KONVEX LEMEZEK ELRENDEZÉSEI A SÍKON

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Reck Orsolya Márta

Matematika BSc - tanári szakirány

Témavezető: dr. Naszódi Márton, adjunktus
ELTE TTK, Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

Szakdolgozatom témájának megválasztásában elsősorban az motivált, hogy olyan témát találjak, amelyek tanulmányaim során nem nagyon került előtérbe. Fontosnak tartottam, hogy olyan anyagrészt mutassak be a matematika világából, amelyből kevés a magyar nyelvű szakirodalom.

Úgy gondolom, aki a matematika világában kíván elmélyedni, annak szükségszerű és fontos, hogy kipróbálja magát a kutatómunkában, problémák felderítésében, megoldásában. Ez a későbbi tanári pályán is fontos szerepet kaphat, hiszen az értelmes, érdeklődő diákok, olyan érdekes kérdésekkel, problémákkal fordulhatnak tanárukhoz, amelyet nem tartalmaz a tananyag. Ma az óriási sebességgel terjedő információk, ismeretanyagok világában fontos, hogy egy tanár kis utánajárással tudjon kielégítő választ és megoldást nyújtani érdeklődő diákjai számára.

Amikor felkerestem Naszódi Mártont, aki a témavezetőm lett, egy olyan témakört vetett fel, amely felkeltette az érdeklődésemet. Így mélyedtem bele a rácsgeometria világába, s választottam szakdolgozatom anyagának.

Forrásom a Pach János és Pankaj K. Agarwal Combinatorial geometry című könyve volt. A könyv három nagy fejezetét olvastam el, amelyből kiválogattam a számomra legérdekesebbnek tűnő részeket.

Dolgozatomban megpróbálom körüljárni és bemutatni a témakör legfontosabb definícióit és tételeit. A könnyebb érthetőség kedvéért ábrákat készítettem, melyek jól illusztrálják a bizonyítások nehezebben értelmezhető, látható részeit.

Az első két fejezetében néhány definíciót és állítást mondok ki, ezek ismerete szükséges lesz a dolgozat további részeiben. Ezután a halmazok Minkowski-összegével foglalkozom, majd bebizonyítom Minkowski tételét és Blichfeldt tételét. Ezt a rácselrendezés sűrűségének tárgyalása követi, ahol Fáry tételének bizonyítását is ismertetem. Végezetül Fejes Tóth László egybevágó konvex lemezek pakolásáról, fedéséről szóló tételét ismertetem és bizonyítom.

2. Konvex geometriai bevezető

Ez a fejezet a konvex geometria néhány, a dolgozatomhoz fontos definícióját tartalmazza, amelyeket a későbbiek során felhasználok. A fejezet végén kimondok két a konvex geometriában alapvető állítást, amelyeket később felhasználok, de a bizonyítását nem ismertetem.

2.1. Definíció. *Egy ponthalmaz $\mathbb{R}^d$-ben* konvex*, ha bármely két pontjának összekötő szakaszát tartalmazza.*

2.2. Definíció. *A H halmaz korlátos $\mathbb{R}^d$-ben, ha van egy olyan $r \in \mathbb{R}^d$, hogy tetszőleges $a \in H$ esetén $|a| < r$.*

2.3. Definíció. *A $H = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} = c\right\}$ halmazt, ahol $\underline{n} \in \mathbb{R}^d$ és $\underline{n} \neq \underline{0}$,* hipersíknak *nevezzük.*

2.4. Definíció. *A $\overline{H^+} = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} \geq c\right\}$ halmazt és a $\overline{H^-} = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} \leq c\right\}$ halmazt* zárt féltérnek *nevezzük, ahol $\mathbb{R}^d \ni \underline{n} \neq \underline{0}$ normálvektor és $c \in \mathbb{R}$.*

2.5. Definíció. *A $H^+ = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} > c\right\}$ halmazt és a $H^- = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} < c\right\}$ halmazt* nyílt féltérnek *nevezzük, ahol $\mathbb{R}^d \ni \underline{n} \neq \underline{0}$ normálvektor és $c \in \mathbb{R}$.*

2.6. Definíció. *A H hipersík* elválasztja *az A-t a B-től, ha $A \subset \overline{H^+}$ és $B \subset \overline{H^-}$ vagy fordítva.*
A H hipersík szigorúan elválasztja *az A-t a B-től, ha $A \subset H^+$ és $B \subset H^-$ vagy fordítva.*

2.7. Definíció. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^d$ konvex halmaz, $H \subset \mathbb{R}^d$ hipersík. A H az A* támaszhipersíkja*, ha $H \cap A \neq \emptyset$ és $A \subset \overline{H^+}$ vagy $A \subset \overline{H^-}$.*

2.8. Definíció. *Egy* $A \subset \mathbb{R}^d$ *halmaz* belseje*:* $intA = \{\underline{a} \in A : \exists r > 0 : B(\underline{a}, r) \subset A\}$*.*
A határa*:* $bdA = \{\underline{a} \in A : \forall r > 0 : B(\underline{a}, r) \cap A \neq \emptyset,\ B(\underline{a}, r) \backslash A \neq \emptyset\}$*.*
Az A *halmaz* zárt*, ha* $A \supseteq bdA$*,* nyílt*, ha* $A = intA$*.*

2.9. Definíció. *Egy* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *halmaz* kompakt*, ha korlátos és zárt.*

2.10. Állítás. *Legyenek* K *éa* L *konvex halmazok* $\mathbb{R}^d$*-ben. Ekkor, ha* $intK \cap intL = \emptyset$ *teljesül, akkor létezik hipersík, amely a két halmazt elválasztja.*

2.11. Állítás. *Legyen* C *konvex halmaz* $\mathbb{R}^d$*-ben és* $p \in bdC$*, ekkor* C*-nek létezik* p*-ben támaszhipersíkja.*

2.12. Definíció. *A* C konvex halmaz sima*, ha minden határpontjában pontosan egy támaszhipersík van.*

2.13. Definíció. *Egy* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *halmaz* konvex test*, ha konvex, kompakt, és belseje,* $intK$ *nem üres.*

2.14. Definíció. *Legyen* K *és* L *két konvex test.* K *és* L érintik egymást*, ha* $intK \cap intL = \emptyset$*, de* $bdK \cap bdL \neq \emptyset$ *teljesül.*

3. Rácsgeometriai bevezető

Ez a fejezet a rácsgeometria alapvető definícióit tartalmazza, melyek felhasználásra kerülnek a későbbiekben. A fejezet végén az alap paralelepipedonok térfogatához kapcsolódóan mondok ki egy tételt és bizonyítom.

3.1. Definíció. *Adott d lineárisan független vektor* $\underline{u_1}, ..., \underline{u_d} \in \mathbb{R}^d$. *Az általuk* generált rács *a* $\Lambda\left(\underline{u_1}, ..., \underline{u_d}\right) = \left\{m_1\underline{u_1} + ... + m_d\underline{u_d} | m_1, ...m_d \in \mathbb{Z}\right\}$ *halmaz.*

3.2. Definíció. *Legyen adott egy* Λ *rács és* $\underline{u_1}, ..., \underline{u_d} \in \Lambda$. *Ekkor* $\left\{\underline{u_1}, ..., \underline{u_d}\right\}$ *a* Λ *egy* bázisa*, ha* $\Lambda = \left\{m_1\underline{u_1} + ... + m_d\underline{u_d} | m_1, ...m_d \in \mathbb{Z}\right\}$.

3.3. Definíció. *A* sztenderd egységrács $\mathbb{R}^d$*-ben:* $\mathbb{Z}^d = \{\underline{v} : v_i \in \mathbb{Z}; \forall i = 1, ..., d\}$.

3.4. Definíció. *Véges sok pont konvex burkát* $\mathbb{R}^d$*-ben* politópnak *nevezzük.*

3.5. Definíció. *Véges sok rácspont konvex burkát* konvex rácspolitópnak *nevezzük.*

3.6. Definíció. *A* $P = conv\left\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_k}\right\}$ *politóp* csúcsain *azon* $\underline{v_i}$ *pontok, amelyekre igaz, hogy* $P \neq conv\left\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_k}\right\} \setminus \left\{\underline{v_i}\right\}$.

3.7. Definíció. *Az olyan rácspolitópot, amely nem tartalmaz a csúcsain kívül rácspontot* elemi rács politópnak *nevezzük.*

3.8. Definíció. *Egy d-dimenziós rácsban a bázisvektorok által kifeszített paralelepipedont a rács egy* alap paralelepipedonjának *nevezzük.*

3.9. Tétel. *Egy rácsban mindegyik alap paralelepipedonnak ugyanakkora a térfogata.*

Legyen $\underline{v_1}, ..., \underline{v_n}$ a Λ egy bázisa. Ekkor $det\Lambda$ jelölje az alap paralelepipedon térfogatát.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\underline{w_1}, ..., \underline{w_d}$ a Λ egy másik bázisa. Persze $\underline{v_1}, ..., \underline{v_d}$ is és $\underline{w_1}, ..., \underline{w_d}$ is $\mathbb{R}^d$ bázisa. Azaz létezik $P \in \mathbb{R}^{dxd}$ mátrix, a bázis áttérés mátrixa, amelyre

$$\begin{aligned}\underline{w_1} &= p_{11}\underline{v_1} + ... + p_{1d}\underline{v_d}\\ \underline{w_2} &= p_{21}\underline{v_1} + ... + p_{2d}\underline{v_d}\\ &.\\ &.\\ &.\\ \underline{w_d} &= p_{d1}\underline{v_1} + ... + p_{dd}\underline{v_d}\end{aligned}$$

Mivel w_i rácspont minden i-re és $\underline{v_1}, ..., \underline{v_d}$ a rács egy bázisa, ebből következik, hogy $p_{ij} \in \mathbb{Z}$ minden ij-re. Hasonlóan

$$\begin{aligned}\underline{v_1} &= q_{11}\underline{w_1} + ... + q_{1d}\underline{w_d}\\ \underline{v_2} &= q_{21}\underline{w_1} + ... + q_{2d}\underline{w_d}\\ &.\\ &.\\ &.\\ \underline{v_d} &= q_{d1}\underline{w_1} + ... + q_{d}\underline{w_d}\end{aligned}$$

megfelelő q_{ij}-kre, ahol minden ij-re $q_{ij} \in \mathbb{Z}$. Legyen $P = (p_{ij})$ és így $Q = (q_{ij})$ a két mátrix. Ekkor $Q = P^{-1}$ és $detP = \frac{1}{detQ}$. Mivel $detP$ és $detQ$ is egész, ezért $detP = \pm 1$. Másrészt $det(\underline{w_1}, ..., \underline{w_d}) = detP \cdot det(\underline{v_1}, ..., \underline{v_d})$. □

3.10. Definíció. *Ha* $det\Lambda = 1$, *akkor* Λ*-t* egységrácsnak *nevezzük.*

4. Minkowski-tétel

A fejezetben beszélek a halmazok Minkowsi-összegéről, majd az elég nagy térfogatú konvex testek origón kívüli rácspont tartalmazásáról szóló Minkowski-tételről és bizonyításáról. Ezt követi a szorosan hozzá köthető Blichfeld-tétel és bizonyítása.

4.1. Halmazok Minkowski-összege

4.1. Definíció. *Az* $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ *halmazok* Minkowszki összege*:* $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

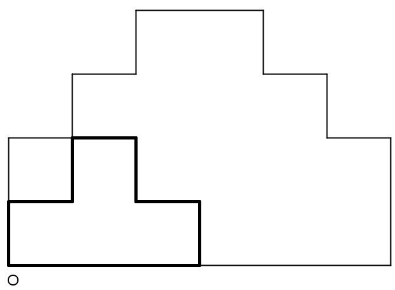
4.2. Definíció. *Az* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *halmaz* skalárszorosa*:* $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$*, ahol* $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.3. Állítás. *Legyen* $K \subseteq \mathbb{R}^d$*, konvex halmaz. Ekkor* $K + K = 2K$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $p \in 2K$. Ekkor $p = 2x$, ahol $x \in K$. Tudjuk hogy $p = x + x$, ebből következik, hogy $p \in K + K$.
Tegyük fel, hogy $p \in K + K$. Azaz $p = x + y$, ahol $x, y \in K$. Legyen $z = \frac{x+y}{2}$. Mivel K konvex, ezért $z \in K$. Persze fenn áll, $p = 2z$, így $p \in 2K$. □

4.4. Megjegyzés. *Ha a feltételből elhagyjuk, hogy K konvex, akkor már nem igaz az állítás.*

Példa:



Az ábrán látható, hogy a K alakzat nem konvex és $K + K \neq 2K$. Az viszont teljesül, hogy $K + K$ tartalmazza $2K$-t.

4.5. Állítás. *Ha A és B konvex halmazok, akkor $A + B$ is konvex.*

Bizonyítás: Legyen $x = a_1 + b_1 \in A + B$ és $y = a_2 + b_2 \in A + B$, $\lambda \in [1, 0]$. Ekkor $\lambda x+(1-\lambda)y = \lambda a_1+\lambda b_1+(1-\lambda)a_2+(1-\lambda)b_2 = \lambda a_1+(1-\lambda)a_2+(\lambda b_1+(1-\lambda)b_2) \in A+B$, mert
$\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$ és $\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2 \in B$, ugyanis A és B konvexek.

$\square$

4.6. Állítás. *Legyen C egy konvex test és $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^d$. Tegyük fel, hogy $C + \underline{u}$ és $C + \underline{v}$ érintik egymást. Ekkor $\frac{C-C}{2} + \underline{u}$ és $\frac{C-C}{2} + \underline{v}$ is érintik egymást.*

Bizonyítás: Legyen $\underline{p} \in (C + \underline{u}) \cap (C + \underline{v})$, ekkor $\underline{p} - \underline{u} \in C$ és $\underline{p} - \underline{v} \in C$, ekkor $(\underline{p} - \underline{u}) - (\underline{p} - \underline{v}) \in C - C$, ezért $\underline{v} - \underline{u} \in C - C$ és ebből következik, hogy $\frac{\underline{v}-\underline{u}}{2} \in \frac{C-C}{2}$, és persze $\frac{\underline{v}-\underline{u}}{2} \in C - C$. Így $\underline{u} + \frac{\underline{v}-\underline{u}}{2} = \underline{v} + \frac{\underline{u}-\underline{v}}{2} = \frac{\underline{v}+\underline{u}}{2} \in \left(\frac{C-C}{2} + \underline{u}\right) \cap \left(\frac{C-C}{2} + \underline{v}\right)$.
Mivel $C + \underline{u}$ és $C + \underline{v}$ érintik egymást, ezért hipersíkkal elválaszthatóak, így létezik $\underline{n} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, melyekre $\underline{n}(\underline{c} + \underline{u}) \geq \alpha$ és $\underline{n}(\underline{c} + \underline{v}) \leq \alpha$ minden $\underline{c} \in C$ pontra.
Legyen $\underline{p} \in \frac{C-C}{2} + \underline{u}$, ekkor $\underline{p} = \frac{\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} + \underline{u}$, valamely $\underline{c_1}, \underline{c_2} \in C$ pontokra.
Belátjuk, hogy

$\underline{n} \cdot \underline{p} = \underline{n} \cdot \underline{u} + \underline{n} \cdot \frac{\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} \geq \underline{n} \cdot \frac{\underline{u}+\underline{v}}{2}$.

Ehhez elegendő, hogy

$\underline{n} \cdot \frac{\underline{u}+\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} \geq \underline{n} \cdot \frac{\underline{v}}{2}$,

azaz

$\underline{n} \cdot (\underline{u} + \underline{c_1}) \geq \underline{n} \cdot (\underline{v} + \underline{c_2})$, márpedig

$\underline{n} \cdot (\underline{u} + \underline{c_1}) \geq \alpha$ és $\underline{n} \cdot (\underline{v} + \underline{c_2}) \leq \alpha$.

Most legyen $\underline{q} \in \frac{C-C}{2} + \underline{v}$, ekkor $\underline{q} = \frac{\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} + \underline{v}$, valamely $\underline{c_1}, \underline{c_2} \in C$ pontokra. Belátjuk, hogy

$\underline{n} \cdot \underline{q} = \underline{n} \cdot \underline{v} + \underline{n} \cdot \frac{\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} \leq \underline{n} \cdot \frac{\underline{u}+\underline{v}}{2}$.

Ehhez elegendő, hogy

$\underline{n} \cdot \frac{\underline{v}+\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} \leq \underline{n} \cdot \frac{\underline{u}}{2}$,

azaz

$\underline{n} \cdot (\underline{v} + \underline{c_1}) \leq \underline{n} \cdot (\underline{u} + \underline{c_2})$, márpedig

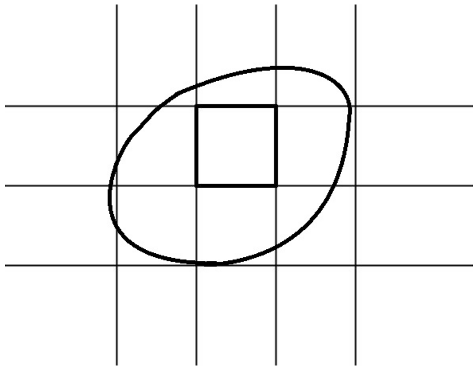
$\underline{n} \cdot (\underline{v} + \underline{c_1}) \leq \alpha$ és $\underline{n} \cdot (\underline{u} + \underline{c_2}) \geq \alpha$.

Így látjuk, hogy $\frac{C-C}{2} + \underline{u}$ a $H = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} = c\right\}$ hipersík által határólt egyik féltérben van, $\frac{C-C}{2} + \underline{v}$ a másikban. $\square$

4.2. Minkowski tétele

4.7. Tétel. *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^d$ egy origóra középpontosan szimmetrikus konvex test, és Λ egy egységrács. Ha $VolC > 2^d$, akkor C tartalmaz legalább egy rácspontot, amely különbözik 0-tól.*

Bizonyítás: Legyen $\underline{u}, \underline{v} \in \Lambda$, $\underline{u} \neq \underline{v}$. Tekintsük az $\frac{1}{2}C + \underline{u} = \left\{\frac{1}{2}\underline{c} + \underline{u} \mid \underline{c} \in C\right\}$ és az $\frac{1}{2}C + \underline{v} = \left\{\frac{1}{2}\underline{c} + \underline{v} \mid \underline{c} \in C\right\}$ halmazokat. Ha a kettőnek van közös pontja, $\underline{p}$, akkor $\underline{p} - \underline{u}$, $\underline{p} - \underline{v} \in \frac{1}{2}$C, így $\underline{0} \neq \underline{v} - \underline{u} = (\underline{v} - \underline{p}) + (\underline{p} - \underline{u}) \in \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = C$ és $\underline{v} - \underline{u} \in \Lambda$. Tehát, elegendő találni két rácsvektort, $\underline{u}$-t, $\underline{v}$-t, melyekre $(\frac{1}{2}C + \underline{u}) \cap (\frac{1}{2}C + \underline{v}) \neq \emptyset$.



Legyen $M = \frac{1}{2}C$. Ekkor $VolM > 1$. Legyen K egy alap paralelepipedon, ekkor $VolK = 1$. Tekintsük az $(M + \underline{u}) \cap K(\underline{u} \in \Lambda)$ halmazokat. Ekkor $(M + \underline{u}) \cap K$-ban is benne van egy $x \in \mathbb{R}^d$ pont és $(M + \underline{u}) \cap K$-ban is, amiből következik, hogy $(M + \underline{u}) \cap (M + \underline{v}) \neq \emptyset$.
Ezért

$$p \in M + x \Rightarrow p - x \in M \tag{4.1}$$

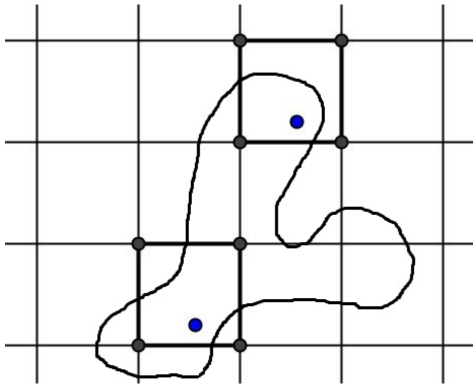
$$p \in M + y \Rightarrow p - y \in M \tag{4.2}$$

$(4.2) - (4.1) : x - y \in M - M = M + M = C$. Másrészt $x - y = \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. □

4.3. Blichfeldt tétele

4.8. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $S \subseteq \mathbb{R}^d$, egy Jordan mérhető halmaz, amelyre $VolS > k$. Ekkor léteznek $z_0, z_1, ..., z_k \in S$ pontok, melyekre $z_i - z_j \in \mathbb{Z}^d$, $0 \leq i \leq j \leq k$ esetén.*

Bizonyítás: Legyen K egy alap paralelepipedon. Tekintsük az $(S + \underline{u}) \cap K$ $(\underline{u} \in \mathbb{Z}^d)$ halmazokat. Legyen $\underline{p} \in K$. Ekkor $\underline{p} \in (S + \underline{u_0}) \cap (S + \underline{u_1}) \cap ... \cap (S + \underline{u_k})$, amiből következik, hogy $(S + \underline{u_0}) \cap (S + \underline{u_1}) \cap ... \cap (S + \underline{u_k}) \neq \emptyset$. Ezért $\underline{p} - \underline{u_0} = z_0, \underline{p} - \underline{u_1} = z_1, ..., \underline{p} - \underline{u_k} = z_k \in S$, és $z_i - z_j \in \mathbb{Z}^d$.



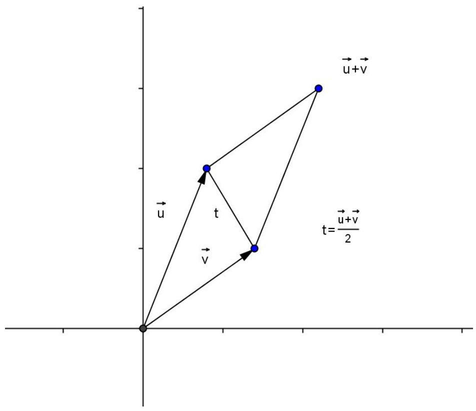
□

4.4. Feladatok

Emlékeztetek, hogy egy *rácsháromszög elemi*, ha a csúcsain kívül nem tartalmaz rácspontot. Lásd a 3.7. definíció.

4.9. Állítás. *Legyen $\underline{u}, \underline{v} \in \Lambda$. Ekkor az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{O}$ háromszög elemi, akkor és csak akkor, ha $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ a Λ rács egy bázisa.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ a Λ egy bázisa. Tekintsük a $conv\,\{\underline{O}, \underline{u}, \underline{v}\}$ háromszöget, legyen $\underline{p}$ a háromszögnek egy tetszőleges pontja, $\underline{p} \neq \underline{O}$. Ekkor létezik $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, hogy $\lambda_1\underline{O} + \lambda_2\underline{u} + \lambda_3\underline{v} = \underline{p}$, ahol $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Így $0 \leq \lambda_2, \lambda_3 \leq 1$, ebből következik, hogy $\underline{p}$ nem lehet rácspont. Tehát $\underline{O}, \underline{u}, \underline{v}$ háromszög elemi.



Tegyük fel, hogy $\underline{O}, \underline{u}, \underline{v}$ egy elemi háromszög. Be akarjuk látni, hogy $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ egy bázisa a $\mathbb{Z}^2$-nek. Legyen $t = \frac{\underline{u}+\underline{v}}{2}$. Ekkor $\underline{O}$-nak t-re vett középpontos tükörképe: $\underline{u} + \underline{v}$. Az

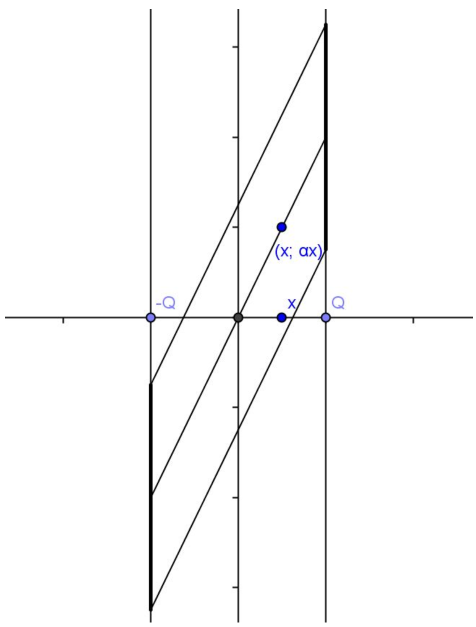
$\underline{O}, \underline{u}, \underline{u+v}, \underline{v}$ P paralelogramma is elemi, mert a rács középpontosan szimmetrikus t-re. A háromszög csúcsain kívül nem tartalmaz rácspontot, így a paralelogramma sem. Ebből következik, hogy a sík egy csempézését adja, ahol minden rácspont csúcs, amiből következik, hogy $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ a Λ egy bázisa. □

A fejezet ezen részében két az [1] könyvben megtalálhatók feladatot oldok meg.

4.10. Feladat. *Legyen $\Lambda = \Lambda(u_1, ..., u_d)$ és legyen P olyan nem elfajuló paralelepipedon $\mathbb{R}^d$-ben, amelynek összes csúcsa rácspont. Tegyük fel, hogy P nem tartalmaz a csúcsaitól különböző rácspontokat. Legyen O az egyik csúcsa és $v_1, ..., v_d$ az O csúcsból induló élek vektorai. Ekkor $\{v_1, ..., v_d\}$ a Λ rács egy bázisa.*

Megoldás: A $\{P + u : u \in \Lambda\}$ egy csempézése lesz a térnek. Csak a csúcsok rácspontok, mivel ha a $P+u$ tartalmazna egy csúcsaitól különböző rácspontot, w, akkor $p-w \in P$ és nem csúcsa P-nek.

4.11. Feladat. *Mutassuk meg, hogy minden α irracionális számra és $K > 0$-ra van olyan $m, n \in \mathbb{Z}$ számpár, amelyre $|\alpha - \frac{m}{n}| \leq \frac{1}{n^2}$ és $K < n$.*



Megoldás:
Legyen $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq Q, |\alpha x - y| \leq \frac{1}{Q}\right\}$.
Ekkor $Area A = 4$ függetlenül Q választásától, mert $(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q}) \cdot (Q + Q) = \frac{2}{Q} \cdot 2Q = 4$.

A Minkowski-tételből következik, hogy létezik $(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \cap A$, $(n,m) \neq (0,0)$, hogy

$|\alpha \cdot n - m| \leq \frac{1}{Q}$, ahol $(n \leq Q)$

Így

$|\alpha - \frac{m}{n}| < \frac{1}{Q}$.

Mivel α irracionális ezért, ha Q elég nagy, akkor ebből következik, hogy $n > K$.
Másrészt, ha $Q > n^2$, akkor

$|\alpha \cdot n - m| \leq \frac{1}{Q}$ kifejezésből következik, hogy $|\alpha - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^2}$.

5. Fáry tétele

A fejezet első részében definiálom a rácselrendezést és a hozzá kapcsolódó pakolás és lefedés sűrűségét, majd bebizonyítom azt a tételt, amely két rácspont távolságának felső korlátjáról szól.
A második részben Fáry István síkon való rácspakolás sűrűségének alsó és rácslefedés sűrűségének felső korlátjáról szóló tételét mondom ki és bizonyítom.

5.1. Definíció. *Adott egy konvex C lemez és egy Λ rács a síkon. Tekintsük C eltoltjainak a $\mathcal{C} = \{C + \lambda | \lambda \in \Lambda\}$ családját. Ezt C egy* rácselrendezésének *hívjuk.*

5.2. Definíció. *Ha egy rácselrendezés elemei páronként átfedés nélküliek, akkor* rácspakolásról *beszélünk.*

5.3. Definíció. *Ha egy rácselrendezés elemei lefedik az egész síkot, akkor* rácslefedésről *beszélünk.*

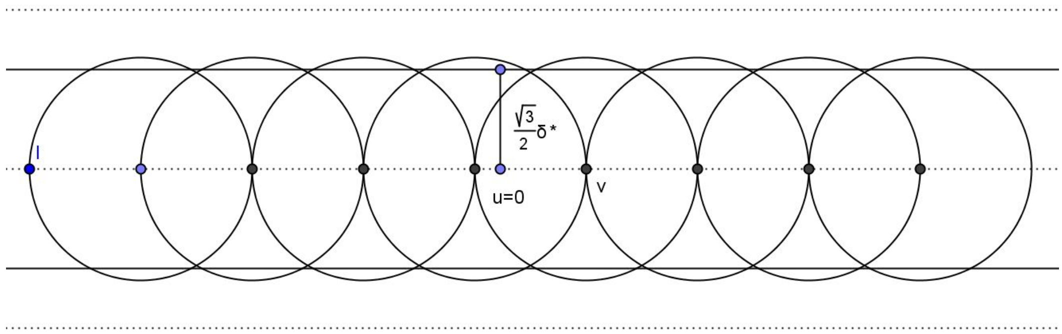
5.4. Definíció. *Adott egy C konvex lemez és egy Λ rács a síkon. A* rácselrendezés sűrűsége *legyen $\frac{A(C)}{det\Lambda}$.*

5.5. Definíció. *Adott egy C konvex lemez és egy Λ rács a síkon. C rácspakolásainak legnagyobb sűrűségét jelölje $\delta_L(C)$.*

5.6. Definíció. *Adott egy C konvex lemez és egy Λ rács a síkon. C rácslefedéseinek legkisebb sűrűségét jelölje $\vartheta_L(C)$.*

5.7. Tétel. *Legyen Λ egy egységrács $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor létezik két rácspont, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2/\sqrt{3}}$.*

Bizonyítás: Legyen δ^* a Λ-beli pontpárok minimum távolsága. Az $u, v \in \Lambda$ pedig legyen egy ilyen pontpár. Az egyszerűség kedvéért feltehető, hogy $u = 0$. A pontok köré rajzoljunk δ^* sugárral köröket. Majd $k \cdot v \in \Lambda$, ahol $k \in \mathbb{Z}$ legyenek a v egész számú skalárszorosai. Jelölje l a $\overline{0v}$ egyenest. Ekkor a $k \cdot v$ alakú rácspontok köré rajzolt δ^* sugarú körök lefednek egy olyan sávot az l körül, amelyeknek félszélessége $\left(\sqrt{3}/2\right)\delta^*$. Ekkor legyenek a háromszög csúcsai 0, v és a köréjük rajzolt körök metszéspontja. Ezen háromszög területe $T = \frac{\delta^*}{2} \cdot m$, ahol m a magasságot jelöli. Másrészt, mivel a háromszög egységrács, amiből következik, hogy $T = \frac{1}{2}$. Ekkor $1 = \delta^* \cdot m \geq \delta^* \cdot \delta^* \frac{\sqrt{3}}{2}$ és amiből következik, hogy a két rácspont távolsága legfeljebb $\sqrt{2/\sqrt{3}}$. $\square$



Az 5.4. definíció alapján az egybevágó r sugarú körök *rácspakolásának sűrűsége* $\pi r^2 / det\Lambda$.

5.8. Következmény. *Egybevágó körök rácspakolási sűrűsége legfeljebb $\pi/\sqrt{12}$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy Λ egy egységrács. A δ^* jelölje ugyan azt, amit az 5.7. tétel bizonyításában. A páronként átfedés nélküli körök sugara legfeljebb $r = \delta^*/2$. Ezért az 5.7. tétel szerint a rácspakolás sűrűsége:

$$\frac{(\delta^*/2)^2 \pi}{det\Lambda} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$$

$\square$

5.1. Fáry-tétel

Ebben a fejezetrészben bizonyítom a $\delta_L(C) \geq \frac{2}{3}$ állítást csak abban az esetben, ha C O-szimmetrikus , és a $\vartheta_L(C) \leq \frac{3}{2}$ állítást, de az egyenlőséget nem.

5.9. Tétel. *Adott egy konvex C lemez a síkon. Ekkor fennáll:*

$$\text{(i) } \delta_L(C) \geq \tfrac{2}{3}, \text{ és}$$

$$\text{(ii) } \vartheta_L(C) \leq \tfrac{3}{2}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a C háromszög.

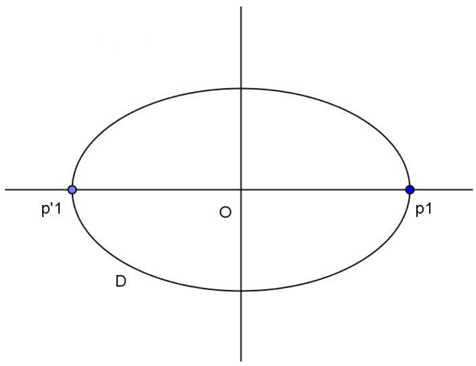
5.10. Definíció. *Legyen $C \subset \mathbb{R}^d$ tetszőleges halmaz. A $D(C) = C + (-C) = \{c - c' | c, c' \in C\}$ halmazt a C* különbség-tartományának *hívjuk.*

Természetesen, ha C konvex, akkor $D(C)$ is konvex, továbbá középpontosan szimmetrikus az origóra.

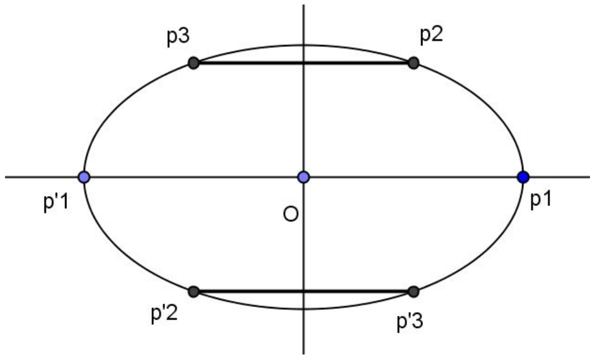
5.11. Definíció. Affin szabályos hatszög*, olyan konvex hatszög a síkon, amely középpontosan szimmetrikus és szemközti oldalai párhuzamosak.*

5.12. Lemma. *Bármely középpontosan szimmetrikus D konvex lemez tartalmaz egy beírt affin szabályos H hatszöget ugyanazon középponttal. Ráadásul szabadon megválaszthatjuk a H egy oldalának irányát.*

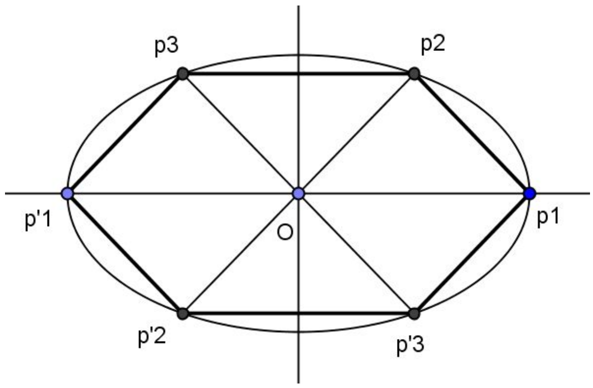
Bizonyítás: Legyen minden $p_i \in bdD$ $(i = 1, 2, 3)$, és jelölje p'_i a p_i ponttal átellenes pontot. Jelöljünk ki egy p_1 tetszőleges pontot D határán. Ekkor megkapjuk p'_1-et is.



Toljuk el p_1p_1' szakaszt úgy, hogy kimetszen egy p_2p_3 húrt a D-ben úgy, hogy $p_2p_3 = \frac{1}{2}p_1p_1'$. Ekkor megkapjuk a p_2', p_3' pontokat is.



A hat pont meghatároz egy hatszöget.



Már csak azt kell belátni, hogy a hatszög affin szabályos. Azt már tudjuk, hogy a p_2p_3 és a $p_2'p_3'$ oldalak párhuzamosak egymással.
A fenti eljárást a p_2 pontra alkalmazva megkapjuk, hogy a p_1p_3' és a $p_1'p_3$ oldalak párhuzamosak egymással.
A p_3 pontra alkalmazva az eljárást pedig megkapjuk, hogy a p_1p_2 és a $p_1'p_2'$ oldalak párhuzamosak egymással. Ezzel beláttuk, hogy a hatszög szemben lévő oldalai párhuzamosak egymással, tehát affin szabályos. □

A következő lemmát bizonyítás nélkül mondom ki.

5.13. Lemma. *Legyen $C \subset \mathbb{R}^2$ konvex lemez. Ekkor létezik C-be írt affin reguláris hatszög.*

Az 5.9. tétel bizonyítása: Az 5.9. tétel (i) részének bizonyítása szimmetrikus esetre. Legyenek $p_1, ..., p_6$ pontok egy C-be beírt affin szabályos hatszög csúcsai. Az 5.12. lemma második része szerint szabadon választhatjuk meg p_1-et C határán. A $p'_1, ..., p'_6$ pontok legyenek a $\overline{p_1 p_4}$ vektorral eltolt hatszög csúcsai.
Legyen Λ az a rács, melynek bázisa $p_4 - p_1$ és $p_5 - p_2$. Ekkor a $p_2 p'_2 p'_5 p_5$ négyszög paralelogramma lesz, mégpedig Λ egy alap paralelogrammája.

Ekkor $d(C, \mathbb{R}^2) = \frac{A(C)}{A(p_2 p'_2 p'_5 p_5)}$.

Daraboljuk át a paralelogrammánkat, úgy hogy a $p'_1 p'_2 p'_5 p'_6$ négyszöget eltoljuk a $p_1 p_2 p_5 p_6$ pontok által határolt négyszögbe. Vegyük a $p_1 p_2 p_3 p'_2 p_4 p'_6 p_5 p_6$ nyolcszöget.

Ekkor $A(p_2 p'_2 p'_5 p_5) = A(p_1 p_2 p_3 p'_2 p_4 p'_6 p_5 p_6)$, tehát $d(C, \mathbb{R}^2) = \frac{A(C)}{A(p_1 p_2 p_3 p'_2 p_4 p'_6 p_5 p_6)}$.

Bontsuk szét a nyolcszögünket három részre, így megkapjuk az eredeti hatszögünket és a $p_3 p'_2 p_4$ háromszöget és a $p_4 p'_6 p_5$ háromszöget, ekkor

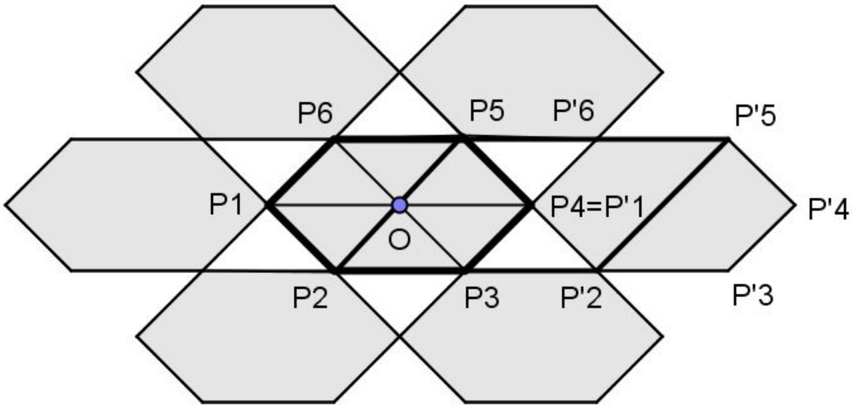
$d(C, \mathbb{R}^2) = \frac{A(C)}{A(C) + A(p_3 p'_2 p_4) + A(p_4 p'_6 p_5)}$.

Másrészt $A(p_3 p'_2 p_4) = A(O p_3 p_4)$ és $A(p_4 p'_6 p_5) = A(O p_4 p_5)$, amikből következik, hogy

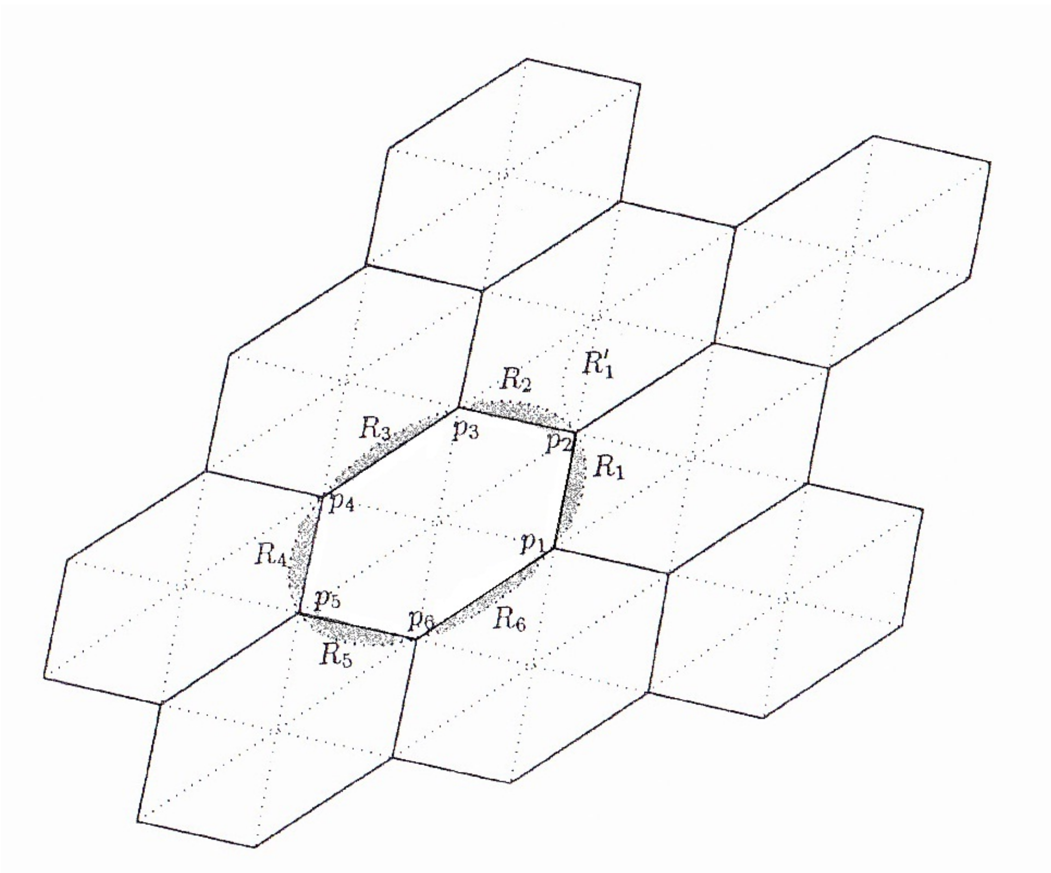
$A(p_3 p'_2 p_4) \leq A(p_1 p_2 p_3 p_4)$ és

$A(p_4 p'_6 p_5) \leq A(p_1 p_4 p_5 p_6)$,

ezért $A(p_3 p'_2 p_4) + A(p_4 p'_6 p_5) \leq \frac{1}{2} A(C)$ és $d(C, \mathbb{R}^2) \geq \frac{2}{3}$.



Most következik a (ii) bizonyítása az 5.12. lemma segítségével. Nézzük a sík egy csempézését a H eltoltjaival, ahol H a C-be beírt affin reguláris hatszög. A $C\backslash H$ komponenseit jelölje $R_1, ..., R_6$.



Belátom, hogy

$$A(R_1) + A(R_2) \leq \tfrac{A(H)}{6}.$$

Jelölje R_1' jelöli az R_1 p_2-re tükrözött képét. Mivel van C-nek támaszegyenese p_2-ben, így fenáll $R_1' \cap R_2 = \emptyset$ és mindkettő területét tartalmazza egy kis háromszög, amely a H hatszög területének egyhatoda. Hasonlóan

$A(R_i) + A(R_{i+1}) \leq \frac{A(H)}{6}$ minden i-re $(1 \leq i \leq 6)$;

ezért $\sum_{i=1}^{6} A(R_i) \leq A(H)/2$.

Ez azt jelenti, hogy $d(C, \mathbb{R}^2) = \frac{A(C)}{A(H)} = \frac{A(H) + \sum_{i=1}^{6} A(R_i)}{A(H)} \leq \frac{3}{2}$.

$\square$

6. Fejes Tóth László tétele egybevágó konvex lemezek pakolásáról, fedéséről

A fejezet első részében a konvex lemezek elhelyezésének sűrűségének alsó és felső sűrűségét definiálom, majd Fejes Tóth László konvex lemezek pakolásáról, fedéséről szóló tételeit mondom ki és bizonyítom.

6.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ...\}$ konvex lemezek egy családja a síkon és legyen D a sík egy részhalmaza. A $\mathcal{C}$-t a D egy* fedésének *nevezzük, ha $\bigcup_i C_i \supseteq D$. Másrészt, ha $\bigcup_i C_i \subseteq D$ és semelyik kettőnek nincs közös belső pontja, akkor $\mathcal{C}$-t a D egy* pakolásának *nevezzük.*

Ha D korlátos, Jordan-mérhető tartomány, akkor a $\mathcal{C}$ körelhelyezés sűrűsége D-re vonatkozóan

$$d(\mathcal{C}, D) = \frac{\sum_i A(C_i)}{A(D)},$$

ahol a szumma befutja azon i-ket, amelyekre $C_i \cap D \neq \emptyset$. Ha D az egész sík, akkor definiálunk egy alsó és egy felső sűrűséget:

$$\overline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) = \limsup_{r\to\infty} d(C, D(r)) \text{ és}$$

$$\underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) = \liminf_{r\to\infty} d(C, D(r)),$$

ahol $D(r)$ jelölje az r sugarú körlemezt, amelynek középpontja az origó.

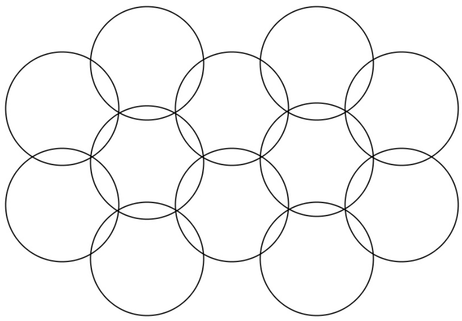
Ha ez a két szám megegyezik, akkor a közös értéket nevezzük a $\mathcal{C}$ körelhelyezés sűrűségének *a síkon és* $d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2)$*-el jelöljük.*

A múlt század végén Thue bebizonyította, hogy az egybevágó körökkel való pakolás sűrűsége kisebb, mint $\pi/\sqrt{12}$, azaz

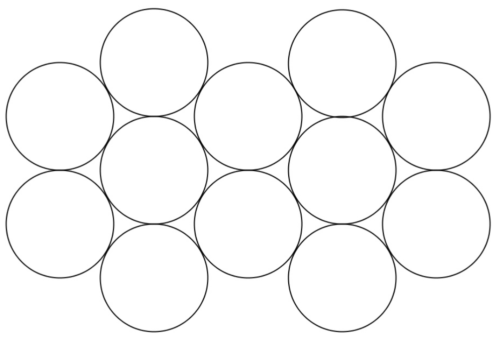
$$\overline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leq \pi/\sqrt{12}.$$

Jóval később Kershner bebizonyította, hogy az egybevágó körökkel való fedés sűrűsége nagyobb, mint $2\pi/\sqrt{27}$, azaz

$$\underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leq 2\pi/\sqrt{27}.$$



$d(C, \mathbb{R}^2) = \frac{2\pi}{\sqrt{27}}$



$d(C, \mathbb{R}^2) = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$

Kimondom Dowker két tételét bizonyítás nélkül, melyeket a Fejes Tóth László tételeinek bizonyításában felhasználok.

6.2. Lemma. *Legyen C egy konvex lemez a síkon. Minden $s \in \mathbb{Z}^+$, $s \geq 3$ jelölje $a(s)$ a C köré írható konvex s-szögek területének minimumát. Ekkor az $a(s)$ sorozat monoton fogyó és konvex, azaz $a(s+1) \leq \frac{a(s)+a(s+2)}{2}$, minden $s \in \mathbb{Z}^+$, $s \geq 3$.*

6.3. Lemma. *Legyen C egy konvex lemez a síkon. Minden $s \in \mathbb{Z}^+$, $s \geq 3$ jelölje $a(s)$ a C-be beírt konvex s-szögek területének maximumát. Ekkor az $a(s)$ sorozat monoton növő és konkáv, azaz $a(s+1) \geq \frac{a(s)+a(s+2)}{2}$, minden $s \in \mathbb{Z}^+$.*

6.1. Fejes Tóth László tétele rácspakolásról

6.4. Tétel. *Legyen H egy konvex hatszög és legyen $\mathcal{C}$ egy konvex lemez, jelölje P_6 a $\mathcal{C}$ köré írt minimális területű hatszöget. Ha a $\mathcal{C}$ lemez n egybevágó eltoltjának egy pakolását tekintjük a síkon, akkor*

$$n \leq \frac{A(H)}{A(P_6)}.$$

Az Euler formula egy ismert következménye az alábbi lemma.

6.5. Lemma. *Minden n pontú síkgráfnak legfeljebb $3n-6$ éle van.*

6.6. Lemma. *Legyen $C_1, ..., C_n$ nemátfedő konvex lemezek rendezett halmaza a konvex H hatszögben. Ekkor találunk nemátfedő konvex sokszögeket, legyenek $R_1, ..., R_n \subseteq H$ úgy, hogy $R_i \supseteq C_i$, minden i-re, és*

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \leq 6n,$$

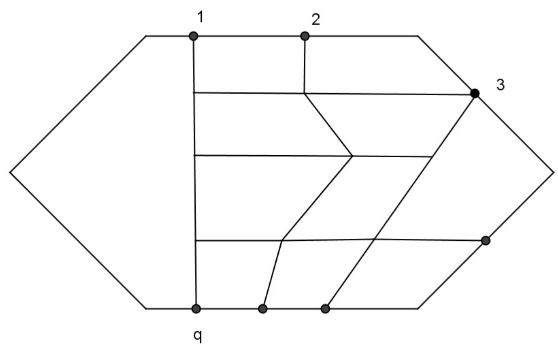
ahol s_i jelöli az R_i oldalainak számát.

A 6.6. lemma bizonyítása: Kezdjük el növelni a C_i halmazokat H-ban, úgy hogy továbbra is konvexek maradjanak és belsejük maradjon diszjunkt. Könnyen látható, hogy amikor egyiküket sem lehet tovább növelni, akkor az összes kibővített $C_i \subseteq R_i$ halmaz konvex sokszöget alkot. Nem szükséges, hogy kitöltsék az egész H-t.

Szerkesszünk egy $n+1$ csúcsú síkbeli gráfot, melynek csúcsai megfelelnek az $R_1, ..., R_n$ tartományoknak, hozzávéve a $\overline{H} = \mathbb{R}^2 \backslash H$ halmazt . Két csúcsot összeköt egy él, akkor és csak akkor, ha a megfelelő lapok érintik egymást.
Ha e jelöli az élek számát, akkor

$$3(n+1) - 6 \geq e \geq \tfrac{1}{2}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} s_i + q - 6),$$

ahol s_i azon R_i pontok foka, amik nincsenek a határon és q az osztópontok száma. Ennek átrendezésével kapjuk a lemmabeli egyenlőtlenséget.



A képen látható példán látszik, hogy q darab osztópont van, ekkor a határoló taromá-nyok száma q, ami azt jelenti, hogy a fokszám q, de ekkor 6 darab fokszámmal többet számoltunk, így a többletet le kell vonni. □

A 6.4. tétel bizonyítása: Tegyük fel, hogy $C_1, ..., C_n$ a $\mathcal{C}$ lemez egybevágó eltoltjainak egy pakolása H-ban és $R_i \supseteq C_i$ jelölje a fenti sokszögeket, ahol $1 \leq i \leq n$. Továbbá legyen P_s egy a $\mathcal{C}$ köré írt legkisebb területű s szög. Ekkor

$$A(H) \geq \textstyle\sum_{i=1}^{n} A(R_i) \geq \sum_{i=1}^{n} A(P_{s_i}).$$

Másrészt a 6.2. lemma alapján létezik egy monoton csökkenő konvex $a(x)$ függ-vény, hogy $a(s) = A(P_s)$ minden egész $s \geq 3$-ra. Ezért a 6.6. lemma miatt,

$$\sum_{i=1}^n A(P_{s_i}) = \sum_{i=1}^n a(s_i) \geq n \cdot a\left(\sum_{i=1}^n s_i/n\right) \geq n \cdot a(6).$$

□

Másszóval a 6.4. tétel szerint a pakolás sűrűsége

$$d(\mathcal{C}, H) \leq \frac{A(C)}{A(P_6)}.$$

6.7. Következmény. *Adott egy pakolás C egybevágó eltoltjaival a síkban, ekkor*

$$\overline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leq \frac{A(C)}{A(P_6)},$$

ahol P_6 jelöli a C köré írt minimum területű hatszöget. Speciálisan, ha C kör, akkor P_6 szabályos hatszög C körül, ezért

$$d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

6.2. Fejes Tóth László tétele rácslefedésről

6.8. Definíció. *A C_1 és C_2 konvex lemezek* keresztezik *egymást, ha $C_1 \backslash C_2$ és $C_2 \backslash C_1$ nem összefüggőek.*

6.9. Tétel. *Legyen H egy olyan konvex hatszög, amelyet fed C n darab egybevágó eltoltja, amelyek közül semelyik kettő nem keresztezi egymást. Ekkor*

$$n \geq \frac{A(H)}{A(p_6)},$$

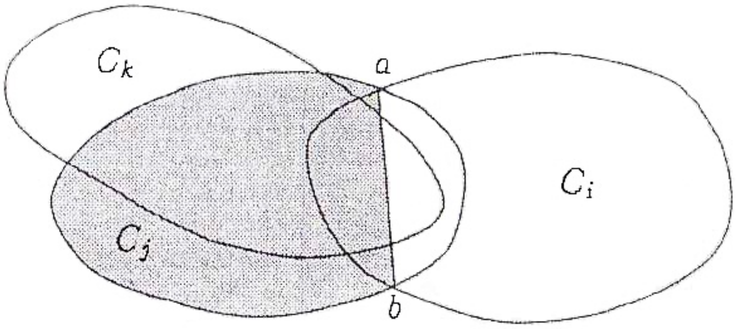
ahol p_6 jelöli a C-be beírt maximális területű hatszögét.

6.10. Lemma. *Legyen $C_1, ..., C_n$ nem keresztező konvex lemezek rendszere, amelyek fedik a konvex H hatszöget. Ekkor találhatunk nem átfedő konvex sokszögeket, $R_1, ..., R_n \subset H$ úgy, hogy $R_i \subseteq C_i$ $(1 \leq i \leq n)$, és amelyek teljesen lefedik a H-t, és*

$$\sum_{i=1}^n s_i \leq 6n,$$

ahol s_i jelöli az R_i oldalainak számát.

A 6.10. lemma bizonyítása: Tekintsük azon C_i, C_j lemez párokat, amelyek metszik egymást. Jelölje a és b a határukon lévő metszéspontokat. Csökkentsük a C_i és a C_j lemezeket úgy, hogy a halmazok az ab szakaszig tartsanak, ekkor kapunk két új lemezt C_i'-t és C_j'-t úgy, hogy $C_i' \cup C_j' = C_i \cup C_j$. A probléma a módszerrel az lehet, hogy az új rendszerben a lemezek egy része keresztezheti egymást.



El tudjuk kerülni ezt a nehézséget azzal a megjegyzéssel, hogy ha C_j' és C_k keresztezik egymást, akkor $C_i \cap C_k \subset C_i \cap C_j$. Így ha a fenti eljárást annál a (C_i, C_j) párnál kezdjük, melyek metszete minimális területű, akkor nem kerülhetünk bajba.
Ezzel az algoritmussal előállíthatjuk az $R_1, ..., R_n$ csúcsú nem átfedő konvex sokszögeket, azzal a tulajdonsággal, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} R_i = H$. A bizonyítás utolsó része követi A 6.6. lemma bizonyítását. Tehát szerkesszünk egy $n+1$ csúcsú síkbeli gráfot, melynek csúcsai megfelelnek az $R_1, ..., R_n$ tartományoknak, hozzávéve a $\overline{H} = \mathbb{R}^2 \backslash H$ halmazt . Két csúcsot összeköt egy él, akkor és csak akkor, ha a megfelelő lapok érintik egymást. Ha e jelöli az élek számát, akkor

$$3(n+1) - 6 \geq e \geq \tfrac{1}{2}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} s_i + q - 6),$$

ahol s_i azon R_i pontok foka, amik nincsenek a határon és q az osztópontok száma. $\square$

A 6.9. tétel bizonyítása: Legyen C lemez nem metsző, egybevágó eltoltjainak rendszere $C_1, ..., C_n$ és R_i, s_i jelöljék ugyanazt, mint a 6.6. lemmában. Továbbá legyen p_s egy a C-be beírt legnagyobb területű s-szög. Ekkor

$$A(H) = \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \leq \sum_{i=1}^{n} A(p_{si}).$$

Másrészt a 6.3. lemma szerint létezik egy monoton növő konkáv $a(x)$ függvény, hogy $a(s) = A(P_s)$ minden egész $s \geq 3$-ra. Ezért a 6.10. lemma miatt,

$$\sum_{i=1}^{n} A(p_{si}) = \sum_{i=1}^{n} a(s_i) \leq n \cdot a\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{n}\right) \leq n \cdot a(6) = n \cdot A(p_6).$$

$\square$

Más szóval a 6.9 tétel szerint a fedés sűrűsége

$$d(\mathcal{C}, H) \geq \frac{A(C)}{A(p_6)}.$$

6.11. Következmény. *Adott a sík egy fedése C egybevágó eltoltjaival, ekkor*

$$\underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \geq \frac{A(C)}{A(p_6)},$$

ahol p_6 jelöli a C köré írt legkisebb területű hatszöget. Speciálisan, ha C kör, akkor P_6 szabályos hatszög C körül, ezért

$$d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{27}}.$$

7. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Naszódi Mártonnak, hogy erre az érdekes témára felhívta figyelmemet és elvállalta a konzulensi teendőket . Köszönöm, hogy a konzultációk során türelmével, tudásával és szakmai tapasztalatával nagymértékben segítette munkámat, irányított a szakdolgozat felépítésének megalkotásában, és a néhol nehezebben megfogalmazott részeket korrigálta.

Irodalomjegyzék

[1] Pach, János; Agarwal, Pankaj K.: *Combinatoryal geometry*
Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization.
John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.