A motiválás lehetőségei az algebra tanításában

Szakdolgozat

Készítette: Sára Csenge

Matematika Bsc, tanári szakirány

Témavezető: Somfai Zsuzsa

ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Amikor szakdolgozati témámat választottam, az első szempont az volt, hogy amiről írni szeretnék, az kapcsolódjon a tanári szakirányhoz. A második pedig az, hogy olyan matematikai témakört foglaljon magába, amit szerettem tanulni az egyetemen és a középiskolában is. Így esett a választásom a motiválás a matematikában címre, melyet aztán leszűkítettem az algebratanításban való motiválásra.

Szakdolgozatomban arra a kérdésre keresem a válaszokat, hogy vajon mivel kelthetem fel a diákok érdeklődését a matematika tanításában, azon belül pedig az algebrában. Mindvégig feltételezem, hogy olyan gyerekek motiválásáról van szó, akik érdeklődnek a matematika iránt. Ez azért fontos, mert nagyrészt a matematika eszközeivel próbálom a motiválás lehetőségeit bemutatni és csak kisebb részben a pszichológiával. Az utóbbi persze nagyon lényeges, legfőképpen akkor, ha olyan gyerekekről van szó, akik alapvetően nem érdeklődnek a matematika iránt, vagy egyéb tanulási nehézségeik vannak.

Egyetemi tanulmányaim előtt gimnáziumban, reáltagozaton tanultam a matematikát. A tanórákon kívül jártam szakkörre, ahol olyan érdekes feladatokat oldottunk meg, amik az órai anyaghoz kapcsolódtak, de túlmutattak a középiskolai tananyagon. Egyfajta előkészítése volt ez az egyetemi matematikai tanulmányoknak. Ennek mintájára szeretném a szakdolgozatomat felépíteni. Vagyis a középiskolai tananyagból kiindulva szeretnék eljutni olyan egyetemi anyagrészekig, melyeket ugyan a teljesség igénye nélkül, de meg lehet mutatni az érdeklődő és egyetemre készülő diákoknak.

A középiskolai algebra tananyag az egyik legterjedelmesebb és legtöbbet taglalt anyagrész, amit a diákok elsajátítanak a matematikán belül. Természetesen nem a teljes algebra anyagot fogom ebből a szemszögből megvizsgálni, hanem annak egyes részeit. Ilyen például az egyenletek megoldása, melyen keresztül bevezethető a komplex számok fogalma; vagy az első-, másod-, illetve magasabb fokú egyenletek megoldásának lehetőségei.

Amikor megkérdeztem pár ismerősömet, hogy mire emlékeznek a középiskolai algebra tanulmányaikból, szinte mindenki azt válaszolta, hogy leginkább arra, mikor oldalakon keresztül vezettek le egy egyenletet, míg végül megoldásra jutottak. Valóban, a legtöbb nem matematikával foglalkozó ember emléke ez az algebráról. Nem is tévednek nagyot, hiszen az algebra a XIX. század közepéig az egyenletek megoldásával való foglalkozást, az egyenletek tudományát jelentette. Azonban ma már, aki a középiskola után is foglalkozik ezzel a tudományággal, az tudja, hogy ennél sokkal többről van szó. Olyan összefüggésekről, melyek a matematika más területein is nagy segítséget nyújtanak, mint például a geometriában, a numerikus analízisben, sőt más természettudományi ágakban is. Ezért tartom nagyon fontosnak, hogy már a középiskolában felhívjuk a figyelmet arra, hogy mire lesz szüksége a diákoknak a későbbiekben. Legyen ez akár egy definíció, egy tétel, vagy egy típusfeladat. Jó, ha látják, hogy nagyon hasznos amit tanulnak, mert ez is egyfajta motiváció lehet a számukra. Erről részletesebben a következő fejezetben lesz szó.

1. Motiválás

„Motiválás nélkül nincs tanulás.”[1]

„A tanulás motiválása nem más, mint egy kívánatos célállapot elérésére való késztetés, irányítás, koordinálás a tanuló tanulási tevékenységére való ösztönzése céljából.”[2] Vagyis a tanári munka legfontosabb feladata a tanulók számára a legmegfelelőbb motivációs segítség nyújtása, valamint a tudás hatékony közvetítése. Ezt különböző eszközökkel érhetik el a pedagógusok.

Először nézzük meg a tanítási órához fűződő motivációs tényezőket, melyek a tanórák szervezési formáiban rejlő motiválást jelentik, ami összefüggésben van a tanulói aktivitással. Ez alatt azt értem, hogy a tanítás megfelelő minőségével és az ebből következő eredményes tanulással lehet motiválni a tanulót. Vagyis:

- magának a tananyagnak kell aktivizáló tényezőnek lennie;
- érdemes alkalmazni a csoportmunkát és az önálló munkát, mert ezek megszervezése több lehetőséget ad a tanulók önállóságának, kezdeményezőkészségének kibontakozására, mely az alkotó aktivitás, a kreativitás kritériuma;
- mivel a gondolkodás aktivitása olyan feladatokkal kapcsolatban ébred fel a tanulókban, melyeket nem lehet az általuk addig megismert módokon megoldani - igényük lesz a feladat megoldásához vezető utak megismerésére, ezért érdemes minél több olyan feladatot feladni az órán, melyben új gondolatok mentén haladva lehet megoldani azokat;
- fontos tényező a probléma iránti érdeklődés felkeltése, melynek lényege, hogy a tanulókat a szituáció tartalmi oldala érdekelje;
- tanítási órán nagyon fontos szerepe van az optimális, a komplex értékelésnek, valamint a folyamatos visszajelzéseknek, melyek segíthetik a diákokat abban, hogy meg tudják állapítani, hol tartanak a tananyagban (optimális értékelés: nagyobb számban tartalmaz pozitív visszajelzést, de nem zárja ki a negatív visszajelzést; komplex értékelés: tudás, magatartás, személyiség értékelése együttesen);

---

[1] Réthy Endréné: Motiváció, tanulás, tanítás Miért tanulunk jól vagy rosszul?, Nemzetközi tankönyvkiadó, Budapest, 2003

[2] Réthy Endréné: Motiváció, tanulás, tanítás Miért tanulunk jól vagy rosszul?, Nemzetközi tankönyvkiadó, Budapest, 2003 (80.o.)

- továbbá nagy jelentősége van a tanítási óra légkörének, a tanár-diák viszony jellegének.

Ha ezek az alapvető tényezők meg vannak egy órán, akkor a tanár elérheti célját, mely nem más, mint hogy felkeltse a tanulók érdeklődését és ezt az állapotot folyamatosan ébren tudja tartani, fejlessze a folyamatos tanulás igényének kialakulását, és segítsen leküzdeni a tanulás ellen ható tényezőket. Ezek által tanár és diák közt létre jöhet aktív együttműködés, mely a közös munka hatékonyságának alapvető pillére.

Szakdolgozatom szempontjából, azonban hangsúlyosabb szerephez jut a tanítási anyag általi ösztönzés, melynek főbb elvárásai a következők:

- a feladatok struktúrája legyen változatos, jól követhető, férjen bele az óra- és a tanterv keretébe, valamint a nehézségi fok az adott csoportnak megfelelő legyen;
- fontos a tananyag vonzerejének kiaknázása, a téma „problémásítása", problémaszituációk tervezése;
- jelentős hangsúlyt kell fektetni a tanulandó ismeretek hasznosságának, használhatóságának tudatosítására;
- valamint az órára való felkészüléskor számba kell venni a várható tanulási-tanítási nehézségeket.

A fent említett pontokból látszik, hogy a tanároknak nagyon felkészültnek kell lenniük – mind pszichológiai-pedagógiai, mind szakmai szempontból - ahhoz, hogy minden alkalommal elérjék céljukat.

Ahhoz, hogy teljes képet kapjunk a motiválás és motiváltság közti kapcsolatról, meg kell említenem azt is, hogy a tanulásra való motiválás nem csak a tanár feladata. A közös munka az, ami által létre tud jönni a hatékony tanulás. Vagyis a diáknak is ugyanolyan kemény munka ez, hiszen a tanulás egy olyan önszabályozó folyamat, melyet a tanuló saját maga határoz meg. A tanuló maga alakítja ki saját motivációs struktúráját és itt jön képbe a tanári segítség jelentősége, mert a motivációs rendszer alakításában a gyereket motiválással kell segítenie a pedagógusnak.

Pszichológiailag fontos tényező a tanítás-tanulási folyamatban a külső motiváció arányainak fokozatos eltolása a belső motiváció felé. Ez a folyamat önszabályozó interakciókon keresztül valósul meg. Az önszabályozott tanulás lényege, hogy a tanuló önmagát motiválja és a tanulási tevékenységet önmaga végzi, hiszen „a belső motiváció jelentősége éppen az, amit tanul, s őszintén érdeklődik iránta."[3]

Ezekből az információkból azt a végső következtetést vonhatjuk le, hogy a megfelelő hatékonyságú tanulás elengedhetetlen eszköze a motiválás, melyből az következik, hogy a tanulási teljesítmény és a motiváció egymással kölcsönhatásban van.

[3] Réthy Endréné Dr.: Motiváció a tanítási órán, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978 (26.o.)

2. Egyenletek[4]

2.0.1. Egyenlet definíciója

Az *egyenlet* középiskolai definíciója szerint egy olyan kijelentő mondat, melyben egy, vagy esetleg több ismeretlen, változó található. A matematikai logika *kijelentés*eknek vagy *állítás*oknak (ítéletnek) nevezi azokat a kijelentő mondatokat, melyekről egyértelműen eldönthető, hogy igazak, vagy hamisak. Azt mondjuk, hogy a kijelentések, állítások vagy igaz, vagy hamis logikai értékkel rendelkeznek. Ezek alapján meghatározható, hogy mit értünk egyenlet alatt, megadhatjuk annak fogalmát.

1. Az egyenleteket tekinthetjük logikai függvényeknek, vagyis olyan hiányos állításoknak, melyek logikai értéke attól függ, hogy a változó(k) helyére mit helyettesítünk be. Az egyenlet megoldása során mindig arra kell törekedni, hogy ha x a változó, akkor az összes olyan x értéket megtaláljuk, melyekre az állítás igaz logikai értéket vesz fel. Minden egyenlethez hozzátartozik egy *alaphalmaz*, melyen a megoldásokat keressük. Ha az alaphalmazt a feladat elején nem adjuk meg, akkor a valós számok halmaza az alaphalmaz. Az egyenlet *értelmezési tartomány*ának nevezzük az alaphalmaz azon legbővebb részhalmazát, amelyen az egyenletben szereplő kifejezések értelmezettek. Az értelmezési tartományból azoknak az elemeknek a halmazát, melyekhez az igaz logikai érték tartozik, a logikai függvény igazsághalmazának nevezzük. A logikai függvény *értékkészlet*e pedig az {igaz, hamis} kételemű halmaz.

2. Emellett van egy szemléletesebb megfogalmazás is, melyben felhasználhatjuk a függvényeknél megismert fogalmakat. Az egyenleteket tekinthetjük úgy is, mintha az egyenlőség két oldalán álló kifejezés egy-egy függvény *(f, g)* hozzárendelési szabálya lenne. Az egyenlet megoldása minden olyan x szám, amelynél a két függvény egyenlő értéket vesz fel. Másképpen fogalmazva, ahol a két függvény helyettesítési értékei egyenlők, azt az egyenlet gyökeinek nevezzük: $f(x) = g(x)$.

[4] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika 9, Mozaik Kiadó-Szeged, 2005 (148-150.o.)
Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia: Matematika a gimnáziumok számára 9., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002 (111-115.o.)
Kardos Gyula: Algebra I., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962 (77-83.o.)

Az egyértelmű, hogy minden ilyen x érték csak az f, illetve a g függvény értelmezési tartományának a közös részében (metszetében) lehet. A két értelmezési tartomány metszetét az egyenlet értelmezési tartományának nevezzük.

Természetesen bármelyik szemlélettel nézzük az egyenleteket, a megoldásuk a fontos. Egy egyenletet megoldani azt jelenti, hogy meghatározzuk az egyenlet gyökeit, vagy megállapítjuk, hogy nincs gyöke az egyenletnek. Azonban az egyenletek megoldásakor nehézségekbe ütközhetünk, ezek miatt pedig lehetőleg olyan átalakításokat kell keresni, melyek nem változtatják meg az egyenletek megoldásait (gyökeit).

Az egyenletek megoldásának több módszerével is megismerkedik a diák középiskolai tanulmányai során. Ilyenek például a grafikus módszer, szorzattá alakítás, illetve a lebontogatás, más néven mérleg-elv. Ezekkel most részletesebben nem foglalkozom. Azt azonban meg kell említeni, hogy az egyenletek sokfélesége miatt nem létezik olyan módszer, melynek alkalmazásával minden egyenlet megoldható.

Azok a szakkifejezések, amiket még az egyenletek kapcsán, a legelején tisztázni kell, elengedhetetlenek ahhoz, hogy a diákok haladni tudjanak az anyagban. A matematika tanítás talán egyik legnehezebb feladata, hogy megtanítsa a tanulót a helyes szakkifejezések használatára. Meg kell tanulniuk olyan szavakat, fogalmakat, melyeket csak a matematikában használnak. Érteniük kell azt is, hogy miről van szó, mikor diszkriminánsról, együtthatóról és még rengeteg ehhez hasonló kifejezésről beszélnek. Ezért megemlítek még pár, az egyenletek kapcsán gyakran használt fogalmat.

2.0.2. Egyenletek osztályozása

Azt mondjuk, hogy egy egyenlet *egy-, két-, három-, … , n-ismeretlenes*, ha az egyenletben egy, két, három, … , n változó van.

Az egyismeretlenes egyenletek $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$ alakra hozhatók, ahol $a_0, a_1, ..., a_n \in$ **R**. Az ilyen egyenleteket összefoglaló néven *algebrai egyenlet*eknek nevezzük.

Az egyenleteket a változók fokszáma szerint is osztályozhatjuk, miszerint lehet *első-, másod-, harmad-, vagy magasabb fokú* az *egyenlet*. 0

2.0.3. Ekvivalens egyenletek

Azokat az egyenleteket, melyeknek gyökei megegyeznek, *ekvivalens* (egyenértékű) *egyenlet*eknek nevezzük. Továbbá azokat az átalakításokat, melyekkel valamely egyenletet vele ekvivalens egyenletté alakítunk, *ekvivalens átalakítás*oknak nevezzük.

Szakdolgozatomban csak az *n-edfokú algebrai egyenletek*kel foglalkozom, mely csak egy kis szelete az egyenletek témakörének. Azért nem térek ki a nem algebrai (például a trigonometrikus vagy exponenciális) egyenletekre, mert a korlátozott terjedelmi feltételek nem teszik lehetővé, hogy részletesen bemutassam az amúgy is nagyon tág témakört.

Ha logikusan szeretném felépíteni a *2. fejezet*et, akkor az elsőfokú egyenlettel kellene kezdenem, de dolgozatomban az elsőfokú egyenletekkel csak az egyenletrendszerek kapcsán foglalkozom. Ezért a *2. fejezet*et a másodfokú egyenlet bemutatásával kezdem.

Fontosnak tartom még az elején megemlíteni, hogy a *2. fejezet*ben csak az egyismeretlenes egyenletekkel foglalkozom és a *3. fejezet*ben esik szó a többismeretlenes egyenletekről.

2.1. A másodfokú egyenlet[5]

Azért tartom fontosnak a másodfokú egyenletek részletes tárgyalását, mert ennek kapcsán tovább lehet lépni a középiskolai tananyagból az egyetemire. Továbbá néhány apró „trükkel” a motiválás lehetőségeinek bemutatására is kísérletet teszek.

2.1.1. Másodfokú egyenlet definíciója

Az olyan egyenletet, melyben az ismeretlen előforduló legmagasabb hatványa a második hatvány, *másodfokú egyenlet*nek nevezzük.

2.1.2. Hogyan oldható meg egy másodfokú egyenlet?

A másodfokú egyenletek algebrai megoldásának egyik formája a *szorzattá alakítás*. Ha a 0-ra redukált, rendezett alakú egyenletben a másodfokú kifejezést két elsőfokú tényező szorzatára tudjuk felbontani, akkor az egyenletnek két valós gyöke létezik. A szorzattá alakítás olykor hosszadalmas lehet, ezért egy olyan megoldási módszerrel is megismerkednek a diákok, amelyet nagyon egyszerűen tudnak alkalmazni.

Az egyetemen egyik kedves tanárom azt mondta, hogy a matekosok alapvetően lusták, ezért szeretik a rövidebb megoldási módszereket. Természetesen ez nem azt jelenti, hogy nem kell ismerni azt az utat, amin keresztül megkapjuk a rövid és praktikus eljárásokat. Sőt, nagyon fontosnak tartom, hogy a diákok tudják, hogy „miből lesz a cserebogár”. Ezért is szükséges a másodfokú egyenlet megoldóképletének levezetése a középiskolában.

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet rendezett alakja a következő:

$ax^2 + bx + c = 0$,

ahol az a, b, c valós számok és $a \neq 0$.

A baloldalon álló kifejezésben emeljük ki a-t:

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0.$$

---

[2] Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia: Matematika a gimnáziumok számára 10., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 2003 (46-48.o.)

A második tényezőt egészítsük ki teljes négyzetté:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]=0,$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0.$$

A következő lépés a szögletes zárójelben álló kifejezés szorzattá alakítása:

1. Ha $-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}>0$, azaz $b^2-4ac<0$, akkor a szögletes zárójelben lévő kifejezést nem tudjuk szorzattá alakítani. Ekkor az egyenletnek nincs valós gyöke.
2. Ha $b^2-4ac=0$, akkor az egyenlet egyszerűbb lesz:

   $$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

   Ebből már látszik, hogy ennek az egyenletnek van megoldása:

   $$x=-\frac{b}{2a}.$$

   Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést írjuk fel szorzat alakban is:

   $$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0.$$

   A két elsőfokú tényező miatt ebben azt mondjuk, hogy két valós gyöke van az egyenletnek, és ez a két gyök egyenlő:

   $$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}\ \text{(kétszeres gyök).}$$

3. Ha $-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}<0$, azaz $b^2-4ac>0$, akkor a szögletes zárójelben lévő kifejezést írjuk fel két tag négyzetének különbségeként, és azt alakítsuk szorzattá. Mindkét tényezőből egy-egy gyököt kapunk.

   Ekkor

   $$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2,$$

   ezért egyenletünk:

   $$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=0.$$

A négyzetek különbségét szorzattá alakítjuk:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0,$$

$$a\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0,$$

ebből további átalakítással:

$$a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

Tudjuk, hogy $a \neq 0$, ezért a másik két tényezőt vizsgáljuk, az úgynevezett gyöktényezőket. Ezek egy-egy gyököt adnak. Az egyenlet két gyöke:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{4ac}}{2a},\;\; x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

A gyököket rövidebb alakban, összevonva szoktuk felírni:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Ezt a *másodfokú egyenlet megoldóképlet*ének nevezzük.

Mindhárom esetben a b^2-4ac kifejezés előjele a fontos. Ez az, ami meghatározza, hogy létezik valós gyöke az egyenletnek, vagy sem. Ezt a kifejezést a másodfokú egyenlet *diszkrimináns*ának nevezzük. Jele: D.

Tétel: *Az* $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ *másodfokú egyenletnek*

- *Két valós gyöke van:* $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$*, ha* $D=b^2-4ac$ *>0;*
- *Egy valós gyöke (egy kétszeres gyöke) van:* $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$*, ha* $D=b^2-4ac=0$*;*
- *Nincs valós gyöke, ha* $D=b^2-4ac$ *<0.*

A valós gyök szükséges és elégséges feltétele: $D \geq 0$*, vagyis az egyenletnek akkor és csak akkor létezik valós megoldása, ha* $D=b^2-4ac \geq 0$.

2.2. Komplex számok[6]

2.2.1. Hogyan lehet minél izgalmasabban bevezetni a komplex számokat középiskolában?

Fontos pedagógiai követelmény, hogy az új anyag feldolgozását megelőzze a problémából való kiindulás. Esetünkben ez a következő: tudjuk, hogy nem minden másodfokú egyenletnek van megoldása a valós számhalmazon, ekkor felmerülhet az a kérdés, hogy vajon létezik-e olyan számhalmaz, amelyben minden másodfokú egyenletnek van gyöke. A problémából való kiindulás mozgósítja a tanulókat a feldolgozásra kerülő anyag lényegének felismerésére és megértésére, elindítva a megoldást kereső gondolkodási folyamatot; belső, kereső aktivitást váltva ki bennük.

Középiskolában nem értelmezzük a negatív számból való négyzetgyökvonást. Azonban úgy gondolom, ha szakkörön azt mondjuk a diákoknak, hogy a másodfokú egyenlet gyökeire vonatkozó tétel utolsó pontjában megfogalmazottakat ne vegyük figyelembe, vagy, hogy a megoldást egy eddig ismeretlen halmazon értelmezzük, akkor bevezethetjük a *komplex szám* fogalmát. Ha a következőkben leírt módon bevezetjük és értelmezzük az i számot, attól kezdve létezik negatív szám négyzetgyöke. Így már tudják a tanulók, hogy ha a komplex számok halmazán oldanak meg egy másodfokú egyenletet, annak akkor is van gyöke, ha diszkriminánsa negatív. Ez elképzelésem szerint egy olyan kiegészítése a tananyagnak, melyet érdeklődéssel fogadnak a diákok. (Legalábbis, ha magamra visszaemlékszem, biztosan felkeltette volna az érdeklődésemet ennek a témának a megismerése.)

A komplex számok bevezetése kapcsán a tanár tudatosan tudja motiválni a diákokat oly módon, hogy felkelti az érdeklődésüket. Ezt véleményem szerint úgy tudja elérni, hogy az „új számok” bevezetésével a matematika egy teljesen új, a tanulók számára eddig ismeretlen részét tárja fel előttük. Továbbá, ha a diákok szemszögéből nézzük a komplex számokat, akkor azt a következtetést vonhatják le a tanulók, hogy a matematika egy olyan tudomány, mely teremt. Például „új számokat”. Ezekkel a „trükkökkel” kíváncsivá tudjuk tenni a diákokat, mely kellő motivációt ad számukra a további „felfedezésekhez”.

[6] Bárczy Barnabás: Algebra II., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962 (51-60.o.)
Sárközy András: Komplex számok példatár, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973
Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, Typotex , Budapest, 2007
Algebra I. alapszint, előadás jegyzet, 2007

Mint ahogyan azt a szakdolgozatom elején tisztáztam, végig érdeklődő diákok motiválásáról van szó. Képzeljünk el egy szakkört, ahol éppen egyenletek megoldásával foglalkozunk. Ekkor egy bevezető példa kapcsán térnék rá a komplex számok tárgyalására.

Vannak olyan valós együtthatós egyenletek, melyeknek a valós számok körében nem létezik gyökük. Vegyük az $x^2 = -1$ egyenletet. Tudjuk, hogy ennek a valós számok körében nincs megoldása, de ez még nem jelenti azt, hogy más halmazon sincsen. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan számhalmaz, amelyen van megoldása az $x^2 = -1$ egyenletnek. Ez pedig nem más, mint a valós számkör olyan bővítése, melyben a negatív számokból való négyzetgyökvonás is értelmezhető. Így építhető fel a komplex számok halmaza.

Ennek a törekvésnek a jegyében, nézzük újra az $x^2 = -1$ egyenletet. Most már megtehetjük, hogy mindkét oldalból négyzetgyököt vonunk. Ekkor az $x = \sqrt{-1}$ megoldást kapjuk.

A komplex számok halmazának felépítésekor arra törekszünk, hogy a valós számok kapcsán megismert műveleti tulajdonságok, azonosságok és összefüggések ne változzanak a bővítéssel. Tehát célunk az, hogy a bővebben értelmezett fogalom (komplex számok halmaza) minél inkább megőrizze a szűkebb fogalomrendszer (valós számok halmaza) tulajdonságait. Ezt a matematikában *permanencia elv*nek (állandósági elv) nevezik.

Motiváló lehet még a tanulók számára, ha elmondjuk, hogy az egyetemi algebra tananyag első, részletesen tárgyalt témaköre pont a komplex számok. Ezt meg kell említeni, mikor szóba kerülnek a komplex számok, mivel tudjuk, hogy a középiskolás diák fő motivációjává egyre inkább a jövőre való felkészülés válik, így annál érdekesebbnek találhatják ennek a témakörnek a megismerését.

A kevésbé érdeklődő csoportokban is be lehet vezetni a komplex számokat és motiválni lehet a diákokat elképzelésem szerint úgy, hogy a tanulóknak feladunk egy kis matematikatörténeti kutatómunkát. Utánajárhatnak a komplex számok történetének és következő alkalommal kiselőadás formájában be tudnak számolni „kutatómunkájukról” diáktársaiknak.

2.2.2. Komplex szám fogalma

A számfogalom az egész emberiség történelme során fejlődött. A XVI. században olasz matematikusok a harmadfokú egyenlet megoldásával kapcsolatban vetették fel, hogy érdemes a valós számok fogalmát tovább bővíteni. Bombelli az 1572-ben megjelent könyvében javasolta, hogy a negatív számok négyzetgyökét is tekintsék számnak. Ezeket a számokat elnevezte *képzetes szám*oknak. A képzetes számokat („új számokat”) csak a XVIII. században értelmezte kifogástalanul Gauss. Az ő munkássága révén terjedt el a „komplex szám” fogalma.

Definíció: *Az* $a+bi$ *alakú formális kifejezéseket komplex számoknak nevezzük, ahol a és b valós számok,* $i=\sqrt{-1}$*. Jele:* $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a,b\in R\}$.

Másképpen fogalmazva, azokat a számokat, melyek valós és képzetes részből állnak, komplex számoknak nevezzük.

A komplex számokat általában *z, w, u* $\in$ **C**-vel jelöljük, továbbá felírhatók $z=a+bi$ alakban, ahol $a=\mathrm{Re}(z)$ a z valós része, és $b=\mathrm{Im}(z)$ a z képzetes része.

Továbbá két komplex szám akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik külön-külön megegyeznek, vagyis az $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$, ahol *a, b, c, d* $\in$ **R** és $i=\sqrt{-1}$.

Definíció: *A* $z=a+bi$ *komplex szám konjugáltja a* $\bar{z}=a-bi$ *komplex szám. Vagyis ha két komplex szám csak képzetes részük előjelében tér el egymástól, akkor konjugált komplex számpárt alkotnak.*

Definíció: *Komplex szám abszolút értéke a* ($z\in\mathbf{C}$) $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$ *nemnegatív valós szám.*

2.2.3. Műveletek komplex számokkal

Legyen $u = a + bi$ és $w = c + di$ komplex számok, melyekkel a következő műveleteket végezhetők el:

Összeadás $u + w = (a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i = a' + b'i$

Kivonás
$$u - w = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di =$$
$$= a - c + bi - di = (a - c) + (b - d)i$$

Szorzás
$$u \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd =$$
$$= ac - bd + adi + bci = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$(i^2 = -1)$$

Ellentett $-u = -(a + bi) = -a - bi$

Osztás Legyen $z = a + bi$, $w = c + di$ és $x = u + vi$.

Nézzük meg részletesebben az osztást.

1. Komplex szám osztása valós számmal:

   $z = a + bi$ -t tudjuk $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$-val osztani

   $$\frac{z}{c} = \frac{a + bi}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} i.$$

2. Komplex szám osztása komplex számmal:

   Mivel már tudunk komplex számokkal összeadni, kivonni, szorozni, így célunk, hogy az eddig alkalmazott összefüggésekre támaszkodva jussunk el az osztásig. Vagyis a szorzás műveletét felhasználva a $\frac{z}{w} = w \cdot \frac{1}{z}$ alak felírására kell törekednünk.

   a) Ötlet: csináljunk reciprokot:

      A reciprokkal való szorzással azt szeretnénk elérni, hogy az átalakítás végén csak valós számmal kelljen osztani. Ezt a következőképpen érjük el:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2},$$ ahol $a^2+b^2\in$ **R**\ $\{0\}$.

Vagyis a nevező konjugáltjával bővítettük a törtet.

Példa: $\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-i}{1+1}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)i$

b) $w:z=x$,

vagyis a $z\cdot x=w$ megoldásait keressük *x*-re

$$z\cdot x=w$$
$$(a+bi)(u+vi)=c+di$$
$$(au-bv)+(udi+avi)=c+di$$
$$(au-bv)+(udi+avi)=c+di \Leftrightarrow au-bv=c, ub+av=d$$

2.2.4. Komplex számok tulajdonságai

Állítás: *Tetszőleges z, w, u* $\in$ ***C*** *számokra érvényesek az alábbiak:*

1. *összeadás kommutatív*

   $z+w=w+z$
2. *összeadás asszociatív*

   $(z+w)+u=z+(w+u)$
3. $\exists$ $0\in$ ***C***, *hogy* $z+0=0+z=z$
4. $\forall$ *z-nek* $\exists$ *ellentettje, azaz olyan w, melyre* $z+w=w+z=0$
5. *szorzás kommutatív*

   $zw=wz$
6. *szorzás asszociatív*

   $(zw)u=z(wu)$

   Bizonyítás: *Legyen* $z=a+bi$, $w=c+di$ *és* $u=x+yi$, *ekkor*

$$\left.\begin{array}{l}(zw)u=((a+bi)(c+di))(x+yi)=(ac+adi+bci-bd)(x+yi)=\\ =acx+acyi+adxi-ady+bcxi-bcy-bdx-bdyi\,*\\ z(wu)=(a+bi)((c+di)(x+yi))=(a+bi)(cx+cyi+dxi-dy)=\\ =acx+acyi+adxi-ady+bcxi-bcy-bdx-bdyi\,**\end{array}\right\}*=**\Rightarrow(zw)u=z(wu)$$

7. $\exists$ $1\in$ ***C***, *hogy* $z\cdot1=1\cdot z=z$

8. *disztributivitás*

$$(z+w)u = uz + uw$$
$$z(w+u) = zu + zw$$

Miután megmutattuk a diákoknak ezeket az alapvető tudnivalókat a komplex számokkal kapcsolatban, feladhatunk pár példát, melyeken keresztül értelmezni és gyakorolni tudják az eddig tanultakat.

2.2.5. Feladatok

1. Számítsuk ki i^n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ értékét! [7]

   Először írjuk fel i hatványait:
   $i^0=1$
   $i^1=i$
   $i^2=-1$
   $i^3=i \cdot i^2=i \cdot (-1) =-i$
   $i^4=i^2 \cdot i^2=(-1)^2=1$
   $i^5=i^4 \cdot i=1 \cdot i=i$
   $i^6=i^5 \cdot i=i \cdot i= i^2=-1$
   $i^7=i^6 \cdot i= (-1) \cdot i=-i \ldots$

   Megfigyelhetjük, hogy $i^0=i^4=1$, $i^1=i^5=i$, $i^2=i^6=-1$ *és* $i^3=i^7=-i$.
   Ha még tovább felírjuk i hatványait, akkor ugyanezt az ismétlődést vehetjük észre.
   Most meg kell vizsgálnunk, hogy milyen gyakran ismétlődnek $1, i, -1, -i$.
   Észrevesszük, hogy a 4-gyel való maradékos osztás az, ami közös 0 és 4, 1 és 5, 2 és 6, 3 és 7 között. Ugyanis a 0 és a 4 4-gyel osztva 0 maradékot, az 1 és az 5 4-gyel osztva 1 maradékot, a 2 és a 6 4-gyel osztva 2 maradékot, a 3 és a 7 pedig 4-gyel osztva 3 maradékot ad és így tovább.
   Ebből megállapíthatjuk, hogy
   $i^n=1$, ha n 4-gyel osztható;
   $i^n=i$, ha n 4-gyel osztva 1 maradékot ad;

[7] Sárközy András: Komplex számok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973 (38.o.)

$i^n = -1$, ha n 4-gyel osztva 2 maradékot ad;

$i^n = -i$, ha n 4-gyel osztva 3 maradékot ad.

2. Számítsuk ki i^{2010} értékét!

Az előző feladatból tudjuk, csak azt kell megnéznünk, hogy a 2010 4-gyel osztva milyen maradékot ad. Ha elvégezzük a maradékos osztást, megkapjuk, hogy 2010 4-gyel osztva 2-t ad maradékul. Tehát $i^{2010} = -1$.

3. Írjuk fel az
   a) $1+2i$
   b) $-2-3i$
   c) $-2i$

   komplex számok konjugáltjait![8]

   a) $\overline{1+2i} = 1-2i$
   b) $\overline{-2-3i} = \overline{-2+(-3)i} = -2-(-3)i = -2+3i$
   c) $\overline{-2i} = \overline{0+(-2)i} = 0-(-2i) = 2i$

4. Végezzük el a kijelölt műveleteket![9]

   a) $(2+4i)+(6i-2i) = (2+6)+(4-2)i = 8+2i$
   b) $(5-4i)-(3+i) = 5-4i-3-i = (5-3)-(4+1)i = 2-5i$
   c) $(5-2i)3i = 5\cdot 3i - 2i\cdot 3i = 15i - 6i^2 = 15i - 6\cdot(-1) = 6+15i$

   Minden tagot minden taggal megszorzunk.

   d) $\dfrac{4+3i}{1+2i} = \dfrac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{4+3i-8i-6i^2}{1-(2i)^2} = \dfrac{10-5i}{1+4} = \dfrac{10-5i}{5} = 2-i$

   Osztásnál a nevező konjugáltjával bővítjük a törtet.

[8] Sárközy András: Komplex számok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973 (35.o.)

[9] Sárközy András: Komplex számok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973 (36-37.o.)
Bárczy Barnabás: Algebra II., Műszaki Könyvkiadó, 1962 (54.o)

e)
$$\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\frac{(2-i)i}{5i\cdot i}=\frac{3+6i+4i+8i^2}{3^2+4^2}+\frac{2i-i^2}{5i^2}=$$
$$=\frac{3+10i-8}{25}+\frac{2i+1}{-5}=\frac{-5+10i}{25}-\frac{1+2i}{5}=\frac{-5+10i-5-10i}{25}=\frac{-10}{25}=-\frac{2}{5}$$

Először a nevező konjugáltjával bővítjük a törtet, majd közös nevezőre hozunk, és végül számolunk.

5. Oldjuk meg az $x^2+3x+4=0$ valós együtthatós egyenletet a komplex számok halmazán!

Ez elképzelésem szerint azért szerencsés feladat középiskolában, mert a másodfokú egyenlet megoldóképletét „álmukból felkeltve is” tudják a diákok. Így a megoldóképletbe való behelyettesítés után már csak a negatív számból való négyzetgyökvonásra kell odafigyelniük a tanulóknak, mert csak onnantól kezdve kell *i*-vel dolgozniuk.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{(-1)\cdot 7}}{2}=$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{i^2\cdot 7}}{2}=\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$$

6. Oldjuk meg az $x^2+\left(2+2i\right)x-\left(3+2i\right)=0$ komplex együtthatós egyenletet a komplex számok halmazán![10]

A megoldóképlet a komplex számok halmazán is ugyanúgy alkalmazható, mint a valós számhalmazon, ezért ebben a feladatban is az 5. feladathoz hasonlóan csak a másodfokú egyenlet megoldóképletébe kell behelyettesíteni. A különbség csak annyi, hogy a műveleteket nem valós, hanem komplex számokkal kell elvégezni.
Legyen $a=1,\ b=2+2i$ és $\mathrm{c}=-(3+2\mathrm{i})$, ekkor

[10] Algebra I. alapszint, gyakorlat, 2. feladatsor, 2007

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$
$$=\frac{-(2+2\mathrm{i})\pm\sqrt{(2+2\mathrm{i})^2-4(-3-2\mathrm{i})}}{2}=\frac{-2-2\mathrm{i}\pm\sqrt{4+8\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2+12+8\mathrm{i}}}{2}=$$
$$=\frac{-2-2\mathrm{i}\pm\sqrt{4\mathrm{i}^2+16\mathrm{i}+16}}{2}=$$

észrevesszük, hogy a négyzetgyök alatt teljes négyzet áll, tehát

$$=\frac{-2-2i\pm\sqrt{(2i+4)^2}}{2}$$
$$x_1=\frac{-2-2i+2i+4}{2}=1 \text{ és } x_2=\frac{-2-2i-2i-4}{2}=-3-2i$$

Az ellenőrzést sem szabad elfelejteni. Helyettesítsük be x_1-et és x_2-t az eredeti egyenletbe. Miután behelyettesítettünk, látjuk, hogy mindkét szám jó megoldásnak bizonyul. Ekkor azt mondjuk, hogy az $x^2+(2+2i)-(3+2i)=0$ egyenletet gyökei az $x_1=1$ és $x_2=-3-2i$ komplex számok.

A komplex számokról természetesen sokkal több mindent tanítanak az egyetemen, de célom elsősorban az volt, hogy érdeklődő középiskolásoknak összeállítsak egy olyan egyetemi anyagrésszel kibővített fejezetet, melyet véleményem szerint nem olyan nehéz megérteni.

A feladatok megoldásai nem igényelnek különösebb önálló gondolatot. A megismert eljárások megértését ellenőrzik, valamint az algoritmikus készséget fejlesztik. Erre a készségre nagyon nagy szükség van, hiszen az algoritmikus gondolkodás a matematikai képességek egyik általános összetevője. Szükséges ahhoz, hogy egy diák eredményes legyen matematikából és fejlődni tudjon (ahhoz viszont nem elegendő, hogy alkotó matematikussá váljon).

A motiválás szempontjából is fontos szerepe van az algoritmikus módszerrel megoldható feladatoknak. A diák megtanulja, hogyan kell megoldania egy típusfeladatot, azt is tudja, hogy miért úgy kell megoldania azt. Ez utóbbi azért nagyon fontos, mert nem elég, hogy egy begyakorolt műveletsort hajtson végre a tanuló, hanem értenie kell annak menetét. Ha érti és tudja alkalmazni a tanultakat, „könnyen” sikerélményhez juthat. A sikerélmény pedig akadályokat leküzdő, kitartó tevékenységre sarkallja az emberek többségét. Továbbá, ha a tanulót a szakkörön képességeinek megfelelő feladatokkal *jutalmaz*zuk, akkor ezen feladatok elvégzésének következtében tanulása fokozható, munkája intenzívebbé válik. Ez állandó elégedettség érzést vált ki a diákban, mely a legmegbízhatóbb folyamatos motivációs forrás. „A jutalmazás a tanulás motorja" /Hull/

Az általam használt *jutalom/jutalmazás* kifejezést pontosítani szeretném. A középiskolásokban a külső motivációról -ami lehet szülő, tanár, diáktársak- áttevődik a hangsúly a belső motivációra. Ez azért nagyon fontos, mert az eredmény elérésére törekvő motivációhoz az önmotiváció kifejlődésére van szükség. Ezáltal a feladat elvégzése öröméréshez juttathatja a diákot, mely még nagyobb fejlődés hajtóerejévé válhat.

Pedagógiai szempontból a kezdetekkor (általános iskola) fontos szerepe van a jutalmazásnak, mely által a diák meg tudja ítélni saját sikereit, illetve hibáit. A kezdeti jutalmazástól azonban később (középiskola) lépésenként el kell jutni odáig, hogy a tanulónak az önmaga által felállított szint elérése jelentse a jutalmat. Életkori/fejlődéslélektani sajátosságuknak köszönhetően fontossá válik számukra, hogy ami iránt érdeklődnek, és amivel a későbbiekben foglalkozni szeretnének, azzal kapcsolatban minél több információhoz jussanak és elsajátítsák azokat. Mikor a diák a tantárgy tartalma iránt érdeklődik, akkor közvetlen érdeklődésről van szó, közvetett érdeklődésről pedig akkor beszélünk, mikor a jövőbeli hivatásra készülés motívuma lesz az érdeklődés legfőbb oka.

2.3. Másodfokú egyenletre vezethető problémák

Ezt a kis kitérőt azért illesztettem bele a szakdolgozatomba, mert a művészettörténet a minor szakom. Úgy gondolom, hogy az is motiválóan hathat a diákokra, ha látják, hogy a matematika milyen sok területen van jelen, többek között a művészetben is. Ez talán azon tanulók érdeklődését is felkelti a matematika iránt, akik alapvetően humán beállítottságúak, vagy akik érdeklődnek a művészetek iránt. Elképzelésem szerint ez egy olyan témakör, amit például egy diáknap alkalmával lehetne megmutatni a tanulóknak. Az ötletet a Sokszínű matematika 10 tankönyv adta.

2.3.1. Bevezetésként nézzünk meg egy ókori feladatot

Adott egy 1 méter nagyságú szakasz. Ezt osszuk fel két részre úgy, hogy a kisebbik résznek a nagyobbikhoz való aránya megegyezzék a nagyobb résznek az eredeti szakaszhoz való arányával.

Legyen a hosszabbik szakasz hossza *x*. Ekkor a feladat szerint:

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Alkalmazzuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

A feladat szerint egy szakasz hosszáról van szó, így a feladat megoldása az $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ezt az $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ számot Φ-vel jelöljük és aranymetszésnek nevezzük.

Definíció: *Aranymetszésnek nevezzük egy szakasz két olyan részre bontását, melyek közül a kisebbik úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobbik az egészhez.*

Az aranymetszés egy olyan arányosság, mely a művészetben is megtalálható. Le Corbusier szerint a természetes arányérzék az, amely kitüntetett szerephez juttatja az aranymetszést. Már az ókorban is megfigyelhető ennek alkalmazása. Rájöttek, hogy az aranymetszéssel osztott távolságok kellemes hatást keltenek. A görögök szilárd matematikai alapokra helyezték építészüket. A Parthenon *(1. ábra)* erre a legszemléletesebb példa, ahol többek között az aranymetszés szabályaira támaszkodva építették meg a homlokzatot *(2. ábra).* A későbbi korokban is számos példát találunk arra, hogy a matematika segítségével születtek meg a legkiválóbb művészeti alkotások.

Miután ezt a bevezetőt elmondtuk a diákoknak, és ezzel felkeltettük az érdeklődésüket a téma iránt, fel lehet adni kutatómunkának például, hogy keressenek olyan alkotásokat, amelyeken az aranymetszés megtalálható.

Egy másik megoldás arra, hogyan tehetjük még izgalmasabbá számukra a másodfokú egyenletek témakörénél tárgyalt aranymetszés vizsgálatát: Vigyünk magunkkal olyan képeket, melyeken tudjuk, hogy megtalálható az aranymetszés. Adjuk ki feladatnak, hogy keressék meg az alkotásokon az aranymetszést és jelöljék be annak helyét *(3. és 4. ábra).* Ez a feladat szerintem kellő motivációt rejt magában, mégpedig azért, mert láthatják a diákok, hogy olyan területeken is megjelenik az algebra, ahol nem is gondolnák.

A bevezető feladatra visszatérve annyit szeretnék még elmondani, hogy a szöveges feladat megoldására a másodfokú egyenlet segítségével adtunk választ. Első lépésben el kellett dönteni, hogy a szöveg szerint mit választunk ismeretlennek, és az a többi mennyiséggel milyen kapcsolatban áll. Ezek alapján, már fel tudtuk írni az egyenletet. Végül ellenőriznünk kellett, hogy a feladat szövege alapján melyik érték lesz a helyes megoldás. Így hozható összefüggésbe az aranymetszés az algebrával.

2.4. A harmadfokú egyenlet[11]

2.4.1. A harmadfokú egyenlet megoldása

Először nézzünk olyan példákat, melyek megoldhatók a nélkül is, hogy a diákok ismernék a harmadfokú egyenlet megoldóképletét.

1. Vegyük az $x^3 - 8 = 0$ valós együtthatós harmadfokú egyenletet.

   Mindkét oldalhoz adjunk hozzá 8-at:
   $x^3 = 8$,
   vegyük észre, hogy a 8 a 2-nek harmadik hatványa:
   $x^3 = 2^3$,
   vonjunk köbgyököt mindkét oldalból:
   $x = 2$.
   Ennek az egyenletnek a megoldásához csupán elemi lépéseket kellett végrehajtani.

2. Oldjuk meg az $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ egyenletet![12]
   Emeljünk ki *x*-et
   $x(x^2 - 5x + 6) = 0$.
   Egy kéttagú szorzat akkor és csak akkor 0, ha vagy az egyik, vagy a másik tényezője 0, tehát $x = 0$, vagy az $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   Oldjuk meg a másodfokú egyenletet (akár a megoldóképlet, akár a szorzattá alakítás módszerével): $x_2 = 2, x_3 = 3$.
   Természetesen az ellenőrzésről sem szabad megfeledkezni. Helyettesítsük be x_1-et, x_2-t és x_3-at az eredeti egyenletbe. Az ellenőrzés során látjuk, hogy mindhárom szám megoldása az egyenletnek.

Vannak azonban olyan valós együtthatós harmadfokú egyenletek, melyeknél az előbbi eljárások nem vezetnek megoldásra. A másodfokú egyenleteknél láttuk, hogy van olyan eljárás, amivel minden másodfokú egyenlet megoldható a komplex számok

[11] Sárközy András: Komplex számok példatár, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973 (15-16.o.)
[12] http://www.mathematika.hu/viewpage.php?page_id=13

halmazán. Az a kérdés, hogy harmadfokú egyenletek esetében létezik-e ilyen „megoldóképlet”.

A XVI. században Scipione del *Ferro* felfedezte az $x^3 + px = q$ alakú harmadfokú egyenletek megoldási módját, majd tőle függetlenül *Tartaglia* is. Cardano Ars magna sive de regulis algebraicis (A nagy tudomány, azaz az algebra törvényeiről) című művében közismertté tette a harmadfokú egyenletek megoldását, ezért nevezték el *Cardano-képlet*nek a harmadfokú egyenletek megoldóképletét.

Mielőtt nekiállnánk a megoldóképlet levezetésének, ismét hívjuk fel a diákok figyelmét arra, amit a komplex számok kapcsán már megemlítettünk. Itt a következőkre gondolok: A XVI. században olasz matematikusok a harmadfokú egyenlet megoldásával kapcsolatban vetették fel, hogy érdemes a valós számok fogalmát tovább bővíteni. Ugyanis, ha olyan valós együtthatós harmadfokú egyenletet akarunk megoldani, melynek három valós gyöke van, akkor a Cardano-képlet alkalmazása arra vezet, hogy negatív számból kellene négyzetgyököt vonnunk (amit valósban maradva nem tudunk elvégezni). Ezért a valós számok halmazát bővíteni kell úgy, hogy a negatív (valós) számból vont gyöknek is mindig legyen értelme. Amint azt a *2.2. fejezet*ben láttuk, az így kapott halmaz a komplex számok halmaza. Tehát a komplex számok kialakulása és a harmadfokú egyenletek megoldóképlete közti kapcsolat nagyon szoros. Ha mindezeket elmondjuk a diákoknak, akkor a külön fejezetben tárgyalt részekről átfogó képet kaphatnak.

2.4.2. Cardano-képlet[13]

A Cardano-képlet levezetése elég hosszadalmas és bonyolult, ezért szakkörön is csak nagy körültekintéssel érdemes tárgyalni. Ha mégis megmutatjuk a teljes levezetést, akkor lépésenként alaposan el kell magyarázni, mit miért csinálunk és bizonyos részeknél pedig csak utalni kell arra, hogy ez egy nehéz része a levezetésnek, ezért nem fejtjük ki bővebben, csak megmutatjuk és el kell fogadniuk a diákoknak, hogy az egyik lépés következik a másikból.

[13] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, Typotex, 2007 (7-11.o. és 126-127.o.)

Az $ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \ (a \neq 0)$ alakú harmadfokú egyenletek megoldásánál az első lépés az, hogy megfelelő helyettesítéssel új ismeretlent vezetünk be. Minden harmadfokú egyenlet új ismeretlennel, új együtthatókkal átírható $x^3 + px + q = 0$ alakba – melyről tudjuk a matematikatörténetből, hogy sok próbálkozással jutottak el ehhez az átalakításhoz - a következő lépések segítségével:

Legyen az $x = y - w$.

Ezzel a helyettesítéssel hozzuk egyszerűbb alakra az $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ egyenletet.

Ahhoz, hogy x^2-es tag ne szerepeljen, a $w = -\frac{b}{3a}$ értéket kell választanunk. De a megoldásokat most nem kapjuk meg közvetlenül köbgyökvonással, mert az egyenletben benne marad az *x*-es tag. Annyit azért elértünk, hogy (az *a* főegyütthatóval való osztás után) az egyenlet $x^3 + px + q = 0$ alakú lesz alkalmas *p*-re és *q*-ra, amelyek az eredeti egyenlet együtthatóiból a négy alapművelet segítségével kifejezhetőek. Ennek az egyenletnek a megoldásaiból az eredeti egyenlet megoldásait megkaphatjuk $\frac{b}{3a}$ levonásával.

Következő lépésként igazolnunk kell, hogy az $ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \ (a \neq 0)$ egyenlet esetében az $y = x - \frac{b}{3a}$ az egyenlet olyan helyettesítése, ami eltűnteti az y^2 együtthatóját.

Számítsuk ki az $x^3 + px + q = 0$ egyenletben keletkező *p* és *q* értékét is.

Tehát elegendő ezt az új egyenletet megoldanunk. A megoldáshoz vezető ötletet az alábbi azonos átalakítás szolgáltatja: $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

Azaz $(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0.$

Ennél az ötletnél kell megemlítenem – amit a *2.4.2.* bevezetőjében is megtettem, hogy ez az ötlet egy olyan lépés, amelynél a sok próbálkozás vezetett célhoz.

Az $(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$ azonosság hasonlít a megoldandó egyenlet $x^3 + px + q = 0$ alakjához.

Ha sikerülne az *u* és *v* számokat úgy megválasztani, hogy a

$$\left.\begin{aligned} -3uv &= p \\ -(u^3 + v^3) &= q \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer teljesüljön, akkor $x = u + v$ biztosan az egyenlet megoldása lenne.

A továbblépéshez nézzük meg, hogy ha a és b valós számok, akkor az

$$\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ xy=b \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai éppen a $z^2-az+b=0$ egyenlet megoldásai. A

$$\left.\begin{array}{l} -3uv=p \\ -(u^3+v^3)=q \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerben u^3 és v^3összege $-q$, szorzatuk pedig, az első egyenletet köbre emelve, $\left(\frac{-p}{3}\right)^3$. Ezért u^3és v^3 a $z^2+qz-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ másodfokú egyenlet megoldásai. Ezt a másodfokú egyenletet megoldva u és v értéket köbgyökvonással állapíthatjuk meg. A számolást elvégezve az úgynevezett *Cardano-képlet*et kapjuk:

$$x=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Megmutattuk, hogy ha u és v olyan számok, melyekre $uv=-\frac{p}{3}$ és $u^3+v^3=-q$, akkor az $u+v$ szám biztosan megoldása az egyenletnek.

Vajon ezzel a képlettel megkaptuk az egyenlet mindegyik megoldását? A kapott gyök(ök) valóban megoldása(i) az egyenletnek? Ezen kérdésekre a következő tétel adja meg a választ, melyet elképzelésem szerint egyáltalán nem érdemes középiskolában megmutatni, azonban a tanárnak tisztában kell lennie vele.

Tétel: *Ha a Cardano-képletben szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk* $-\frac{p}{3}$ *legyen, akkor a képlet az egyenlet megoldását szolgáltatja, és az egyenlet mindegyik megoldása megkapható ezen a módon. A két köbgyöknek választhatóolyan u és v értéke, hogy* $uv=-\frac{p}{3}$ *és az egyenlet három gyöke* $u+v$, $\varepsilon u+\varepsilon^2 v$, $\varepsilon^2 u+\varepsilon v$, *ahol* ε *primitív harmadik egységgyök. E három szám között minden gyök annyiszor szerepel, amennyi a multiplicitása.*

Az ok, amiért nem középiskolában tárgyalandónak gondolom ezt a tételt, az a primitív egységgyök és a multiplicitás meghatározása.

2.4.3. Feladatok

1. Oldjuk meg az $x^3 - 12x + 16 = 0$ egyenletet a Cardano-képlet segítségével!

   Az $x^3 - 12x + 16 = 0$ valós együtthatós egyenlet $x^3 + px + q = 0$ alakú, így csak be kell helyettesítünk a képletbe:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{16}{2} + \sqrt{\left(-\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{6}{2} - \sqrt{\left(-\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{-8 + \sqrt{64-64}} + \sqrt[3]{-8 - \sqrt{64-64}} = \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-8} = 2\sqrt[3]{-8} = 2 \cdot (-2) = -4$$

Ha -4-et visszahelyettesítjük az eredeti egyenletbe, akkor látjuk, hogy biztosan gyöke annak. Azonban felmerül a kérdés, hogy létezik-e más megoldása.

Ha az $x^3 - 12x + 16 = 0$ egyenletet elosztjuk maradékosan $x + 4$-gyel, akkor egy másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldása megadja a további gyökeit az egyenletnek.

A polinomosztást a feladatban csak alkalmazom, mert terjedelmi okok miatt nincs lehetőségem a polinomok témakörére bővebben kitérni. (Saját középiskolai emlékeimet felidézve, tanárom egy feladat kapcsán mutatta meg az osztálynak a polinomosztást. A későbbiekben nem volt gondja senkinek annak alkalmazásával.)

$$\begin{array}{l}
x^3 - 12x + 16 : x + 4 = x^2 - 4x + 4 \\
\underline{-\left(x^3 + 4x^2\right)} \\
-4x^2 - 12x + 16 \\
\underline{-\left(-4x^2 - 16x\right)} \\
4x + 16 \\
\underline{-\left(4x + 16\right)} \\
0
\end{array}$$

Vagyis az

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$
$$(x^2 - 4x + 4)(x + 4) = 0$$

Egy kéttagú szorzat akkor és csak akkor nulla, ha vagy az egyik, vagy a másik tényezője nulla, tehát:

$$x + 4 = 0$$
$$x_1 = -4,$$

vagy

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x - 2)^2 = 0$$
$$x_2 = x_3 = 2.$$

Tehát az $x^3 - 12x + 16 = 0$ harmadfokú egyenlet megoldása $x_1 = -4$ és $x_2 = x_3 = 2$, melyet az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel ellenőrizhetünk.

2. Oldjuk meg az $x^3 - 21x + 20 = 0$ egyenletet a Cardano-képlet segítségével!

Mivel az $x^3 - 21x + 20 = 0$ egyenlet $x^3 + px + q = 0$ alakú, így csak be kell helyettesítenünk a Cardano-képletbe:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} =$$
$$= \sqrt[3]{-\frac{20}{2} + \sqrt{\left(-\frac{20}{2}\right)^2 + \left(-\frac{21}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{20}{2} - \sqrt{\left(-\frac{20}{2}\right)^2 + \left(-\frac{21}{3}\right)^3}} =$$
$$= \sqrt[3]{-10 + \sqrt{(-10)^2 + (-7)^3}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{(-10)^2 + (-7)^3}} =$$
$$= \sqrt[3]{-10 + \sqrt{100 - 343}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{100 - 343}} =$$
$$= \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}} =$$
$$= \sqrt[3]{-10 + 9\sqrt{3}i} + \sqrt[3]{-10 - 9\sqrt{3}i}$$

Ahhoz, hogy a pontos értéket meg tudják adni a diákok, ismerniük kellene a komplex számok trigonometrikus alakját, melyre szakdolgozatomban nem tértem ki. Ezért a fenti harmadfokú egyenlet megoldását csak ebben az alakban tudják felírni a tanulók.

3. Egyenletrendszerek[14]

Az általam választott utolsó témakör az egyenletrendszerek. Mivel túl sok tapasztalatom még nincs a tanítással kapcsolatban, ezért csak feltételezni tudom, hogy az egyenletrendszerek megoldásának gyorsaságát növelő, az algoritmikus készséget fejlesztő Gauss-elimináció szintén egy olyan része az egyetemi algebrának, melyet megmutathatunk a középiskolásoknak. Ennek oka, hogy az egyszerűbb feladatokat - mint ahogyan azt látni fogjuk – egy séma alapján könnyű megoldani.

A fejezetben nincs módom a mátrixszámításra vonatkozó részletek leírására, ezért csak a lineáris egyenletrendszerek Gauss-módszerrel való megoldásával foglalkozom.

3.1. Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek

Fontosnak tartom megemlíteni - még mielőtt bármibe belekezdenénk, hogy az egyenletek és az egyenletrendszerek alaphalmazának most a valós számokat tekintjük.

3.1.1. A lineáris algebrai egyenlet

Definíció: *Lineáris algebrai egyenleten olyan algebrai egyenletet értünk, amely (az ismeretlenekre nézve) elsőfokú, azaz rendezett alakjában egyetlen tagja sem tartalmazza két vagy több ismeretlen mennyiség szorzatát.*

Az *elsőfokú kétismeretlenes egyenlet* általános alakja $ax + by = c$, ahol $x, y \in \mathbf{R}$. Minden elsőfokú kétismeretlenes egyenletet végtelen sok *(x, y)* valós számpár elégít ki, vagyis az egyenletnek végtelen sok valós gyöke van.

[14] Kardos Gyula: Algebra I. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962 (98-115.o.)
Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia: Matematika a gimnáziumok számára 9., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002 (262-275.o.)
Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika 9, Mozaik Kiadó-Szeged, 2005

3.1.2. Az egyenletrendszer definíciója

Ha két egyenlettől azt kívánjuk, hogy egyszerre teljesüljenek, azt mondjuk, hogy ez a két egyenlet *egyenletrendszer*t alkot. Tehát két elsőfokú kétismeretlenes egyenlet *elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer*t alkot.

Egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni az ismeretleneknek azokat az értékeit, amelyek mindkét egyenletet kielégítik.

Az *elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer* általános alakja:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{aligned}\right\}$$,ahol x, y és $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ valós számok.

E két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásai azok az (x, y) valós számpárok, amelyek mindkét egyenlet megoldásai.

3.1.3. Középiskolai megoldási módszerek

A lineáris egyenletrendszerek megoldásához megfelelő módszereket kell keresnünk. Ezeket a módszereket csak felsorolás szintjén említem meg, mert amire részletesebben ki szeretnék térni az elképzelt szakkörön, és így a szakdolgozatomban az az, hogy az egyetemen milyen módszert tanítanak az egyenletrendszerek megoldására.

A középiskolai megoldási módszerek a következők:

1. Behelyettesítő módszer:

   A behelyettesítő módszert, amely az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölését jelenti, gyakran *Gauss-módszer*nek is nevezik.
2. Egyenlő együtthatók módszere
3. Grafikus módszer
4. Összehasonlító módszer

3.2. Lineáris többismeretlenes egyenletrendszerek

A három, vagy annál több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerek megoldása közben mindig arra kell törekednünk, hogy egy-egy ismeretlen kiküszöbölésével kevesebb ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerhez jussunk, tehát a lineáris többismeretlenes egyenletrendszereket a behelyettesítési módszerrel a legcélszerűbb megoldani.

A k egyenletből álló és n ismeretlent tartalmazó *lineáris többismeretlenes egyenletrendszer* általános alakja, amit ***-gal jelölök a későbbiekben:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{array}\right\}$$

Példa:[15]

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y + 6z = 8 \\ 2x + 2y + 5z = 11 \\ x + y - 3z = 11 \end{array}\right\}$$

Valamelyik egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent. Legyen ez az első egyenlet, melyből fejezzük ki y-t:

$$y = 8 - 3x - 6z$$

Ezt helyettesítsük be a második és a harmadik egyenletbe. A behelyettesítés után eggyel kevesebb ismeretlenünk lesz, és eggyel kevesebb egyenletből álló egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{array}{l} 2\mathrm{x} + 2(8 - 3\mathrm{x} - 6\mathrm{z}) + 5\mathrm{z} = 11 \\ \mathrm{x} + 8 - 3\mathrm{x} - 6\mathrm{z} - 3\mathrm{z} = 11 \end{array}\right\}$$

Rendezzük az egyenletrendszert a következő módon:

$$\left.\begin{array}{l} -4x - 7z = -5 \\ -2x - 9z = 3 \end{array}\right\}$$

[15] Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia: Matematika a gimnáziumok számára 9., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002 (274.o.)

Innen a tanult módszerek egyikével - legyen ez az egyenlő együtthatók módszere- fejezzük be az egyenletrendszer megoldását. A második egyenletet szorozzuk meg -2-vel:

$$\left.\begin{aligned} -4x-7z&=-5 \\ 4x+18z&=-6 \end{aligned}\right\}$$

Ezek összege:

$11z=-11$

$z=-1$

A kétismeretlenes egyenletrendszer első egyenletébe helyettesítsük be a $z=-1$-et, így ki tudjuk számítani az x-et:

$-4x+7=-5$

$x=3$

Az első egyenletből fejezzük ki az y-t:

$y=8-9+6=5$

Az egyenletrendszer megoldása tehát:

$x=3, y=5, z=-1$.

Jól látható, hogy ez elég hosszadalmas számolást igényel. A Gauss-kiküszöbölés bevezetésével, jóval gyorsabban eredményre jutunk.

3.2.1. Gauss-féle kiküszöbölés (Gauss-elimináció)[16]

A Gauss-elimináció segítségével tudjuk megadni a válaszokat a lineáris többismeretlenes egyenletrendszerek megoldásával kapcsolatban felmerülő kérdésekre, melyek a következők:

1. Mi a feltétele annak, hogy egy egyenletrendszer megoldható legyen?
2. Hány megoldása van egy egyenletrendszernek (ha létezik megoldása)?
3. Hogyan lehet az összes megoldást áttekinteni?
4. Milyen módszerrel juthatunk el az összes megoldáshoz?

A Gauss-kiküszöbölés során csupa olyan lépéseket hajtunk végre, melyek az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens egyenletrendszerre vezetnek.

[16] Freud Róbert: Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2007 ()

Definíció: *Ekvivalens egyenletrendszereknek nevezzük az olyan egyenletrendszereket, melyek megoldáshalmaza megegyezik.*

Ekvivalens átalakítási lépések:

1. lépés: Szabad az egyenleteket nem nulla számmal szorozni.
2. lépés: Szabad az egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet számszorosát.
3. lépés: Szabad az egyenletek sorrendjének cseréje.

A ***-gal jelölt egyenletrendszert egyszerűbben mátrix alakban tudjuk felírni, ahol az x_i, az + és az = jeleket elhagyhatjuk. Tehát a ***-ból képzett mátrix az a_{ij} együtthatókból és a jobb oldali konstansokból tevődik össze:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

A mátrix bal oldalán álló $k \times n$-es mátrix az egyenletrendszer együtthatómátrixa, a konstansokkal kibővített $k \times (n+1)$-es mátrix pedig az egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Az egyenletrendszernél alkalmazott ekvivalens átalakítási lépések a mátrixokra is érvényesek.

Ekvivalens átalakítási lépések mátrixokra:

1. lépés: Szabad valamelyik sort végigszorozni nem nulla számmal.
2. lépés: Szabad a sorhoz hozzáadni egy másik sor skalárszorosát.
3. lépés: Szabad sorokat felcserélni.

Példa: Nézzük az előző példát, melyet a behelyettesítés módszerével oldottunk meg. A táblán egymás mellett helyezném el a behelyettesítő módszerrel és a mátrixszá alakított egyenletrendszer Gauss-féle kiküszöböléssel való megoldását, hogy össze tudják hasonlítani a két módszert a tanulók.

$$\left.\begin{aligned} 3x + y + 6z &= 8 \\ 2x + 2y + 5z &= 11 \\ x + y - 3z &= 11 \end{aligned}\right\}$$

Ebből képezzünk kibővített mátrixot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & 11 \end{array}\right)$$

Jelöljük az első sort s_1-gyel a másodikat s_2-vel és a harmadikat s_3-mal.

Első lépésként válasszunk ki egy nem nulla számot a baloldalról és karikázzuk be! Így kapjuk a vezéregyest:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & 11 \end{array}\right)$$

A vezéregyes alatt és fölött mivel mindent ki akarunk nullázni, ezért minden sorból vonjuk ki a vezéregyes számszorosát, azaz $s_1 - 3 \cdot s_3$ és $s_2 - 2 \cdot s_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 15 & -25 \\ 0 & 0 & 11 & -11 \\ 1 & 1 & -3 & 11 \end{array}\right)$$

Az előző két lépést ismételve folytatjuk az eljárást. Válasszuk ki baloldalról a második sor harmadik elemét és karikázzuk be! Osszuk végig a sorát 11-gyel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 15 & -25 \\ 0 & 0 & 11 & -11 \\ 1 & 1 & -3 & 11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 15 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 11 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki a második sor számszorosát az első és harmadik sorból, vagyis $s_1 - 15 \cdot s_2$ és $s_3 + 3 \cdot s_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Válasszuk ki az első sor második elemét, karikázzuk be és osszuk le a sorát -2-vel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki a harmadik sorból az első sor számszorosát, azaz $s_3 - s_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

A bekarikázott elemek mutatják, hogy $x = 3$, $y = 5$ és $z = -1$.

Ha általában szeretnénk megfogalmazni, hogy a Gauss-elimináció milyen lépések egymásutánja, akkor a következőket mondhatjuk:

1. lépés: Egy nem nulla elemet kiválasztunk és bekarikázzuk. A sorát leosztjuk vele. Így kapjuk a *vezéregyes*t.
2. lépés: Az oszlopában a többi elemet kinullázzuk.
3. lépés: Az 1. és 2. lépéseket ismételjük. Arra nagyon kell figyelni, hogy új karikát új oszlopba és új sorba kell tenni (ahol nincs karika)! Ha már nem tudok karikázni, akkor megállok.

   Előfordulhat, hogy egy sor végig nulla (a jobboldal is), akkor kihúzzuk azt a sort és a megmaradt mátrixszal számolunk tovább.

   Egy másik eset, ha a baloldalon minden végig nulla, de a jobb oldalon nem. Ha ilyen sor keletkezik, akkor nincs megoldás. Az ilyen sort *tilos sor*nak nevezzük.
4. lépés: A megoldást úgy olvashatjuk le a mátrixról, hogy az első oszlop jelöli x_1-et, második x_2-t, harmadik x_3-at és így tovább. A mátrix baloldalán lévő számok pedig az egyenletrendszer gyökeit adják, a vonatkozó x_i-ekre.

3.2.2. Feladatok[17]

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

a)
$$\begin{aligned} -x+3y+3z&=2\\ 3x+y+z&=4\\ \underline{2x-2y+3z}&\underline{=10} \end{aligned}$$

Írjuk fel kibővített mátrix alakban az egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 4\\ 2 & -2 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

Válasszuk ki az első sor első elemét és osszuk le az első sort -1-gyel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1 & 4\\ 2 & -2 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

A vezéregyes alatti oszlopot nullázzuk ki:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -2\\ 0 & 10 & 10 & 10\\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right)$$

Válasszuk ki a második sor második elemét, karikázzuk be, majd osszuk le a számmal a sorát:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -2\\ 0 & 10 & 10 & 10\\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right)$$

Nullázzuk ki a második oszlopot a vezéregyes felett és alatt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

[17] Algebra 1. alapszint, gyakorlat 9-10. feladatsor, 2007 (55-57.o.)

Válasszuk ki a harmadik sor harmadik elemét, karikázzuk be és osszuk végig vele a sorát:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Nullázzuk ki a vezéregyes fölötti oszlopot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ebből az alakból már látszik, hogy $x = 1$, $y = -1$ és $z = 2$.

b) $$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 3 \\ x - y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

Írjuk fel az egyenletrendszert kibővített mátrix alakban, majd a Gauss-elimináció lépéseit alkalmazva fejezzük ki *x*-et, *y*-t és *z*-t. Ezeket a lépéseket az a) feladatrészhez képest formailag egyszerűbben le tudjuk írni a következő módon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{1.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right) \overset{2.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \overset{3.}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{4.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x = 1$

$y = -2$

$z = 1$

1. lépés: $s_2 - 2 \cdot s_3$ és $s_3 - s_1$;
2. lépés: $s_3 + s_2$;
3. lépés: $\frac{s_3}{-3}$;
4. lépés: $s_1 - s_3$ és $s_2 - s_3$.

A Gauss-elimináció során ismét algoritmikus lépéseket alkalmazunk, mely a komplex számoknál kitűzött feladatokkal kapcsolatban már felmerült. Nem szeretném ismételni önmagamat, ezért csak hivatkozok a *2.2.4. fejezetre*, ahol bővebben esett szó az algoritmikus készségről.

Összegzés

Több tankönyv és feladatgyűjtemény is segítséget nyújtott abban, hogyan építsem fel a dolgozatomban szereplő témaköröket. Eleinte nagyon nehéznek bizonyult a következetes, jól követhető felépítés létrehozása. Egyre több szakirodalommal megismerkedve és konzulensemnek köszönhetően, úgy érzem sikerült rendszereznem a középiskolában tanultakat és az azokhoz tartozó, számomra fontosnak megítélt egyetemi anyagrészeket.

A szakdolgozat készítése közben ébredtem rá arra, hogy mennyire fontos a „jó" tanári munka, amely rengeteg szakmai felkészülést és hozzáértést igényel. Saját tapasztalat híján csak feltételezni tudom, hogy a dolgozatban megfogalmazottak működőképesek lehetnek középiskolában.

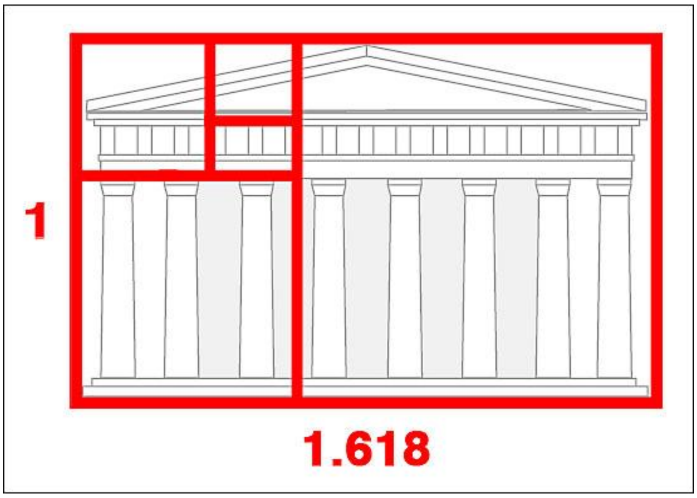
Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Somfai Zsuzsa Tanárnőnek, hogy tudásával és szakmai tapasztalatával nagymértékben segítette munkámat, főleg a szakdolgozat felépítésének összeállításában, és a nehézkesen, néhol ügyetlenül megfogalmazott részek korrigálásában. Továbbá barátaimnak is szeretném megköszönni, hogy informatikai tudásukkal hozzájárultak a képletek megszerkesztéséhez.

Melléklet

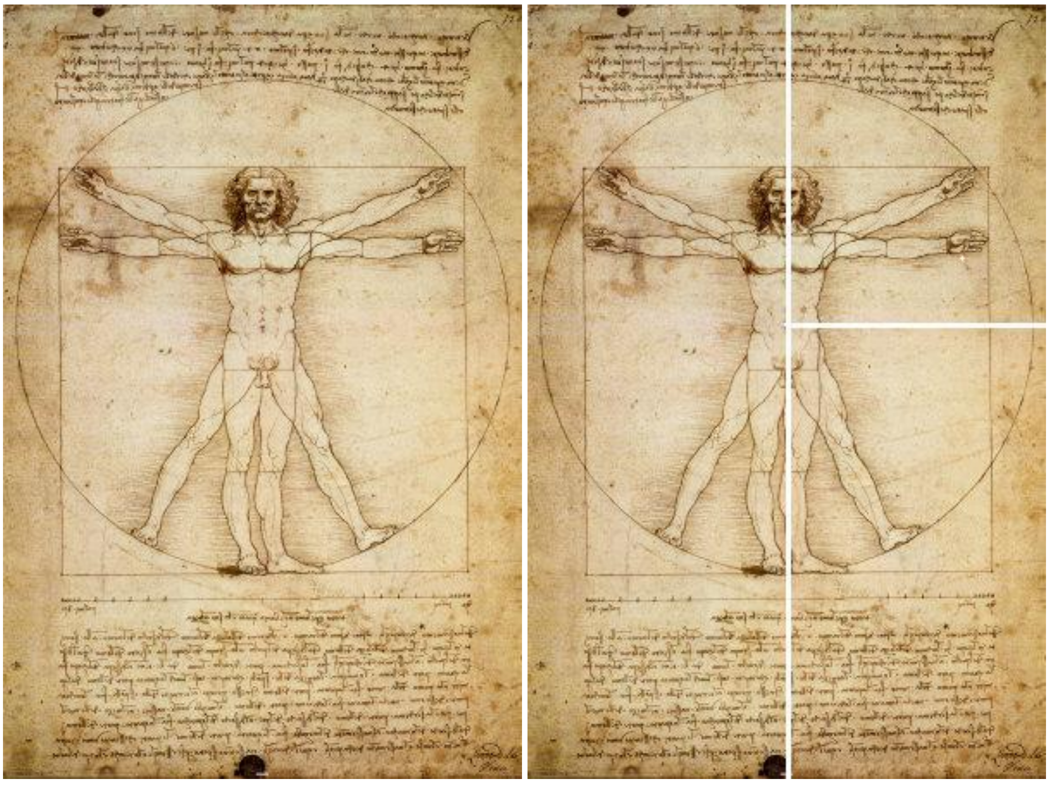
1. ábra (Parthenon)

2. ábra (Parthenon)



3. ábra (Leonardo da Vinci: Szent Anna harmadmagával)

4. ábra (Leonardo da Vinci: Vitruvian man)



Irodalomjegyzék

Középiskolai tankönyvek:

- *Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia*: Matematika a gimnáziumok számára 9-12., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002, 2003, 2004, 2004
- *Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István:* Sokszínű matematika 9-12, Mozaik Kiadó-Szeged, 2005, 2002, 2006, 2006

Egyéb felhasznált irodalom:

- Algebra I. alapszint előadás jegyzet, 2007
- Algebra I. alapszint, gyakorlat, feladatsorok, 2007
- *Freud Róbert:* Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2007
- *Kiss Emil:* Bevezetés az algebrába, Typotex , 2007
- *Sárközy András:* Komplex számok példatár, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973
- *Dr. Molnár József:* Az algebra és az elemi függvények tanítása, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967
- Pszichológia pedagógusoknak, Szerkesztette: *N. Kollár Katalin, Szabó Éva*, Osiris Kiadó, Budapest, 2004
- *Réthy Endréné Dr.:* Motiváció a tanítási órán, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978
- *Réthy Endréné:* Motiváció, tanulás, tanítás, Nemzetközi Tankönyvkiadó, Budapest, 2003
- *Richard R. Skemp:* A matematikatanulás pszichológiája, Gondolat, Budapest, 1975

Szakdolgozatomban a címsorok elején hivatkoztam azokra a szakirodalmakra, amelyeket felhasználtam, és amelyekből helyenként szó szerint idéztem. Ezeket nem jelöltem külön idézőjellel, mert a matematikailag helyes megfogalmazás elkerülhetetlenné teszi a pontos idézést.