A kombinatorikus geometria néhány kérdése

SZAKDOLGOZAT

Neuberger Eszter

Matematika BSc. Matematika tanári szakirány

Témavezető: dr. Naszódi Márton, adjunktus
ELTE TTK Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

Bevezető

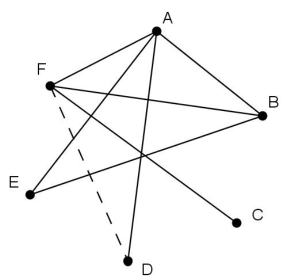
Számomra a legnagyobb meglepetést a véges matematika jelentette az egyetemen. Mikor idekerültem, nem szerettem és nem is igazán érdekelt ez a része a matematikának. Az első hónapok után azonban már szívesen foglalkoztam leszámlálásokkal vagy gráfokkal kapcsolatos kérdésekkel, olyan feladatokkal, melyek túlmutattak a tantárgy keretein. Mint ahogy arra a cím is utal, a szakdolgozatban néhány olyan geometriai feladatot szeretnék ismertetni, amelyet kombinatorikus eszközökkel is meg lehet oldani. Ezeket a problémákat négy fejezetbe rendeztem. Bizonyos kombinatorikai tételeket véges matematikából már tanultunk, de a dolgozat írása közben sikerült az ezekkel kapcsolatos ismereteimet elmélyítenem, egyes állításokat pontosan megértenem.

Az első fejezetben néhány definíciót és tételt mondunk ki bizonyítás nélkül, ezek ismerete szükséges lesz a dolgozat további részeinek megértéséhez. Ezután Ramsey tételével foglalkozunk, a Ramsey-számokra adunk becsléseket, majd belátjuk az Erdős-Szekeres-tételt. A tétel szerint mindig létezik egy r-től függő, megfelelően nagy n szám, melyre igaz, hogy ha legalább n pontot veszünk a síkon, akkor találhatunk köztük olyanokat, melyek konvex r-szöget alkotnak. Ezt extremális kérdések tárgyalása követi, ahol Turán tételének egy bizonyítását ismertetem. A tétel kimondja, hogy egy m osztályú gráf élszáma a teljes m osztályú gráf élszámánál nem lehet több. Ennek segítségével bizonyos távolságú síkbeli pontpárok számát keressük. Megnézzük azt is, hogy lehet a projektív egyenesek segítségével belátni, hogy egy négyszögmentes gráfnak nincs túl sok éle. A negyedik fejezetben geometriai gráfokkal foglalkozunk. Megvizsgáljuk, hány éle van egy olyan gráfnak, melyben bármely két él metszi egymást, milyenek a konvex geometriai gráfok. Végül, de nem utolsó sorban síkbarajzolható gráfokat próbálunk körlemezekkel ábrázolni, bizonyítjuk Koebe tételét, és ennek következményeképp belátjuk a Fáry-Wagner tételt, azaz, hogy egy síkbarajzolható gráf ábrázolható úgy egyenes szakaszokkal, hogy ezek az élek se messék egymást.

1. Alapfogalmak

Az első fejezetben azokat az alapfogalmakat, egyszerűbb tételeket mondjuk ki, melyek közvetve vagy közvetlenül szükségesek lesznek a további problémák tárgyalásánál. Elsőként a gráf fogalmát vezetjük be. Középiskolában hasonló kérdésekkel kezdtük el ezt a témát.

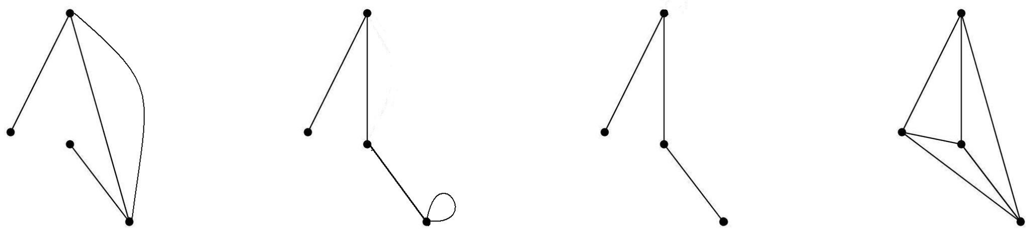
Egy társaságban megkérdeztük az embereket, kit ismernek. A következő válaszokat kaptuk: A ismeri B, D, E, F-et, B kapcsolatban van A-val és F-fel, E új tag, csak A a barátja, C összeköttetésben áll F-fel, míg D és A, illetve E, A, B régi ismerősök. F ismerősei: A, B, C és D. Biztosan mindenki felsorolta az összes ismerősét? Ha az elmondottakat lerajzoljuk, láthatjuk, hogy D nem említette, hogy F a barátja lenne, míg F ismerősei közé számolja D-t.



1.1. ábra.

A G gráf esetén $V(G)$ jelöli a gráf csúcsainak nemüres halmazát, és $E(G)$ az éleket, mely részhalmaza a $V(G)$ két elemű részhalmazaiból álló halmaznak. Két csúcs *szomszédos*, ha őket él köti össze. Ha legalább két él ugyanazt a két csúcsot köti összze, *párhuzamos* vagy *többszörös élekről* beszélünk. Amennyiben egy élnek mindkét végpontja azonos, *hurokélnek* nevezzük. Azokat a gráfokat, melyek nem tartalmaznak sem párhuzamos, sem hurokéleket, *egyszerű gráfoknak* nevezzük.

A G gráf *teljes*, ha egyszerű és bármely két $V(G)$-beli elem szomszédos. Az n csúcsú teljes gráfot K_n-nel jelöljük.



1.2. ábra. Párhuzamos élt, hurokélt tartalmazó gráfok, egyszerű gráf, K_4

A következő kérdés, amit meg kell fontolnunk, hogy mikor tekinthetünk két gráfot azonosnak, azaz mikor *izomorfnak*. A $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfok *izomorfak*, ha létezik olyan φ bijekció V és V' között, melyre igaz, hogy ab pontosan akkor él G-ben, ha $\varphi(a)\varphi(b)$ él G'-ben.

A G gráfnak H *részgráfja*, ha H-t élek vagy csúcsok törlésével kapjuk G-ből. A H-t a G *feszített részgráfjának* nevezzük, ha H bármely két csúcsa szomszédos akkor és csakis akkor, ha G-ben szomszédosak.

Egy gráf egy *sétája* egy olyan $v_0, v_1 \ldots v_k$ csúcssorozat, melyre igaz, hogy $v_0v_1, v_1v_2, \ldots v_{k-1}v_k$ élek. Az *út* olyan séta, melyben nincs ismétlődő csúcs. A G gráfot *összefüggőnek* nevezzük, ha bármely két csúcsa között létezik út.

Egy másik feladat, mikor egy táncteremben fiúk és lányok párokat alakítanak, de nem mindenki hajlandó mindenkivel táncolni, mégis azt szeretnénk, hogy a lehető legtöbben részt vegyenek benne. A párokat összeválogatni első ránézésre nem egyszerű. Ezen helyzetek illusztrálásához páros gráfokat használunk. A *páros gráfok* olyan gráfok, melyekben a csúcsok két nemüres osztályra bonthatók úgy, hogy az osztályokon belül nem fut él. A példában az egyik osztályt a fiúk, a másik osztályt a lányok alkotják, amennyiben feltesszük, hogy csak különböző neműek alkotnak párokat. Azokat a gráfokat, melyeknek egyik osztálya m a másik osztálya l nagyságú, és a két osztály között minden lehetséges élt behúztunk *teljes páros gráfoknak* nevezzük és $K_{m,l}$-lel jelölünk.

1.3. ábra. Páros gráf és $K_{3;2}$

A gráf csúcsát jellemezhetjük aszerint, hogy hány él végpontja, ezt a csúcs *fokának* nevezzük. Az i csúcs fokát d_i-vel jelöljük. Megállapodás szerint a hurokélek kettővel növelik az adott csúcs fokát.
Megállapíthatjuk, hogy bármely gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese, hiszen ha összeadjuk, hogy az adott csúcs hány él végpontja, és minden élnek két végpontja van, akkor minden élet pontosan kétszer számoltunk. Ebből az is következik, hogy egy gráfban a fokszámok összege mindig páros.

Ha egy gráf lerajzolható a síkba úgy, hogy az élei ne messék egymást, akkor a gráfot *síkbarajzolhatónak* nevezzük. A síkbarajzolt gráf a síkot *tartományokra* osztja. Hasonlóan definiáljuk a *gömbre rajzolható* gráfot. Sztereografikus projekcióval igazolható, hogy egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbrerajzolható. A síkbarajzolható gráfokra felírható Euler-tétele: Ha egy összefüggő síkbeli gráfnak n csúcsa, e éle és t tartománya van, akkor $n + t = e + 2$. A tétel következménye, hogy egy egyszerű síkbarajzolható, legalább háromcsúcsú gráfra $e \leq 3n - 6$, illetve, ha G egy egyszerű, síkbarajzolható gráf, és minden körének hossza legalább négy, akkor $e \leq 2n - 4$. Természetesen nem minden gráf rajzolható síkba. Ilyenek a *Kuratowski gráfok*: K_5 és $K_{3,3}$, melyeket nem tudunk így ábrázolni.
A gráf síkbarajzolhatóságát nem befolyásolja, ha egy élt új kétfokú csúccsal két élre bontjunk, vagy ha egy kétfokú csúcsra illeszkedő élt egybeolvasztunk és a csúcsot

elhagyjunk. A G és H gráfok *topologikusan izomorak*, ha a két transzformáció ismételt alkalmazásával izomorf gráfokba transzformálhatók. Kuratowski tétele kimondja: egy gráf akkor és csakis akkor rajzolható síkba, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, mely topologikusan izomorf K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal.

A Ramsey-tétel kapcsán szó lesz gráfok színezéséről is. Tekintve, hogy a gráfok két halmazból állnak: csúcsokból és élekből, beszélhetünk csúcsszínezésről és élszínezésről. Egy G hurokmentes gráf k színnel *kiszínezhető*, ha ki lehet színezni csúcsait k szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen. A G *kromatikus száma* $\chi(G) = k$, ha G csúcsai k színnel kiszínezhetők, de $k - 1$-gyel nem. Az ilyen színezésnél az azonos színt kapott csúcsok halmazát *színosztálynak* nevezzük. Meggondolhatjuk, hogy egy gráf kromatikus száma pontosan akkor egy, ha a gráfnak nincsenek élei, és akkor és csakis akkor kettő, ha páros gráfról beszélünk. Az n csúcsú teljes gráf kromatikus száma n. A színezés szempontjából a többszörös élek nem játszanak szerepet, így elég egyszerű gráfokat tekintenünk.
Színezhetjük a gráf éleit is: a G gráf *élkromatikus száma* az a legkisebb k, melyre teljesül, hogy az élek k színnel kiszínezhetők úgy, hogy bármely csúcsból csupa különböző színű él induljon. Ezek szerint az élkromatikus szám mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a legnagyobb fokszám. A módszert felhasználhatjuk órarend-tervezéshez: a gráf egyik osztálya álljon a tanárokból, másik az osztályokból. Az élek az órákat szimbolizálják, egy tanár akkor van összekötve egy osztállyal, ha tanítja azt, pontosan annyiszor, ahány órát tart az osztályban. Színezzük ki a gráf éleit. Ekkor a színosztályok az egy időpontban megtartott óráknak felelnek meg, ha a gráf éleit minimális számú színnel színezzük ki, akkor kevesebb lesz a 0. és az 7. óra.

A második fejezetben használjuk a konvex burok fogalmát is. Egy ponthalmaz *konvex burka* az a tartalmazásra nézve legkisebb konvex halmaz, mely tartalmazza a ponthalmazt. Az X halmaz konvex burkát *conv (X)*-szel jelöljük.

A harmadik fejezetben olyan halmazokat is vizsgálunk, melyeknek ismerjük az átmérőjét. Az X halmaz *átmérője* két eleme közötti távolságok supremuma. Jelölése: *diam X*.

2. Ramsey tétele

A kombinatorikus geometriával kapcsolatban először Euler poliédertétele kerül elő. A következő legismertebb problémák egyike a Happy End probléma, melynek tárgyalásához először Ramsey tételét kell felelevenítenünk. Véges matematika előadáson a kérdéskört a következő állítással vezettük be, melynek bizonyítását megtaláljuk a [KRSz] könyvben is.

2.0.1. Tétel. *Minden 6 csúcsú gráfban van egy teljes 3-as vagy egy üres 3-as, azaz vagy van 3 olyan csúcs, hogy bármely kettő között fut él, vagy van 3 olyan, hogy köztük nincs él.*

Bizonyítás. Legyen G egy 6-csúcsú gráf, egyik csúcsát jelöljük v_1-gyel. Ekkor vagy találunk három olyan csúcsot, melyekbe vezet v_1-ből él, vagy három olyat, melyekbe nem. Tegyük fel, hogy v_1-nek van három szomszédja, melyekkel össze van kötve, legyenek ezek v_2, v_3, v_4. Ha ezek között fut legalább egy él, akkor ennek az élnek két végpontja és v_1 teljes három csúcsú gráfot alkot. Amennyiben nem vezet él, akkor v_2, v_3, v_4 pontokon találtunk egy üres háromcsúcsú gráfot. A másik eset hasonlóan meggondolható. $\square$

A feladatot először Ramsey általánosította, és bizonyította be.

2.0.2. Tétel. *(Ramsey): Adottak k, p, s nemnegatív, egész számok. Ekkor létezik egy legkisebb olyan n egész, melyre egy n elemű X halmaz p-eseit s színnel színezve találunk egy $Y \subseteq X$ részhalmazt, mely legalább k elemű és Y minden p-ese egyszínű.*

Az állítás egy speciális esetét a [KRSz] könyvben olvashatjuk:

2.0.3. Tétel. *Minden k, l pozitív egészhez létezik egy olyan legkisebb $r(k,l)$ szám, hogy $n \geq r(k,l)$ esetén egy n csúcsú egyszerű gráfban lesz egy teljes k csúcsú részgráf, vagy lesz egy teljes üres l-es.*

A 2.0.1 tételben a hatcsúcsú gráf éleit fehérrel és feketével színeztük, ezért $r(3,3) \leq 6$, az 5-csúcsú gráfok között pedig van olyan, amiben sem K_3 sem üres K_3 nincs, tehát $r(3,3) = 6$. Az $r(2,2)$ értékről könnyen beláthatjuk, hogy 2, hiszen két csúcs közti élt vagy behúzunk, és ekkor tartalmaz egy teljes K_2-t, vagy nem, de akkor egy üres K_2-t találunk. Az $r(3,2) = 3$, mert három csúcs között ha behúzunk minden élt, akkor lesz a gráfban K_3, ha pedig legalább egyet elhagyunk, akkor találunk üres K_2 részgráfot. Általánosan is megállapíthatjuk, hogy $r(k,2) = k$ és $r(2,l) = l$.

A tételt Erdős Pál és Szekeres György - nem ismervén Ramsey munkáját - szintén bizonyította, ők egyben felső becslést is adtak $r(k,l)$ értékére. A bizonyítás több helyen előfordul, az alábbi a [PA] könyvből való.

2.0.4. Tétel. $r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1)$

Bizonyítás. A bizonyításhoz $r(k,l)$-re vonatkozó teljes indukciót használunk. Nyilvánvalóan $r(k,2) = k$ és $r(2,l) = l$. Tegyük fel, hogy létezik $r(t,s)$, ha $t \leq k$ és $s < l$, vagy ha $t < k$ és $s \leq l$. Legyen G egy $r(k-1,l) + r(k,l-1)$ csúcsú gráf. Ekkor minden $x \in V(G)$ csúcs vagy össze van kötve legalább $r(k-1,l)$ csúccsal, vagy biztosan nincs $r(k,l-1)$ csúccsal. Tegyük fel, hogy egy $x \in V(G)$ csúcsra az első eset igaz, azaz x-nek van legalább $r(k-1,l)$ szomszédja. Ekkor ha nincs üres K_l részgráf x szomszédai között, akkor x-nek biztosan van legalább $k-1$ páronként összekötött szomszédja, melyek x-szel együtt K_k részgráfot alkotnak. Azaz G tartalmaz egy üres K_l-t vagy egy teljes K_k-t részgráfként. Hasonlóan meggondolható a másik eset is. $\square$

A 2.0.3 tétel általánosított formája a következő:

2.0.5. Tétel. *Legyenek $k_1, k_2, \ldots k_s$ pozitív egészek. Ekkor létezik egy legkisebb $r(k_1, k_2, \ldots k_s)$ szám, hogy $n \geq r(k_1, k_2, \ldots k_s)$ esetén egy n csúcsú teljes gráf éleit kiszínezve s színnel biztosan találunk a gráfban első színű K_{k_1} vagy második színű $K_{k_2} \ldots$ s-edik színű K_{k_s} részgráfot.*

Most adunk egy explicit felsőbecslést $r(k,l)$-re a 2.0.4 tétel rekurzív becslését felhasználva, majd egy alsóbecslést $r(k,k)$ értékére. Mindkét becslést a [KRSz] könyvben is megtaláljuk.

2.0.6. Állítás. $r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$

Bizonyítás. Hasonlóan az előzőhöz, itt is k-ra és l-re vonatkozó teljes indukciót használunk. Az $r(k,2)$ és $r(2,l)$ értékeket már ellenőriztük, és tegyük fel, hogy van $r(t,s)$, ha $t \leq k$ és $s < l$, vagy ha $t < k$ és $s \leq l$. Ekkor

$$r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$$

□

Amennyiben $k = l$, akkor $r(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1}$. Az ilyen típusú Ramsey-számokra Erdős alsó becslést is adott:

2.0.7. Tétel. *$k \geq 3$ esetén $r(k,k) \geq 2^{k/2}$.*

Bizonyítás. Legyen g_n a különböző n csúcsú gráfok száma, és $g_{n,k}$ ezek közül azoké, melyek tartalmazzák K_k-t részgráfként. Mivel egy n csúcsú teljes gráfban $\binom{n}{2}$ pontpár van, és minden pontpárról eldönthetjük, hogy összeköti-e őket él,

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}}. \tag{2.1}$$

Ezen gráfok közül

$$g_{n,k} \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}. \tag{2.2}$$

olyan van, melyek tartalmazzák K_k-t részgráfként, hiszen ki kell választanunk azokat a csúcsokat, melyek K_k-t feszítik, a fennmaradó $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ pontpárról ismét dönthetünk. Ekkor

$$\frac{g_{n,k}}{g_n} \leq \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{k! 2^{\binom{k}{2}}} \tag{2.3}$$

Ha $n < 2^{k/2}$

$$\frac{g_{n,k}}{g_n} < \frac{n^k}{k! 2^{\binom{k}{2}}} < \frac{2^{\frac{k^2}{2} - \binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2} \tag{2.4}$$

Az egyenlet átrendezésével a $g_{n,k} < \frac{1}{2} g_n$ eredményre jutunk. Ezek szerint az összes különböző n csúcson vehető gráfnak kevesebb, mint a fele tartalmaz K_k-t. Ugyanígy belátható, hogy a gráfok kevesebb, mint fele tartalmaz üres K_k-t, azaz van olyan n csúcsú gráf, mely nem tartalmazza egyiket sem részgráfként. □

Az $r(k,l)$ számokat *Ramsey-számok*nak nevezzük. Értéküket ugyan korlátok közé tudjuk szorítani, és léteznek a fentieknél pontosabb becslések is, mégis csak kevés k,l számpár esetén ismerjük a hozzájuk tartozó Ramsey-számot [1]. Így például $r(3,3) = 6$, vagy $r(3,4) = 9$. Még $r(3,9) = 36$ értékét is ismerjük, ellenben $r(3,10)$-ről már csak azt tudjuk, hogy 40 és 43 közé esik. A számok felső és alsó korlátjának értékei k,l számok növekedésével nagyon gyorsan növekednek, $r(6,6)$ csak 102 és 165 között, míg $r(9,9)$ már 565 és 6588 között lehet. A problémát Erdős Pál egy mondása érzékelteti igazán:

"Képzeljük el, hogy az embernél sokkal hatalmasabb idegen faj landol a Földön, és a $r(5,5)$ értékét követelik, vagy elpusztítják a bolygót. Ebben az esetben hadra kéne fognunk minden számítógépet és matematikust, hogy megtaláljuk az értéket. De tegyük fel, hogy ehelyett $r(6,6)$ értékére kíváncsiak; ebben az esetben minden erőnkkel meg kéne próbálnunk legyőzni őket."

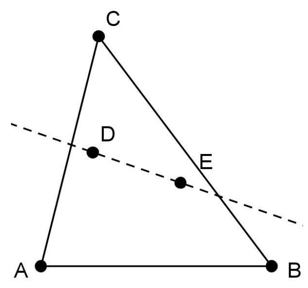
A következő állítás a Ramsey-tétel páros gráfokra vonatkozó variációja:

2.0.8. Állítás. *Minden r-hez létezik egy legkisebb $n = n(r)$ pozitív egész szám, mely eleget tesz a következőknek: $K_{n,n}$ éleit két színnel szinezve lesz a gráfban egy $K_{r,r}$ páros részgráf, melynek minden éle azonos színű.*

A Ramsey-tétel egyik legismertebb geometriai alkalmazása a Happy End probléma. Klein Eszter a következőt vette észre: a sík öt különböző, általános helyzetű pontja közül mindig kiválasztható négy, mely konvex négyszöget alkot. Valóban, ha az öt pont konvex burka egy ötszög, akkor bármely négy ezek közül konvex négyszöget alkot. Ha a konvex burok négyszög, akkor az felel meg a kritériumnak. Amennyiben a konvex burok egy háromszög, akkor a háromszög egy megfelelő csúcsát elhagyva a megmaradó négy csúcs konvex négyszöget alkot. (2.1 ábra)

A kérdést Erdős Pál és Szekeres György általánosította.

2.0.9. Definíció. *Egy síkbeli ponthalmaz* általános helyzetű, *ha bármely két pontja által meghatározott egyenes nem tartalmazza a halmaz további elemét.*



2.1. ábra.

2.0.10. Tétel. *(Erdős-Szekeres) Minden $t \geq 3$-hoz létezik $n = n(t)$, melyre ha tekintünk legalább n általános helyzetű pontot a síkon, akkor a halmaz tartalmazza egy konvex t-szög csúcshalmazát.*

A tételnek több bizonyítása ismert, ez a [PA]-ban található megoldás:

Bizonyítás. Tekintsünk a síkon n általános helyzetű pontot, legyenek ezek $p_1, p_2 \dots p_n$. Osszuk fel a $p_i p_j p_k$ $(1 \leq i < j < k \leq n)$ ponthármasokat két osztályba aszerint, hogy $p_i p_j p_k$ háromszögek csúcsai egymást pozitív vagy negatív irányban követik. A 2.0.3 tétel szerint, $n \geq r(t,t)$ esetén találhatunk egy t-elemű Q részhalmazt P-ben, melynek minden ponthármasa a felosztás ugyanazon osztályába esik.
Belátjuk, hogy az egy osztályban lévő ponthármasok pontjai konvex helyzetűek. Caratheodory tétele szerint $X \subseteq R^d$ halmaz esetén, ha $R \in \text{conv}\,(X)$, akkor létezik $d+1$ egymástól különböző $R_1, R_2 \dots R_{d+1} \in X$ pont, és $\lambda_1, \dots \lambda_{d+1} \geq 0$, súlyok $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1$, melyekre $R = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i R_i$. Ezek szerint, ha egy pont benne van egy X síkbeli ponthalmaz konvex burkában, akkor benne van már három megfelelő pont konvex burkában is.
Indirekt tegyük fel, hogy találtunk t olyan pontot, melyen vett háromszögek csúcsai egymást ugyanabban az irányban követik és a pontok nem konvex helyzetűek. Azaz létezik olyan i index, melyre $p_i \in \text{conv}\,(\{p_1, \dots p_t\} \setminus \{p_i\})$. Legyen $i = 5$ és ekkor Caratheodory-tétele szerint $p_5 \in \text{conv}(p_i, p_j, p_k)$. Legyen $5 < i < j < k$. Ellenőrizhetjük, hogy amennyiben p_i, p_j, p_k pozitív körüljárási irányú háromszöget alkotnak, akkor a $p_5 p_i p_j$ valamint $p_5 p_j p_k$ háromszögek szintén pozitív, míg a $p_5 p_i p_k$ háromszög ezzel ellentétes körüljárási irányú. Mivel azonban feltettük, hogy minden háromszög

csúcsai ugyanabban az irányban követik egymást, ellentmondásra jutottunk. Hasonló eredményt kapunk $i < 5 < j, j < 5 < k$ vagy $k < 5$ esetén is. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

Vizsgáljuk meg $n(t)$ értékét. Ha $t = 2$, azaz az alakzatunk egy szakasz, akkor pontosan két, ha $t = 3$, tehát egy konvex háromszöget szeretnénk, akkor három pontra van szükségünk ahhoz, hogy ezek közül konvex két- és háromszöget kapjunk. Öt pontból biztosan ki tudunk választani egy konvex négyszög csúcsait, és azt is bizonyították, hogy kilenc általános helyzetű csúcs esetén mindig találhatunk ötöt, melyek konvex ötszöget alkotnak. Nagyobb t-kre a kérdés megoldatlan. Ellenőrizték már, hogy 16 pontot meg lehet adni úgy, hogy közülük ne lehessen kiválasztani hatot konvex pozícióban, arra azonban nincs válasz, hogy vajon 17 ponttal is ez előállhat-e. Általánosan igaz, hogy $t > 1$ esetén a síkon megadható 2^{t-2} általános helyzetű pont, amelyek közül nem választható ki konvex t-szög, de hogy 2^{t-2} a legnagyobb ilyen szám-e, azt nem tudjuk. [LPV]

3. Extremális problémák

Legyen τ egy gráftulajdonság, például hogy van-e G-ben Hamilton kör vagy r hosszú út, esetleg található-e G_0-lal izomorf részgráf G-ben, valamely rögzített G_0 gráfra. Ez a fejezet olyan kérdésekkel foglalkozik, melyek a rögzített csúcshalmazon vehető egyszerű gráfokat vizsgálják abból a szempontból, hogy rendelkeznek-e egy τ gráftulajdonsággal. Szükséges feltételeket keresünk arra, hogy G bizonyos típusú gráfokat ne tartalmazzon részgráfként. A kérdés kizárólag abban az esetben érdekes, ha τ olyan tulajdonság, melyet csak bizonyos gráfok elégítenek ki. Esetünkben a feltételek az élszám minimumára vagy maximumára vonatkoznak.

Elsőként Turán klasszikus problémájával foglalkozunk. A páros gráfok általánosításaként adódik a következő definíció.

3.0.11. Definíció. *Egy gráfot m* osztályúnak *nevezünk, ha csúcsai m osztályba sorolhatóak úgy, hogy az egy osztályban levő csúcsok között nem fut él.*

A csak izolált pontokból álló gráfok egy-osztályúak, a páros gráfok két osztályú gráfok.

3.0.12. Definíció. *Legyen $n = qm + r$, $0 \leq r < m - 1$. Definiáljuk a $T_{n;m}$ $(n \geq m)$ gráfot: a gráf n csúcsát, ezeket osszuk m osztályra úgy, hogy r osztály álljon $q + 1$ csúcsból, a többi $(m - r)$ osztály legyen q elemű. A gráfban két pont pontosan akkor van összekötve, ha különböző osztályban vannak. $T_{n,m}$-et m* osztályú n csúcsú teljes gráfnak *vagy* Turán-gráfnak *nevezik.*

Ha $n = k$, akkor $T_{n;k}$ az n-csúcsú teljes gráf, míg a $T_{n;1}$ az üres gráf lesz. $T_{n;k}$ nem tartalmazza K_{k+1}-et részgráfként, mivel bárhogyan is választunk ki $k+1$ csúcsot az alaphalmazból, a skatulyaelv alapján legalább kettő ugyanabba az osztályba esik, így nincsenek összekötve.

Az alábbi tételeket és bizonyításaikat a [KRSz] könyvből vettük.

3.0.13. Állítás. *Az m osztályú gráfok közül a legnagyobb élszámú $T_{n;m}$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan G maximális élszámú, m osztályú gráf, mely nem az m osztályú teljes gráf. Ekkor G-nek van két olyan osztálya, melyek a és b nagyságúak, és igaz, hogy $b \geq a + 2$. A két osztály között ab darab él fut. Ha a b nagyságú osztályból átteszünk egy csúcsot az a nagyságúba, akkor az új osztályok között $(a + 1)(b - 1) = ab + b - a - 1$ él lesz. Ez az összeg biztosan nagyobb, mint ab, mivel feltettük, hogy $b \geq a+2$. Vagyis növeltük az élek számát, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy G élszáma maximális. □

3.0.14. Tétel. *Ha egy n pontú G gráf nem tartalmaz K_{m+1}-et részgráfként, akkor*

$$e(G) \leq e(T_{n;m}) \tag{3.1}$$

Továbbá, ha egyenlőség áll fenn, akkor $G \cong T_{n;m}$. A bizonyításhoz felhasználjuk Erdős Pál egy tételét:

3.0.15. Tétel. *Ha a G egy K_{m+1} - et nem tartalmazó n csúcsú gráf, akkor ugyanazon a ponthalmazon konstruálható egy olyan m osztályú teljes H gráf, melyben minden pont fokszáma legalább akkora, mint G-ben.*

Bizonyítás. A tételt m-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyíthatjuk: $m = 1$ - re az állítás igaz, tegyük fel, hogy $n - 1$-re is. Legyen x egy maximális fokszámú csúcs G-ben, foka legyen Δ_G. A V_1 jelölje x szomszédainak halmazát, V_2 álljon azon csúcsokból, melyek nem szomszédosak x-szel. Természetesen $x \in V_2$.
G_1 legyen a G gráf V_1 által feszített részgráfja. Ekkor G_1-ben nincs K_m részgráf, hiszen ez x-szel együtt G-ben K_{m+1}-t alkotna. Alkalmazzuk az indukciós feltevést G_1-re: van olyan teljes $m - 1$ osztályú H_1 gráf a V_1 csúcshalmazon, hogy minden csúcs fokszáma

legalább akkora, mint G_1-ben. Legyen H a következő gráf: tekintsük V_1 ponthalmazon H_1 gráfot, és vegyük hozzá V_2-t úgy, hogy V_2-n belül ne fusson él, és minden $v \in V_2$-t kössünk össze az összes H_1-beli elemmel. Ekkor H egy m-osztályú gráf, hiszen H_1 egy $m-1$ osztályú teljes gráf volt, ezt egészítettük ki V_2-vel, mint m-edik osztállyal.
Ha $v \in V_2$ akkor össze van kötve minden V_1-beli csúccsal, tehát H-beli foka Δ_G és tudjuk, hogy G-beli foka sem lehet több. Amennyiben $v \in V_1$, akkor egyrészt össze van kötve bizonyos H_1-beli csúcsokkal, és minden V_2-belivel, azaz $d_H(v) = d_{H_1}(v) + |V_2| \geq d_{G_1}(v) + |V_2| \geq d_G(v)$. Azaz $d_G(v) \leq d_H(v)$ minden pontra igaz. Ezzel Erdős tételét beláttuk.
Innen már csak egy lépés a 3.0.14 tétel: ha G-ben nincs K_{m+1}, de nem izomorf $T_{n;m}$-mel, akkor konstruálhatunk egy nála nagyobb élszámú m osztályú teljes gráfot, ennek az élszáma pedig legfeljebb $T_{n;m}$ élszáma lehet. $\square$

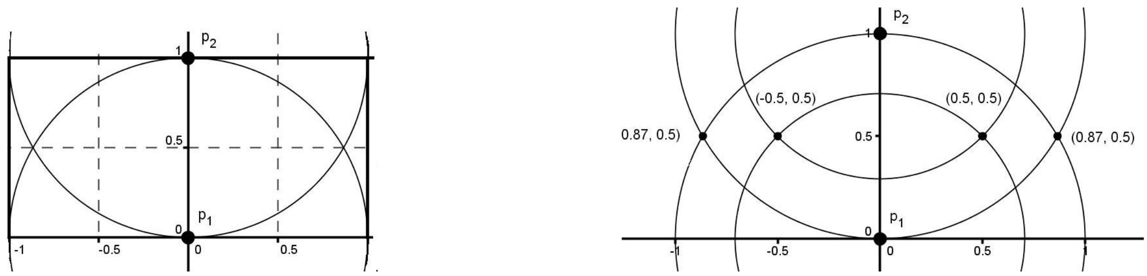
A Turán-gráfok élszámára felírható a következő:

$$e(T_{n;m}) = \binom{n}{2} - r\binom{q+1}{2} - (m-r)\binom{q}{2} \approx \binom{n}{2}(1 - \frac{1}{m}) \tag{3.2}$$

A következő geometriai kérdést, mint feladatot oldottam meg:

Legyen P egy n elemszámú, 1 átmérőjű ponthalmaz a síkon. Legfeljebb hány olyan p_ip_j pontpárt találhatunk a halmazban, melyek távolsága nagyobb, mint $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

Tekintsünk P-ben egy olyan p_1, p_2 pontpárt, melyek távolsága pontosan 1. Ekkor P minden eleme rajta van a p_1 középpontú zárt egységkörlemezen. Mivel p_2 egységnyi távolságra van a középponttól, így p_2 rajta van a körön. Ugyanez elmondható a p_2 középpontú egységkör és p_1 viszonyáról. Azaz P minden eleme benne lesz a p_1 és p_2 középpontú egységkörlemezek metszetében. Konstruáljunk egy olyan G gráfot, melynek csúcsai P pontjai, és két csúcsot akkor kötünk össze, ha távolságuk nagyobb mint $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tudjuk, hogy G belefoglalható a két egységkör metszetébe, mely biztosan benne van egy 2×1 oldalú téglalapban. Másrészről egy $\frac{1}{2}$ oldalú négyzetben a maximális távolság $\frac{1}{\sqrt{2}}$. A téglalap felosztható pontosan 8 ilyen négyzetre úgy, hogy minden a halmazban lévő pont pontosan egy négyzethez tartozzon. (4.3 ábra) Ekkor igaz, hogy az egy négyzetben lévő pontok között G-



3.1. ábra. A halmaz két felosztása a megfelelő becslésekhez

ben nem fut él, azaz sikerült egy 8-osztályú gráfot konstruálnunk. *A* 3.0.13 állítás értelmében ennek élszáma felülről becsülhető $T_{n;8}$ élszámával, ami kevesebb, mint $\frac{7}{16}n^2$.

A becslést erősíthetjük, ha meggondoljuk, hogy a gráfban nem lehet K_4 részgráf. Tegyük fel indirekt, hogy találunk egy teljes négycsúcsú részgráfot. Legyen a négy csúcs, melyek kifeszítik K_4-et: p_1, p_2, p_3 és p_4. Vegyünk fel egy olyan koordinátarendszert a síkon, melynek origója p_1 és melyben p_2 koordinátái (0;1). Ha berajzoljuk a két pont köré írt, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sugarú köröket, a ponthalmazt három részre bontottuk: a két kör uniója és a komplementerhalmaz két diszjunkt részhalmaza három tartományt határoz meg (4.3 ábra). A két kör uniójában lévő pontok vagy p_1, p_2 pontok valamelyikével össze van kötve, de mindkettővel nem. Olyan p_3, p_4 pontpárt keresünk, melyek p_1, p_2 szomszédai egyszerre és nincsenek ugyanabban a tartományban, hiszen a tartományok átmérője kisebb, mint $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Írjuk fel a p_1 és p_2 középpontú $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sugarú körök egyenletét. A körök metszéspontjai $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ és $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Ezek távolsága pontosan 1. Ha az alaphalmaz más olyan pontját választjuk, mely nincs benne a két kör egyikében sem, akkor ennek párja mindig távolabb lesz, mint 1. Azaz G-ben valóban nem található K_4 részgráf. Ekkor felhasználhatjuk a 3 osztályú Turán-gráf élszámára vonatkozó becslést, melynek értelmében G-ben legfeljebb $\frac{n^2}{3}$ él található.

A következő állítás belátását szintén feladatul tűzték ki a [PA] könyv szerzői:

3.0.16. Állítás. *Egy K_{m+1}-et nem tartalmazó gráf élszámára igaz, hogy*

$$e(G) \le \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{m}). \tag{3.3}$$

Bizonyítás. Az m osztályú teljes gráfban, melynek élszámát ismerjük, nincs K_{m+1} részgráf. Amennyiben ennek élszáma kevesebb, mint az állításbeli felső korlát, akkor biztosan jó az utóbbi. Legyen $n = mq + r$, ahol $0 \leq r < m - 1$. A 3.2 képlet alapján azt szeretnénk megmutatni, hogy

$$\binom{n}{2} - r\binom{q+1}{2} - (m-r)\binom{q}{2} < \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{m}). \tag{3.4}$$

Kifejtve a szorzatokat, a megfelelő tagok összevonása után az alábbi egyenlőtlenséget kaptuk:

$$n + 2rq + m(q^2 - q) > \frac{n^2}{m} \tag{3.5}$$

Az n helyére $mq + r$-t helyettesítve, és az egyenlőtlenséget rendezve a következő eredményt kaptuk:

$$1 > \frac{r}{m} \tag{3.6}$$

ami minden r-ra és m-re igaz, mert $r < m$. □

Most egy olyan gráf élszámára voltunk kíváncsiak, mely üres gráfként nem tartalmaz K_{m+1}-t. Azaz ezen gráf komplementerének élszámát kell alulról becsülnünk:

$$e(G) \geq \binom{n}{2} - \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{m}) = \frac{n^2}{2m} - \frac{n}{2} \tag{3.7}$$

Ezt az eredményt egy másik, a [PA] könyvben ismertetett alkalmazásnál használjuk fel:

Tekintsük a háromdimenziós egységgömb határát, S^2-t. Ezen a felületen szeretnénk elhelyezni m pontot úgy, hogy ezek minimumtávolsága maximális legyen. A feladatot másképp is megfogalmazhatjuk: keressük azokat a legnagyobb ρ_m sugárú szférikus sapkákat, melyekből m darabot el tudunk úgy helyezni S^2-en úgy, hogy a sapkáknak ne legyen közös belső pontjuk.

Fogalmazzuk meg a kérdést általánosabban: Legyen C egy rögzített, kompakt halmaz R^d-ben. Minden $m \geq 2$-re a C m-edik *pakolási állandója*

$$d_m = \max_{P \subseteq C, |P|=m} \min_{p \neq q \in P} |p - q|.$$

Megállapíthatjuk, hogy $d_m (m = 1, 2 \ldots)$ monoton csökkenő sorozat, mely 0-hoz tart, miközben m nő. A monotonitás nem szigorú, pl. ha $C = S^2$ akkor $d_5 = d_6$.[PA]

3.0.17. Tétel. *Legyen $m \geq 2$ egész szám és $d_{m+1} \neq d_m$. Tekintsük $\{p_1, p_2 \ldots p_n\} = P \subseteq C$ ponthalmazt, ahol $n \geq m + 1$. Ekkor azon $p_i p_j$ $(i < j)$ párok száma, melyekre $|p_i - p_j| \leq d_{m+1}$ legalább $\frac{n^2}{2m} - \frac{n}{2}$. A becslés éles, ha n az m többszöröse.*

Bizonyítás. Definiáljunk egy n csúcsú G gráfot a $\{p_1, p_2 \ldots p_n\}$ csúcshalmazon, p_i-t és p_j-t kössük össze akkor és csakis akkor, ha távolságuk nem haladja meg d_{m+1}-et. A d_{m+1} definíciójából következik, hogy G nem tartalmazhat üres K_{m+1}-et részgráfként. A **??** egyenlőtlenség szerint a feltételnek megfelelő gráfok élszáma legalább $\frac{n^2}{2m} - \frac{n}{2}$. Ezzel az állítás első felét beláttuk.

Annak bizonyítására, hogy a becslés nem javítható, vegyük észre, hogy a $d_{m+1} \neq d_m$ feltétel azt jelenti, hogy C-ben m pontot el tudunk úgy helyezni, hogy ezek mindegyikének kölcsönös távolsága nagyobb, mint d_{m+1}. Ha helyettesítjük ezeket a pontokat n/m különböző, egymáshoz elegendően közeli csúccsal a pontok nagyon kis környezetéből, kapunk egy n-elemű halmazt, melyre a becslés éles. □

Most olyan gráfokat vizsgálunk, melyek bizonyos hosszúságú köröket nem tartalmaznak. Ennek egyik legegyszerűbb esete, ha G nem tartalmaz négy hosszú kört részgráfként.

3.0.18. Tétel. *A négyszögmentes gráfok élszáma nagyságrendileg $n^{3/2}$.*

A bizonyítást két lépésben végezzük: először mutatunk egy gráfot, melynek van legalább ennyi éle, ezt a leírást a [PA]-ban találhatjuk. Ezután felülről becsüljük az élek számát, a bizonyítás ezen részét [HP]-ben olvastam.

Bizonyítás. Az első lépésben tehát egy olyan gráfot fogunk készíteni, mely kielégíti a feltételeket. Tegyük fel, hogy $n = p^2 + p + 1$, ahol p prím.

Ekkor tudunk egy p rendű projektív síkot konstruálni a következő képpen: a sík pontjai rendezett (a, b, c) ponthármasok, ahol $a, b, c \in F_p$ nem feltétlenül különbözőek, de nem mindegyik 0. Két számhármas (a, b, c) és (a', b', c') ugyanazt a pontot adja meg, ha $(a', b', c') = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ valamely $\lambda \in F_p \setminus \{0\}$ számra. A sík egyenesei azon (x, y, z) pontok, melyek kielégítik

$$ax + by + cz \equiv 0 \text{ (mod p)} \tag{3.8}$$

egyenletet rögzített (a, b, c) ponthármasra. Így az F_p feletti projektív síkot kaptuk. A pontok száma, ugyanúgy mint az egyeneseké $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2 + p + 1 = n$. Minden egyenes pontosan $p+1$ pontot tartalmaz, és az egy ponton átmenő egyenesek száma szintén $p+1$. Legyen G olyan gráf, melynek csúcsai a projektív sík pontjai és (a, b, c) és (a^*, b^*, c^*) pontosan akkor vannak összekötve, ha

$$aa^* + bb^* + cc^* \equiv 0 \text{ (mod p)}. \tag{3.9}$$

Ekkor (a, b, c) G-beli szomszédjai egy projektív egyenest határoznak meg, mely tartalmazhatja az (a, b, c) pontot is. Ettől függően minden G-beli csúcs foka p vagy $p + 1$, azaz G éleire felírható a következő:

$$e(G) \geq \frac{(p^2 + p + 1)p}{2} \geq \frac{1}{2}p^3 \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{2}n)^{3/2} \geq \frac{1}{8}n^{3/2} \tag{3.10}$$

A G biztosan négyszögmentes, ellenkező esetben, ha találnánk a gráfban négyszöget, a négy csúcs által meghatározott két különböző egyenesnek legalább két metszéspontja lenne.

Felülről is szeretnénk becsülni az élek számát. Tekintsük G négyszögmentes gráfot. Azonos csúcsból induló két élt együtt *cseresznyének* hívunk. A gráfban található cseresznyéket kétféleképpen is összeszámolhatjuk. Először vegyük sorra azon pontokat, melyek a *cseresznye középpontjai*, azaz olyan csúcsok, melyekből két különböző él indul ki. Ekkor $\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$ darab cseresznyét számolhatunk össze, ahol d_i az i-edik csúcs foka. Másrészt minden pontpárra megnézhetjük, hogy hány olyan cseresznye van G-ben, melynek ez a pontpár a vége. Mivel G négyszögmentes, ezért egy pontpárra maximálisan egy cseresznye illeszkedhet, tehát a cseresznyék száma legfeljebb $\binom{n}{2}$.

Mivel $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ konvex, a Jensen-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \geq n \binom{d_{atl}}{2}, \tag{3.11}$$

ahol $d_{atl} = \frac{\sum d_i}{n}$ a fokszámok átlaga. Ez az érték kifejezhető az élek számával is: $\frac{2e}{n}$. Ekkor

$$\binom{n}{2} \geq n \binom{\frac{2e}{n}}{2}. \tag{3.12}$$

Ebből:

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq n \frac{\frac{2e}{n}(\frac{2e}{n} - 1)}{2} \tag{3.13}$$

$$n^3 \geq 2e(2e - n) \tag{3.14}$$

Ha $e \leq n$, az egyenlőtlenség igaz, $e \geq n$ esetén

$$n^3 \geq 2e^2 \tag{3.15}$$

ezek szerint $\frac{1}{\sqrt{2}} n^{3/2} \geq e$. Ezt összevetve a 3.10 egyenlőtlenséggel:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} n^{3/2} \geq e(G) \geq \frac{1}{8} n^{3/2} \tag{3.16}$$

Tehát a négyszögmentes gráfok éleinek száma nagyságrendileg valóban $n^{3/2}$. $\square$

4. Geometriai gráfok

A [LPV] könyv végében is találhatjuk a gráfok néhány geometriai alkalmazását. Ők a kérdéskört egy ilyen feladattal vezetik be:

Tekintsünk egy konvex n csúcsú sokszöget, melyre igaz, hogy a csúcsok kivételével két átlő metszéspontjára pontosan két átló illeszkedik. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy hány ilyen metszéspont van egy n-szögben. Próbáljuk meg összeszámolni például egy megfelelő hétszög átlóinak metszéspontjait úgy, hogy átlónként megszámoljuk a metszéspontokat, majd összeadjuk a kapott számokat. A hétszög csúcsai legyenek rendre A, B, C, D, E, F, G.
Először keressünk egy olyan átlót, mely a hétszög kerületén két él távolságra fekvő két csúcsot köt össze: például A-t és C-t. Ezt a szakaszt csak azok az átlók metszik, melyek egyik végpontja B. Mivel B csúcsból A, B és C csúcson kívül mind a fennmaradó négy csúcsba megy él, ezért az AC átlón lévő metszéspontok száma négy.
Ezután vizsgáljunk egy olyan átlót, mely a hétszög kerületén három él távolságra lévő csúcsokat köt össze, ilyen AD. Ezt olyan átlók metszik, melyek B-t vagy C-t kötik össze E, F, G csúcsok valamelyikével. Mind B-ből, mind a C-ből induló ilyen átlók száma három, és feltettük, hogy két átló metszéspontjára más áltó nem illeszkedik, ha az nem csúcs, tehát összesen 6 metszéspont található az AD átlón. A hétszög minen átlója vagy az első, vagy a második csoportba tartozik aszerint, hogy milyen távol találhatóak a sokszög kerületén azok a csúcsok, melyeket összekötnek. Már csak a hétszög $7 \times 4/2 = 14$ átlóját kell a két osztályba besorolnunk.

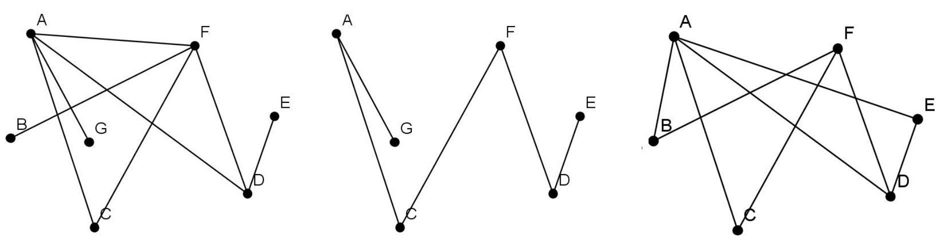
Megállapíthatjuk, hogy az első osztályban, melyek két egymástól két él távolságra fekvő csúcsot kötnek össze, összesen $7 \times 2/2 = 7$ átló van, és a második osztályban is ugyanennyi. Ha a metszéspontokat összeadjuk, $(7 \times 4 + 7 \times 6)/2 = 35$ ilyen metszéspont van, mivel egy metszéspont pontosan két átlón fekszik.

4.1. ábra.

Ez a megoldás ugyan helytálló, de nagy n esetén a módszer meglehetősen nehézkes. Egyszerűbb megoldást jelent, ha a metszéspontokat a két metsző átló végpontjainak segítségével elnevezzük: legyen az AC és BD átlók metszéspontja $ABCD$. Ez a jelölés egyértelmű, mert az $ABCD$ négyszög két átlójának metszésponját jelöli. Így csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a hétszögünkben hány négyszöget találhatunk. Ennek értéke $\binom{7}{4} = 35$. Általában is elmondhatjuk, hogy egy megfelelő konvex n-szög áltói $\binom{n}{4}$ pontban metszik egymást.

Hasonló kérdések tárgyalásához szükségünk lesz a geometriai gráf definíciójára.

4.0.19. Definíció. *Azokat a G gráfokat, melyeknek csúcsai a sík általános helyzetű pontjai, élei pedig olyan egyenes szakaszok, melyek végpontjai a csúcsok,* geometriai gráfoknak *nevezzük. Ha $V(G)$ egy konvex poligon ponthalmaza, akkor* konvex geometriai gráfokról *beszélünk. A H egy* geometriai részgráf*, ha $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.*



4.2. ábra.

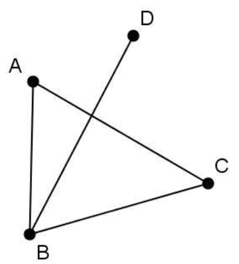
Az ábrán látható első gráf geometriai, mely nem konvex. A második gráf az első részgráfja, melyet B csúcs és a BF, AD illetve AF élek törlésével kapunk meg, tehát ez geometriai részgráf, de ez sem konvex a G csúcs miatt.

A harmadik gráf konvex, de nem részgráfja az elsőnek, mert az az AB és AE éleket nem tartalmazza.

A definícióból következik, hogy a geometriai gráfok egyszerű gráfok, tehát egy n csúcsú geometriai gráfnak legfeljebb $\frac{n(n-1)}{2}$ éle van.

4.0.20. Definíció. *Minden $k \geq 1$-re legyen D_k azon geometriai gráfok halmaza, melyeknek $2k$ csúcsuk és k darab páronként diszjunkt élük van. Jelölje $t(D_k, n)$ azt a maximális élszámot, mely esetén egy n csúcsú geometriai gráf még nem tartalmaz k darab páronként diszjunkt élt, azaz D_k nem részgráfja.*

Tekinsük az alábbi gráfot. A berajzolt élek közül bármely kettő metszi egymást, de nem találtunk egy olyan ötödiket, mely mindegyiket metszené.
Ezek szerint $t(D_2, 4) \geq 4$.



4.3. ábra.

A következő tétel kimondja, hogy nincs is több ilyen él, a bizonyítást egy hasonló állítás bizonyítása alapján végeztem:

4.0.21. Tétel. *$t(D_2, n) = n$ minden $n \geq 3$ esetén.*

Bizonyítás. Az állítást a csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 3$, akkor az állítás igaz, hiszen bármely két szakasz egy csúcsban metszi egymást, és háromnál több él nincs egy háromcsúcsú geometriai gráfban. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n-1$ csúcsra, azaz $t(D_2, n-1) = n-1$. Ha a gráfban van egyfokú csúcs, akkor ennek elhagyásával egy $n-1$ pontú gráfot kapunk, melyre az indukciós feltevés szerint igaz az állítás. Ezek szerint $t(D_2, n) \leq t(D_2, n-1) + 1 = n - 1 + 1 = n$.

Ha minden csúcs foka kettő, akkor a gráf diszjunkt körök uniója, és így pontosan n éle van.
Indirekt tegyük fel, hogy a gráf minden csúcsának foka legalább kettő és van legalább háromfokú csúcsa is. Legyen a legalább háromfokú csúcs v_1, és szomszédja v_2, v_3 és v_4 úgy, hogy a v_1v_3 egyenese elválasztja a v_2 és v_4 pontot. Mivel minden csúcs foka legalább kettő, ezért v_3-nak van még legalább egy szomszédja: v_5. Ezt a csúcsot a v_1v_3 egyenes által meghatározott két félsíknak pontosan egyike tartalmazza, hiszen a geometriai gráf csúcsai általános helyzetűek. Másrészt azt is tudjuk, hogy v_2-t és v_4-et nem tartalmazza ugyanaz a félsík. Ezek szerint a v_3v_5 szakasz v_1v_2 és v_1v_4 közül legfeljebb egyet metszhet, azaz nincs minden éllel közös pontja. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát a gráfnak vagy van olyan csúcsa, melynek egy a foka, vagy minden csúcsa másodfokú. Ezekre az esetekre pedig az állítást beláttuk. $\square$

Ennek segítségével megoldhatjuk a következő feladatot: Próbáljuk meg összeszámolni, hogy n síkbeli pont között legfeljebb hány olyan pontpár van, melyek távolsága maximális. Készítsünk ehhez egy olyan gráfot, melynek csúcsai a sík pontjai, és kössünk össze két pontot, ha azok maximális távolságra vannak egymástól. Azt állítjuk, hogy ekkor a gráfban nincs két diszjunkt él. Legyen a maximális távolságunk egységnyi. Ekkor ha találunk P_1 és P_2 pontokat, melyek távolsága 1, akkor az összes többi a halmazban található pont a P_1 és P_2 középpontú egységkörlemezek metszetében lesz. Ezt a P_1P_2 szakasz két részre bontja. Amennyiben van még legalább egy pontpár, melyek távolsága maximális, akkor ezek biztosan nem lesznek a felosztás ugyanazon részében, hiszen az ezekben lévő maximális távolság kisebb, mint 1. Ezek szerint a másik pontpár által meghatározott szakasz metszeni fogja P_1P_2-t, azaz a gráfunkban nincs két diszjunkt él.

Ezzel beláttuk Hopf és Pannwitz tételét:

4.0.22. Tétel. *Jelölje $f_2^{max}(n)$ az egymástól maximális távolságra lévő síkbeli pontpárok maximális számát. Ekkor $f_2^{max}(n) = n$ minden $n \geq 3$ esetén.*

Valamivel nehezebb meghatározni $t(D_3, n)$ értékének maximumát. Az első felső korlátot Alon és Erdős adta 1989-ben, melyet Goddard javított 1993-ban.

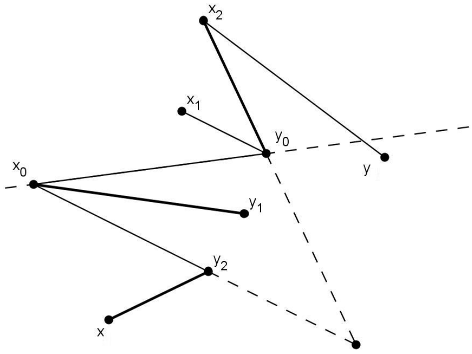
4.0.23. Tétel. $t(D_3, n) \leq 3n$

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő definícióra is:

4.0.24. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy xy él* balra *van xz éltől, ha az xz vektort megkaphatjuk xy vektor π-nél kisebb szögű, pozitív irányú elforgatásával.*

Bizonyítás. Nevezzük az x csúcsot *pontozottnak*, ha van olyan egyenes, melyre illeszkedik, és minden olyan él, melynek x az egyik végpontja, ugyanabban az egyenes által határolt félsíkban van.
Legyen G egy n csúcsú, legalább $3n+1$ élt tartalmazó geometriai gráf. A gráf pontozott csúcsainak halmazát jelölje X. Az $x \in X$ csúcsból kiinduló élek közül töröljük a leginkább balra lévőt, minden X-beli csúcs esetén. Az így kapott részgráfot jelöljük G_1-gyel. Ezután G_1-ből töröljünk minden olyan xy élt, melyhez nem tartozik legalább két tőle jobbra levő él, bármely $x \in X$ esetén. Ekkor csúcsonként legfeljebb három élt töröltünk le, ezért a gráfban biztosan maradt legalább egy él, legyen ez x_0y_0. Ekkor, mivel x_0y_0 megmaradt, létezik két él G_1-ben, melyek tőle jobbra vannak, legyenek x_0y_1 és x_0y_2. Ha x_0y_0 élt a másik irányból nézzük, akkor y_0x_0 mellett is kell, hogy legyen két él jobbra: y_0x_1 és y_0x_2. Mivel y_0x_2 egy G_1-beli él, ezért x_2 vagy pontozott volt és letöröltünk mellőle egy x_2y_0-tól balra lévő élt, vagy pedig nem volt az, de akkor G-ben volt egy x_2y_0-tól balra lévő él. Tehát G-ben mindenképp volt egy x_2y él, mely x_2y_0-tól balra helyezkedett el. Hasonlóan megfontolhatjuk, hogy volt egy y_2x él is G-ben, mely szintén balra y_2x_0-tól. Feltehetjük, hogy az y_0x_2 és az x_0y_2 metszéspontja x_0y_0 ugyanazon oldalán van, mint y_2.
Ekkor az y_0x_2 és az x_0y_1 élek diszjunktak, hiszen a konstrukció szerint az x_0y_0 egyenes által meghatározott, két különböző félsíkon vannak. Az x_0y_1 és az y_2x élek is diszjunktak, hiszen az x_0y_2 él választja el őket. Az y_0x_2 és az y_2x élek sem metszik egymást: mivel az y_0x_2 és az x_0y_2 metszéspontja x_0y_0 ugyanazon oldalán van, mint y_2, akkor a metszéspont és x_2 által meghatározott szakasz az x_0y_2 éltől jobbra van, míg az y_2x él az y_2x_0-tól szintén jobbra vannak. Azaz az x_2y_0-ot és az y_2x-et az x_0y_2 él elválasztja egymástól. Ezek szerint y_0x_2, x_0y_1 és y_2x három diszjunkt él G-ben. □

Bizonyítható az is, hogy $t(D_3, n) \geq \frac{5}{2}n - 4$.



4.4. ábra.

Sajnos nagyobb k-ra a $t(D_k, n)$ érték megadása nagyon bonyolult, még megfelelő korlátot sem ismerünk. Ezért egy speciálisabb eset vizsgálásához fogunk: a probléma lényegesen leegyszerűsödik, ha G-ről feltesszük, hogy csúcsai konvex helyzetűek.

4.0.25. Tétel. *Legyen $t_c(D_{k+1}, n)$ egy n-csúcsú konvex geometriai gráf éleinek maximális száma, mely nem tartalmaz $k+1$ páronként diszjunkt élt. Ekkor minden k-ra és $n \geq 2k+1$-re $t_c(D_{k+1}, n) = kn$.*

Bizonyítás. Legyen G egy konvex geometriai gráf, melynek csúcsai rendre $x_0, x_1 \dots x_{n-1}$. Feltehető, hogy a csúcsok egy szabályos n-szög csúcsai. Osszuk fel az éleket n osztályba úgy, hogy az egymással párhuzamos élek egy osztályt alkotnak. Vegyük észre, hogy ha G-ben nincs $k+1$ páronként diszjunkt él, akkor minden osztály legfeljebb k elemű. Tehát $|E(G)| \leq kn$.
Annak belátására, hogy a becslés nem javítható, egy gráfot mutatunk. Legyen G egy olyan gráf, melynek csúcsai rendre $x_0, x_1 \dots x_{n-1}$ és élei pontosan x_i és $x_{i+\lfloor n/2 \rfloor + j}$ $(0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq k)$ csúcsok között futnak, ahol az indexeket *mod n* tekintjük. □

5. Koebe reprezentációs tétele

A gráfok egy fontos osztályát alkotják a síkbarajzolható gráfok. Az első fejezetben olvasható ezen gráfok néhány tulajdonsága és a síkgráfokra felírható Euler-formula. Korábbi tanulmányaim során találkoztam a számomra meglepetést jelentő Fáry-Wagner tétellel, mely azt állítja, hogy a síkbarajzolható gráfok élei ábrázolhatók egymást csak csúcsokban metsző egyenes szakaszokkal. A szakdolgozat megírásakor egy másik tétellel is találkoztam, mely szerint ezek a gráfok körökkel is ábrázolhatók. A tételt Georg Koebe német matematikusról nevezték el, ő mondta ki és bizonyította először 1936-ban. Később Andreev felevenítette, majd Thurston talált az addigiaktól eltérő bizonyítást a tétel igazolására. Ő nemcsak egy egyszerűbb megoldást talált, de algoritmust is készített, az efféle gráfreprezentáció elkészítéséhez. Az algoritmust többek között K. Stephenson is tovább fejlesztette, az ezt felhasználó programot az interneten megtalálhatjuk[2]. Ez a fejezet Colin de Verdière 1989-ben, illetve Marden és Rodin 1990-ben publikált igazolását írja le részletesen, mely Thurston ötletén alapszik, és amit a [PA]-ban is megtalálhatunk.

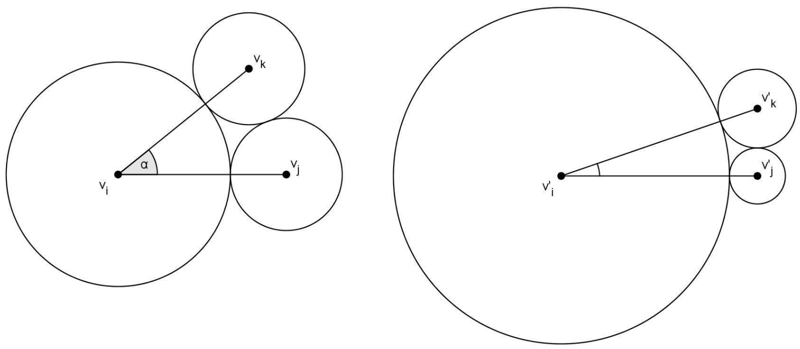
Először is pontosan meg kell fogalmaznunk, mit jelent a körökkel való ábrázolás:

5.0.26. Definíció. *A $C_1, C_2 \dots C_n$ körökből álló körelhelyezés a síkon* reprezentálja *az n csúcsú G egyszerű gráfot, ha el tudjuk helyezni az n darab nem feltétlenül egybevágó kört $(C_1, C_2 \dots C_n)$ a síkon úgy, hogy a C_i kör középpontjának megfelel $v_i \in V(G)$, és C_i és C_j kör pontosan akkor érinti egymást, ha a gráfban v_i és v_j közt él fut.*

5.0.27. Tétel. *Tetszőleges G síkba rajzolható gráf reprezentálható körelhelyezéssel.*

A bizonyításban a következő, feladatként kitűzött segédállítást fogjuk felhasználni:

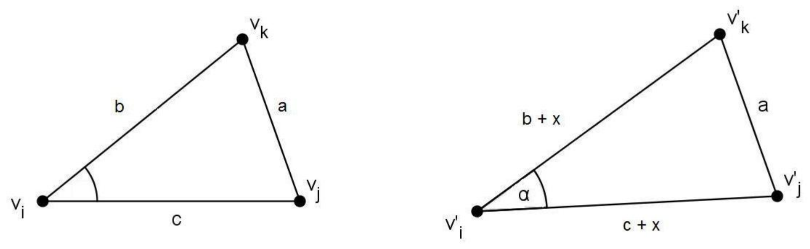
5.0.28. Állítás. *Legyen v_i, v_j, v_k illetve v'_i, v'_j, v'_k három - három, egymást kölcsönösen érintő kör középponja a síkban, melyek sugarai rendre r_i, r_j, r_k és r'_i, r'_j, r'_k. Tegyük fel,* *hogy $r_i < r'_i, r_j \geq r'_j$ és $r_k \geq r'_k$. Ekkor a körök által meghatározott háromszögekben v'_i csúcsnál fekvő szög kisebb, mint a v_i csúcsnál fekvő.*



5.1. ábra.

Bizonyítás. Az állítást lépésenként fogjuk bizonyítani. Először rögzítjük az r_j és r_k sugarakat, és r_i-t növeljük mindaddig, míg a másik körhármas r'_i sugarával megegyezik. A második lépésben rögzítjük $r_i = r'_i$-t és $r_k = r'_k$-t és csökkenteni kezdjük r_j-t, míg r'_j hosszú lesz. Végül az r_k sugarat csökkentjük rögzített $r_i = r'_i$ és $r_k = r'_k$ mellett. Minden lépésnél igazoljuk, hogy a v_i csúcsnál fekvő szög nem lehet nagyobb, mint a v'_i-nél fekvő.

Ehhez tekintsük a kör középpontjai által meghatározott háromszöget. Jelöljük a v_i, v_j, v_k háromszög oldalait rendre a, b, c -vel, v_i csúccsal szembeni oldal legyen a. Első lépésben tegyük fel, hogy $r_i > r'_i, r_j = r'_j$, és $r_k = r'_k$. Ekkor a v'_i, v'_j, v'_k háromszög oldalai legyenek $a, b+x, c+x$, ahol a a v'_i-vel jelölt csúccsal szemben fekszik.



5.2. ábra.

Mivel a koszinusz függvény szigorúan monoton csökken a $(0;\pi)$ intervallumon, így a v_i és v_i' csúcsoknál fekvő két szög közül az a nagyobb, melynek koszinusza kisebb. Felírhatjuk a v_i', v_j', v_k' háromszögre a koszinusz tételt, és kifejezhetjük $cos\alpha$ -t, ahol α a v_i' csúcsnál lévő szög. Azt kell megvizsgálnunk, hogy a függvény hogyan viselkedik miközben x nő.

$$\cos\alpha' = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(b+x)^2+(c+x)^2-a^2}{2(b+x)^2(c+x)^2}\right] = \tag{5.1}$$

$$\frac{(2b+2c+4x)2(b+x)(c+x)-\left[(b+x)^2+(c+x)^2-a^2\right]2(c+b+2x)}{4(b+x)^2(c+x)^2}$$

A deriváltfüggvény az $x=-\frac{c+b}{2}$ helyen nulla, itt van $\cos\alpha$ x szerint vett szélsőértéke. Mivel $0\leq x$, ezen az intervallumon a függvény monoton, menetét viszgálhatjuk az $x=0$ helyen:

$$\frac{(b+c)4bc-(b^2+c^2-a^2)2(c+b)}{4b^2c^2} \tag{5.2}$$

az egyszerűsítés és kiemelés után a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{(c+b)(-(c-b)^2+a^2)}{2b^2c^2} \tag{5.3}$$

A háromszög egyenlőtlenség miatt $a>c-b$, ami a kifejezések négyzeteikre is igaz lesz, emellett $c+b$-ről és a nevezőről is tudjuk, hogy pozitívak. Azaz: $(\cos\alpha)'>0$ az $x=0$ helyen. Ez azt jelenti, hogy amennyiben $-\frac{c+b}{2}<x$ és x nő, úgy $\cos\alpha$ is nő, az α szög csökken. Azaz, amennyiben $r_i<r_i', r_k=r_k'$ és $r_j=r_j'$ akkor a v_i csúcsnál fekvő szög nagyobb, mint a v_i'-nél fekvő.
Második lépésben rögzítsük $r_i<r_i', r_k=r_k'$-t és legyen $r_j+y=r_j'$. A v_j' csúcsnál lévő szög legyen β, a vele szemben fekvő oldal $b'=b+x$, a v_i' csúccsal szemben fekszik $a+y$, v_k' csúccsal szemben $c+x+y=c'+y$ oldal. Hasonlóan a fentiekhez, a koszinusztétel β-ra való felírásával megkaphatjuk a függvény y szerinti deriváltjának szélsőértékét az $y=-\frac{a'+c'}{2}$ helyen. Írjuk fel a v_i', v_j', v_k' háromszögre a háromszög-egyenlőtlenséget: $b'\leq a'+y+c'+y$. Ha behelyettesítünk $y<-\frac{a'+c'}{2}$-t, $b'\leq 0$-t kapunk. Így az $y<-\frac{a'+c'}{2}$ esetet nem kell a továbbiakban figyelembe vennünk, mert háromszögeket vizsgálunk.

Mivel $r_j > r'_j$, ezért az y negatív előjelű, azaz: $-\frac{c+b}{2} < y < 0$. A $-\frac{a'+c'}{2} < y$ helyen a $\cos\beta$ monoton nő, ezért a $(-\frac{c+b}{2}; 0)$ intervallumban y csökkenésekor a függvény értéke is csökken, a β szög nő. Ezek szerint ha rögzítjük $r'_i > r_i, r'_k = r_k$ sugarakat és $r_j > r'_j$, akkor a v'_j csúcsnál fekvő szög nagyobb lesz, mint a v_j melletti. A második lépésben v'_i csúcsnál fekvő α szög nem nőtt.
Harmadik lépésben rögzítsük le $r'_i > r_i$-t és $r'_j \leq r_j$-t és legyen $r_k < r'_k$. Ekkor a második lépés szerint a v'_k csúcsnál fekvő szög nagyobb, mint a v_k - nál lévő, α ismét nem lett nagyobb, tehát valóban igaz, hogy $r_i < r'_i, r_j \geq r'_j$ és $r_k \geq r'_k$ esetén a körök által meghatározott háromszögekben v'_i csúcsnál fekvő szög kisebb, mint a v_i csúcsnál fekvő. □

A tételt elég G *maximális síkgráfra* bizonyítani, azaz olyan gráfra, melynek minden tartományát (beleértve a külső, nem korlátos tartományt is) három él határolja. Ha ugyanis G-nek van olyan tartománya, melyet nem három csúcs határol, akkor vegyünk fel a tartományban egy új csúcsot, és kössük össze a tartományt határoló csúcsokkal. Ha ez a gráf ábrázolható a tételben leírt feltételekkel, akkor az új csúcshoz tartozó kör törlésével az eredeti gráf egy reprezentációját kapjuk.

Legyen G rögzített, maximális síkgráf, $n = |V(G)|$ csúccsal, $E(G)$ élhalmazzal és jelölje $F(G)$ a tartományok halmazát, beleértve a külső tartományt is. Mivel G síkbarajzolható, így felírhatjuk rá az Euler-formulát:

$$n - |E(G)| + |F(G)| = 2 \tag{5.4}$$

Emellett G maximális síkgráf, így minden tartományát három él határolja, és minden él két tartományt határol, azaz:

$$3|F(G)| = 2|E(G)| \tag{5.5}$$

A két egyenletből megkapjuk az alábbi kifejezést:

$$|F(G)| = 2n - 4 \tag{5.6}$$

Legyen $\mathbf{r} = (r_1, \dots r_n)$ egy olyan nem-negatív valósakból álló vektor, melyre $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$. Legyenek r_i,r_j és r_k olyan C_i, C_j és C_k körök sugarai, melyek egymást páronként érintik és középpontjaik v_i, v_j és v_k. Ekkor a középpontok egy háromszöget határoznak meg. A háromszögek emellett megfeleltethetők G gráf tartományainak is. Próbáljuk meg ezeket a háromszögeket megfelelő oldalaik mentén úgy egymás mellé illeszteni, hogy az a gráf tartományainak elhelyezkedését tükrözze. Tekintsük az egy csúcs köré elhelyezett háromszögeket. Minden v_i-re jelölje $\sigma(v_i)$ azon szögek mértékének összegét, melyeknek csúcsa v_i.

5.0.29. Állítás. *Ha a külső, nem korlátos tartományt határoló három csúcson kívül minden $v_i \in V(G)$ csúcsra igaz, hogy $\sigma_r\ (v_i) = 2\pi$, akkor a háromszögeket megfelelő éleik mentén összeillesztve G egy reprezentációját kapjuk.*

Bizonyítás. Tekintsük G egy síkbarajzolását. Az állítás bizonyításához két problémát kell vizsgálnunk. Az egyik gondot az okozhatja, ha G gráf két különböző pontja között találunk két különböző utat úgy, hogy ha ezen két út mentén kezdjük el a háromszögeinket összeilleszteni, a pakolás végén az utak végpontjai nem esnek egybe. Másrészt meg kell gondolnunk, előfordulhat-e, hogy miközben a háromszögeket lepakoljuk, új metszéspontok keletkezhetnek-e, azaz a gráf valamely éle úgy metsz egy másik élt, hogy az nem G-beli csúcs. Belátjuk, hogy egyik eset sem lehetséges.
Az első esetben a gráfban futó két út és a végpontok egy hurkot határoznak meg. A Jordan-féle görbetétel szerint egy egyszerű, síkbeli, zárt görbe a síkot pontosan két összefüggő, egy korlátos és egy nemkorlátos részre bontja, azaz a hurok körbevesz egy síktartományt. Legyen γ a legkevesebb háromszöget tartalmazó tartományt körülvevő olyan hurok G rögzített síkbarajzolásában, mely a háromszögek lepakolásánál nem lesz zárt. A két út közös kezdőpontját jelöljük P-vel, innen szeretnénk eljutni Q-ba, melynek képe a síkban háromszögekkel lerakott két út esetén két különböző pontban végződik: Q_1-ben és Q_2-ben. Tegyük fel, hogy a γ által határolt tartomány legalább két háromszöget határol. Legyenek a P és Q közötti utakon P szomszédjai R_1 és R_2. Amennyiben a hurok határol legalább két, P-re illeszkedő tartományt, akkor a nekik megfeleltetett, P-re illeszkedő belső háromszögek P-re nem illeszkedő oldalai utat képeznének R_1 és R_2 között, azaz találhatnánk kevesebb tartományt határoló hurkot is. Mivel azonban γ a legkevesebb háromszöget határoló ilyen hurok volt, ellentmondásra jutottunk, azaz γ legfeljebb egyetlen tartományt határol. Nyilvánvaló, hogy ekkor a háromszögek lepakolásánál nem nyílik szét a γ hurok egy nemzáródó úttá.
A második probléma, hogy a háromszögek lepakolása közben két útnak úgy is lesz közös pontja, hogy az a gráfban nem szerepel, mint csúcs. Keressük meg a lepakolásban

azt az önmetsző utat, amely a legkevesebb teljes háromszöget veszi körül. Hasonlóan a fentiekhez belátható, hogy ez az út legfeljebb egy háromszöget határolhat. Ez ismét nem lehetséges, hiszen ekkor a gráfban egy olyan éllel metszenénk a háromszögtartományba, mely azt határolja.
Azaz sikerült G egy jó reprezentációját kapnunk $r_1, \dots r_n$ sugarú körök elhelyezésével. $\square$

A Koebe-tétel bizonyításához tehát elég belátnunk, hogy minden esetben megadható egy olyan $\mathbf{r}$ vektor, mely minden nem a külső tartományt határoló v_i csúcsra $\sigma(v_i) = 2\pi$.

Tetszőleges $\mathbf{r} \in R_+^n$-hez kiszámolhatók a $\sigma_r(v_i)$ szögösszegek, valamint azok összege:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_r(v_i) = |F(G)|\pi = (2n-4)\pi. \tag{5.7}$$

Legyen S $\subseteq R^n$, a következő $(n-1)$-dimenziós szimplex R^n-ben:

$$S = \{\mathbf{r} = (r_1, \dots r_n) | r_i > 0, \text{ minden } i-\text{re, és } \sum_{i=1}^{n} r_i = 1\}$$

és

$$H = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots x_n) | \sum_{i=1}^{n} x_i = (2n-4)\pi\}$$

Tekintsük azt az f: $S \to$ H folytonos leképezést, ahol $f(\mathbf{r}) = (\sigma_r(v_1) \dots \sigma_r(v_n))$. Feltehetjük, hogy v_1, v_2, v_3 a külső tartomány csúcsai. Ha be tudjuk bizonyítani, hogy $\mathbf{x}^* = (\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3};2\pi;...2\pi)$ az f képében van, akkor találhatunk olyan $\mathbf{r}$ vektort, melyre minden, nem a külső tartományt határoló csúcsra $\sigma(v_i) = 2\pi$.

5.0.30. Állítás. *f injektív leképezés*

Bizonyítás. Legyenek $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \in S$ és jelölje I azon indexek halmazát, melyre $r_i < r_i'$. Ezek szerint I nem üres halmaz és $I \neq \{1, 2 \dots n\}$. Tekintsük azon háromszögeket, melyek v_i, v_j és v_k csúcsait három, egymást páronként érintő kör középpontja határozza meg. Ekkor a 5.0.28 állítást szerint, ha növeljük C_i kör r_i sugarát, miközben r_j-t és r_k-t változatlanul hagyjuk, vagy csökkentjük, akkor a v_i, v_j, v_k csúcsok által meghatározott háromszögben a v_i csúcsnál fekvő szög csökkenni fog. Ebben az esetben az v_j-nél és v_k-nál fekvő szögek összege nő.

$$\sum_{i \in I}^{n} \sigma_r(v_i) > \sum_{i \in I}^{n} \sigma_{r'}(v_i) \tag{5.8}$$

ekkor $f(\mathbf{r}) \neq f(\mathbf{r}')$, azaz f injektív. □

Legyen $\mathbf{s} = (s_1 \dots s_n) \in S$ a szimplex egy határpontja, most jelölje I azokat az indexeket, melyekre $s_i = 0$, és $F(I)$ azokat a G-beli tartományokat, melynek van I-beli indexű v_i csúcsuk. Legyen P^* egy az

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (2n-4)\pi \tag{5.9}$$

és a minden nemüres $I \subseteq \{1, \dots n\}$-re felírható

$$\sum_{i \in I} x_i < |F(I)|\pi \tag{5.10}$$

egyenlőtlenségekkel leírt, $(n-1)$-dimenziós, nyílt, konvex politóp.

Belátható, hogy f képe a P^* belsejébe esik. Topológiai eszközökkel az is bizonyítható, hogy f szürjektív P^*-ra.

5.0.31. Állítás. $\mathbf{x}^* \in P^*$.

Az $\mathbf{x}^*$ pontot úgy definiáltuk, hogy az alábbi egyenletet kielégítse:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = (2n-4)\pi. \tag{5.11}$$

Legyen I az {1,2...n} halmaz egy valódi részhalmaza. Ha $|I| = n-1$ vagy $n-2$, akkor G minden tartományának legalább egyik csúcsa I indexű, tehát $|F(I)| = |F| = 2n-4$. Ekkor

$$\sum_{i \in I} x_i^* \leq 2\pi(n-3) + \frac{4\pi}{3} < (2n-4)\pi = |F(I)|\pi \tag{5.12}$$

A 5.0.31 állítás bizonyításához azokat az eseteket is meg kell vizsgálnunk, mikor I elemszáma kisebb, mint $n-2$.

5.0.32. Állítás. *Ha* $1 \leq |I| \leq n-3$ *akkor* $|F(I)| \geq 2|I|$.

Bizonyítás. Ha $1 \leq |I| \leq n-3$, akkor G-nek lehetnek olyan háromszög tartományai, melyeknek egyik csúcsa sem I-beli. Színezzük az I - beli csúcsokat pirosra, míg a többi legyen szürke. A szürke csúcsok számát jelölje s, a csak szürke csúcsok által határolt háromszögek számát t. Az (5.6) egyenlet szerint G-nek összesen $2n-4$ tartománya van. Ezek közül t darab olyan van, melynek csak szürke csúcsa van, és $|F(I)|$ olyan, melynek legalább egy csúcsa piros. Tekintsük G szürke csúcsok által feszített részgráfját. Tudjuk, hogy az s csúcson vett maximális síkgráf tartományainak száma $2s-4$, ezért a feszített részgráfban sem lehet több. Formálisan $t \leq 2s-4$. Ezt az egyenlőtlenséget kivonva a (5.6) egyenletből a következőket kapjuk:

$$F(G) - t \geq 2n - 4 - 2s + 4 \tag{5.13}$$

azaz

$$|F(I)| \geq 2|I|. \tag{5.14}$$

□

Ekkor az x_i^*-ok összegére az alábbi felső becslést írhatjuk fel:

$$\sum_{i \in I} x_i^* \leq 2\pi|I| < |F(I)|\pi \tag{5.15}$$

minden I részhalmazra. Ezek szerint $\mathbf{x}^*$ a politópot leíró minden egyenlet és egyenlőtlenség feltételeit kielégíti, azaz $\mathbf{x}^* \in P^*$.

Megállapíthatjuk, hogy $\mathbf{x}^*$ az f képében van, azaz találunk alkalmas $\mathbf{r}$ vektort, melynek koordinátái a megfelelő középpontú körök sugarait meghatározzák. Ezzel az 5.0.31 állítást beláttuk.

Korábban láttuk, hogy ennek belátása elegendő a Koebe-tétel igazolásához, így a bizonyításunk teljes.

A fejezet zárásaképp nézzük meg a tétel néhány alkalmazását.

Tekintsünk egy G síkgráfot és annak egy körökkel való ábrázolását. Ha az egymást érintő körök középpontjait egyenes szakaszokkal kötjük össze, akkor az így kapott ábrában az élek nem metszik egymást. Két él úgy metszhetné egymást, ha a végpontjaik köré írt négy kör kölcsönösen kívülről érinti egymást. Azt azonban tudjuk, hogy síkban maximálisan három kör helyezkedhet el úgy, hogy páronként érintik egymást. Készítettünk tehát egy olyan síkgráfot, melyben a csúcsok és az élek az eredeti G-nek megfelelőek, és a szomszédos csúcsokat szakaszok kötik össze. Koebe tételének következményeként megkaptuk Fáry tételét:

5.0.33. Tétel. *Ha G egy egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor létezik olyan lerajzolása a síkban, melyben minden élet egyenes szakaszokkal ábrázolunk.*

A következő Lipton-Tarjan-tétel bizonyításában is fontos szerepet kap Koebe eredménye.

5.0.34. Tétel. *Legyen G egy n csúcsú síkbarajzolható gráf. Ekkor csúcsait feloszthatjuk három osztályra: A, B, C-re úgy, hogy $|A|, |B| \leq \frac{3}{4}n, |C| < 2\sqrt{n}$, és A és B halmazok közt nem fut él.*

A Koebe-tétel fontos eszköz az origami tervezésben is. Ennek matematikai alapját Robert J. Lang foglalta össze és használta fel hajtogatóprogramok fejlesztéséhez[3].

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni elsősorban dr. Naszódi Mártonnak a rengeteg segítséget és türelmet, amivel a dolgozat készítése közben támogatott, Reck Orsolyának és Schanda Gergelynek, akik a programok használatában jeleskedtek, illetve családomnak és barátaimnak, akik bátorítottak.

Irodalomjegyzék

[PA] Pach János; Aragwal; Pankaj K.: *Combinatorical geometry*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[HP] Hajnal Péter: *Gráfelmélet*, Typotex Kiadó, Budapest, 2006.

[LPV] Lovász László; Pelikán József; Vesztergombi Katalin: *Diszkrét matematika*, Typotex Kiadó, Budapest, 2006.

[KRSz] Katona Gyula Y.; Recski András; Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*, Typotex Kiadó, Budapest, 2006.

[1] http://hu.wikipedia.org/wiki/Ramsey-t%C3%A9tel

[2] http://www.math.utk.edu/ kens/#bibliography

[3] http://www.langorigami.com/science/science.php4