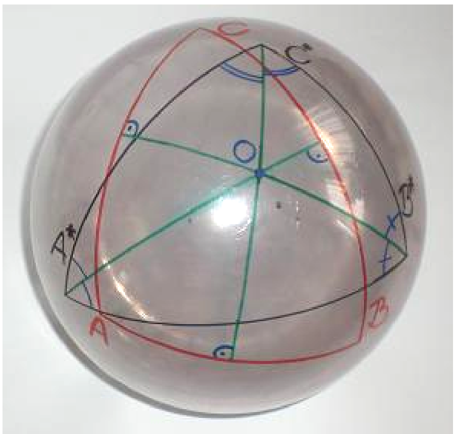


20. ábra

A körhöz hasonlóan a háromszöget is dualizálhatjuk. Magára a szóra korlátozva a háromszög duálisa három szakaszból álló alakzat.
Legyen adott az ABC háromszög a gömbön a, b, c oldalakkal. Minden oldalhoz rendeljünk egy csúcsot, mégpedig a dualitás értelmében az oldalegyenesek választott sarkpontjait. A két póluspont közül válasszuk azt, amelyik az oldalegyenes által határolt félgömbök közül az oldalhoz tartozó csúccsal megegyező félgömbön van. Jelölje ezeket a pontokat A*, B* és C*. Ekkor az A*B*C*

háromszög az ABC háromszög duálisa. Ezt a háromszöget az eredeti háromszög polárháromszögének nevezzük.

A polárháromszöget megközelíthetjük úgy is, hogy az α, β, γ szögekhez hozzárendeljük a duális α, β, γ távolságokat, melyek a csúcsok egyenlítőire illeszkednek.



21. ábra

Tétel. Egy gömbi háromszög körülírt körének középpontja megegyezik a polárháromszög beírt körének középpontjával.

Ezzel ekvivalens, hogy egy háromszög beírt körének középpontja és a polárháromszög körülírt körének középpontja ugyanaz a pont.

A tételt a 21. ábra szemlélteti.

A gömbön a dualitásnak létezik egy másik megközelítése is.

Az O középpontú gömbfelület tetszőleges H részhalmazának duálisa azon P pontok halmaza, melyekre az OP félegyenes legalább derékszöget zár be az összes OQ félegyenessel, ahol Q tetszőleges H-beli pont.

Ekkor egy S középpontú r sugarú k kör duálisa egy S’ középpontú, $\frac{\pi}{2} - r$ sugarú kör.

Az iménti két értelmezés között észrevehetünk egy összefüggést. A dualitás ez utóbbi definiálásával a kör duálisa egy olyan kör, amelyet a korábbi esetben az egyenesek érintettek.

A két megközelítés egyaránt megállja a helyét, de az előbbi talán szemléletesebb, hiszen már általános iskolában megismerkedünk a sarkok és az egyenlítő fogalmának összefüggésével. Ha megértjük a távolág és a szög kapcsolatát is, akkor a dualitás fenti értelmezése szinte magától értetődő. Ha viszont mélyebben szeretnénk elmerülni a gömbfelület vizsgálatában, ajánlott mindkét lehetőséget megismerni és tanulmányozni.

4. Kerület, terület

A felületi konvex lemezeket két mérőszámmal jellemezhetjük, mégpedig a kerülettel és a területtel. A dolgozat célkitűzésének, azaz a síkbéli és gömbi körök megismerésének egyik alapvető feltétele, hogy ismerjük ezen alakzat imént említett jellemzőit. Az alábbiakban szükségünk lesz az analízis néhány fogalmának ismeretére.

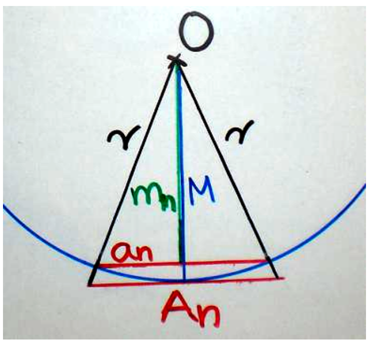
4.1. A kör kerülete

Tudjuk, hogy a síkon bármely két kör hasonló egymáshoz, a hasonlóság aránya pedig a sugarak arányával egyenlő.

Tétel. Az r sugarú kör kerülete $K(r) = 2r\pi$

Bizonyítás.
Tulajdonképpen az előbbiből következik, hogy ha a kör kerületét sugarával elosztjuk, akkor egy állandó pozitív valós számot kapunk, ami a kör sugarától független.

Ennek a számnak a felét π-vel jelöljük (a görög periferia=kerület kezdőbetűje), értéke öt tizedes jegyre kerekítve 3,14159. A π szám transzcendens – azaz nem létezik olyan egész együtthatós polinom, melynek gyöke lenne. Ezt 1882-ben Lindemann bizonyította. Már az ókorban próbálkoztak értékének meghatározásával. Elsőként Archimedes ért el jelentős eredményeket, majd az 1500-as években Ludolf van Ceulen holland mérnök 35 tizedesjegy pontossággal közelítette meg értékét. Innen ered a π Ludolf-féle szám elnevezése.



22. ábra

Állítás. A kör kerülete meghatározható a beírt n oldalú szabályos sokszögek kerületének a limeszével, másrészről megegyezik a kör köré írt n oldalú szabályos sokszögek határértékével, ha n minden határon túl nő.

Bizonyítás
Jelöljük az O középpontú, r sugarú kör kerületét K(r)-rel,

továbbá legyen a beírt n oldalú szabályos sokszög oldalhossza a_n, kerülete k_n, valamint a körül írt n oldalú szabályos sokszög oldalhossza A_n, kerülete pedig K_n.

Tudjuk, hogy $k_n < K(r) < K_n$ így elég azt belátni, hogy $\frac{K_n}{k_n} \to 1$, $n \to \infty$ esetén.

Legyen m_n=d(O, beírt n oldalú szabályos sokszög oldala), illetve M=d(O,körül írt szabályos sokszög oldala), ami egyenlő r-rel.

Ekkor $\frac{K_n}{k_n} = \frac{n \cdot A_n}{n \cdot a_n} = \frac{A_n}{a_n} = \frac{M}{m_n} = \frac{r}{m_n}$

Beláthatjuk, hogy $m_n \to r$, hiszen $|r - m_n| < a_{2n} \to 0$, ha $n \to \infty$.

Ezekből következik, hogy $\frac{r}{m_n} \to 1$, ezzel pedig az állítást igazoltuk.

A gömbi kör kerületének meghatározását megkönnyíti, ha a kört a gömb és a körre illeszkedő sík metszetének tekintjük. A síkbeli euklideszi sugár ismeretében már megállapíthatjuk a kerületet. Ez előbbi érték az r sugarú gömbi kör esetén $\sin r$, így a kerület $2\pi \sin r$.

4.2. A kör területe

Legyen H tetszőleges korlátos síkbeli ponthalmaz, melynek van belső pontja, és legyen T területfüggvény.

Tekintsük a $s = \sup\{T(S_b) : S_b \text{sokszöget H tartalmazza}\}$,

illetve $i = \inf\{T(S_k) : S_k \text{sokszög tartalmazza H} - t\}$.

Nyilván $s \le i$ mindig teljesül.

Definíció. H-nak van *terület*e, ha $s = i$.

Bármely konvex lemeznek, így a körnek is létezik területe.

Állítás. Az r sugarú körlemez területe $r^2\pi$.

Bizonyítás.

Tekintsük a beírt illetve körülírt n oldalú szabályos sokszögeket, jelöljük ezeket s_n-nel és S_n-nel. Ezek a körlemez beírt illetve körülírt sokszögei, ezért

$$\sup\left\{T\left(s_n\right): s_n \text{beírható n oldalú szabályos sokszög}\right\} \geq \lim_{n\to\infty} T(s_n)\text{, valamint}$$

$$\inf\left\{T\left(S_n\right): S_n \text{köré írható n oldalú szabályos sokszög}\right\} \leq \lim_{n\to\infty} T(S_n)\text{.}$$

Ezért ahhoz, hogy a körlemeznek legyen területe, elegendő, hogy a két limesz legyen egyenlő. A kerületnél bevezetett jelöléseket alkalmazva $T(s_n) = \dfrac{k_n \cdot m_n}{2}$, $T(S_n) = \dfrac{K_n \cdot r}{2}$. Az előbbiek alapján tudjuk, hogy $k_n \to K\left(r\right)$, $K_n \to K\left(r\right)$ valamint $m_n \to r$. Ezekből már következik, hogy a két limesz megegyezik.

Tehát az r sugarú kör területe:

$$T(r) = T(s_n) = \frac{k_n \cdot m_n}{2} = \frac{K(r)\cdot r}{2} = \frac{(2r\pi)r}{2} = r^2\pi\text{.}$$

A terület esetében a gömbön nincs olyan egyszerű dolgunk, mint a kerületnél.

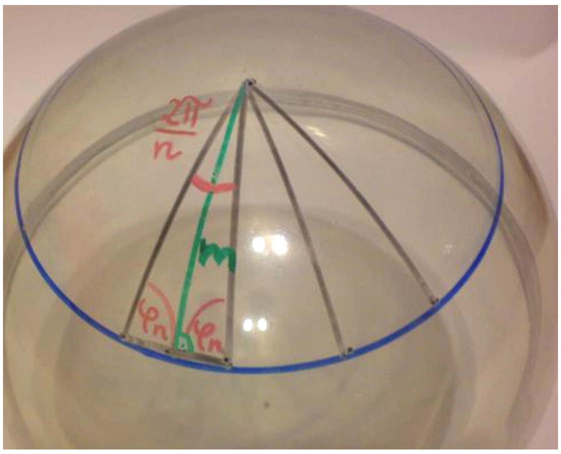
A síkhoz hasonlóan, közelítsük a kör területét beírt és körül írt n oldalú szabályos sokszögek területének határértékével. Ezek mindig felbonthatók n darab egyenlő szárú gömbi háromszögre, melyeknek szöge O-nál $\dfrac{2\pi}{n}$, valamint jelölje a körrel érintkező csúcsoknál fekvő szögeket φ_n, a háromszögek alapjához tartozó magasságot pedig m_n. Egy ilyen háromszög területe a Girard-tétel szerint:

$$\frac{2\pi}{n} + 2\varphi_n - \pi\text{,}$$

aminek segítségével meghatározhatjuk a sokszög területét:

$$2\pi + n\left(2\varphi_n - \pi\right) = 2\pi - 2n\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_n\right)$$

Ha $n \to \infty$, akkor $\varphi_n \to \dfrac{\pi}{2}$, és ezért felírhatjuk az alábbi határértéket:



23. ábra

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_n\right)\right)$$

ami viszont a $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ összefüggésből

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_n\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\varphi_n\right)$$

A szögekre vonatkozó gömbi koszinusztétel szerint

$$\cos\varphi_n = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos m_n$$

Amiből az ismert tagokat behelyettesítve:

$$\cos\varphi_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\cos m_n$$

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = r$. Ezeket a területképletben alkalmazva kapjuk, hogy

$$T = 2\pi - \lim_{n\to\infty}\left(2n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\cos r\right) = 2\pi\cdot\left(1-\cos r\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right)\right) = 2\pi\cdot(1-\cos r)$$

Tehát az r sugarú kör területe:

$$T = 2\pi\cdot(1-\cos r)$$

Tovább haladva a gondolatmenettel, az $(1-\cos r)$ annak a gömbsapkának a magassága, melynek gömbi sugara r. Ekkor a gömbsapka – azaz a gömbi kör területe – területe a magasság 2π-szerese.

Írjuk fel az m magasságú gömböv területét két m_1 és m_2 $(m_2 < m_1)$ magasságú gömbsapka területének differenciájaként:

$$A = 2\pi(m_1 - m_2) = 2\pi m$$

Ez nem mást jelent, mint hogy a gömböv területe nem függ annak elhelyezkedésétől, csak magasságától.

4.3. Körív hossza

Az alábbi definíciók és tételek mind a síkon, mind a gömbön azonos módon megállják a helyüket.

Definíció. A körvonal két tetszőleges A, B pontja közé eső vonaldarabot *körív*nek (röviden ívnek) nevezzük.

Fontos megjegyezni, hogy ekkor a két pont két különböző ívet határoz meg, melyek uniója nyilván az egész kör. Az ívek megadásának egyértelműsége érdekében, tekinthetjük az

AB ívnek azt az ívet, melynek kezdőpontja A, végpontja B, és A-ból B-be az óramutató járásával ellenkező irányban jutunk el.

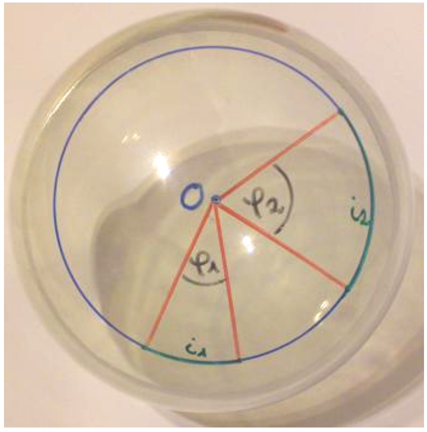
Definíció. A kör AB ívének A, B pontjaihoz húzott sugarak szögét *középponti szög*nek nevezzük.

Ugyanabban a körben (vagy azonos sugarú körökben) egyenlő nagyságú középponti szögekhez egybevágó ívek tartoznak, hiszen ha a kör középpontja körül a megfelelő szöggel elforgatjuk, akkor egymással fedésbe hozhatók.
Ennek az észrevételnek a felhasználásával igazolhatjuk az alábbi tételt.

Tétel. Egy kör középponti szögeinek aránya egyenlő a szögekhez tartozó ívek hosszának arányával.

Bizonyítás.

Jelöljük az φ_1, φ_2 középponti szögekhez tartozó ívek hosszát i_1-gyel valamint i_2-vel. Osszuk fel φ_1-et n egyenlő részre, ahol n tetszőleges természetes szám. Az így kapott szöget felmérjük φ_2-re az egyik húrtól kezdve annyiszor, ahányszor csak lehetséges. Ha ezt m-szer tehetjük meg, akkor



24. ábra

$$\frac{m}{n}\cdot\varphi_1 \le \varphi_2 < \frac{m+1}{n}\cdot\varphi_1$$

A fenti észrevételből következik, hogy

$$\frac{m}{n}\cdot i_1 \le i_2 < \frac{m+1}{n}\cdot i_1$$

Ha az egyenlőtlenségeket φ_1-gyel ill. i_1-gyel elosztjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{m}{n} \le \frac{\varphi_2}{\varphi_1} < \frac{m+1}{n}; \qquad \frac{m}{n} \le \frac{i_2}{i_1} < \frac{m+1}{n}$$

A megfelelő hányadosokat összegezve

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \frac{m}{n} < \frac{i_2}{i_1} + \frac{m+1}{n}$$

amiből átrendezéssel

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} - \frac{i_2}{i_1} < \frac{1}{n}$$

Ha $n \to \infty$, akkor a különbség a 0-hoz tart, azaz a két hányados egyenlő.

Az előbbi tétel segítségével könnyen meghatározhatjuk egy adott körben tetszőleges középponti szöghöz tartozó ív hosszát. Ezt viszont már külön kell megvizsgálnunk a síkon ill. a gömbön, hiszen a két geometriában más az r sugarú kör kerületének képlete.

Tekintsük először a síkot.

Tetszőleges φ középponti szögre, és a hozzá tartozó i hosszúságú ívre

$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{i}{K(r)}$ ahol K(r) az r sugarú kör kerülete, ami a egyenlő $2r\pi$–vel. Mindkét oldalt K(r)-rel megszorozva

$i = \varphi r$

Fontos, hogy a szögeket itt mindig radiánban, nem pedig fokban adjuk meg. Ha mégis az utóbbi mértékegységet választjuk, akkor a képlet kissé bonyolultabb:

$$i = \frac{\varphi^{\circ} \pi r}{180^{\circ}}$$

A gömb esetében is megadhatjuk az alábbi aránypárok egyenlőségét

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{i}{K(r)}$$

melyben a $K(r) = 2\pi \sin r$ helyettesítést alkalmazva, majd K(r)-rel az egyenletet felszorozva az ívhosszra a következő képletet kapjuk:

$i = \varphi \sin r$

(A φ szöget természetesen ismét radiánban kell megadnunk.)

4.4. A körcikk területe

A körívnél meggondoltak egy részét könnyen alkalmazhatjuk a körcikk esetében is a megfelelő módosításokkal. Ilyen megállapítás az, hogy egyazon körben a megegyező nagyságú középponti szögekhez egyenlő területű körcikkek tartoznak (akárcsak az előbb, itt is a középpont körüli egymásba forgathatóságból következik).

Ez alapján pedig szintén megfogalmazható az arányokra vonatkozó tétel is.

Tétel. Egy kör középponti szögeinek aránya egyenlő a szögekhez tartozó körcikkek területének arányával.

Bizonyítás.

Jelölje a φ_1, φ_2 középponti szögekhez tartozó körcikkek területét t_1 ill. t_2. A φ_1 szöget ismét n egyenlő részre osztjuk, majd a kapott szöget φ_2-re annyiszor mérjük fel, amennyiszer csak tudjuk. Ha ez m-szer lehetséges, akkor

$$\frac{m}{n}\cdot\varphi_1 \le \varphi_2 < \frac{m+1}{n}\cdot\varphi_1$$

(Eddig tulajdonképpen ugyanazt csináljuk, mint a körív esetében)

A fent említett tulajdonság miatt a körcikkek területére

$$\frac{m}{n}\cdot t_1 \le t_2 < \frac{m+1}{n}\cdot t_1$$

Az egyenlőtlenségeket most is osszuk el, előbbinél φ_1-gyel, utóbbinál t_1-gyel. A $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, valamint $\frac{t_2}{t_1}$ hányadosok differenciája $\frac{1}{n}$, ami elég nagy n esetén 0-hoz tart, azaz

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{t_2}{t_1}$$

A síkon és gömbön a megfelelő területképleteket alkalmazva megkapjuk a φ középponti szöghöz tartozó körcikk területét (jelölje ezt t), ha az alábbi aránypárral dolgozunk:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T(r)}$$

T(r) az r sugarú kör területe, mellyel az egyenletet felszorozva:

$$t = \frac{\varphi\cdot T(r)}{2\pi}$$

A síkon a $T(r) = r^2\pi$ helyettesítéssel

$$t = \frac{\varphi\cdot r^2}{2}$$

ami a körcikkhez tartozó körív hosszának $\frac{r}{2}$-szerese.

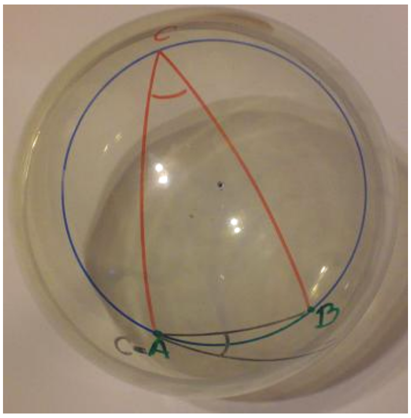
A gömbön a $T(r) = 2\pi(1-\cos r)$ képletet alkalmazva $t = \varphi(1-\cos r)$.

5. Kerületi szögek tétele

A középponti szögek néhány tulajdonságát már megismerhettük. Láttuk, mi a kapcsolata a hozzá tartozó ív kerületével, illetve az általa meghatározott körcikk területével. Most egy másik összefüggést vizsgálunk meg, de előtte definiálnunk kell a kerületi szögek fogalmát.

Legyen AB egy kör tetszőleges íve.

Definíció. A kör egy tetszőleges (AB ívtől különböző) C pontjából az A, B pontokhoz húzott húrok szögét *kerületi szög*nek nevezzük. Az a határhelyzet is kerületi szöget eredményez, mikor C egybeesik A-val (vagy B-vel), akkor az egyik húr az AB szakasz, a másik húrt az A (ill. B) pontba húzott érintő AB ív felőli félegyenese helyettesíti (25. ábra)



25. ábra

A kerületi szög a fent említett módon a sík, és a gömbfelület geometriájában is jól definiált. Mint a későbbiekben látni fogjuk, itt a fő különbség a két geometria között, hogy az AB ívhez tartozó kerületi szögek a síkon állandó nagyságúak, azaz nem függnek C megválasztásától, míg a gömbön ez szög a C pont elhelyezkedésétől függ.

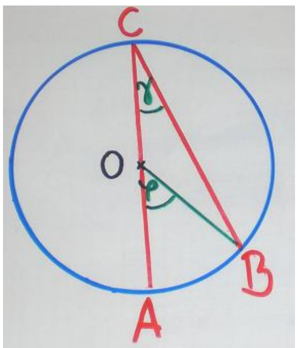
A síkon az alábbi tétel érvényes, melyből követezik a kerületi szögek tétele.

Tétel. Ugyanabban a körben vagy egyenlő sugarú körökben a kerületi szög az ugyanazon körívhez tartozó középponti szög felével egyenlő.

Bizonyítás.

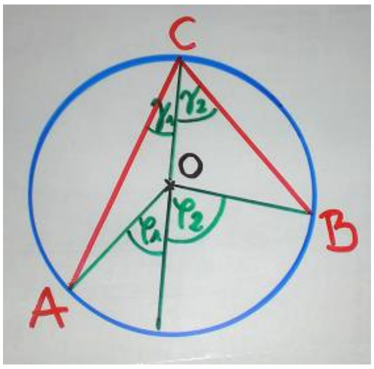
A bizonyítást négy esetre választjuk szét.

1. Tekintsük először azt a speciális helyzetet, mikor a kör középpontja illeszkedik a kerületi szög egyik szárára (26. ábta). Tegyük fel, hogy ez az AC szár. Ekkor az AB ívhez tartozó φ középponti szög a COB háromszög külső szöge, ami OC = OB



26. ábra

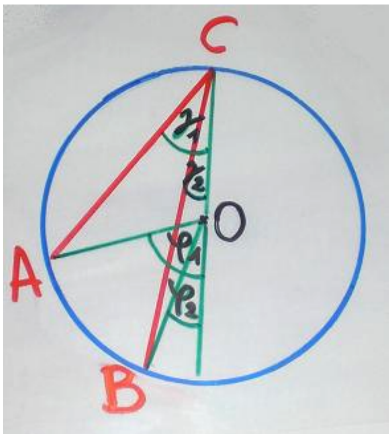
következtében egyenlőszárú. Ezekből már következik, hogy $\varphi = 2\gamma$, ahol γ az ACB kerületi szög. Ebből már rögtön adódik, hogy $\gamma = \frac{\varphi}{2}$.



27. ábra

2. Ha az O középpont a kerületi szög szárai között fekszik (27. ábra), akkor a CO sugarat meghúzva, majd meghosszabbítva az 1. esetre vezethetjük vissza: ekkor $\gamma_1 = \frac{\varphi_1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{\varphi_2}{2}$. Az egyenleteket összeadva:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} = \frac{\varphi}{2}$$

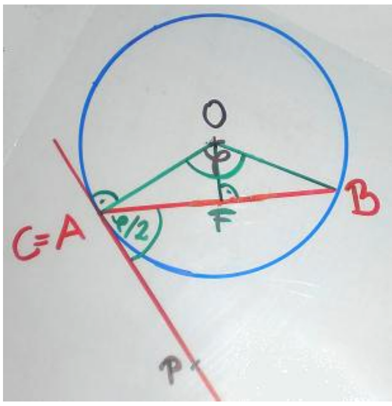


28. ábra

3. Ha a kerületi szög szárain kívül van a kör középpontja (28. ábra), akkor az előző esethez hasonló módon járunk el, egyetlen különbséggel. Ekkor

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = \frac{\varphi_1}{2} - \frac{\varphi_2}{2} = \frac{\varphi}{2}$$

4. A kerületi szögek definíciója szerint azt a határesetet is meg kell vizsgálni, amikor C=A (29. ábra). Legyen P az A pontba húzott érintő AB ív felé eső félegyenesének egy tetszőleges pontja. Az AB szakaszt felező OF szakasz a φ szöget is felezi. Ekkor az AOF és BAP szögek szárai merőlegesek egymásra, így vagy egyenlők, vagy kiegészítő szögek. Ha az AB ív a félkörívnél nem hosszabb, akkor mindkét előbbi szög hegyesszög, ha AB éppen félkörív, akkor derékszög, ha pedig az AB ív a félkörívnél hosszabb, akkor mindkét szög tompaszög. Ebből már következik, hogy $AOF\measuredangle = BAP\measuredangle$.



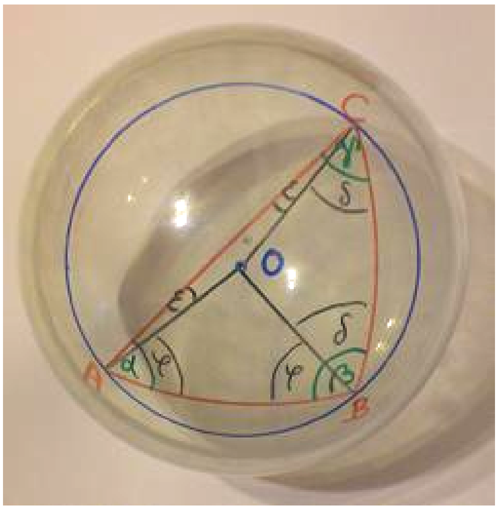
29. ábra

Tétel. (Kerületi szögek tétele)
Egy kör egybevágó íveihez egyenlő kerületi szögek tartoznak.

Ez tulajdonképpen következik az előbbi tételből, ill. abból az észrevételből, hogy egybevágó ívekhez egyenlő nagyságú középponti szögek tartoznak.

A kerületi szögek tétele nem vihető át teljes egészében a gömbre.

Legyen k egy O középpontú r sugarú kör, ahol $0 < r < \frac{\pi}{2}$. Legyen A és B a kör két tetszőleges (különböző) pontja. Jelöljük az OAB szöget φ-vel (29. ábra).



30. ábra

Állítás. Ha C a k kör egy tetszőleges (A-tól és B-től különböző) pontja, úgy, hogy AB nem választja el OC-t, akkor az ABC gömbháromszögre $\alpha + \beta - \gamma = 2\varphi$, ha AB elválasztja OC-t, akkor $\alpha + \beta - \gamma = -2\varphi$, ahol α, β, γ a háromszög A, B és C csúcsánál fekvő szögei.

Bizonyítás.

Mivel OA=OB=OC, ezért AOB, AOC, BOC három egyenlőszárú háromszög. A gömbháromszögek esetében akárcsak síkbeli társaiknál egyenlő hosszúságú oldalakkal szemben azonos nagyságú szögek fekszenek. Eszerint, $OAB\measuredangle = OBA\measuredangle$, $OBC\measuredangle = OCB\measuredangle$ ill. $OAC\measuredangle = OCA\measuredangle$. Utóbbi kettőt jelölje rendre δ és ε.

A C pont elhelyezkedésétől függően a bizonyítást az alábbi esetekre kell szétválasztanunk:

1) az O pont az ABC gömbháromszög belső pontja
2) az O pont külső pontja a háromszögnek
   a) az AB szakasz elválasztja az O és C pontokat
   b) az AB szakasz nem választja el az O és C pontokat
3) az O pont rajta van a háromszög egyik oldalán

A szögeket behelyettesítve α, β, γ helyére:

1) $\alpha + \beta - \gamma = (\varphi + \varepsilon) + (\varphi + \delta) - (\delta + \varepsilon) = 2\varphi$

2) a) $\alpha + \beta - \gamma = (\varepsilon - \varphi) + (\delta - \varphi) - (\varepsilon + \delta) = -2\varphi$

b) Ebben az esetben elvileg meg kell különböztetnünk, hogy a C pont A-hoz vagy B-hez van közelebb, a gyakorlatban viszont a két eset szimmetrikus, így elegendő az egyik lehetőséget megvizsgálni. Tegyük fel, hogy C az A-hoz van közelebb. Ekkor

$$\alpha + \beta - \gamma = (\varphi + \varepsilon) + (\varphi - \delta) - (\varepsilon - \varphi) = 2\varphi$$

3) Ha O illeszkedik a háromszög egyik oldalára, akkor φ, δ, ε közül az egyik nulla, ekkor viszont automatikusan teljesül az egyenlőség (tulajdonképpen az 1) speciális esete).

A síkon érvényes kerületi szögek tételének egy fontos következménye, hogy könnyen megadhatjuk azon pontok mértani helyét, amelyekből egy rögzített AB szakasz azonos 0 és 2π közötti nagyságú szögből látszik, azaz olyan P pontok halmazát, melyekre az $APB\measuredangle = \gamma$ állandó.

Állítás. Ezek a pontok két köríven helyezkednek el (a körív két végpontjától eltekintve, azaz A-tól és B-től megfosztva), melyek szimmetrikusak az AB szakaszra.

Bizonyítás.

Mivel a tengelyes tükrözés a szögeket nem változtatja meg, így ha egy P pontra az APB szög γ, akkor a P pontnak az AB egyenesre, mint tengelyre vett tükörképéből a szakasz szintén γ szögben látszik. Így elegendő az AB egyenes által határolt félsíkok közül csak az egyiket vizsgálnunk.

Legyen tehát adott az AB szakasz és a γ szög. Jelöljük ki a vizsgálandó félsíkot jelöljük F-fel, a másik félsíkot pedig F'-vel. Felmérjük a γ szöget az AB szakasz végpontjaira úgy, hogy a szögek másik szára F'-ben feküdjön. Ekkor ez a két szög kerületi szöge az AB szakasznak. A kör középpontját megkaphatjuk, ha a szögek AB szakasztól különböző száraira A-ban és B-ben merőlegest állítunk, hiszen ezek a szárak érintői a keresett körnek. A megfelelő pontok mértani helye ekkor ennek a körnek azon (A-tól és B-től különböző) pontjai, melyek az F félsíkban fekszenek – ez a kerületi szögek tételéből következik.

Már csak azt kell belátnunk, hogy az F félsík más pontjai nem felelnek meg a feltételnek.

Legyen K az AB szakasz egy tetszőleges pontja, valamint Q az F félsík AB egyenestől, ill. az előbb kapott körívtől különböző pontja. Tekintsük a KQ egyenest, az előbbi körívvel való metszéspontja pedig legyen P. Ekkor ha $d(Q,K) < d(P,K)$, akkor az ABP háromszög tartalmazza az ABQ háromszöget.

Segédtétel. Ha két különböző háromszögnek pontosan egy közös oldala van, valamint az egyik tartalmazza a másikat, akkor a közös oldallal szemközti szögek közül a nagyobbik háromszög szöge kisebb.

A tétel következtében az $AQB\measuredangle > APB\measuredangle$. Ha viszont $d(Q,K) > d(P,K)$, akkor a tartalmazás, így az egyenlőtlenség is éppen fordított.

Ezek szerint az imént vizsgált Q pontokból AB γ-tól különböző szögben látszik.

A bizonyításban azt is láttuk, hogy a két körív által határolt síkidom belső pontjaiból a látószög nagyobb, külső pontjaiból a látószög kisebb mint γ.

A tétel egy speciális esetének tekinthető, ha $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Tétel. Thales tétele
Azon pontok mértani helye a síkon, melyekből adott AB szakasz derékszögben látszik, az AB szakaszra, mint átmérőre emelt kör az A és B pontoktól megfosztva.

Bizonyítás.
Ekkor az előbbi eljárást alkalmazva A-ba és B-be az AB szakaszra merőlegest állítunk. Ezek lesznek a keresett körívek érintői. A körívekhez tartozó O középpont így az AB szakasz felezőpontja. Így a keresett körívek AB-re emelt félkörök, melyek együttesen egy A-tól és B-től megfosztott AB átmérőjű kört alkotnak.

A síkkal ellentétben a gömbön nem adhatunk meg látókörívet, így a Thales-tétel sem lehet érvényben maradéktalanul. Azonban egy része mégis igaz marad, ha a síkban a tételt és a bizonyítást kicsit másképp közelítjük meg.

Tétel. Legyen adott AB szakasz az euklideszi síkon, felezőpontja O, és tekintsük az O pont körüli $\frac{AB}{2}$ sugarú kört. Ekkor a kör bármely (A-tó és B-től különböző) C pontjára AOC szög derékszög.

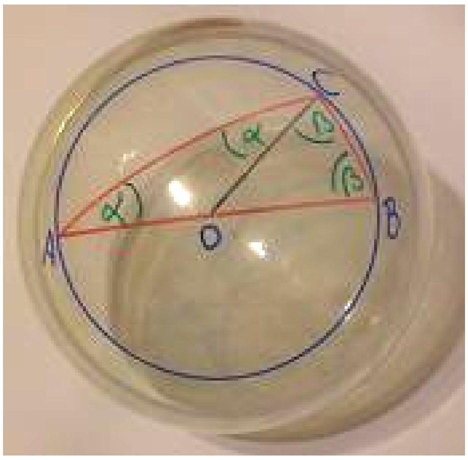
Bizonyítás.
Mivel AO=CO=BO, ezért az AOC és BOC háromszögek egyenlő szárúak, így $CAO\measuredangle = ACO\measuredangle$, jelölje ezt α, valamint $CBO\measuredangle = BCO\measuredangle$, ezt pedig jelöljük β-val. Ekkor az $ACB\measuredangle = \alpha + \beta$. A háromszög szögösszegének állandósága miatt $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = \pi$, amiből $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

A gömbön a Thales-tétel a következő formában igaz.

Tétel. Adott AB szakaszhoz az AB-re emelt kör A-tól és B-től különböző C pontjára az $ACB\measuredangle > \frac{\pi}{2}$.

Bizonyítás.

A síkhoz hasonló gondolatmenetet követjük. A különbség itt a háromszög szögeinek összegében rejlik, mivel az mindig nagyobb mint π. Eszerint $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) > \pi$, ebből már következik, hogy $ACB\measuredangle > \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$.



31. ábra

Fontos megjegyezni, hogy ez a szög ebben a speciális estben sem állandó, azaz nem független a C pont elhelyezkedésétől, viszont ha C elég közel van a szakasz egyik végpontjához, akkor $\frac{\pi}{2}$-höz tart.

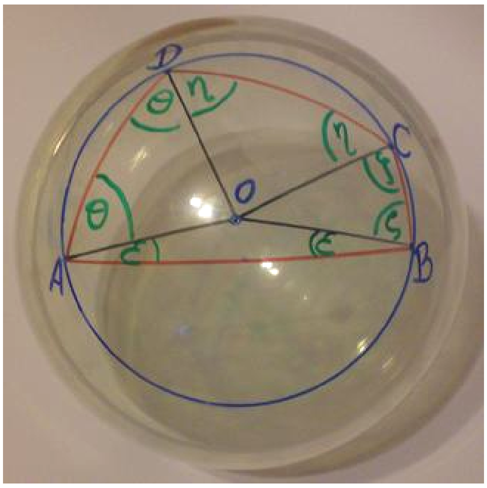
6. Húrnégyszögek és érintőnégyszögek

A korábbi fejezetekben láthattuk, hogy bármely háromszögnek létezik körülírható, valamint beírható köre a gömb és a sík geometriájában egyaránt. A négyszögekre azonban ez nem igaz. Léteznek speciális négyszögek, melyekhez találhatunk az imént megadott köröket, de ehhez a négyszögnek bizonyos kritériumoknak kell megfelelnie.

6.1. Húrnégyszögek

Definíció. *Húrnégyszög*nek nevezzük azokat a négyszögeket, amelyeknek létezik körülírt körük.

A definíciót úgy is megfogalmazhatnánk, hogy a húrnégyszögek azok a négyszögek, melynek csúcsai egy körre illeszkednek. Ebből már látható, hogy a síkon és gömbön is léteznek húrnégyszögek, hiszen ha egy tetszőleges kör négy különböző pontját kijelöljük, akkor ezeket a körvonalon egy irányba haladva szakaszokkal összekötjük, máris húrnégyszöget kapunk.



32. ábra

Tétel. A síkbéli és a gömbi húrnégyszög szemközti szögeinek összege egyenlő.

Bizonyítás.

Legyen az ABCD négyszög húrnégyszög, a köré írható kör középpontját jelölje O, sugarát pedig r. Ekkor OA=OB=OC=OD=r, amiből következik, hogy AOB, BOC, COD, DOA háromszögek egyenlőszárúak, azaz az alapjukon egyenlő szögek fekszenek. Jelölje ezeket ε, ζ, η és θ, a 32. ábrán látható módon. Ekkor $\alpha = \varepsilon + \theta$, $\beta = \varepsilon + \xi$, $\gamma = \xi + \eta$, $\delta = \eta + \theta$. Ha a szemközti szögeket összeadjuk,

$\alpha + \gamma = \varepsilon + \theta + \xi + \eta$

$\beta + \delta = \varepsilon + \xi + \eta + \theta$

Láthatjuk, hogy $\alpha+\gamma=\beta+\delta$.

Tudjuk, hogy a síkon egy négyszög szögösszege 2π, így $\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi$, ezzel szemben a gömbön a szögösszeg mindig több 2π-nél, így ebben a geometriai rendszerben annyit mondhatunk, hogy a szemközti szögek összege egyenlő, és ez az összeg nagyobb mint π.

A tétel megfordítása szintén igaz a két geometriában, azonban más módon bizonyíthatjuk.

Tétel. Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege megegyezik, akkor a négyszög húrnégyszög.

Bizonyítás.

Kezdjük először a síkkal.

Tudjuk, hogy egy síknégyszög szögeinek összege 2π. Mivel a szemközti szögek összege megegyezik, így $\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi$. A kerületi szögek tételének értelmében A egy olyan körívre illeszkedik, ahonnan a BD szakasz α szögben látszik. A $\gamma=\pi-\alpha$ egyenlőségből pedig az következik, hogy a C csúcs olyan köríven nyugszik, melyről a BD szakasz $\pi-\alpha$ szögben látszik. Mivel $\alpha+\pi-\alpha=\pi$, ezért A, B, C, D egy körre illeszkednek, mégpedig úgy, hogy A a BD íven, C pedig ennek kiegészítő ívén nyugszik.

A gömb esetében a gömbi kerületi szögek tételét hívhatjuk segítségül. Tekintsük külön az ACB és ACD háromszögeket a négyszögön belül. Jelölje szögeiket α_1, γ_1, β; valamint α_2, γ_2, δ. Alkalmazzuk az előző szakaszban megismert tételt a két háromszögre.

$$\alpha_1+\gamma_1-\beta=2\xi$$

$$\alpha_2+\gamma_2-\delta=2\eta$$

Az egyenletekben ζ és η természetesen a körülírt kör középpontjának elhelyezkedésének megfelelő előjellel véve. Ha a két egyenletet összeadjuk, és figyelembe vesszük az $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$ illetve $\gamma_1+\gamma_2=\gamma$ helyettesítést, akkor a következőt kapjuk:

$$\alpha+\gamma-\beta-\delta=2\xi+2\eta$$

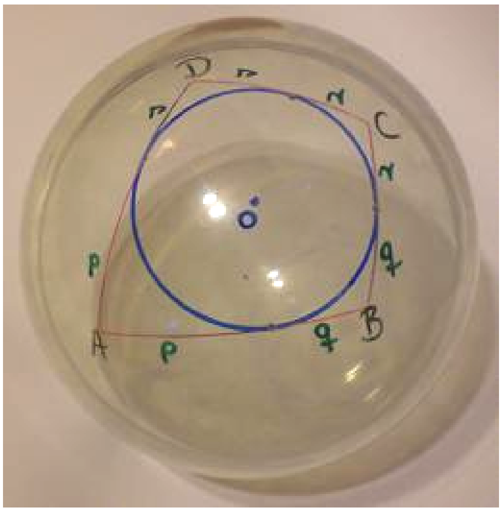
Mivel a szemközti szögek összege egyenlő, így az egyenlet bal oldalán az előjeles szögösszeg egyenlő nullával. Ebből következik, hogy $\xi=-\eta$. Ez az imént is alkalmazott tétel szerint annyit jelent, hogy a két háromszög körülírt körének középpontja megegyezik, és így maga a körülírt kör is. Azaz a négyszög csúcsai egy körre illeszkednek.

A gömbi húrnégyszög egy érdekes tulajdonsága, hogy ha „kivágnánk”, majd sík felületre helyeznénk, akkor stabilan állna a négy csúcsán. Ha meggondoljuk ez nem meglepő, hiszen csúcsai egy körre illeszkednek, a körvonalat pedig egy sík metszi ki a gömbből. Így szükségképpen a gömbi húrnégyszög csúcsai egy síkra is illeszkednek.

6.2. Érintőnégyszögek

Definíció. *Érintőnégyszög*nek nevezzük azokat a négyszögeket, melyeknek létezik beírt köre.

A húrnégyszöghöz hasonlóan az érintőnégyszögeket is megközelíthetjük, mint olyan négyszögeket, melyek oldalai egy kört érintenek. Így máris láthatjuk, hogy mindkét geometriában léteznek érintő négyszögek. Ugyanis, ha tekintünk egy tetszőleges kört, szerkesztünk hozzá négy különböző érintőt, akkor ezeket tekinthetjük az érintőnégyszög oldalainak. A csúcsokat a szomszédos érintési pontokba húzott érintők metszéspontjai adják.



33. ábra

A síkon és a gömbön is egyaránt jellemző az érintőnégyszögre, hogy szemközti oldalainak összege megegyezik. Ez azon egyszerű tulajdonság következménye, miszerint egy pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúságúak (33. ábra).

Ennek megfordítása azonban nem igaz, hiszen léteznek olyan konkáv négyszögek, melyek nyilván nem érintőnégyszögek, mégis a szemközti oldalak összege megegyezik. Ilyen a síkon és a gömbön is a deltoid. Ha azonban az állítást csak konvex négyszögekre vonatkoztatjuk, akkor valóban érintőnégyszöget kapunk.

7. Projekciók

A projekció, vagy más néven vetítés olyan leképezés, minek során egyenesek, mint vetítősugarak segítségével pontoknak pontokat feletetünk meg. A síkon ilyen hozzárendelés például a merőleges vetítés. A projekciók egy csoportját alkotják a centrális projekciók (vagyis pontból való vetítések).

Az euklideszi sík és a gömbfelület között is értelmezhetjük a pontból való vetítést. Ezt úgy tehetjük meg, hogy kijelöljük a tér egy tetszőleges O pontját, ez lesz a vetítés centruma. Ha a G gömbről vetítünk az S síkra, akkor egy tetszőleges G-beli P pont képe az az S-beli P' pont, melyre OPP' kollineáris. Ha a leképezés nem bijektív, elképzelhető, hogy egy pontnak több képe is van, vagy egy pontnak több őse létezik.

A gömbről síkra történő vetítések közül kiemelkednek azok, melyeknél az O középpontú gömböt a sík egy tetszőleges S pontjára illesztjük, a projekció középpontja pedig az S végpontú SO félegyenes egy tetszőleges C pontja.
Ha C minden határon túl távolodik S-től (ill. O-tól), akkor tulajdonképpen G pontjait merőlegesen vetítjük a síkra, ezért is nevezzük ezt ortogonális vetítésnek. Ekkor a sík pontjai közül csak az S középpontú G-vel megegyező sugarú k kör kerületi és belső pontjai szerepelnek képként. Ez nem bijekció, hiszen k minden belső pontjának pontosan két őse van a gömbön.
Gnomonikus vetítésnek nevezzük azt a centrális projekciót, melynek középpontja a gömb középpontjával egybeesik. Ennek során egy tetszőleges G-beli P pontnak és átellenesének a képe megegyezik, hiszen ha egy térbeli egyenes illeszkedik G középpontjára és egy tetszőleges G-beli pontra, akkor annak ellenlábasára is illeszkedik. A gnomonikus vetítés képe az ideális pontokkal (ill. ideális egyenessel) kibővített sík.
Az ortogonális vetítés során a gömb S egyenlítőjével határolt félgömbök közül az S-et tartalmazóra illeszkedő körök képei olyan ellipszisek, melyeknek kistengelye illeszkedik S-re. A gnomonikus vetítés során is ellipsziseket kapunk a körök képeiként, de ezek nagytengelye illeszkedik S-re. A két vetítés között létezik egy pont melyből vetítve a gömbi körök képei síkbeli körök lesznek. Ez akkor valósul meg, mikor C éppen a gömbön S átellenese. A projekció neve ebben az esetben sztereografikus vetítés.

A sztereografikus vetítés

A sík és a gömbfelület egy lehetséges kapcsolatára mutat rá a sztereografikus vetítés. Ennek során a síkot egy ideálisnak nevezett elemmel, „végtelenben levő” ponttal zárjuk le. Ekkor létezik egy bijektív leképezés az így bevezetett sík és a gömbfelület pontjai között.
A megfeleltetés első lépéseként helyezzük az egységátmérőjű gömböt a síkra úgy, hogy a gömb déli pólusnak nevezett pontja és a sík origója érintkezzenek. Feleltessük meg a sík egy tetszőleges x pontjának azt a pontot, melyet az x pontra és a gömb északi pólusára (jelöljük E-vel) illeszkedő egyenes metsz ki a gömbfelületből. Ha az x pont minden határon túl távolodik az origótól, akkor képe a gömb északi pólusához tart, ami így a sík bevezetett ideális pontjának képe. Így a gömbfelület minden pontjának kölcsönösen egyértelműen megfeleltettük az ideális ponttal kibővített sík egy pontját. Ezt a leképezést nevezzük sztereografikus vetítésnek.

Vizsgáljuk meg, milyen képeket kapunk a sík speciális ponthalmazainak vetítése során.
A sík egy tetszőleges egyenesének képét az egyenesre és az északi pólusra illeszkedő sík metszi ki a gömbfelületből. Ezek a képek nyilván a gömb azon körei lesznek, melyek áthaladnak az északi póluson. Ha a sík egy egyenese áthalad az origón, akkor a gömbön vett képként olyan kört kapunk, mely tartalmazza a gömb északi ill. déli pólusát is, ez pedig nem más, mint egy főkör, ami áthalad gömb két pólusán.
Ha két metsző egyenes közös pontja M, akkor a nekik megfelelő két kör M képében és az előbbiek alapján E-ben metszik egymást. A két kör E-ben vett érintőegyenesei párhuzamosak a két egyenessel, hiszen a gömb E-re illeszkedő érintősíkja párhuzamos a vizsgált síkkal. Ha pedig két párhuzamos egyenest tekintünk, akkor képük az előbbiekhez hasonlóan két kör lesz, melyek azonban nem metszik egymást, hanem E-ben érintkeznek. Így kimondhatjuk, hogy a sík bármely két egyenesének szöge egyenlő a gömbre vetített képek szögével, azaz a sztereografikus vetítés szögtartó.

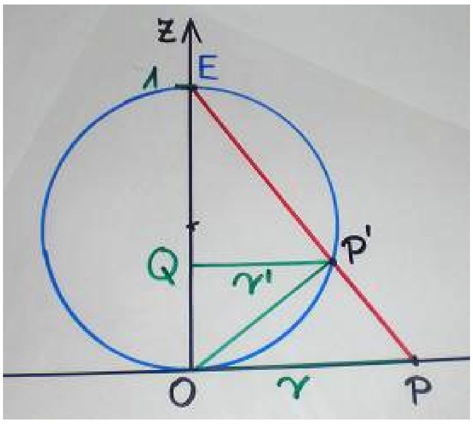
Miképp a szakdolgozat célja a körök vizsgálata, igazoljuk a már megelőlegezett állítást a körök képeiről.

Állítás. A sztereografikus vetítés a sík köreit gömbi körökbe viszi át.

Bizonyítás.

Vezessünk be a térben egy x', y', z' derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy x' és y' a síkbéli x és y tengellyel egybe essen, a z'-tengely pedig a gömb északi pólusa felé mutasson. Az origót jelöljük O-val. A bizonyítás részeként először tanulmányozzuk a sík egy tetszőleges P(x,y) pontjának P'(x',y',z') képét.

Jelöljük a P' pont z'-tengelyre vett vetületét Q-val, a d(O,P) távolságot r-rel, a d(P',Q) távolságot pedig r'-vel. Az OQP' és POE háromszögek hasonlóak, mivel megfelelő szögeik egyenlő nagyságúak (egy-egy szögük derékszög, ill. OP'Q és OPE merőleges szárú hegyesszögek). Ezért $\frac{z'}{r'} = \frac{r}{1}$, amiből



34. ábra

$$z' = r \cdot r' \qquad (1)$$

A P'QE és POE háromszögek szintén hasonlóak (mivel oldalaik párhuzamosak),

így $\frac{1 - z'}{r'} = \frac{1}{r}$, átrendezve

$$1 - z' = \frac{r'}{r} \qquad (2)$$

A (1) és (2) egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$1 = r \cdot r' + \frac{r'}{r}$$

r'-t ebből kifejezve:

$$r' = \frac{1}{r + \frac{1}{r}} = \frac{r}{1 + r^2} \qquad (3)$$

Az (1)-es egyenletbe r'-t helyettesítve megkapjuk P' harmadik koordinátáját:

$$z' = \frac{r^2}{1 + r^2} \qquad (4)$$

A P'QE és POE háromszögek hasonlóságából következik az is, hogy az E középpontú $\frac{r'}{r}$ arányú hasonlóság viszi P-t P'-be. Ezért

$$x' = \frac{r'}{r} x \text{, illetve} \qquad y' = \frac{r'}{r} y \qquad (5)$$

A (3) egyenlet alapján r'-kifejtve, majd r-rel egyszerűsítve kapjuk, hogy

$x' = \frac{x}{1+r^2}$, valamint $y' = \frac{y}{1+r^2}$

Tudjuk, hogy $r^2 = x^2 + y^2$, így P’ koordinátái a következőképp írhatók le:

$$x' = \frac{x}{1+x^2+y^2}; \qquad y' = \frac{y}{1+x^2+y^2}; \qquad z' = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

Az állításunk igazolásához x-et, y-t és $x^2 + y^2$-et kellene kifejeznünk az új koordinátarendszer segítségével az előbbi egyenletek alapján, mivel a síkbéli körök egyenletében ezek a kifejezések szerepelnek.

Az (5)-ös egyenleteket x-re ill. y-ra rendezve

$$x = x'\frac{r}{r'}; \qquad y = y'\frac{r}{r'}$$

(2) alapján

$$\frac{r}{r'} = \frac{1}{1-z'}$$

Így

$$x = \frac{x'}{1-z'} \qquad y = \frac{y'}{1-z'} \qquad (6)$$

Tudjuk, hogy $r^2 = x^2 + y^2$, ill. a (4)-es egyenletből r^2-et keifejezve

$$r^2 = \frac{z'}{1-z'}$$

Vagyis

$$x^2 + y^2 = \frac{z'}{1-z'} \qquad (7)$$

A síkon egy általános kört a következő egyenlet ír le

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

Ahol A, B, C, D nemnegatív valós számok.

x, y és $x^2 + y^2$ helyére a (6) ill. (7) helyettesítést alkalmazva kapjuk

$$A\frac{z'}{1-z'} + B\frac{x'}{1-z'} + C\frac{y'}{1-z'} + D = 0$$

Az egyenletet $(1-z')$-vel megszorozva, majd rendezve

$$Bx' + Cy' + (A-D)z' + D = 0$$

Ezek a pontok egy síkra illeszkednek, aminek metszenie kell a gömbfelületet (mivel a körvonalnak végtelen sok pontja van, így a gömbfelületen vett képének is végtelen sok pontból kell állnia). Azt pedig tudjuk, hogy egy gömb és egy metsző sík közös része kör.
Ezzel az állítást igazoltuk.

Elsőre azt gondolhatnánk hatalmas a szakadék a gömbfelület és a sík között. Hiszen próbáljunk meg egy papírlappal becsomagolni egy gömböt. Hamar rájövünk: ez nem lehetséges. Bár a gömb nem teríthető ki a sík felületre, mint láthattuk létezik olyan egy-egy értelmű megfeleltetés, melynek során a gömb minden pontjához pontosan egy síkbeli pontot rendelünk. A sztereografikus vetítés egyenesei mondhatnánk hidat alkotnak a két felület pontjai között.

Befejezés

A hétköznapi életben nap mint nap kapcsolatba kerülünk mind a síkkal, mind a gömbbel. Amíg az ókori világban a Földet síknak képzelték, több ezer év kellett, hogy felismerjék, bolygónk gömb alakját. Tény, hogy ha a gömb egy nagyon kis felületét vizsgáljuk, akkor az egyre inkább közeledik a síkhoz. Fontos tehát, hogy bolygónk kiismeréséhez tisztán lássuk mindkét geometriát. Hasznát vehetjük ennek akár a térképkészítésnél, akár a repülésnél.

Szakdolgozatom elején azt a célt tűztem ki, hogy átfogóbb ismeretet adjak át az Olvasónak a kör síkon és gömbön betöltött szerepéről.

Láthatjuk, hogy néhány tétel, illetve annak bizonyítása a két geometriában szinte teljesen azonos módon történik, így például egy háromszög beírható körének középpontját mindkét esetben ugyanúgy kaptuk meg. Vannak azonban olyan állítások, feladatok, melyek az egyik geometriában egyszerűbben működnek, mint a másikban. Míg a dualitás a gömbön nem feltételez komoly előismereteket, addig a síkon szükségünk van több definíció bevezetésére, illetve magasabb szintű elméletek befogadására. Ezzel szemben egy adott háromszöggel egyenlő területű háromszögek megtalálása a síkon sokkal kézenfekvőbb, mint a gömbön. Így nem helyezhetjük az egyik geometriát a másik elé, hiszen mint láthatjuk mindkettőnek megvannak a maga előnyei, hátrányai, valamint egyszerűségei és nehézségei.

Néha érdemes egy-egy állítás esetén szemléletünket megváltoztatni, a problémát más oldalról megközelíteni. Ezt alkalmaztuk a gömbi kör kerületének meghatározásában, hiszen ott a gömbfelületből kilépve az euklideszi-térgeometriát hívtuk segítségül.

Mindezek mellett találtunk hidat is a felületek között a sztereografikus vetítés során, igazolva azt, milyen mély a kapcsolat a vizsgált geometriák között.

A témakör feldolgozásának kritikája a teljesség igénye nélküliség.

Szakdolgozatom egyik hiányossága, hogy nem mutatja meg a témakör taníthatóságát általános és középfokú tanintézményekben. A kritikák, hiányok magukban foglalják a további munka igényét. Éppen ezért szükségesnek tartom, hogy a szakdolgozatot további kutatások, bizonyítások után bővítsem akár a tanári mesterképzés keretein belül.

Köszönetnyilvánítás

Szakdolgozatom végén köszönet illeti mindazokat a tanárokat, akik előadásaikkal segítették munkám létrejöttét. Köszönöm elsősorban Lénárt Istvánnak, a külső konzulensemnek, hogy felügyelte a munkafolyamatot, rávilágított a lehetőségekre és az esetleges hibákra; valamint Dr. Vásárhelyi Évának, hogy vállalta témám vezetését. Végezetül, de nem utolsó sorban pedig Dr. Moussong Gábornak, akinek a geometria kurzus előadásjegyzeteit, illetve az óráin szerzett mélyebb ismereteket a dolgozat során több esetben is fel tudtam használni.

Felhasznált irodalom

[1] Bonola, Roberto (1906): *A nemeuklideszi geometria története*. Zanichelli, Bologna. http://mek.niif.hu/00800/00852/

[2] Csákvári Ágnes, Darabos Noémi Ágnes, Lénárt István, Lövey Éva, Kovács Károlyné, Vidra Gábor (2008): *Matematika 9. évfolyam, Tanulók könyve, 1. félév*. Educatio Kht. Kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterv

http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/3_modulleirasok-tanar-tanulo-eszkoz/2_a_tipus/9-evfolyam/1_diak_munkafuzetek_es_eszkozok/h-amat0901_diak-mf_1felev.pdf

[3] Csikós Balázs: *Gömbi geometria*
http://www.tankonyvtar.hu/konyvek/uj-matematikai-mozaik/uj-matematikai-mozaik

[4] Dr. Kálmán Attila (2002): *Nemeuklideszi geometriák elemei*. Második kiadás. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

[5] Hajós György (1962): *Bevezetés a geometriába*. Második kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest.

[6] Kurusa Árpád (2009): *Nemeuklidészi geometriák*. Szegedi Egyetemi Kiadó, Szeged.

[7] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera (2007): *Analízis II*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

[8] Lénárt István (1997): *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere*. Berkeley, California.

[9] Moussong Gábor: *Izoperimetrikus egyenlőtlenségek és gömbi geometria*
http://www.tankonyvtar.hu/konyvek/uj-matematikai-mozaik/uj-matematikai-mozaik

[10] Obádovics J. Gyula (1994): *Matematika*. Tizennyolcadik, javított kiadás. Scolar Kiadó, Budapest.

[11] Szőkefalvi-Nagy Béla (1965): *Komplex függvénytan*. Tankönyvkiadó, Budapest.

[12] Todhunter, Isaac (1886): *Spherical trigonometry for the use of colleges and schools*. Fifth edition. Macmillan, London.