Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Matematikatanítási és Módszertani Központ

ALGORITMUSOK A MATEMATIKAOKTATÁSBAN

Készítette: Varga Viktória

Matematika Bsc tanári szakirány

Témavezető: Fried Katalin

Főiskolai docens

Budapest, 2011

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS **3**

1. ALGORITMUS **4**

1.1. DEFINÍCIÓ 4

1.2. TÖRTÉNET, TÖRTÉNELEM 5

1.3. TÍPUSOK ÉS PÉLDÁK 6

1.4. JELLEMZŐK, TULAJDONSÁGOK 8

1.5. INFORMATIKA 9

1.6. MATEMATIKA 10

1.7. EGYÉB TUDOMÁNYTERÜLETEK 20

2. AZ OSZTÁS **21**

2.1. DEFINÍCIÓ 21

2.2. TÖRTÉNETE, TÖRTÉNELME 21

2.3. ESZKÖZÖK 23

2.4. AZ OSZTÁS TANÍTÁSA 26

2.4.1. Általános iskola 26

2.4.2. Középiskola 34

2.4.3. Egyetem 39

3. PROGRAMOK **47**

ÖSSZEFOGLALÁS **49**

MELLÉKLET **50**

IRODALOMJEGYZÉK **55**

BEVEZETÉS

Sokat gondolkodtam, hogy milyen témát válasszak szakdolgozatom megírásához a matematika sok szép és érdekes területei közül. Végül a választásom az algoritmusok – főként az osztás – elemzésére, illetve bemutatására esett, mert úgy gondolom, hogy a matematika megértésénél, elsajátításánál kulcsfontosságú szerepet tölt be az alapok átfogó ismerete, melyet jól reprezentálnak az algoritmusok.

A matematika, sőt az informatika és több tudományág elengedhetetlen alapja az algoritmusok fogalmának ismerete, használata. Az algoritmus fontosságát és nélkülözhetetlenségét bizonyítja, hogy az élet számos területén is találkozunk vele és alkalmazzuk akár tudatosan, akár tudtunkon kívül is. Az algoritmusok ismerete szoros összefüggésben áll a gondolkodásunk logikusságával, ugyanis az algoritmus tulajdonképpen a matematikai problémák, feladatok megoldásához vezető módszer.

Leendő tanárként nagyon fontosnak találom, hogy jól megtanítsuk a gyerekeket az alapvető fogalmakra, azok alkalmazására és ennek a témakörnek áttekintése úgy vélem, segítséget nyújthat ebben. Szakdolgozatom során megpróbálom bemutatni a módszert, hogy miképp lehet az alapok elsajátításán, megtanításán kívül felkelteni a tanulók figyelmét, érdeklődését a matematika iránt, illetve megszerettetni velük ezt a nagyon érdekes, szép tudományt. Nem könnyű feladat, ugyanis a diákok többsége a matematika szó hallatán nem a szépségére, érdekességre és hasznosságra, hanem a nehézségére gondol elsősorban és talán e miatt is, de nagyon kevesen szeretik.

Szakdolgozatomban először, az első fejezetben bemutatom az algoritmust, hogy valójában mit is jelent, hol és miként alkalmazható. Példák kíséretében, talán a legismertebbeket kiragadva igyekeztem szemléltetni fontosságát, elsősorban a matematika területén, majd kitérve a többi tudományágra, azok közül is főként az informatikára. A második fejezetben az osztással, mint művelettel és annak tanításával fogok foglalkozni. Legfőképp az osztási algoritmusok megjelenésével, példákon keresztül elemezve, bemutatva. Sorra veszem az általános és középiskolában tanultakat, hogy hol és miként jelennek meg osztási algoritmusok, majd az egyetemi szintet nézve, hogy ott hogyan alkalmazhatók. Szakdolgozatom végen egy program segítségével szemléltetem a polinomok osztási algoritmusát.

Célom, hogy rávilágítsak az algoritmusok fontosságára, valamint, hogy kialakuljon a diákokban az algoritmikus gondolkodási mód, mely hasznosságát nem lehet elégszer hangsúlyozni.

1. ALGORITMUS

Mi is az az **algoritmus**? Ez a kérdés alapvető fontosságú, elengedhetetlen fogalom a matematikában és az informatika területén, ugyanakkor nagy szerepe van a mindennapi életben, hiszen számtalanszor alkalmazzuk. Akármit is teszünk, legtöbbször logikusan felépítünk magunkban egy bizonyos sorrendet, melyet követünk.

„Akarva-akaratlan, tudatosan vagy spontán módon alakítunk ki naponta ismétlődő eljárásokat (algoritmusokat), amelyeket lépésenként hajtunk végre. Ezek a folyamatok általában nem tudatosak (bár jó volna, ha azok lennének). Viszont minden tervszerű, átgondolt tevékenységünket algoritmusok mentén éljük, végezzük. Az algoritmusok struktúrát, rendet visznek életünkbe, gondolkodásunkba, tevékenységünkbe."[1]

A matematikában sok feladat valamilyen algoritmus segítségével oldható meg. A tanítás során próbáljunk meg valamilyen rendet kialakítani a gyerekek gondolkodásában, vagyis tanítsuk meg őket az úgynevezett algoritmikus gondolkodásra, melynek segítségével általánosabbá tehetik a feladatok megoldásait és más példákon is tudják alkalmazni a későbbiek folyamán. Ami azt jelenti, hogy bizonyos mértékben a tanórákon törekedjünk a feladatok általánosítására, valamilyen sémára, ily módon hatékonyabbá téve az algoritmikus gondolkodás fejlesztését, ami egyben eszköze is a sikeres feladatmegoldásnak. Ez természetesen nem azt jelenti, hogy akármilyen feladatról legyen szó feltétlenül egy általánosított módszert kell preferálni és ezáltal háttérbe szorítani a gyerekek önálló megoldásait. Gondolhatnánk, hogy akkor ez ellentmondás, és tulajdonképpen „magolni" kell tanítani a diákokat, ám itt arról van szó, hogy magát a módszert kell elsajátítani és a használatára törekedni más és más problémák megoldásánál, nem pedig egy bizonyos algoritmust gyakorolni és azt alkalmazni mindenhol. Mindezek mellett pedig megmarad a tanuló kreatív gondolkodásmódja is.

1.1. Definíció

Az idegen szavak szótára szerint: „*Eredetileg Abdallah Mohamed Muza Alkhvarizmi arab matematikus számolási módszere, azóta minden* ***számolási eljárás****."*[2]

Az interneten: „***Számolási eljárás****, elemi műveletek lánca, szabályrendszer."*[3]

---

[1] Szántó Sándor: Az algoritmikus gondolkodás fejlesztése az általános iskolában

[2] Idegen szavak és kifejezések kéziszótára

[3] http://www.idegen-szavak.hu/keres/algoritmus

A matematikai kisenciklopédia, pedig így fogalmaz: *„Az olyan **eljárásokat**, amelyek segítségével a kívánt eredményt az adatoktól függetlenül véges sok lépésben meg tudjuk határozni, algoritmusnak nevezzük…természetesen nem minden eljárás algoritmus.”*[4]
Összefoglalva, a matematikából ered, de az informatika elterjedésével vált ismert fogalommá a köznyelvben is. Tulajdonképpen egy számolási módszer, eljárás melyet számos területen alkalmazunk, természetesen elsősorban a matematikában, illetve az informatikában.

1.2. Történet, történelem

Az algoritmus szó eredete nagyon érdekes. Az egyik leghíresebb arab matematikus, perzsa-arab tudós, Al-Hvárizmi, Muhammad Ibn Músza (800 előtt – 850?) több tucat csillagászati és matematikai művet hagyott hátra, közülük az egyik legjelentősebb címe: De Numero Indorum (A hindu számokról). *„A latinra fordítás felületessége miatti szótorzítás következtében a könyv címe előtt szereplő szerző neve Al-Hvárizmiről **algorithmus**ra változott.”*[5] Abban a korban még ezt a könyvet jelképezte az algoritmus szó. Ma már nem ezt jelenti a köznyelvben, sokkal kiterjedtebb, többrétű és egyben alapvető fogalom minden területen.
Egy nagyon fontos, talán az egyik legfontosabb matematikai fogalom is tőle származik, az **algebra**. Másik jelentős műve, mely az egyetlen, ami arab nyelven maradt fent a Kitáb al dzsabr valmukábala, a helyreállítás és az egyszerűsítés könyve. A dzsabr szó kiegészítést és helyretételt jelent, ami megfelel a mai egyenletrendezéskor a tagátvitelnek az egyik oldalról a másikra. A mukábala pedig az egyszerűsítést, összevonást jelenti. Később így alakult át a matematikus nevével együtt az al-dzsabr szó a mai algebrává. Akkoriban ez a matematika egyenletekkel foglalkozó ágát jelentette, mostanra már elterjedt a fogalom jelentése az algebrai struktúrákkal foglalkozó tudomány területére is.
Az első algoritmust Augusta Ada Byron (1791 – 1871), a költő lánya írta meg 1842-ben Charles Babbage (1792 – 1871) angol matematikus által tervezett gépre (Analytical Engine, analitikus gép), amely végül a kor fejletlenségének köszönhetően soha nem épült meg. Az algoritmus a Bernoulli-számok kiszámítására szolgált. Ada Byront tekintjük az első programozónak.

[4] Fried Ervin, Pásztor István, Reiman István, Révész Pál, Ruzsa Imre: Matematikai kisenciklopédia, 145.oldal
[5] Sain Márton: Nincs királyi út! Matematikatörténet, 387-388. oldal

1.3. Típusok és példák

Többféle algoritmus típust különböztethetünk meg. Léteznek egyszerű algoritmusok, feltételes algoritmusok és ismétléses algoritmusok.

Egyszerű algoritmus (szekvencia): más szóval lineáris, elemi lépéseket hajtunk végre egymás után. Ilyenkor a cél, hogy minél kevesebb lépésből jussunk el a feladat megoldásához. Csak a legszükségesebb műveleteket végezzük el, nem foglalkozunk az esetlegesen felmerülő kérdésekkel, feltételezzük, hogy nincs „probléma”. Ábrázolásnál az egyszerű algoritmus a folyamatábrán egymás utáni téglalapokból áll. Egy konkrét példa lehet egy autó beindításának lépései (kuplung – váltó – fék – gáz stb.).

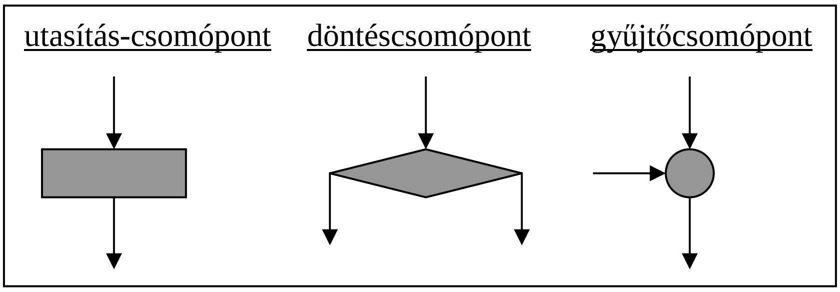
Feltételes algoritmus (elágazás, szelekció): akkor beszélhetünk ilyen algoritmusról, ha a feladat nem oldható meg egyszerű lépések segítségével. A megoldás lépései egy bizonyos problémához vezetnek, ahol több eset is felmerülhet. Egy úgynevezett elágazással állhatunk szemben. Ilyenkor a helyzettől függően választanunk kell, hogy melyik lépés a helyes. Erre példa lehet egy kártyajáték, ugyanis a játszma során sokszor találkozhatunk több különböző, lehetséges lépéssel.

Ismétléses algoritmus (ciklus, iteráció): előfordulhat, hogy az algoritmus során vannak lépések, amiket többször is végre kell hajtanunk. Magát a feladatot, amit végrehajtunk, ciklusmagnak nevezzük. Az informatikában három fajtáját különböztetjük meg. Számláló ciklus, amikor tudjuk, hogy konkrétan hányszor kell ismételnünk, vagy esetleg mettől meddig. Az elöltesztelős ciklusnál adott egy feltétel, amit először megvizsgálunk, és ha igaz, akkor hajtjuk végre az ismétlést. Harmadikként a hátultesztelős ciklusnál addig ismételünk, amíg a végén lévő feltétel igaz nem lesz. Erre legjellegzetesebb hétköznapi példa a főzés, hiszen sok lépés ismétlődhet.

Ezzel kapcsolatban az egyik legfontosabb **Böhm–Jacopini tétele**, mely szerint minden algoritmus felépíthető szekvencia, szelekció és iteráció segítségével. Az így felépített algoritmust strukturáltnak nevezzük.

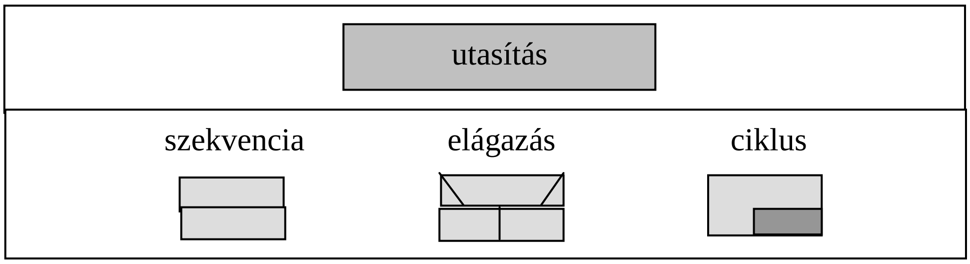
Tekintsünk két kiemelt eszközt, módszert, mely segítségével akár bonyolultabb algoritmusokat is le tudunk írni, így könnyebben áttekinthetővé válnak az olykor komplikáltabb lépések.

A. **Folyamatábra** – előnye, hogy jól követhető, hátránya azonban, hogy hosszabb algoritmusok esetén már kevésbé áttekinthető



B. Struktogram – előnye, hogy hasonlóan ábrázol, mint az előbb, de élek (nyilak) nélkül

Egyetlen alapeleme egy téglalap, mely az utasítást tartalmazza:



A későbbiek folyamán látni fogjuk, hogy miként alkalmazható – leginkább a folyamatábra – konkrét példákon. Ezáltal nem csak színesebbé, érdekesebbé, hanem hasznosabbá, jobban láthatóbbá is tesszük az algoritmusok megértését, áttanulmányozását.

Nézzünk egy konkrét példát folyamatábra segítségével.

Feladat: Adott N tanuló jegye, számítsuk ki a jegyek átlagát!

Megoldás: Elsőként mondatszerű leírással. Számlálós ciklust fogunk alkalmazni.

$Be : \mathrm{N}$

$S := 0$

$Ciklus\ i = 1\text{-}t\acute{o}l\ \mathrm{N}\text{-}ig$

$\quad Be : A(i)$

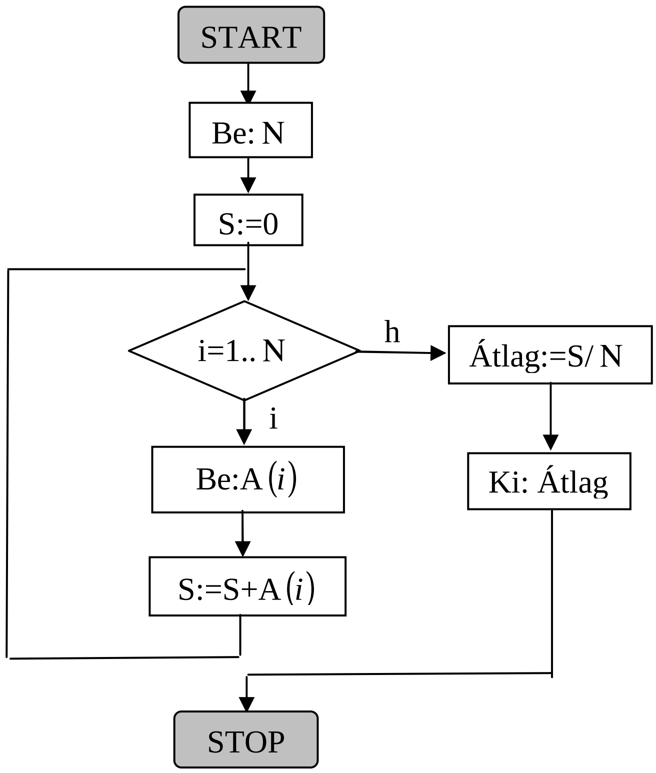
$\quad S := S + A(i)$

$Ciklus\ v\acute{e}ge$

$\acute{A}tlag := \frac{S}{\mathrm{N}}$

$Ki : \acute{A}tlag$

Most pedig lássuk a folyamatábrát:



Az életünk során számos algoritmussal találkozunk, még ha nem is vesszük észre. Tulajdonképpen szinte minden, amit teszünk, leírható algoritmusok, vagyis lépések egymás után következő sorozataként. Erre példa a hétköznapokban:

- egy recept leírása – mit milyen sorrendben, hogyan készítsünk el, pl.: Fűszerezd be a húst!

  Ismétléses algoritmus, azon belül is a hátultesztelős lehet például az az utasítás, hogy főzzük a húst, amíg meg nem fő. Itt akkor fejeződik be az ismétlés, ha megpuhult a hús. Számlálósra példa, ha azt írja a recept, aprítsunk fel 3 fej hagymát, akkor a hagyma aprítás menetét kell háromszor megismételni.
- egy bútor összeszerelése – milyen sorrendben rögzítsünk mit mihez, pl.: Csavard be a csavart a nyílásba!

  Nézzük itt az egyszerű algoritmust, vagyis feltételezzük, hogy nem vesszük figyelembe azokat az eseteket, amikor az összeszereléshez nincs eszközünk. Ilyenkor a megadott lépéseket alkalmazva egyszerű utasítások segítségével eljutunk az összeszerelt bútorhoz.
- útvonaltervezés – hova megyünk először, majd milyen irányba forduljunk és azután hová menjünk (esetleg mivel, milyen járművekkel), pl.: Menj 2 megállót a 7-es busszal!

Nagyon fontos, hogy csak akkor beszélhetünk ilyen esetekben algoritmusról, ha nem csupán egy feladatról van szó, hanem ismertek a lépések is, amelyeket egymás után elvégezve kapjuk a kívánt eredményt.

1.4. Jellemzők, tulajdonságok

- Az algoritmus lépésekből áll, a lépések sorozatát folyamatnak nevezzük.
- Minden lépésnek, amit egymás után alkalmazunk, egyértelműnek kell lennie.
- Lehetnek összetett lépések is.
- Absztrakció, vagyis egy kiválogatási eljárás, mely alatt azt értjük, hogy az adatok (tárgyak) azon tulajdonságait vesszük csak figyelembe, amelyek fontosak az algoritmus végrehajtásánál.
- Mindig van valamilyen célja, vagyis egy változás történik a végrehajtás során.
- Bemenő adatokat használ fel.
- Kimenő adatokat hoz létre.
- Biztosítania kell, hogy a feladat véges számú lépésekben megoldható legyen.

- Minél rövidebb idő alatt eljuthassunk a kívánt megoldáshoz, vagyis hatékonynak kell lennie.
- Megtervezésnél figyelni kell, hogy „elronthatatlan” legyen.

Ábrázolási módjai:

- Folyamatábra
- Struktogram
- Jackson diagram
- Mondatszerű leírás

Ezek közül kettőt fent ismertettem. A továbbiakban még bemutatom a folyamatábrát és a mondatszerű leírást konkrét matematikai példákon is.

1.5. Informatika

Az elméleti informatika és a *számítástudomány* foglalkozik az algoritmusok vizsgálatával. Ebbe beletartozik az algoritmusok időigénye, tárigénye, melyet pedig külön terület vizsgál, a *bonyolultságelmélet*. Az algoritmusok futásának befejeződését és az eredményes véget-érést, pedig a *kiszámíthatóságelmélet* tárgyalja. E két terület alapja az *automaták és formális nyelvek elmélete.* Azért érdemes elsősorban ezeket a tudományterületeket ismerni, mert nyilvánvalóan nem kezdünk el megoldani egy problémát, ha tudjuk, hogy megoldhatatlan. Ezenkívül, ha esetleg a feladatra nagyon nehéz pontos megoldást adni, akkor megelégszünk egy közelítő értékkel.

Az absztrakt gépek adnak választ az úgynevezett kiszámíthatósági problémára, vagyis, hogy egy feladat megoldható-e véges sok lépésben, azaz megoldható-e algoritmikusan. Elsőként 1936-ban Alan Turing angol matematikus definiált ilyen gépet, egy absztrakt automatát, az úgynevezett Turing-gépet. Ezenkívül megfogalmazta azt a nézetet, mely szerint a Turing-géppel kiszámítható függvények megegyeznek az algoritmikusan kiszámítható függvényekkel, valamint a Church által az 1930-as években megalkotott λ-kalkuluson belül a λ-definiálható függvényekkel. Később próbálkoztak olyan modelleket definiálni, melyek nagyobb számítási erővel rendelkeznek (Markov–algoritmusok), de nem sikerült. Ez is alátámasztja a Church–Turing tézist, mely szerint a kiszámíthatóság különböző matematikai modelljei mind az effektíven kiszámítható függvények osztályát definiálják. Vagyis egy probléma kiszámítható, ha van hozzá egy megfelelően programozott Turing-gép és ez fordítva is igaz.[6]

[6] Dr. Gazdag Zsolt: Számításelmélet, órai jegyzet, Szelezsán János: Fejezetek a matematikából I-II. (Számítástechnikusoknak) (45. oldal alapján)

Az informatika oktatását, azon belül elsősorban a programozást, legyen szó akár középiskolai vagy egyetemi vonatkozásról az algoritmusok fogalmának ismertetésével kezdik. Az informatikában, programozásban ugyanis mindennek ez az alapja, erre épülnek a különböző programnyelvű kódok. Minden számítást, feladatmegoldást algoritmusok segítségével állítunk elő, persze azt az adott nyelvre lefordítva, átfogalmazva.

Vegyük például az italautomata használatát:

Feltesszük, hogy van 100 Ft-unk, mindenképp iszunk és minden ital 100 Ft-ba kerül, valamint feltételezzük, hogy a gép nem üres, nem rossz, az előírásoknak megfelelően működik.

1) Válassz italt!
2) Dobj be egy 100 Ft-ost!
3) Nyomd meg a megfelelő gombot!
4) Várj, amíg folyik az ital!
5) Vedd ki az italt!
6) Idd meg!

Ahol két utasítás között a sorrend nem számít, azt nem determinisztikusnak nevezzük. A 4-es utasítás pontosabban: ismételd: Nézd a poharat, amíg meg nem telik!

A fentiek alapján építjük fel az algoritmust, melyet azután lefordítunk a választott programozási nyelvre (például Pascal vagy C++).[7]

1.6. Matematika

- Euklideszi algoritmus: A matematikát tekintve egy ismert ókori algoritmus. A gyermekek már a 6. osztályban megismerkedhetnek a legnagyobb közös osztó fogalmával, de csak később említhető meg az euklideszi algoritmus is, érdekességképp.

  „Az a és b számok legnagyobb közös osztója d, ha

  (i) $d|a, \quad d|b;$ *és*

  (ii) ha egy c-re $c|a, \quad c|b$ *teljesül, akkor* $|c| \le |d|$*.”* [8]

  Az euklideszi algoritmus ennek, vagyis két szám legnagyobb közös osztójának meghatározására szolgáló módszer. Tulajdonképpen egy számelméleti algoritmus.

  Menete: a két szám közül a nagyobbikat elosztjuk a kisebbikkel, majd a maradék lesz az osztó, az osztandó pedig az eddigi osztó és így tovább, míg 0 maradékot nem kapunk. Ebben az esetben az utolsó osztó lesz a keresett érték, vagyis a legnagyobb

[7] Zsakó László, Szlávi Péter: Közismereti informatika alapjai 1., előadásjegyzet (saját)

[8] Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet (25. oldal)

közös osztó. Ha már az elején, az első osztásnál 0 maradékot kapunk, akkor a kisebbik szám lesz egyben a legnagyobb közös osztója a két számnak.

Pl. Keressük meg a 845 és a 68 legnagyobb közös osztóját!

Megoldás:

$$845 = 12 \cdot 68 + 29$$
$$68 = 2 \cdot 29 + 10$$
$$29 = 2 \cdot 10 + 9 \quad \Rightarrow$$
$$10 = 1 \cdot 9 + 1$$
$$9 = 9 \cdot 1 + 0$$

Tehát az 1-et kaptuk mint legnagyobb közös osztót

$\Downarrow$

Így a két szám relatív prím, azaz: $(845{,}68) = 1$

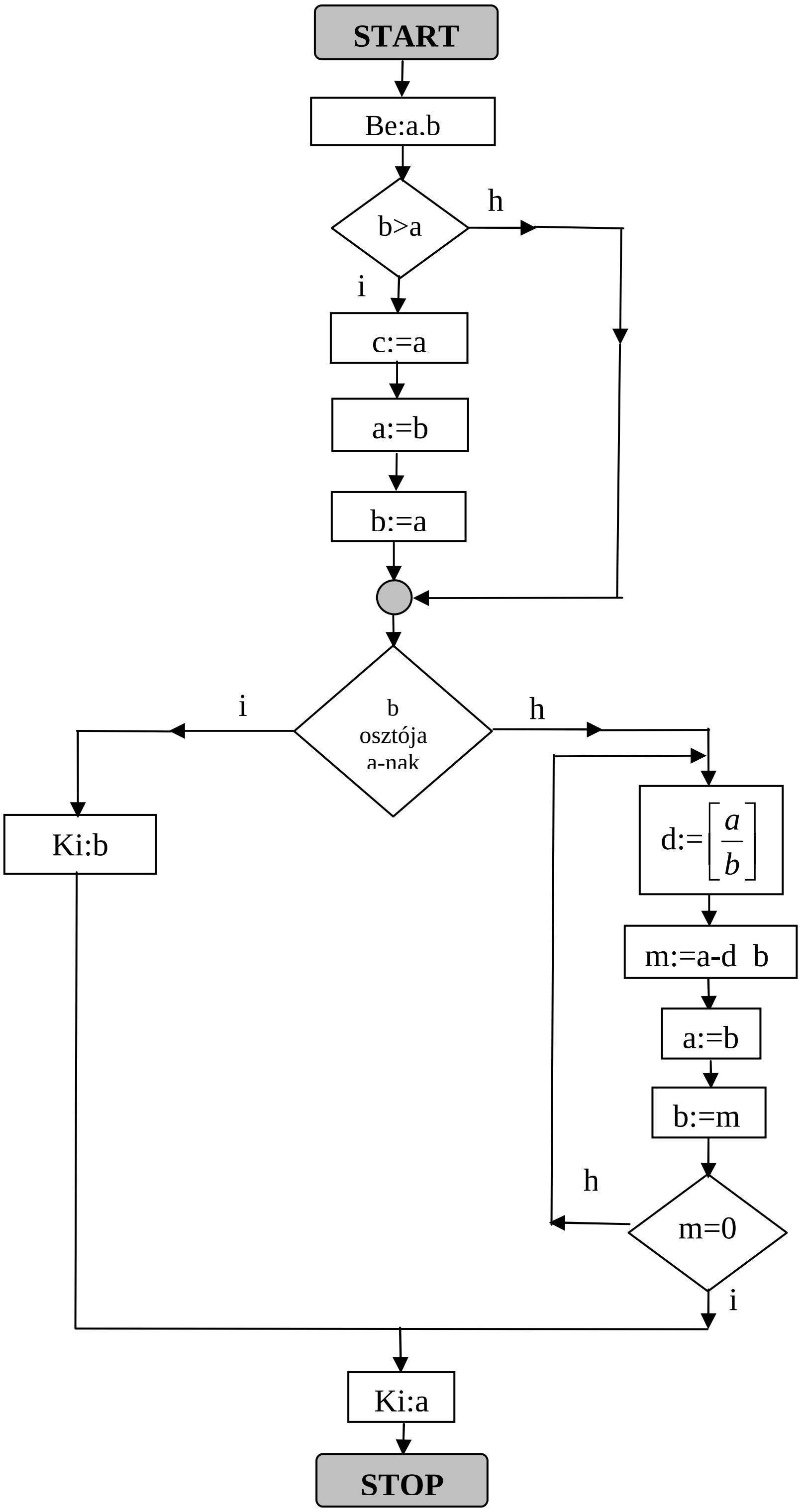
Ezt a megoldást nézzük meg algoritmus leíró eszköz segítségével is, jelen esetben a mondatszerű leírást alkalmazva. Hátultesztelős ciklust fogunk használni.

Eljárás euklides
Be : a, b
Ha $b > a$ *akkor* $c := a$
$a := b$
$b := c$
Elágazás vége
Ha b *osztója* a *-nak akkor Ki* : b
különben Ismételd
$d := \left[\frac{a}{b}\right]$
$m := a - d \cdot b$
$a := b$
$b := m$
Addig amíg $m = 0$
Ki : a
Elágazás vége [9]
Eljárás vége

Ebben az algoritmusban nem vizsgáltuk azokat az eseteket, amikor a vagy b lehet 0 is, de ez már a kódolás feladata lenne. Az első elágazás arra szolgál, hogy mindenképpen az a számot tekintsük az osztandónak, természetesen ez nem feltétel, csak az algoritmus könnyebb áttekinthetőségét szolgálja, így tehát szükségünk volt egy cserére, melyet egy c változóval oldottunk meg.

Tekintsünk egy harmadik, talán leginkább szemléletes módszert, ez pedig a folyamatábra használata.

[9] Természetesen az ilyen mondatszerű leírásoknál nem szabad megfeledkeznünk az ellenőrzésről sem, vagyis egy tetszőleges programozási nyelven megvalósítani.



- <u>Eratosztenészi szita</u>: Olyan algoritmus, amely egy adott számnál nem nagyobb prímeket ad meg viszonylag egyszerű módon.

  „Írjuk fel 2-től N *-ig az egész számokat. Az első lépésben karikázzuk be a 2-t, majd húzzuk át azokat a számokat, amelyek a 2 többszörösei és 2-nél nagyobbak…Ezután karikázzuk be azt a legkisebb számot, amely még nincs megjelölve…, majd húzzuk át ennek a többszöröseit…Ismételjük meg a fentieket mindig a legkisebb még jelöletlen*

számmal, ha ez a szám még legfeljebb $\sqrt{N}$. *Ha már minden* $\sqrt{N}$*-nél nem nagyobb számot megjelöltünk, akkor álljunk meg. Ekkor a bekarikázott számok együttesen éppen az* N*-nél nem nagyobb prímszámokat adják.”*[10]

Pl.: Nézzük a 100-nál nem nagyobb prímszámokat!

1. Pirossal bekarikázzuk a 2-t, és a többszöröseit beszínezzük.
2. A legkisebb nem színezett a 3-as. Sárgával bekarikázzuk, és beszínezzük a többszöröseit.
3. A következő az 5-ös, melyet zölddel karikázunk, és többszöröseit színezzük.
4. Végül a 7-es, amit bekarikázunk kékkel, és beszínezzük a többszöröseit.
5. Mivel $\sqrt{100} = 10$, ezért több számot már nem kell megvizsgálnunk, tehát a bekarikázott és kimaradt elemek lesznek a prímszámok 100-ig. Vagyis: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Összefoglalva 100-ig 25 prímet találunk. Amikor bevezetjük a prímszámokat az órán, egyúttal ismertessük a gyerekekkel ezt a látványos, könnyen érthető, megtanulható módszert is prímek megkeresésére, természetesen ajánlott nem túl nagy számot választani a jól ábrázolhatóság kedvéért. A későbbiek folyamán is hasznosítható, hogy ezáltal megismerkedhetnek egy újabb algoritmussal az eddig tanultakon kívül, mely fejleszti algoritmikus gondolkodásukat.

- Négyzetgyökvonás:

[10] Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet (153. oldal)

A négyzetgyökvonást az általános iskolák 8. osztályában kezdik tanítani a hatványozás után, a négyzet adott területéből következtetve az oldal hosszára. A hatványozásnak két inverz művelete van – az inverz művelet fogalmát a későbbiekben az osztásnál definiálom –, az egyik a logaritmus, a másik a négyzetgyökvonás. Míg a logaritmusnál arra vagyunk kíváncsiak, hogy melyik az a hatvány, amire az alapszámot emelve a logaritmus argumentumát kapjuk, addig a négyzetgyökvonásnál a hatványalapra, vagyis azt szeretnénk tudni, hogy mi az a szám, melyet hatványozva a megadott értékhez jutunk. A definíció alapján $\sqrt{a}$ egy olyan nemnegatív számot jelent, melynek a a négyzete, vagyis ebből következik, hogy $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$ és $\sqrt{a} \geq 0$. Később megismerkednek a tanulók az n-edik $\sqrt{\ }$ fogalmával is. A négyzetgyökvonást, eltekintve a könnyen kiszámolható értékektől, például $\sqrt{9} = 3$ vagy $\sqrt{4} = 2$ számológép segítségével végzik el a diákok. Nem tananyag, de kiegészítésként sok iskolában megtanítják a kézi négyzetgyökvonás egyik algoritmusát.

A menete a következő:

Mindig kettesével, a tizedesvesszőtől balra jelöljük ki a számokat, tehát páratlan jegyűnél az első kijelölt egyjegyű lesz. Megnézzük, hogy az első kijelölt számot milyen szám négyzetével tudjuk alulról közelíteni, ezt leírjuk az egyenlőség után, majd visszaszorzunk, kivonunk és leírjuk az eredményt, majd hozzá a következő két számjegyet. Vesszük az egyenlőségjel utáni számnak a kétszeresét, aláírjuk. A kétszeres után lesz egy helyi érték, egy szorzásjel, majd a szorzó. A kétszeres után írt szám ugyanaz lesz, mint a szorzó, ezzel ismét alulról közelítjük azt a számot, melyet a négyzetgyökjel alatti alá írunk. Ezek után visszaszorzunk, kivonunk és leírjuk a kivonás eredményét, majd a következő két számjegyet, ha elérkeztünk a szám végéhez, akkor nullákat írunk, az eredménynél pedig kiírjuk a tizedesvesszőt és ugyan így tovább. Addig számolhatunk a leírt eljárás szerint, míg el nem jutunk a kívánt pontosságig.

$$\sqrt{5872} = 76{,}62897624267...$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{58'72} = 76{,}6 \\ &\quad 9\,72 = 14\underline{6} \cdot \underline{6} \\ &\quad\quad 9600 = 152\underline{6} \cdot \underline{6} \\ &\quad\quad 044400 \quad ... \end{aligned}$$

Bizonyítható, hogy ez az algoritmus helyes, és a négyzetgyököt tetszőleges pontossággal meghatározhatjuk. Nézzük meg olyan négyjegyű számra a bizonyítást, melynek négyzetgyöke kétjegyű.

Bizonyítás:

$\sqrt{\overline{ABCD}} = \overline{EF} \Rightarrow \overline{ABCD} = \overline{EF}^2 \Rightarrow$

$\underline{1000A + 100B + 10C + D =}(10E + F)^2 = \underline{100E^2 + 20EF + F^2}$

$\sqrt{\overline{AB'CD}} = E \qquad E^2 \leq 10A + B$

$(10A + B - E^2)100 + 10C + D = (20E + F)F = 20EF + F^2$

$1000A + 100B - 100E^2 + 10C + D = 20EF + 2F^2 \qquad /+100E^2$

$\underline{1000A + 100B + 10C + D = 100E^2 + 20EF + 2F^2}$.□

A fenti módszeren kívül létezik a négyzetgyök meghatározására egy másik megoldás is. A Newton nevéhez fűződő rekurzív iteráció.

Newton algoritmusa:

$\underline{\underline{a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \ n = 1,2,...}}$ ahol a_{n+1} az n-edik lépés után az x szám közelítő négyzetgyökét jelöli. Például: $x = 13, \ a_1 = 1$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{13}{1}\right) = \frac{1}{2}14 = 7 \qquad a_3 = \frac{1}{2}\left(7 + \frac{13}{7}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{62}{7} = \frac{31}{7} \approx 4{,}4286$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{37}{7} + \frac{13}{\frac{37}{7}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{37}{7} + \frac{91}{37}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2006}{259} = \frac{1003}{259} \approx 3{,}8726$$

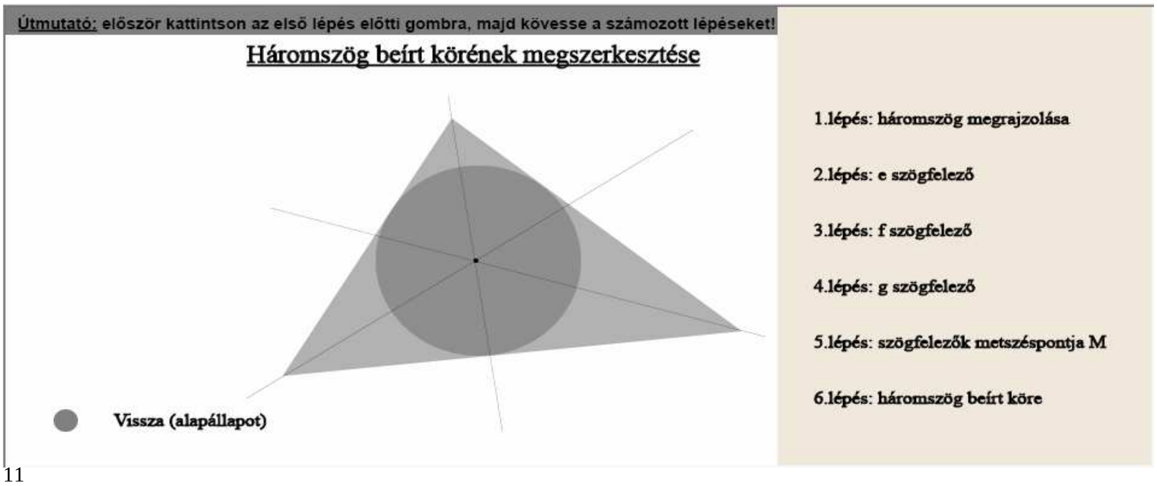
Így lehet folytatni tovább a kívánt pontosságig. Itt a_4-nél közelítőleg $3{,}8726$-ot kaptunk, míg $\sqrt{13} \approx 3{,}6056$. Ennek a rekurzív sorozatnak a határértéke $\sqrt{x}$.

Az említett két módszer teljesen különböző. Abban az esetben, ha a kérdéses szám négyzetgyöke racionális, akkor a kézi négyzetgyökvonás megadja a pontos négyzetgyököt közvetlenül, számolás útján, míg a Newton féle közelítő eljárás csak határértékben.

- <u>Szerkesztési algoritmusok</u>:

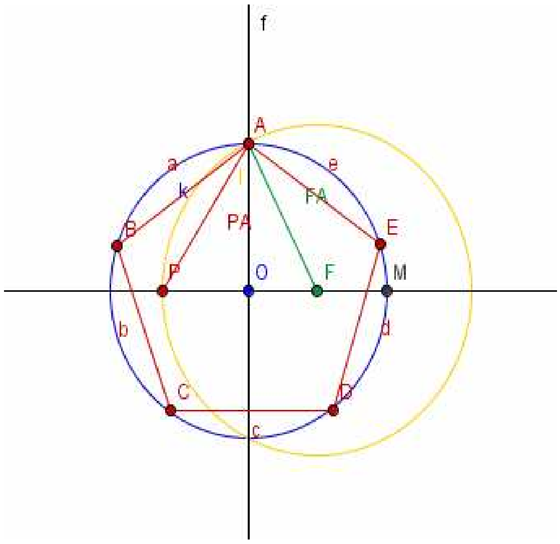
1. Háromszög beírt körének megszerkesztése

Megszerkesztjük a háromszöget, majd mindhárom szögéhez tartozó szögfelező egyeneseket. Ahol a három szögfelező egy pontban metszi egymást, az lesz a háromszögbe írt kör középpontja. Tulajdonképpen elegendő a három szögfelezőből kettőt megszerkeszteni, így is megkapjuk a metszéspontot. Végül, pedig a középpontból az oldalra állított merőleges szakasz lesz a kör sugara, melynek ismeretében már megszerkeszthetjük a beírt kört. A háromszögbe írt kör sugara $\rho = \frac{2T}{K}$, ahol T a háromszög területe, K pedig a kerület.



[11]

2. Szabályos ötszög szerkesztése



1) Felveszünk egy O pontot és rajzolunk egy tetszőleges sugarú k kört.

2) Kiválasztunk egy A pontot, ami rajta van a körön, majd összekötjük az O ponttal, így kapunk egy f egyenest.

3) Az f egyenesre merőlegest állítunk O-n keresztül. Ennek az egyenesnek a metszéspontja a körrel M.

4) M és O szakasz felezőpontját, F-et összekötjük az A ponttal, ez lesz az l kör sugara, F körül.

5) Ahol az l kör metszi az OM egyenest, az a P pont. A P pontot A-val összekötve kapjuk az ötszög oldalának hosszúságával megegyező szakaszt, amit körzőnyílásba veszünk.

6) Végül A-ból indulva sorra kimetsszük az a, b, c, d, e szakaszokat, vagyis az ötszög oldalait.[12]

[11] SVG állomány. Az SVG (Scalable Vector Graphics) magyar fordítása "méretezhető vektorgrafika". Egy XML alapú leíró nyelv. Nagyon hasznos geometriai ábrák szemléltetésére.
http://svg.elte.hu/

- Gauss elimináció:

„Az általános lineáris egyenletrendszerek megoldására az egyik legtermészetesebben adódó, egyszerű és gyakorlati szempontból is jól alkalmazható eljárás a Gauss-féle kiküszöbölés, amelynek számos fontos elméleti következménye is van."[13]

Az eljárás során ekvivalens átalakítások megengedettek. A Gauss-eliminációval tulajdonképpen kiküszöböljük az ismeretleneket az egyenletrendszerből, hogy megkapjuk a kívánt megoldást. Nézzünk erre egy konkrét példát.

Feladat:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -7 \qquad \text{Keressük } x_1, x_2, x_3\text{-at.}$$
$$3x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 4$$

Megoldás:

Kibővített mátrixa: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$ Vonjuk ki az 1. sorból a 2. sor 2-szeresét, a 3. sorból, pedig a 2. sor háromszorosát $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \end{array}\right)$ Vonjuk ki a 3. sorból a 2. sort $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Végül adjuk hozzá az 1. sorhoz a 2. sor ötödét, és osszuk el a 2. sort öttel $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Így, pedig leolvasható a megoldás: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + x_3 \\ 5 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

Itt x_3 egy úgynevezett szabad változó, ezért végtelen sok megoldást kaptunk.

- Mohó algoritmus:

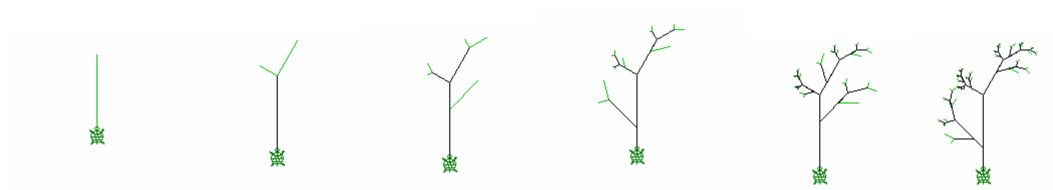
  Az optimális megoldás keresésekor az egyik módszer az úgynevezett optimista módszer, melyet mohó algoritmusnak is nevezünk. Ez nem mindig a legoptimálisabb megoldást adja, de segítségével megoldható számos optimalizálási feladat. A mohó algoritmus mindig, minden lépésben a helyenkénti legoptimálisabb lehetőségeket

[12] Az ábrát a GeoGebra program segítségével szerkesztettem
[13] Freud Róbert: Lineáris algebra (55. oldal)

választja. „*Az optimalizáció egyik klasszikus feladata: az utazó ügynök problémája.*”[14] Ennek a feladatnak a lényege, hogy egy olyan algoritmust adjunk, melynek segítségével egy ügynök úgy látogathassa meg egy adott terület összes városát, hogy utazási költségei a lehető legalacsonyabbak legyenek, a végén pedig hazaérjen.

- Rekurzív algoritmusok
  - Fraktálok: Nagyon érdekes jelenségek, melyekhez hasonlóak gyakran előfordulnak a természetben is, és jól modellezhető algoritmikusan, program segítségével. Nézzünk erre egy látványos példát.

Fa:



Ennek a fának a megszerkesztése egy rekurzív eljárás. A rajzokat Comenius Logo[15]-val készítettem, utasításképlete:

tanuld fa :sz :h ⇒ a két paraméter a szint és a hossz, az ábrákat 1…6-os szinttel és 80 hosszúsággal hívtam meg

tollszín! 2 e :h

ha :sz > 1 [b 60 fa :sz - 1 :h / 4 j 90 fa :sz - 1 :h / 2 b 30 ~

ha :sz > 2 [ha maradék :sz 2 = 1 [h :h / 3 j 45 fa :sz - 2 :h / 2 b 45 e :h / 3] ~

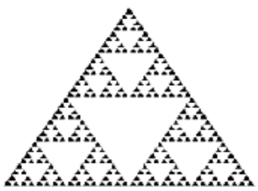
*[h :h * 2 / 3 b 45 fa :sz - 2 :h / 2 j 45 e :h * 2 / 3]]]*

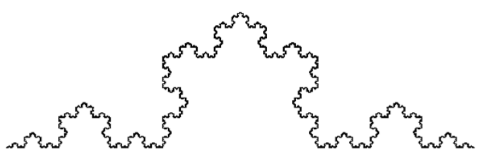
h :h

tollszín! 0

vége

Sierpinski-háromyszög: Koch-görbe:

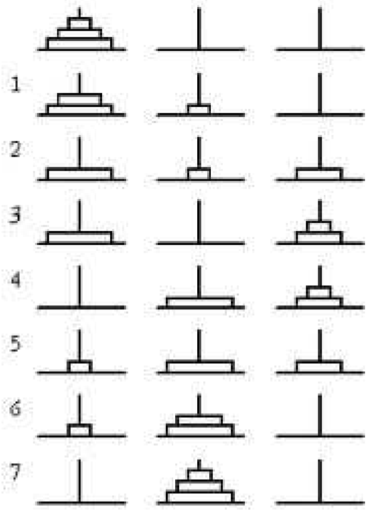




A természetben például: hópehely, kristály, páfrány, brokkoli, karfiol, kagyló.

[14] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika (167. oldal)
[15] A Comenius Logo egy gyerekeknek tervezett programozási nyelv.

- Hanoi tornya: A feladat lényege, hogy adott bizonyos számú korong, amit az első rúdról egy másikra (az ábrán a középsőre) kell áthelyezni úgy, hogy kisebb korongra nem rakhatunk nagyobbat, és minden lépésben csak egy korongot mozgathatunk. A klasszikus példában 64 korong szerepel. Bizonyítható, hogy az optimális, vagyis a legkevesebb lépésszám n korong esetén $2^n - 1$. Ez jól modellezhető algoritmus segítségével, programot írva is. Az ábra 3 koronggal szemléltet, ahol a megoldás lépésszáma $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$.



Még sorolhatnák az algoritmusokat általános iskolától kezdve a középiskolában tanultakon keresztül akár a másodfokú egyenlet megoldási menete (1. Kijelölt műveletek elvégzése. 2. 0-ra rendezés. 3. Diszkrimináns. 4. Megoldóképlet. 5. Gyökök megadása.), illetve az egyetemi tanulmányok során is számos algoritmussal találkozunk. Fontosak a hétköznapi életben is sok területen használatos titkosítási algoritmusok.

Végül lássunk egy matematikai példát, algoritmikusan leírva a megoldás menetét.

Feladat: Írj algoritmust, amely előállítja N különböző elem összes permutációját!

Megoldás: Ha kézzel akarnánk megkeresni az összes permutációt, akkor az például 3 elem esetén így nézne ki:

1,2,3

123
132
213
231
312
321

$$P(n) \Rightarrow a_i, P(n-1)$$

Tehát rekurzív módon járunk el, vagyis vesszük az első elemet, majd a maradék permutációit keressük, ahol megint csak vesszük az első elemet (a maradékból) és így tovább, míg végül az utolsó elemig nem jutunk, amit pedig leírunk. Aztán úgynevezett visszalépéses módszerrel hasonlóképp, és így kapjuk a lehetséges sorrendeket.

Nézzük a példát ténylegesen algoritmikusan leírva. Az adatok bekérése nem az algoritmus, hanem a programkészítés része.

Eljárás *permutáció* $(\mathrm{N}, a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Ciklus $i = 1 - \textit{töl}$ $\mathrm{N} - \textit{ig}$

$T[\mathrm{N}] := a_i$

Ha $\mathrm{N} = 1$ *akkor* *Ki* $: T_N, T_{N-1}, \ldots, T_1$

Ha $\mathrm{N} > 1$ *akkor* $s := 1$

Ciklus $j = 1 - \textit{töl}$ $\mathrm{N} - \textit{ig}$

Ha $j \neq i$ *akkor* $b_s := a_j$

$s := s + 1$

Elágazás vége

Ciklus vége

permutáció $(\mathrm{N} - 1, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$

Elágazás vége

Ciklus vége

Eljárás vége

Ezenkívül számos matematikai algoritmussal találkozunk tanulmányaink során. Nagyon fontos a tanulók algoritmikus gondolkodásának fejlesztése. Semmiképpen nem szabad elsiklani néhány, fent említett algoritmus bemutatása felett. Jó reprezentáló eszközök segítségével gyorsan, könnyedén elsajátítható néhány módszer, melyeket a gyerekek látványosságuknak is köszönhetően hamar megszeretnek.

1.7. Egyéb tudományterületek

Az algoritmusok a matematikán és az informatikán kívül szerepet kapnak például a biológiában, az evolúciós algoritmusok. *„Az evolúciós algoritmus (vagy az amerikai szóhasználatban genetikus algoritmus) a mesterséges intelligencia egyik metaheurisztikája. Egy általános problémamegoldó séma, melynek kialakítását a biológiai evolúció motiválta.”*[16] Az algoritmus fogalmának szerepe van a pszichológiánál, a kognitív tudományban is, amely a mentális folyamatok algoritmizálhatóságával is foglalkozik.

[16] Borgulya István: Evolúciós algoritmusok

2. AZ OSZTÁS

Ebben a fejezetben az egyik legalapvetőbb művelettel, az osztással és annak tanításával fogok foglalkozni. Sorra veszem a kialakulásától kezdve az egyetemig, hogy hol jelenik meg, milyen példákban van a legnagyobb szerepe, illetve hogyan tanítják. Az osztással már egész kis korban találkoznak a gyerekek és végig, tanulmányaik során gyakran előkerül különböző feladatokban, illetve az élet számos területén.

2.1. Definíció

A művelet általános algebrai definíciója: *„Tetszőleges* A *nemüres halmaz és* $n \geq 0$ *egész szám esetén bármely* $f : \mathrm{A}^n \mapsto \mathrm{A}$ *függvényt az* A*-n értelmezett* n*-változós műveletnek nevezzük."*[17]

1. Az osztás a racionális számok halmazán:

$f : \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \mapsto \mathbb{Q}$

$(r_1; r_2) \mapsto r, \quad r \cdot r_2 = r_1$ a művelet eredménye egyértelmű, mert ha:

$\exists r^* \in \mathbb{Q}$, amelyre $r^* \cdot r_2 = r_1$ és $r \cdot r_2 = r_1$, akkor $r^* \cdot r_2 = r \cdot r_2$, vagyis $r_2 \cdot \left(r^* - r\right) = 0$,

tehát $r^* = r$

2. Az osztás a szorzás inverz művelete. Az inverz művelet definíciója az algebrában: *„Legyen adott a H halmazon egy (szorzásként jelölt) művelet. Tegyük fel, hogy az* $xb = a$ *egyenlet minden* $a, b \in H$*-ra egyértelműen megoldható, azaz pontosan egy olyan* $c \in H$ *létezik, amelyre* $cb = a$*. Ekkor a* $B(a,b) = c$ *hozzárendelést a művelet bal oldali inverz műveletének nevezzük. Hasonlóan, ha minden* $a, b \in H$ *-ra pontosan egy olyan* $d \in H$ *létezik, amelyre* $bd = a$*, akkor a* $J(a,b) = d$ *hozzárendelés a művelet jobb oldali inverz művelete."*[18]
Kommutatív esetben B mindig egyenlő lesz J-vel.

2.2. Története, történelme

Már az ókorban is ismerték az osztást, a mai módszerrel szemben azonban egészen más számolási eljárásokat alkalmaztak.

Egyiptom: az osztást összeadásra vezették vissza. Ami azt jelenti, hogy ha egy számot el akarunk osztani egy másikkal, akkor nem az a kérdés, hogy hányszor van meg benne a szám,

[17] Fried Ervin: Általános algebra (23. oldal)
[18] Freud Róbert: Lineáris algebra (314. oldal)

hanem, hogy mennyiszer kell venni (összeadni) egymás után az osztót, hogy az osztandót kapjuk.

Pl.: $36 : 4 = ?$

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 & 4\ast \\
 & 2 & 8 \\
 & 4 & 16 \\
+ & 8 & 32\ast \\
\hline
 & 9 & 36
\end{array}$$

Babilónia: *„Szorozni tudtak, az osztást a reciproktáblázat segítségével szorzásra vezették vissza. Csak olyan számok reciprokait képezték, amelyek véges hatvanados törteket adtak, vagyis amely számok prímtényezős felbontásában csak a 60 prímtényezői fordulhattak elő. Az ilyen számokat szabályosaknak nevezték...Valamely tetszőleges számlálójú törtet nem törzstörtek összegeként, hanem egy törzstört többszöröseként fogták fel. Két szám hányadosaként azonban még nem értelmezték.”*[19]

Pl.: $\dfrac{54}{600} = 54\dfrac{1}{600} = 54\dfrac{6}{60^2} = \dfrac{5\cdot 60 + 4\cdot 6}{60^2} = \dfrac{5}{60} + \dfrac{24}{60^2}$

India: A hindu matematikában teljesen másképp végezték az osztást, egy úgynevezett áthúzásos módszerrel. Pl.: $3751 : 83 = ?$ $3751 = 83\cdot 45 + 16$

Az áthúzásos módszer lényege, hogy ahogy haladunk az osztás menetében, úgy húzzuk át azokat a számokat, melyek a továbbiakban már nem vesznek részt az eljárásban, és így végül ami nem kerül áthúzásra, az lesz a függőleges vonal előtt a maradék, illetve mögötte a végeredmény.

$$\begin{array}{cccc|c}
 & 5 & & & \\
\cancel{3} & \cancel{7} & 5' & 1 & 4 \\
\cancel{8} & 3 & & &
\end{array}$$

Először akárcsak a „mi” osztásunknál megnézzük, hogy a 375-ben hányszor van meg a 83, amit a 375 alá írunk. Megvan 4-szer, a vonal mögé leírjuk a 4-et, majd elkezdjük a visszaszorzást. $8\cdot 4 = 32$-höz, hogy 37 legyen, kell 5, tehát leírjuk a 7-es fölé az 5-öt, majd áthúzzuk a 37-et és a 8-at.

$$\begin{array}{cccc|c}
 & 4 & & & \\
 & \cancel{5} & 3 & & \\
\cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{5} & 1 & 4 \\
\cancel{8} & \cancel{3} & & &
\end{array}$$

[19] Filep László: A tudományok királynője, A matematika fejlődése (52. oldal)

Következő lépésben a 4-et a nem áthúzott 3-mal szorozzuk, ami 12, és 12-höz 43 kell, hogy 55-öt kapjunk, mert a fölülre írt 5-öst és az osztandóból át nem húzott 5-öst tekintjük, ezért leírjuk a 43-at a megfelelő helyi értékek fölé, és áthúzzuk a két 5-öst és a 3-ast.

$$\begin{array}{cccc|cc}
 & \cancel{4} & 3 & & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{3} & & & \\
\cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{5} & 1 & 4 & 5 \\
\cancel{8} & \cancel{3} & & & & \\
 & \cancel{8} & 3 & & &
\end{array}$$

Majd ezután újra leírjuk az osztót, vagyis a 83-at egy helyiértékkel beljebb az eredeti alá, és megnézzük, hogy a még áthúzatlan 431-ben hányszor van meg. $431:83=5$ és marad a 16, tehát leírjuk a 4-es után az ötöst a vonal mögé és visszaszorzunk. $8\cdot 5=40$, 43-hoz kell még 3, leírjuk a 3-ast, áthúzzuk a 8-ast, 4-est, 3-ast.

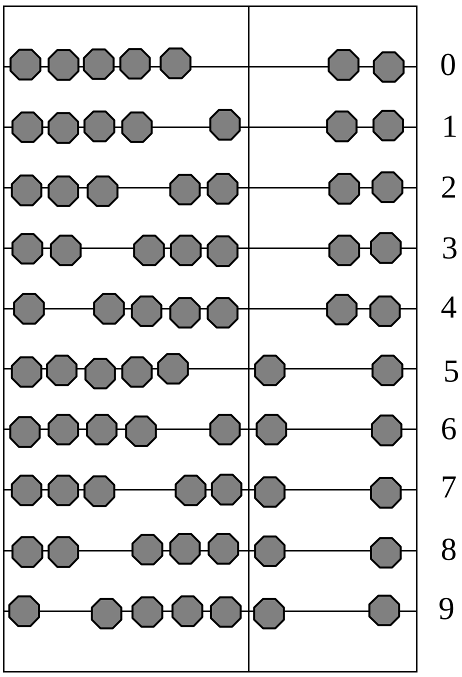
$$\begin{array}{cccc|cc}
 & & 1 & & & \\
 & \cancel{4} & \cancel{3} & & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{3} & 6 & & \\
\cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{5} & \cancel{1} & 4 & 5 \\
\cancel{8} & \cancel{3} & & & & \\
 & \cancel{8} & \cancel{3} & & &
\end{array}$$

Végül az 5-öt megszorozzuk a 3-mal, ami 15 és 05-höz, hogy 31 legyen, kell még 16, amit leírunk és áthúzzuk a két 3-ast és az 1-est. Így tehát maradt áthúzatlanul az 1-es és a 6-os, illetve a végeredmény, viszont eljutottunk a végéhez, mivel az osztandó számjegyei elfogytak. Természetesen, ilyenkor jönne a tizedes vessző, és 0-val kiegészítve folytathatnánk az osztást. Leolvasható, hogy a végeredmény 45, és a maradék 16.

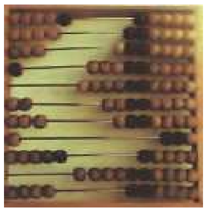
2.3. Eszközök

Az osztást nem csak fejben vagy papíron, írásban végezhetjük, hanem vannak segédeszközök, amikkel látványosan eloszthatunk egy számot egy másikkal. Ezeket az eszközöket manapság már nem használják, sőt a legtöbb gyerek nem is ismeri, esetleg nem is hallott róla. Szerintem említés szintjén minden tanulóval meg kellene ismertetni a tanároknak, közvetlenül a tanórán, rögtön, az osztás tanítását követően, ezáltal is felkelteni az érdeklődésüket, reprezentatívvá tenni az osztási algoritmust.

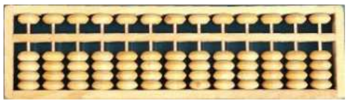
Abakusz: Görög eredetű, az „abaikon” szóból származik, magyarul: tábla. Az ókorban kezdetben a görögök, majd a rómaiak használták számolási segédeszközként. Magyarországon is népszerű volt, ugyanis az írástudatlanok is könnyen számolhattak vele. Ezen kívül számos változata jelent meg a különböző országokban, például a kínaiaknál ebből fejlődött ki a szuan pan, mely egy golyós számológép, amivel manapság is számolnak, az oroszoknál pedig ilyen a szcsoti, valamint Gerbert francia szerzetes abakusza, ami érdekes módon nem a római módszert követte, hanem már olyan köveket használt, amikre számjegyeket írt. Manapság is használatos az oroszoknál, illetve a kínaiaknál, sőt, újabban kezdik ismét bevezetni az általános iskolákban. Japán változata pedig a szorobán. Az abakusz leginkább a különböző számrendszerek tanításánál nyújthat segítséget a szemléltetéshez. Az abakusz egy olyan szerkezet, ahol egy fa keretben golyókat találunk. Az itt látható 0-tól 9-ig mutatja a számokat, melyek úgy vannak értelmezve, hogy a bal oldalon minden sorban 5 golyó, a jobb oldalon pedig 2. A bal oldaliak 1-et-1-et érnek, míg a jobb oldalon fejenként 5-öt. Így tehát minden sorban az alaki értékeknek megfelelő golyóállásokat láthatjuk. A negatív számokat esetleg más színű golyókkal lehetséges szemléltetni.



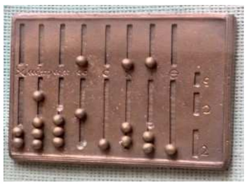
[20]

1. szcsoti **2. szuan pan**



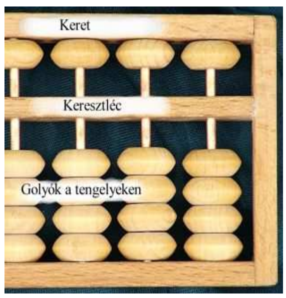
3. szorobán



4. abakusz

A számolótábla alkalmas összeadásra, kivonásra, szorzásra, illetve osztásra, amit ismételt kivonással végzünk el, ennek menetét majd a bennfoglalás tárgyalásánál részletezem.

A japán szorobánon az osztás így néz ki:[21]

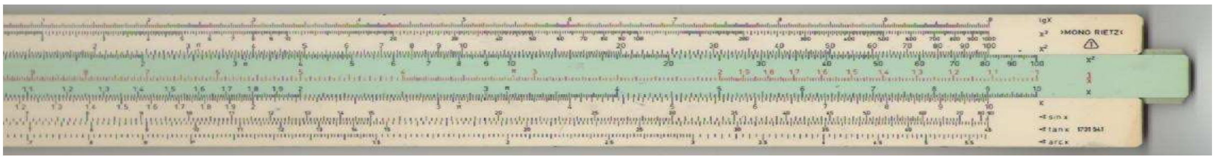


A golyókkal a számokat hasonlóképp ábrázoljuk, ahogy az abakuszon, csak itt függőlegesen, nem vízszintesen. Helyi érték szerint először kirakjuk az osztandót a baloldalon megjelölt helyre, majd középre szintén helyi értékesen az osztót és végül a bal oldali megjelölt helyen

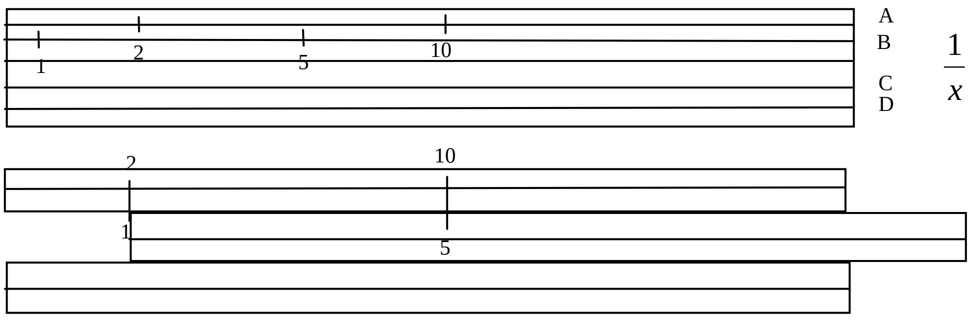
[20] Sain Márton: Nincs királyi út! Matematikatörténet (308. oldal)
[21] http://www.szoroban.hu/

lesz a hányados. Elsőként megállapítjuk, hogy hány számjegyből áll majd a hányados. Ahogy a „szokásos” osztásnál is, a legnagyobb helyi értékkel kezdjük, megnézzük, hogy megvan e benne az osztó, majd visszaszorzunk és ekkor az eredményt a legnagyobb helyi értékű szám helyéről elvesszük és így tovább, majd végül a maradék az osztandó helyén lesz látható.

<u>Logarléc</u>: Ősét, a logaritmusskálát Edmund Gunter (1581 – 1626) angol matematikus és csillagász készítette el 1624-ben. Előzménye, hogy 1614-be John Napier (1550 – 1617) skót matematikus már elkészítette a logaritmustáblázatot. Maga a logarléc, mint számolási segédeszköz a 19 – 20. században terjedt el igazán. Elsősorban szorzás és osztás közelítő elvégzésére alkalmas. Működésének alapelve, hogy a számok szorzatát és hányadosát a logaritmus azonosságaival, vagyis két szám logaritmusának összegével és különbségével határozza meg. *„Különféle speciális igényeket kielégítő logarléceket gyártanak, amelyek még méretre is különbözhetnek egymástól. Az általánosan használt logarlécek 12,5 cm, 25 cm és 50 cm hosszúságban készülnek és a felső lapon öt lényeges skála található.”*[22]



Az osztás elvégzése úgy működik, hogy a logarlécen 5 lényeges beosztás található az A, B, $\frac{1}{x}$, C, D, egy adott $\frac{x}{y}$ osztáshoz az x értéket megkeressük az A skálán, az y értéket a B skálán, majd ezt a kettőt egymás alá csúsztatjuk, ezek után pedig leolvasható lesz a B skála egyese az A skálán, ami a hányados értékét adja. Például: $\frac{10}{5} = 2$



Magyarázat: Két vonalzót egymás mellett tologatva el tudunk végezni kivonásokat, összeadásokat, hiszen lineáris skálán amennyivel az egyik vonalzót eltoljuk a másikhoz képest, annyival kerül arrébb az érték is. Hasonlóan működik a logarléc is, csak itt osztást,

[22] Obádovics J. Gyula: Gyakorlati számítási eljárások (43. oldal)

szorzást is el tudunk végezni a logaritmus azonosságai segítségével. Pozitív számok osztásakor használjuk az $\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$ szabályt. Két pozitív szám szorzatára ugyanúgy az $\lg x + \lg y = \lg(xy)$ azonosságot. Ezeken kívül a logarlécen találhatók más skálák is: $x^3, x^2, \sin x, \tan x, arcx$, tehát négyzetre emelést, gyökvonást és egyéb műveleteket is elvégezhetünk az eszköz segítségével.

2.4. Az osztás tanítása

Az osztással már általános iskola 2. osztályában megismerkednek a gyerekek. Az évek során különböző, kissé eltérő módszerekkel tanították. *„Az osztás, jóllehet egyetlen művelet, lényegének megértéséhez mégis kétféle osztásról tanulnak az alsó tagozatos gyerekek. A bennfoglaló és a részekre osztás a valóságban is megvan.”*[23] Ez a két fogalom lényegében nem, csak felfogásban, illetve jelölésben tér el. *„A gyerekeknek a szöveges feladat megoldási tervének elkészítésekor az osztásról meg kell állapítani, hogy bennfoglalás-e vagy részekre osztás. Nevezetlen számok osztásakor is érdemes eldönteni, hogy melyik osztás előnyösebb…Írásbeli osztásnál is mindkét osztást használjuk. A hányados jegyeinek helyi érétkét részekre osztással, az alaki értékét bennfoglaló osztással állapítjuk meg.”*[24] A későbbiek folyamán szemléltetem példán keresztül, mi is a különbség e két nagyon hasonló fogalom között.

2.4.1. Általános iskola

❖ Az osztás mint fogalom bevezetése, értelmezése, írásbeli osztás

Elsőként a második osztályban találkoznak a gyerekek a szóbeli osztással, annak is rögtön két fajtájával, először a bennfoglalással, majd az egyenlő részekre osztással. Miután megismerkednek szemléletes, hétköznapi példákon keresztül ezekkel a fogalmakkal, sorra végigmennek az úgynevezett bennfoglaló táblán.

Fontos már az elején hangsúlyozni, hogy bármely számot 0-val osztani értelmetlen, ugyanis akármilyen szám 0-val szorozva 0-t ad.

A harmadik osztályosok – miután átismételték az eddig tanultakat – átveszik az osztás tulajdonságait. Végül, amikor már készség szinten elsajátították a szóbeli osztást, akkor megtanulják az írásbeli osztást ellenőrzéssel.

„A mindennapi életben gyakran előfordul, hogy személyek, tárgyak stb. halmazában adott egyenlő számosságú részhalmazokat kell kialakítani és megállapítani a létrehozott

[23] Szerencsi Sándor, Papp Olga: A matematika tanítása II., egységes jegyzet, kézirat (115. oldal)
[24] Szerencsi Sándor, Papp Olga: A matematika tanítása II., egységes jegyzet, kézirat (116. oldal)

részhalmazok számát. Ezt a problémát a számok ismeretében bennfoglaló osztással oldhatjuk meg. Sok esetben a személyek, tárgyak stb. halmazából adott számú ekvivalens részhalmazokat kell létrehozni, és megállapítani e részhalmazok számosságát. Az ilyen probléma megoldása a számok világában részekre osztáshoz vezet."[25]

- **Bennfoglalás:** Rögtön példán keresztül sajátítják el a gyerekek, ahol meg is tanulják, hogy ilyenkor mindig azt kérdezzük, hogy „Hányszor van meg benne?", „Hányszor tudjuk elvenni?"

  Például: Van 20 darab tojásunk és 4-es tartóink. Hány tartóra van szükségünk?

  Ezt természetesen ismételt kivonással, másképp bennfoglalással tudjuk megállapítani. A menete, hogy 20 tojásból elkezdünk 4-es csoportokat alkotni. 20 tojás elhelyezéséhez 5 tartóra van szükségünk, mégpedig azért, mert ismételt kivonás segítségével $20-4-4-4-4-4=0$ és 5-ször vettük el a 4-et, vagyis bennfoglalással $20:4=5$. Rögtön el is nevezzük a 20-at osztandónak, a 4-et osztónak, az 5-öt pedig hányadosnak. Miután a gyerekek már korábban megismerkedtek a szorzás fogalmával, így fel kell hívni a figyelmet az ellenőrzésre, amit szorzással tehetünk meg, vagyis ebben a példában $\underline{20:4=\underline{\underline{5}}}$,

  mert $\underline{4\cdot\underline{\underline{5}}=20}$

- **Részekre osztás:** A kérdés most egy kicsit más lesz, mint a bennfoglalásnál, ugyanis azt szeretnénk tudni, hogy „Mennyi jut egy-egy embernek?". Tehát megadjuk, hogy hány egyenlő részre szeretnénk osztani és azt nem tudjuk, hogy egy részre hány jut. Itt megfigyelhető, hogy az osztandó és a hányados lesz azonos mennyiség. Van 6 tábla csokoládénk. Egy testvérpár el szeretné osztani úgy, hogy mindenkinek ugyanannyi jusson. Ekkor a 6 tábla csokit szétosztjuk a két gyerek között, míg el nem fogy. Mindketten 3 tábla csokit kapnak. Ezt a módszert nevezzük egyenlő részekre osztásnak, melyet másképp jelölünk, mint a bennfoglalást, hiszen más módszert alkalmazunk. Felírva $6/2=3$. Ellenőrzés: $\underline{6/2=\underline{\underline{3}}}$**,** mert $\underline{\underline{\underline{3}}\cdot 2=6}$. Később az osztásnak ezzel a változatával előkészíthetjük a törtek fogalmát.

Összefoglalva, a kétféle osztás közti különbség legjobban a feladatok fajtáival érzékeltethető. Mindkettőnél más az ellenőrzés módja is.

[25] Szerencsi Sándor, Papp Olga: A matematika tanítása II., egységes jegyzet, kézirat (132. oldal)

Általánosítva a tanultakat bevezethetjük a minden típusra alkalmazható „hagyományos" írásbeli osztást ellenőrzéssel. Ennek is két változata létezik, egy rövidebb és egy hosszabb.

❖ Különböző módszerek osztásra

Az írásbeli osztást többféle algoritmussal is elvégezhetjük, nem csak azzal a módszerrel, melyet nálunk is tanítanak. Amerikában egy hasonló, de jelölésben eltérő eljárást alkalmaznak:

Long division (Hosszú osztás)[26]: Pl.: $\frac{5874}{9} = \square$. Megoldás: $\frac{5874}{9} = 652.\overline{6}$

$$\begin{array}{r} 6\,9\,2 \\ 9\overline{)58\,7\,4} \\ -54\downarrow\downarrow \\ \hline 47\ \downarrow \\ -45\ \downarrow \\ \hline 24 \\ -18 \\ \hline 60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\,9\,2.\,6\overline{6}\ldots \\ 9\overline{)58\,7\,4.\,00} \\ -54\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ \hline 47\downarrow\downarrow\downarrow \\ -45\downarrow\downarrow\downarrow \\ \hline 24\ \downarrow\downarrow \\ -18\ \downarrow\downarrow \\ \hline 60\ \downarrow \\ -54\ \downarrow \\ \hline 60 \end{array}$$

Itt tehát a hányadost az osztandó fölé írjuk, az osztót pedig elé. A módszer a nálunk tanítottakhoz képest csak formailag tér el.

Short division (rövid osztás)[27]: Pl.: $\frac{9482}{4} = \square$. Megoldás: $\frac{9482}{4} = 2370.5$

Ebben az osztási típusban az egyes maradékokat a számok jobb felső sarkába írjuk. Itt is lényegében csak formai eltérés van, abban különbözik a hosszú változattól, mint nálunk, hogy nem írjuk le, fejben végezzük a kivonásokat. A végén pedig választhatunk, leírjuk a maradékot (r=remainder), itt 2, illetve, tovább folytatjuk az osztást a tizedes vessző kiírásával.

$$\begin{array}{l} \quad 2\ \ 3\ 7\ 0.5 \qquad r\,2 \\ 4\overline{)9^1 4^2 8^0 2.0} \end{array}$$

Chunking method (darabonkénti osztás)[28]: Pl.: $\frac{947}{41} = \square$. Megoldás: $\frac{947}{41} = 23 + 4$

[26] http://www.youtube.com/watch?v=3ULXhiJqlPs
[27] http://www.youtube.com/watch?v=ulslr6ZHPbQ
[28] http://www.youtube.com/watch?v=eDClv8LDrbc&playnext=1&list=PL1E92D4ECC8BFE72D

Ez egy kicsit másfajta osztási algoritmus, mint az eddigiek. Itt úgy osztunk, hogy az osztót megszorozzuk egy olyan számmal, amit fejben könnyedén is el tudunk végezni, például tízzel, a szorzatot leírjuk és kivonjuk az osztandóból, majd a maradék lesz az osztandó, és ezt ismételjük tovább. Nyilván mindig úgy szorzunk, hogy a szorzat kisebb legyen az osztandónál. Végül eljutunk egy olyan osztandóhoz, amiben már nincs meg az osztó, ez lesz a maradék. Lépésenként a jobb oldalra leírjuk, hogy hányszorosát vettük az osztónak, a végén ezeket a számokat összeadjuk és így kapjuk, hogy hány egészszer van meg az osztó az osztandóban, amihez a maradékot hozzáadva megkapjuk a hányadost.

$$\begin{array}{r|l r}
 & 23\ r\ 3 & \\
41 & 947 & \\
 & -410 & 10 \\
 & 537 & \\
 & -410 & 10 \\
 & 127 & \\
 & -82 & 2 \\
 & 045 & \\
 & -41 & 1\ + \\
 & \underline{\underline{4}} & 23
\end{array}$$

„<u>Bontásos osztás</u>": Pl.: $84:3=\square$. Megoldás: $84:3=28$

$84:3=(90-6):3=(90:3)-(6:3)=30-2=\underline{28}$

Ebben az esetben tehát úgy próbáljuk könnyíteni az osztást, hogy az osztandót felbontjuk az osztó egész számú többszörösére, jelen példában kivonás segítségével. A műveleti szabályok szerint megtehetjük, hogy a kivonásnál először tagonként osztunk, majd a hányadosokat vonjuk ki egymásból, az eredmény nem változik. Ugyanez az osztás összeadás segítségével széttagolva: $84:3=(60+24):3=(60:3)+(24:3)=20+8=\underline{28}$.

- Maradékos osztás

Maradékos osztáskor a legfontosabb, amit meg kell mutatni a tanulóknak, hogy a legtöbb osztás nem végezhető el a természetes számok körében, az osztandó nem többszöröse az osztónak, ilyenkor maradékot kapunk.

„*Tetszőleges* a *és* $b\neq 0$ *egész számokhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott* q *és* r *egész számok, melyekre* $a=bq+r$ *és* $0\le r<|b|$. *"*[29] Bizonyítható az egyértelműen létezés.

Bizonyítás:

Legyen $a,b>0$. Tekintsük a következő, végtelen hosszú intervallum felsorolást:

$$\underbrace{[0;b[\ ;\ [b;2b[\ ;\ [2b;3b[;\ \ldots}_{I}$$

Ezek az intervallumok páronként diszjunktak, tehát nincs közös elemük. Nevezzük el ezeket az intervallumokat I -nek. Ekkor $\bigcup I=\mathbb{N}$

$a\in\mathbb{N}\Rightarrow a\in\bigcup I$ és páronként diszjunktak a halmazok $\Rightarrow \exists! k$ *melyre* $a\in[kb;(k+1)b[$

$kb\le a<(k+1)b \qquad \Leftrightarrow \qquad kb\le a<kb+b$

[29] Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet (20. oldal)

Az $a-kb$ szakasz hossza kisebb, mint b és $\exists! a-kb$, k egyértelműen létezése miatt.

Ekkor $a-kb = 0,1,2,...,b-1$ számok közül az egyik, jelöljük ezt m -nek.

Így $a-kb=m \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a=kb+m}}$, ahol k is és m is $\exists!$ a fentiek miatt.□

A bizonyítást az intervallumok helyett lehetett volna egy szigorúan, monoton növekvő, felülről nem korlátos sorozattal is reprezentálni, akkor is biztos, hogy lesz olyan $k \cdot b$ és $(k+1)\cdot b$, hogy a k a kettő közé esik.

A maradékos osztás legnagyobb jelentőssége a számelmélet területén van az oszthatósági feladatok vizsgálatánál, valamint a már korábban tárgyalt euklideszi algoritmusnál.

❖ Törtek

„Általában jelentsen $\underline{a}$ *0-nál-,* $\underline{b}$ *1-nél nagyobb természetes számokat, akkor az* $\frac{a}{b}$ *törtszámon azt értjük – attól függően, hogy előbb felosztást és azután egyesítést végzünk-e vagy fordított sorrendben – , hogy*

1. egy egészet $\underline{b}$ *részre osztunk és az így kapott részekből* $\underline{a}$ *számút veszünk, vagy*

2. $\underline{a}$ *egészet osztunk fel* $\underline{b}$ *egyenlő részre…*

…Ha $\underline{a}$ *többszöröse* $\underline{b}$ *-nek, akkor* $\frac{a}{b}$ *egész szám, ha ez nem teljesül, akkor* $\frac{a}{b}$ *törtszám"*[30]

Jelen esetben a -t számlálónak, b -t nevezőnek hívjuk.

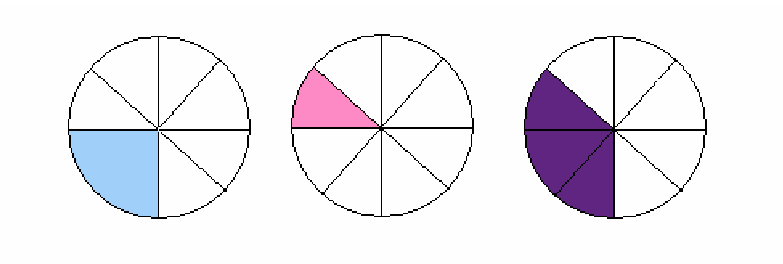
<u>Bővítés, egyszerűsítés:</u> Törteket úgy bővíthetünk, hogy a számlálót és a nevezőt is megszorozzuk ugyanazzal a számmal, ebben az esetben a tört értéke nem változik. Pl.: $\frac{15}{22}=\frac{15\cdot 3}{22\cdot 3}=\frac{45}{66}$. Egyszerűsítésnél, a tört számlálóját és nevezőjét egyaránt elosztjuk ugyanazzal az egész számmal. Ilyen számot úgy találhatunk, ha a nevező és a számláló egy közös osztóját keressük. A tört legegyszerűbb alakját a számláló és nevező legnagyobb közös osztójával való osztással kapjuk. Pl.: $\frac{30}{48}=\frac{30:2}{48:2}=\frac{15}{24}=\frac{15:3}{24:3}=\frac{5}{8}$. Ilyenkor a számláló és a nevező relatív prímek. A legnagyobb közös osztót, a már korábban említett euklideszi algoritmus segítségével határozhatjuk meg.

[30] Szerencsi Sándor, Papp Olga: A matematika tanítása II., egységes jegyzet, kézirat (107. oldal)

A fentiekből látható, hogy egy szám végtelen sokféleképpen felírható törtként és mindegyik alak ugyan azt az értéket fejezi ki. Pl.: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{-2}{-3}$. Azokat az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ alakú törteket, ahol $\exists k \neq 0, \in \mathbb{Z}$: $\frac{a}{b}=\frac{kc}{kd}$ egy ekvivalencia osztályba sorolhatjuk.

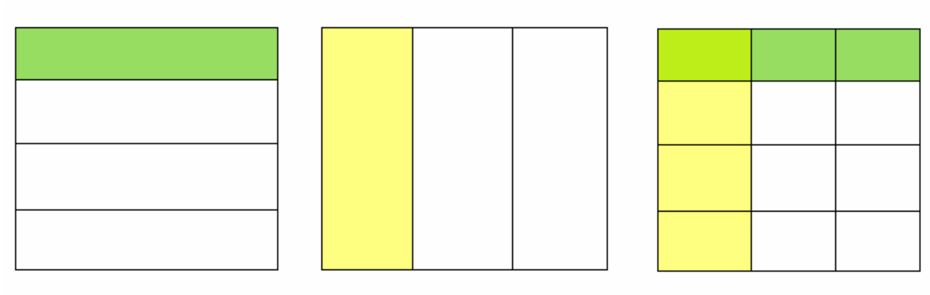
<u>Közös nevező:</u> Mielőtt megfogalmaznánk, hogy is végezzük el a törtek körében a közös nevezőre hozást, érdemes szemléletesen példákon keresztül megmutatni mire való, illetve hogyan is működik a közös nevező. A közös nevezőre a törtszámok összeadásánál van a legnagyobb szükség, ugyanis ha különböző nevezőjű törtek összegére vagyunk kíváncsiak, csak úgy tudjuk őket osztás nélkül, törtként összeadni, ha a nevezőket úgy bővítjük, hogy egyenlőek legyenek, a bővített törtek után pedig a számlálókat már összeadhatjuk, és megkapjuk a végeredményt.

1. ábra



$$\frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{8} \quad = \quad \frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

2. ábra


[31]

$$\frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad = \quad \frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$$

[31] http://www.ntk.hu/segedletek/matek5.html - alapján

Látható, hogy különböző módszerekkel, egymásba csúsztatással jól lehet reprezentálni a közös nevezőt. A második ábrán a végeredménynél nem látszik, de a bal felső sarokban lévő kis kockát kétszer számoljuk az egymásra csúsztatás után, így kapunk $\frac{7}{12}$-et.

Két vagy több tört közös nevezőjéhez bővítéssel vagy egyszerűsítéssel juthatunk. Közös nevezőre hozáskor érdemes a legkisebb közös többszöröst választani, majd ugyanazzal a számmal, amivel a nevezőt szoroztuk, megszorozzuk a számlálót is.

<u>Törtek osztása:</u>

Minden esetben kikötjük, hogy a nevezőben nem szerepelhet a 0.

Adott x szám esetén az x reciproka:

„*(1) az* $\frac{1}{x}$ *szám,*

(2) az a szám, amelynek x-szel való szorzata 1.

Ez a két definíció ekvivalens, vagyis ugyanazt adják a reciprokra. Mindkettőből kiderül az is, hogy 0-nak nincs reciproka.” [32]

1. Törtszámot egész számmal úgy osztunk, hogy a tört számlálóját elosztjuk az egész számmal, és a nevezőt változatlanul hagyjuk, vagy a számlálót nem változtatjuk, és a tört nevezőjét szorozzuk meg. Pl.: $\frac{15}{22}:3=\frac{15:3}{22}=\underline{\frac{5}{22}}$ vagy $\frac{15}{22}:3=\frac{15}{22\cdot 3}=\underline{\frac{15}{66}}$ látható, hogy $\frac{5}{22}=\frac{15}{66}$ hiszen $\frac{15}{66}=\frac{3\cdot 5}{3\cdot 22}=\frac{5}{22}$.
2. Egész számot törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával szorzunk, vagyis a számot megszorozzuk a tört nevezőjével, és ezt a szorzatot elosztjuk a tört számlálójával. Pl.: $3:\frac{15}{22}=3\cdot\frac{22}{15}=\frac{3\cdot 22}{15}=\underline{\frac{66}{15}}=4\frac{6}{15}$.
3. Törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztandót megszorozzuk az osztó reciprokával. Az osztó itt sem lehet 0. Pl.: $\frac{15}{22}:\frac{7}{3}=\frac{15}{22}\cdot\frac{3}{7}=\underline{\frac{45}{154}}$.

<u>Törtek fajtái:</u>

1. Tizedes törtek: Azok a közönséges törtek, ahol a nevező 10 valamely hatványa. Minden közönséges tört átalakítható tizedes törtté úgy, hogy a számlálót maradékosan, vagy maradék nélkül elosztjuk a nevezővel. Másik módszer a tizedes törtté alakításra, hogy a számlálót és a nevezőt is bővítjük ugyan azzal a számmal, hogy a 10 valamely

[32] Pálfalvi Józsefné: Matematika didaktikusan (44. oldal)

hatványát kapjuk a nevezőben, de ez a módszer nem mindig alkalmazható. Végtelen szakaszos tizedes tört esetében például nem. Általánosan N-edes törtről beszélünk azokban az esetekben, amikor a tört nevezője N. Például kettedes törtnek hívjuk az $\frac{x}{2}$ alakú törteket, tehát itt $N = 2$.

A tizedes törtek tulajdonságai az alapműveleteket tekintve hasonlóak a törtekével, követhetők a törteknél tanult szabályok. Elsősorban a mértékegységek közötti átváltásoknál ismerkedhetnek meg tizedes törtekkel a tanulók.

2. Véges tizedes törtek: Ilyen alakba azok a törtszámok írhatók, melyek nevezőjének prímfelbontásában csak a 2 vagy 5 prímszám fordul elő a tört legegyszerűbb alakjában. Pl.: $\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0{,}625$
3. Végtelen szakaszos tizedes törtek: Amikor a törtet tizedes tört alakba írjuk át és az osztás következtében, sohasem keletkezik 0 maradék.

   Pl: $\frac{1}{6} = 0{,}1666666... = 0{,}1\dot{6}$ vagy $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142 85... = 0{,}\overline{142857} = 0{,}\dot{1}4285\dot{7}$
4. Végtelen nem szakaszos tizedes törtek: Végtelen nem szakaszos tizedes törteket nem kaphatunk törtek átalakításából, hiszen nem írható fel két egész szám hányadosaként, tehát ilyen értelemben nem közönséges törtszám. Mivel a törtszámot más néven racionális számnak nevezzük, ilyenek a véges és végtelen szakaszos törtek, így a végtelen nem szakaszos tizedes törteket irracionális számoknak nevezzük. Ezen fogalmakról majd a későbbiek folyamán lesz bővebben szó.

   Pl.: $0{,}41421356237309504880168872420 97... = \sqrt{2}$

   $3{,}14159265358979323846264338327 95... = \pi$ (Ludolph-féle szám)

   $2{,}71828182845904523536028747135... = e$ (Euler-féle szám)

Állítás: Minden racionális szám felírható szakaszos tizedes törtként (1) és minden periodikus tizedes tört felírható $\frac{a}{b}$ alakban (2).

Bizonyítás: (1) „*...ha az* $\frac{a}{b}$ *törtnél az osztás folyamán mindig lesz maradék, akkor a b-vel való osztásnál a maradék az* 1*;* 2*;* 3*;...;b*–1 *számok valamelyike, tehát a maradék legfeljebb (b*–1*) féle lehet. Ezért előbb-utóbb ismétlődő maradékhoz jutunk és onnan kezdve az osztási eljárás folytán periodikus ismétlődés lesz. Emiatt a hányados számjegyeiben is periodikus ismétlődés* *mutatkozik. Ha olyan az osztás, hogy egyszer nem lesz maradék, azt úgy is tekinthetjük, hogy a maradék 0, és ezért a hányadosban periodikusan ismétlődik a 0."*[33] □

(2) Írjuk fel a szakaszos, itt most végtelen tizedes törtet ilyen alakban:

$0,\overline{a_1 a_2 ... a_n}\,\overline{a_1 a_2 ... a_n} ... = \frac{k}{10^n} + \frac{k}{10^{2n}} + ... = x$, végtelen mértani sor $q = \frac{1}{10^n}$

$(k = \overline{a_1 a_2 ... a_n})$

$$k\left(\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + ...\right) = x \qquad /\left(\frac{1}{10^n} - 1\right)$$

$$k\left(\frac{1}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{3n}} + ... - \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{2n}} - ...\right) = x\left(\frac{1}{10^n} - 1\right)$$

Itt látható, hogy a bal oldalon minden tag kiesik, kivéve a $-\frac{1}{10^n}$.

$-\frac{k}{10^n} = x\left(\frac{1}{10^n} - 1\right) = x\frac{1 - 10^n}{10^n}$ Egyszerűsíthetünk $\frac{1}{10^n}$ -nel

Végül $\underline{\underline{x = \frac{k}{10^n - 1}}}$ lesz a végeredmény. □

Ilyen átírásra példák: $0,\overline{27} = \frac{27}{10^2 - 1} = \frac{27}{100 - 1} = \frac{27}{99}$

$$0,\dot{3} = \frac{3}{10^1 - 1} = \frac{3}{10 - 1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,\dot{9} = \frac{9}{10^1 - 1} = \frac{9}{10 - 1} = \frac{9}{9} = 1$$

Megjegyezhetjük, hogy a bizonyításban szerepelt a végtelen mértani sor.

$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... = S,\ \ ha\ 0 < |q| < 1,$ akkor a végtelen mértani sornak véges összege van.

$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$, mert $q^n \to 0$, ha $n \to \infty$.

2.4.2. Középiskola

❖ Számrendszerek

A számrendszerek tanításának előkészítésénél nagy segítséget jelenthet az úgynevezett Dienes-készlet, melyet igen gyakran használnak az általános iskolák alsó tagozataiban, illetve

[33] Hajnal Imre, Némethy Katalin: Matematika I. Gimnázium (20. oldal)

alkalmazhatunk még pénzérméket, amikkel könnyebben megvalósítható az egyes számrendszerekből az átváltás másokba.

„Az egyes korok és népek számírásánál különös jelentősége van a jegyek alaki- és helyi értékének, az összeadási, kivonási és szorzási elvnek, a nagysági sorrendnek stb. Napjainkban már csaknem mindenütt a tízes helyiértékes számírásmódot használják. Ez azt jelenti, hogy számrendszerünk alapszáma a tíz, és az egyes jelek – helyüktől függően – jelölhetnek egyeseket, tízeseket, százasokat stb." [34] Ezt az írásmódot, amikor figyelembe vesszük a helyi értéket, hindu–arab számírásnak nevezzük, szemben például a sokkal kevésbé fejlett római, hieroglifikus számírásánál, melynél a helyi értéknek egyáltalán nincs szerepe.

„A maradékos osztás segítségével bizonyítható, hogy minden természetes szám felírható tízes számrendszerben, azaz $a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ *alakban, ahol* n *valamilyen alkalmas nem-negatív egész szám; és az* $a_n, a_{n-1}, ...a_2, a_1, a_0$ *számok számjegyek – azaz nem-negatív és 10-nél kisebb számok – továbbá* $a_n \neq 0$*. Bármely számnak a tízes számrendszerben való fenti felírása egyértelmű…"* [35] Jelen esetben a számrendszer alapszáma a 10-es.

Ugyanígy, minden szám felírható tetszőleges, 2-nél nagyobb egész alapú számrendszerben, csak ott természetesen nem a tíz hatványai segítségével, hanem az adott alapszáméval. Pl.:

Tízes számrendszer:

$$4562 = 4000 + 500 + 60 + 2 = 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10 = $$
$$= 4562_{10}$$

Kettes számrendszer:

$$4562_{10} = 4096 + 256 + 128 + 64 + 16 + 2 = 1 \cdot 2^{12} + 0 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 +$$
$$+ 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1000111010010_2$$

Megfigyelhetjük, hogy minden számrendszernél annyi számjegyet használunk fel, amilyen alapú maga a számrendszer. Az informatika területén a kettes számrendszert használják, amihez csak két számjegyet kell felhasználnunk, a 0-t és az 1-est. A hatvanas számrendszert a gyakorlatban is alkalmazzuk a szögek esetében, illetve az óránál.

- ❖ Osztás más számrendszerben

Hasonlóan végezhetők el az alapműveletek, mint a tízes számrendszerben. Egy konkrét példa kettes számrendszerbeli szám írásbeli osztására:

[34] Filep László – Bereznai gyula: A számírás története (11. oldal)
[35] Fried Ervin, Pásztor István, Reiman István, Révész Pál, Ruzsa Imre: Matematikai kisenciklopédia (136. oldal)

$$1 0 1'1'1' : 11 = 111{,}10\dot{1}\dot{0}\ldots = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots_{10} = 23 : 3_{10} = 7{,}\dot{6}_{10}$$

$$\begin{array}{l} \underline{11} \\ 010\;1 \\ \underline{\;\;1\,1} \\ \;\;1\;0\;1 \\ \;\;\;\;1\;\;0\,0 \\ \;\;\;\;\;\;\underline{11} \\ \;\;\;\;0\;0\,1\,0\;0\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Uparrow \\ \textit{tízes számrendsz erben} \end{array}$$

A kettes számrendszer helyett tetszőleges, kettőnél nagyobb pozitív egész számot választhatunk alapszámul, az osztás menete ugyanúgy működni.

❖ Osztással, maradékos osztással, törtekkel kapcsolatos középiskolai feladatok

A példák közismertek. Számos, a témához kapcsolódó feladatot találhatunk a középiskolai tankönyvekben, példatárakban, ezek közül csak néhány érdekesebbet ragadtam ki.

1. Oldjuk meg a következő egyenletet! (p, q, r prímek)

$$p^q + q^p = r$$

Megoldás:

A bal oldal minimuma $2^2 + 2^2 = 8$ (nem prím) $\Rightarrow r > 8$, tehát r páratlan $\Rightarrow$ p és q közül az egyik páros. Ha pl. $p = 2$ akkor $q = 3$ vagy $q = 6k \pm 1$, $(k \geq 1)$

I. $p = 2$ és $q = 3 \Rightarrow r = 2^3 + 3^2 = 17$ megoldás ($p = 3, q = 2, r = 17$ is megoldás)

II. p = 2 és $q = 6k + 1$ esetén $r = 2^{6k+1} + (6k+1)^2 = 2 \cdot 64^k + 36k^2 + 12k + 1$

$64 \equiv 1\ (3) \Rightarrow r \equiv 2 \cdot 1 + 1\,(3) \Rightarrow r \equiv 0\,(3) \Rightarrow r > 8$ miatt r nem lehet prím.

III. p = 2 és $q = 6k - 1$ esetén $r = 2^{6k-1} + (6k-1)^2 = \frac{1}{2} \cdot 64^k + 36k^2 - 12k + 1 =$

$= 32 \cdot 64^{k-1} + 36k^2 - 12k + 1$

$64 \equiv 1\ (3)$ és $32 \equiv 2\,(3) \Rightarrow r \equiv 2 \cdot 1 + 1\,(3) \Rightarrow r \equiv 0\,(3) \Rightarrow r > 8$ miatt r nem lehet prím.

Az egyenlet megoldása tehát : (2,3,17) vagy (3,2,17)

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán: $\frac{11}{19} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$

Megoldás:

$$\frac{11}{19} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \Leftrightarrow 11nm = 19(n+m)\ , \qquad n, m \neq 0$$

$$n \mid 11nm \quad \Rightarrow \qquad n \mid 19(n+m)$$

Három eset lehetséges:

$I.\quad n=1 \quad\Rightarrow\quad 11m=19(1+m) \quad\Rightarrow\quad m=-\frac{19}{8}\notin\mathbb{N}$

$II.\quad n=19 \quad\Rightarrow\quad 209m=19(19+m) \quad\Rightarrow\quad 11m=19+m \quad\Rightarrow\quad m=\frac{19}{10}\notin\mathbb{N}$

$III.\quad n\,|\,n+m \quad\Rightarrow\quad n\,|\,m \quad\Rightarrow\quad m=kn \qquad k\in\ \mathbb{N}^+ \quad\Rightarrow$

$11nkn=19(n+kn)\Rightarrow\ 11kn=19(k+1) \quad\Rightarrow\quad k=\frac{19}{11n-19} \quad\Rightarrow$

$11n-19=1 \quad\Rightarrow\quad n=\frac{20}{11}\notin\mathbb{N}$

$vagy \quad 11n-19=19 \quad\Rightarrow\quad n=\frac{38}{11}\notin\mathbb{N}$

Az egyenletnek tehát nincs pozitív egész megoldása.

Általánosítás

Milyen p,q prímekre lesz megoldása a következő egyenletnek?

$\frac{p}{q}=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}, \quad p,q \quad$ prím, $\quad n,m\in\mathbb{N}$

Megoldás:

$\frac{p}{q}=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\Leftrightarrow pnm=q(n+m), \qquad n,m\neq 0$

$n\,|\,pnm \quad\Rightarrow\quad n\,|\,q(n+m)$

Három eset lehetséges:

$I.\quad \underline{\underline{n=1}} \quad\Rightarrow\quad pm=q(1+m) \quad\Rightarrow\quad m=\frac{q}{p-q} \quad\Rightarrow\quad p-q|q\Rightarrow$

1. $p-q=1 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{p=3}},\ \underline{\underline{q=2}} \quad\Rightarrow\quad 3m=2+2m \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{m=2}}$

$\left(Ell: \quad \frac{3}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2} \qquad vagy \quad \frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)$

2. $p-q=q \quad\Rightarrow\quad p=2q$

$\Rightarrow\quad p=2,\ q=1\notin\mathbb{P}$, ahol $\mathbb{P}$ a prímszámok halmaza

$II.\quad n=q \quad\Rightarrow\quad pqm=q(q+m) \quad\Rightarrow\quad pm=q+m \quad\Rightarrow\quad m=\frac{q}{p-1}\Rightarrow$

1. $\mathrm{p-1=1} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathrm{p=2}}} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{2m=q+m} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathrm{m=q=n}}}\in\ \mathbb{P}$

$\left(Ell: \quad \frac{2}{q}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q}\right)$

2. $p-1=q \quad\Rightarrow\quad p=3,\ q=n=2, \qquad m=1 \quad (I./1.eset)$

$III.\quad n\,|\,n+m \quad\Rightarrow\quad n\,|\,m \quad\Rightarrow\quad m=kn \qquad ,\ k\in\mathbb{N}^+ \quad\Rightarrow$

$$pnkn = q(n+kn) \quad \Rightarrow \quad pkn = q(k+1) \quad \Rightarrow$$

1. $\quad k=1 \quad \Rightarrow \quad pn = 2q \quad \Rightarrow$

$A. \quad p=2 \quad \Rightarrow \quad n=q=m\in \mathbb{P} \quad \Rightarrow \quad$ (II./1.eset)

$B. \quad n=2l \quad \Rightarrow \quad pl=q \Rightarrow \quad l=1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{p=q}},\ \underline{\underline{n=m=2}}$

$$\left(Ell: \quad \frac{p}{p} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

2. $\quad k=q \quad \Rightarrow \quad pqn = q(q+1) \Rightarrow \quad pn = q+1 \Rightarrow \quad \underline{\underline{n=\frac{q+1}{p}}}\in \mathbb{N},$

$$m=kn \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{m=q\frac{q+1}{p}}}$$

$$\left(Ell: \ \frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q+1}{p}} + \frac{1}{q\frac{q+1}{p}} = \frac{p}{q+1} + \frac{p}{q(q+1)} = \frac{pq+p}{q(q+1)} = \frac{p(q+1)}{q(q+1)} = \frac{p}{q} \right)$$

3. $\quad k \mid k+1 \quad \Rightarrow \quad k=1 \quad \Rightarrow \quad (III./1.eset)$

Összefoglalva a fenti egyenletnek akkor van megoldása, ha

$I. \quad p=2 \ \text{és} \quad q=n=m\in \mathbb{P}$

$II. \quad p=q \ \text{és} \quad n=m=2$

$III. \quad \frac{q+1}{p}\in \mathbb{N}, \quad$ ekkor $\ n=\frac{q+1}{p}, \ \ m=q\frac{q+1}{p}$

$\left(pl. \ \ q=5,\ p=3,\ n=2,\ m=10 \qquad \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \right)$ Ide tartozik még az I./1. eset

3. Számoljuk ki a következő törtes kifejezést!

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}} = ?$$

<u>Megoldás:</u> Tegyük fel, hogy $\exists x\in \mathbb{R}$: $\qquad x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}, \qquad x>0.$

Ekkor $\ x = 1+\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lehet csak.

Ez valóban megoldás, hiszen:

$$1+\frac{1}{x}=x \Rightarrow (x>0)\ \underline{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1} \Rightarrow x-1+\frac{1}{x^2}=1 \Rightarrow (x>0)\ 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=1-\frac{1}{x}} \Rightarrow x-1-\frac{1}{x^3}=1-\frac{1}{x} \Rightarrow (x>0)\ 1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\underline{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

n-re vonatkozó teljes indukcióval belátható, hogy

$\frac{1}{x}+(-1)^n\frac{1}{x^n}=\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\frac{1}{x^i}$. Ha $x>1$ és $n\to\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{x^n}=0$ miatt

$\frac{1}{x}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{x^i}$. A jobb oldalon végtelen mértani sor összege van: $a_1=1$, $q=-\frac{1}{x}$.

$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}>1 \Rightarrow 0<|q|<1 \Rightarrow$ az összeg véges.

$$\frac{1}{x}=S=\frac{a_1}{1-q}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}} \Rightarrow x=1+\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2.4.3. Egyetem

❖ Algebra

A matematika egyik fő ága, elsősorban számok, műveletek, egyenletek, illetve ezek viszonyainak vizsgálatával foglalkozik. Különböző területekre osztható, ilyen a klasszikus algebra (pl. polinomok), a lineáris algebra (pl. mátrixok, vektorok) és az absztrakt algebra (pl. algebrai stuktúrák).

Az alábbiakban arra kerestem választ, hogy miként jelenik meg az algebrában az osztás, hol alkalmazható ez az általános iskolás korunk óta ismert és megtanult művelet. Innentől kezdve már nem középiskolásoknak szánt fogalmakat, területeket vizsgálok. Érdeklődő diákoknak egyes részeit érdemes lehet megmutatni, elmagyarázni.

A legfontosabb algebrai struktúrák:

„Elemek nem üres halmazát algebrai struktúrának nevezzük, ha értelmezve vannak e halmazban bizonyos műveletek, és e műveletekre nézve teljesülnek bizonyos azonosságok.”[36]

- Félcsoportnak nevezzük azt a $(H, *)$ algebrai struktúrát, ahol a H nem üres halmazon értelmezve van egy $*$ asszociatív művelet.

Csoport: $(\mathrm{G},\cdot)$ rendezett páros vagy algebrai struktúra, ahol G félcsoport.

[36] Fried Ervin, Pásztor István, Reiman István, Révész Pál, Ruzsa Imre: Matematikai kisenciklopédia (129. oldal)

1. Létezik neutrális eleme (jobb és bal egységelem, e)

   $\exists e_j, e_b \in G,\ hogy\ \forall\ a \in G : ae_j = e_b a = a$

2. Minden G-beli elemnek van jobb és bal inverze (a^{-1})

   $\forall a \in G\ esetén\ \exists\ a_j^{-1}, a_b^{-1} \in G : aa_j^{-1} = a_b^{-1}a = e$

- Abel-csoportnak vagy kommutatív csoportnak nevezzük azt a csoportot, ahol a rajta értelmezett művelet kommutatív. ($\forall g, h \in G : gh = hg$)

Gyűrű: $(\mathrm{R},+,\cdot)$ olyan kétműveletes (összeadásnak és szorzásnak nevezett műveletek) struktúra, ahol R nem üres halmaz és amelyre igaz:

1. $(\mathrm{R},+)$ Abel-csoport
2. $(\mathrm{R},\cdot)$ Félcsoport
3. Érvényes a (kétoldali) disztributivitás

   $\forall r_1, r_2, r_3 \in R\ esetén\ r_1(r_2 + r_3) = r_1r_2 + r_1r_3\ és\ (r_2 + r_3)r_1 = r_2r_1 + r_3r_1$

- Kommutatív gyűrűnek nevezzük azt a gyűrűt, ahol a szorzás művelet kommutatív
- Egységelemes gyűrűnek nevezzük azt a gyűrűt, ahol a szorzásnak van egységeleme
- Nullosztómentes gyűrűnek nevezzük azt a gyűrűt, ahol nem létezik nullosztó, azaz $\forall r_1, r_2 \in \mathrm{R}$ esetén $r_1 \cdot r_2 = 0$ csak úgy teljesülhet, ha $r_1 = 0$ vagy $r_2 = 0$.

Test: $(\mathrm{T},+,\cdot)$ olyan kétműveletes struktúra, ahol T nem üres halmaz és amelyre igaz:

1. $(\mathrm{T},+)$ Abel-csoport
2. $(\mathrm{T}\backslash\{0_+\},\cdot)$ Abel-csoport
3. Érvényes a disztributivitás (a $\cdot$ művelet a $+$-ra nézve)

   $\forall t_1, t_2, t_3 \in T\ esetén\ t_1(t_2 + t_3) = t_1t_2 + t_1t_3$

- Ferdetestnek nevezzük azt a testet, ahol a szorzás nem kommutatív

A legfontosabb számhalmazok:

Természetes számok – $\mathbb{N}^+$: Az 1 ismételt összeadásával keletkező számok: 1, 1+1=2, 1+1+1=3…A halmazon értelmezzük az alapműveletek közül az összeadást és a szorzást, ezenkívül a hatványozást természetes kitevővel. A természetes számok halmaza zárt ezen műveletekre nézve, hiszen bármely két természetes szám összege és szorzata természetes szám, valamint természetes kitevővel hatványozáskor is természetes számot kapunk. Algebrai szempontból a természetes számok halmaza az összeadásra kommutatív félcsoportot alkot. Ezen kívül szintén kommutatív félcsoportot alkot a szorzásra nézve, és a szorzás disztributív az összeadásra nézve. Ahhoz, hogy további műveleteket vizsgáljunk, bővítenünk kell a számfogalmat, ugyanis a kivonás legtöbbször nem mindig végezhető el a természetes számok körében, két természetes szám különbsége már nem minden esetben természetes szám. Olyan halmazt keresünk, melyre lényegében igazak az eddigiek, vagyis követjük a *permanencia*[37] elvet, ezenkívül az $\underline{a+x=b \Rightarrow x=b-a}$ egyenlethez keressük azokat az x értékeket, ahol $a,b \in \mathbb{N}^+$ és mindig van megoldás. A csoport léthez tehát szükségünk van a neutrális elemre és az invertálhatóságra.

<u>Egész számok – $\mathbb{Z}$:</u> A $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ végtelen halmaz. Itt is értelmezzük az összeadást, szorzást és az összeadás inverz műveletét, vagyis a kivonást, valamint a hatványozást pozitív egész kitevővel. Az egész számok esetén a természetes számokat bővítjük, azaz be kellett vezetnünk a negatív egész számokat. Az egész számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra és kivonásra, az összeadásra nézve Abel-csoportot alkotnak. Tehát az összeadás kommutatív, asszociatív, létezik nullelem és minden elemnek van ellentettje: $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$-re $a+b=b+a$, $a+(b+c)=(a+b)+c$, $\exists 0: a+0=0+a$, $\exists -a: a+(-a)=(-a)+a=0$, $0,(-a) \in \mathbb{N}$. Az egész számok halmaza az összeadásra és szorzásra kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrűt alkot, vagyis az összeadásra Abel-csoportot alkot, a szorzásra félcsoportot, valamint a szorzás disztributív az összeadásra nézve. Az egész számok halmazában elvégezhető a maradékos osztás, vagyis $\mathbb{Z}$ euklideszi gyűrű, ahol az euklideszi norma az abszolút érték. Ahhoz, hogy az alapműveletek közül értelmezni tudjuk az „osztást” is, bővebb számhalmazt kell keresnünk, az osztás nem minden esetben végezhető el az egész számok körében. Azt szeretnénk, hogy x-re legyen megoldása az $\underline{a \cdot x = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}}$ egyenletnek minden $a,b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ esetén. Ezáltal a gyűrű testté való algebrai bővítéséhez jutunk, ugyanis a test léthez szükség van az egységelemre, valamint minden nem nulla elem multiplikatív inverzére.

<u>Racionális számok – $\mathbb{Q}$:</u> Az $\frac{a}{b}$ alakú törtet, ahol $a,b \in \mathbb{Z}$ és $b \neq 0$, racionális számnak nevezzük. A racionális számok körében értelmezzük az összeadást, szorzást, inverz műveleteiket (kivonás, osztás) és a hatványozást egész kitevővel. A racionális számok halmaza zárt ezen műveletekre nézve. A racionális számok Abel-csoportot alkotnak az összeadásra, és a nem nulla elemek a szorzásra, valamint a szorzás disztributív az összeadásra nézve. Mivel a szorzás asszociatív, kommutatív, létezik egységelem és a nullán kívül minden

---

[37] *„…lehetőleg minél több azonosság maradjon érvényben.”* - Fried Ervin, Pásztor István, Reiman István, Révész Pál, Ruzsa Imre: Matematikai kisenciklopédia (13. oldal)

elemnek van multiplikatív inverze, melyet az osztás segítségével kaptunk meg, így a racionális számok testet alkotnak. Ahhoz, hogy értelmezni tudjuk az eddigi műveleteken kívül a hatványozást racionális kitevővel is, újabb bővítésre van szükség, hiszen a racionális számok halmaza nem zárt a racionális kitevővel való hatványozásra, a művelet kivezet a halmazból. Tehát olyan x-eket keresünk, melyek megoldásai az $\underline{x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a},\ a \in \mathbb{Q}}$, $a \geq 0$ és $n \in \mathbb{N}$ egyenletnek. Speciálisan az $x^2 = 2$ egyenletnek legyen megoldása.

Valós számok – $\mathbb{R}$: A racionális és irracionális számok uniója. Az irracionális számok ($\mathbb{Q}^*$) nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, azaz közönséges törtként (nem szakaszos, végtelen tizedes törtek). Az irracionális számok két halmazra oszthatók, melyeknek nincs közös elemük, az algebrai ($\mathbb{A}$) és transzcendens ($\mathbb{T}$) számok halmaza. Az algebrai számok testet alkotnak. Egy irracionális szám algebrai, ha van olyan racionális együtthatós polinom, melynek gyöke, különben transzcendens. Az irracionális számok körében a transzcendes számoknak nagyobb a számossága, mint az algebrai számoknak, mert ez utóbbi $\aleph_0$ (megszámlálhatóan végtelen), az irracionális számok halmazának, pedig nagyobb a számossága, mint a racionális számok halmazának.

A valós számokon értelmezzük a négy alapműveleten kívül a hatványozást tört és irracionális kitevővel is (megfelelő kikötésekkel). Algebrai szempontból az összeadás és a szorzás műveletekkel testet alkot és természetesen az összeadásra és a nem nulla elemek a szorzásra Abel-csoportot, valamint a szorzás disztributív az összeadásra nézve. Ahhoz hogy meg tudjunk oldani olyan egyenleteket, mint az $\underline{x^a = b \Rightarrow x = \sqrt[a]{b},}$ $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}$, speciálisan: $x^2 = -1$, szükségünk van még nagyobb számhalmazra. Itt ugyanis x-re nem kapunk valós megoldást. A középiskolások számára általában itt ér véget a számkörök bővítése, vagyis ezzel zárul a számfogalom. Érdemes továbbmenni és megmutatni, akár csak említés szintjén, hogy van tovább, létezik ennél bővebb halmaz is.

Komplex számok – $\mathbb{C}$: Komplex számnak nevezzük az $a + b \cdot i$ alakú kifejezés, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és i az úgynevezett imaginárius (képzetes) egység, melyre $i = \sqrt{-1}$. A kifejezésben a-t valós, $b \cdot i$-t képzetes résznek nevezzük. A komplex számokon értelmezzük a szokásos alapműveleteket, valamint a hatványozást és a gyökvonást. A komplex számok testet alkotnak. A komplex számok testet alkotnak, továbbá a komplex számok teste a valós számokénak algebrai lezártja.

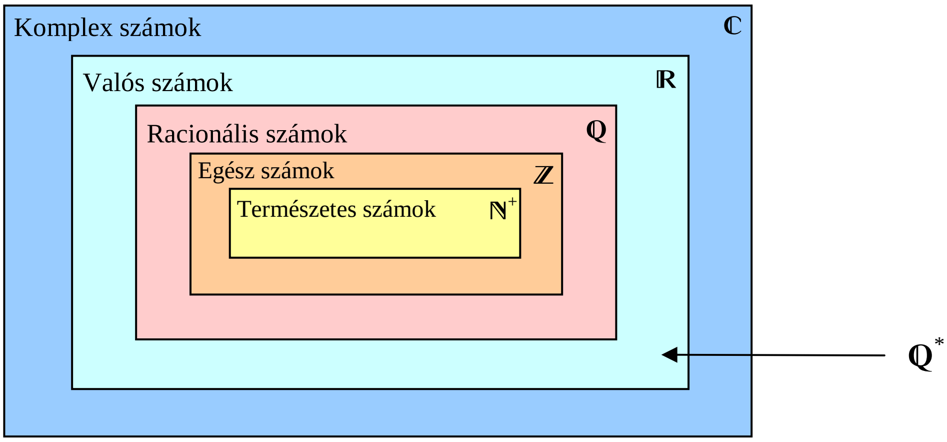
A komplex számok osztásának tárgyalását könnyebbé teszi a konjugált fogalmának bevezetése. A $z = a + bi$ számnak a $\bar{z} = a - bi$ szám a konjugáltja.

1. $z = a + bi$ – t osztjuk egy valós r számmal: $\frac{a}{r} + \frac{b}{r}i$, ahol $r \neq 0$.

2. $z = a + bi$-t osztjuk egy komplex számmal: $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ osztás elvégzésekor mindkét tagot meg kell szorozni a nevező konjugáltjával, vagyis $r \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{r} = \frac{ac - adi + bic - bdi^2}{r} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{r} = \frac{ac+bd}{r} + \frac{bc-ad}{r}i.$$

Összefoglalva ezen az ábrán jól látható a fent leírt számhalmazok viszonya:



- Maradékos osztás gyűrűben

A maradékos osztás elvégezhető a gyűrűket (nullosztómentes, kommutatív, egységelemes) tekintve az egész számok körében, a Gauss-egészek között és a test fölötti polinomgyűrűben is, melyet a későbbiek folyamán tárgyalok részletesebben. A maradékos osztáshoz szükség van egy függvény bevezetésére, ami a gyűrű nem nulla elemein van értelmezve, értéke pedig egy nemnegatív egész. Ezt a függvényt euklideszi normának nevezzük. A maradékos osztás azt jelenti, hogy minden gyűrűbeli a és $b \neq 0$ számok esetén keresünk olyan gyűrűbeli q, r-t, hogy: $a = b \cdot q + r$, ahol $r = 0$ vagy $\varphi(r) < \varphi(b)$. Az olyan gyűrűt, amin értelmezhető ilyen függvény, euklideszi gyűrűnek nevezzük. A fenti példákon kívül euklideszi gyűrű még a racionális számoknak a páratlan nevezőjű törtekből álló részhalmaza vagy a véges tizedes törtek halmaz is. Lássuk most ezt a példát!

<u>Véges tizedes törtek halmaza:</u>

Legyen H a véges tizedes törtek halmaza, ekkor $u \in H$ esetén $\exists\, a, k, l \in \mathbb{Z}$, hogy $u = a \cdot 2^k \cdot 5^l$, $u \neq 0$ esetén $(a, 10) = 1$.

Az egységelem: 1, neutrális elem: 0, $u = a \cdot 2^k \cdot 5^l$ ellentettje $-u = -a \cdot 2^k \cdot 5^l$.

Két véges tizedes tört összege és szorzata szintén véges tizedes tört.

Teljesülnek a gyűrűben szükséges műveleti tuljdonságok, tehát $H \subset \mathbb{Q}$ gyűrű.

Euklideszi norma lehet pl.: $\varphi(0)=0,\ \varphi(a \cdot 2^k \cdot 5^l) = |a|$.

Amennyiben így választjuk meg a normát, akkor a maradékos osztás a véges tizedes törtek körében könnyen visszavezethető az egész számok körében történő maradékos osztásra.

Maradékos osztás:

Legyen $u, v \in H, uv \neq 0$, azt kell megmutatni, hogy $\exists\, w, r \in H$, hogy $u = vw + r$ és $\varphi(r) < \varphi(v)$. Legyen $u = a \cdot 2^k \cdot 5^l$, $(a,10)=1$ és $v = b \cdot 2^i \cdot 5^j$, $(b,10)=1$ ekkor $a \cdot 2^k \cdot 5^l = b \cdot 2^i \cdot 5^j \cdot w + r$ és osszuk a-t maradékosan b-vel $\mathbb{Z}$-ben: tehát $\exists\, q, m \in \mathbb{Z}$ és $a = bq + m$, ahol $|m| < |b|$. Ha $w = q \cdot 2^{k-i} \cdot 5^{l-j}$ akkor $a \cdot 2^k \cdot 5^l = b \cdot 2^i \cdot 5^j \cdot q \cdot 2^{k-i} \cdot 5^{l-j} + m \cdot 2^k \cdot 5^l$. Így teljesül, hogy $\varphi(\mathrm{r}) = |m| < \varphi(v) = |b|$ és $w = q \cdot 2^{k-i} \cdot 5^{l-j} \in H$ és $r = m \cdot 2^k \cdot 5^l \in H$.[38]

- Polinomok

  „Legyenek $a_0, a_1, ..., a_n$ egy T számtest elemei. Azt mondjuk, hogy az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ kifejezés T-beli együtthatós polinom, vagy polinom a T *számtest felett, és az $a_0, a_1, ..., a_n$ számok az $f(x)$ polinom együtthatói."*[39]

  A számtest itt jelentheti a racionális, valós vagy komplex számok testét és ezen kívül foglalkozhatunk még egész együtthatós polinomokkal is. A T test feletti polinomok körében egyértelműen elvégezhető műveletek az összeadás, kivonás, szorzás. A polinomok e műveletekre nézve zárt halmazt alkotnak. Az összeadás és a szorzás kommutatív, asszociatív és a szorzás disztributív az összeadásra nézve. Ezen tulajdonságok miatt a polinomok, ahogy az egész számok is, gyűrűt, méghozzá úgynevezett polinomgyűrűt alkotnak ($T[x]$) a T számtest felett. Az osztás, ahogy az egész számok körében, itt sem végezhető el mindig, ugyanis inverze vagy reciproka csak a nem nulla konstans polinomoknak van.

  Maradékos osztás polinomok körében:

  „Legyen R szokásos gyűrű. Ekkor az $R[x]$ polinomgyűrűben minden olyan $g \in R[x]$ polinommal lehet maradékosan osztani, amelynek főegyütthatója invertálható." [40] Ebben az esetben a norma lehet a polinomok fokszáma.

[38] a példa feladatként megtalálható Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet című könyvében
[39] Fried Ervin, Pásztor István, Reiman István, Révész Pál, Ruzsa Imre: Matematikai kisenciklopédia (47. oldal)

Másképp tömören ez azt jelenti, hogy egyértelműen létezik $q(x), r(x)$:

$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ és r foka kisebb, mint g foka, vagy $r(x) = 0$.

Ezt modellezhetjük egy program segítségével, mely egy tetszőleges fokszámú egész együtthatós polinomot maradékosan eloszt egy nála nem nagyobb fokszámú egész együtthatós polinommal. Szakdolgozatom utolsó fejezetében e programot mutatom be, konkrét példával kipróbálva.

Horner-elrendezés:

„Egy nullosztómentes (egységelemes, kommutatív) R gyűrű (speciálisan egy test) fölött a gyöktényezők egyszerre is kiemelhetők: minden nem nulla $f \in R[x]$ polinom fölírható $f(x) = (x - b_1)...(x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, ..., b_k$ elemek az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak egyáltalán nincs gyöke R-ben. Ezért nullosztómentes gyűrű fölött egy polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka."[41] Tehát egy racionális együtthatós polinomoknak csak véges sok racionális gyöke lehet.

Egész együtthatós polinom egész gyökeit keressük. Egy racionális együtthatós polinomból, az együtthatók közös nevezőre hozása után a nevezővel felszorozva egész együtthatós polinomot készíthetünk. Ennek a polinomnak a gyökei így megegyeznek a racionális együtthatós polinom gyökeivel. Ezért elég megkeresni az egész együtthatós polinom racionális gyökeit. Erre szolgál a következő tétel:

„Racionális gyökteszt: Tegyük föl, hogy a $\frac{p}{q}$ már nem egyszerűsíthető tört gyöke az f egész együtthatós polinomnak. Ekkor a számláló (azaz p) osztja f konstans tagját, a nevező (azaz q) pedig osztja f főegyütthatóját." [42] (Az egész együtthatós polinomok esetében pedig a polinom egész gyöke osztja a polinom konstans tagját.)

Így elegendő véges sok esetet kipróbálnunk a gyökök megkeresésekor, hiszen a konstans tagnak (amennyiben nem nulla), valamint a főegyütthatónak csak véges sok osztója lehet, bár nem feltétlenül mind gyök, de ezek között van az összes. A véges sok lehetséges gyök megkeresésének megkönnyítésére alkalmazható egy algoritmus, az úgynevezett Horner-elrendezés. A séma alkalmazásával n darab szorzást és n darab összeadást végzünk, míg a hagyományos lépésenkénti behelyettesítéssel, ahol

[40] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába (88. oldal)
[41] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába (57. oldal)
[42] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába (98. oldal)

először hatványozunk, majd szorzunk és végül összeadunk, a szorzások száma $2n-1$ az összeadásoké pedig n. Tehát érdemes a Horner-elrendezést használnunk, melynek lépésszáma n^2 vagyis „lefut" $O(n^2)$ (jelölés: nagy ordó) időben, ami azt jelenti, hogy az algoritmus futási ideje n^2-tel arányos, szemben a hagyományos behelyettesítéssel, ahol a lépésszám $(2n-1)n = 2n^2 - n$, így $O(2n^2)$ idejű, ami lényegesen több.

Természetesen ahhoz, hogy a behelyettesített szám gyöke legyen a polinomnak, a táblázat jobb alsó sarkában, azaz az $f(\alpha)$ helyén 0-nak kell állnia. A táblázatban α jelenti a behelyettesíteni kívánt számot, $a_n,...,a_0$ rendre a polinomok együtthatói, amit a nulla esetén is ki kell írni. A második sorba, balról jobbra pedig úgy kerülnek be a $b_{n-1},...,b_0$, majd $f(\alpha)$ számok, hogy a felette lévő értékhez hozzáadjuk a sorban megelőző érték és a helyettesített szám szorzatát, kivétel az első esetben, amikor lemásoljuk a legmagasabb fokú tag együtthatóját.

	a_n	a_{n-1}	...	a_i	...	a_1	a_0
α	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = b_{n-1}\alpha + a_{n-1}$	...	$b_{i-1} = b_i\alpha + a_i$	...	b_0	$f(\alpha) = b_0\alpha + a_0$

Nézzünk egy konkrét példát: $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 4x - 10$, $\alpha = 4$

	3	-8	0	4	-10
4	3	$3 \cdot 4 - 8 = 4$	$4 \cdot 4 + 0 = 16$	$16 \cdot 4 + 4 = 68$	$68 \cdot 4 - 10 = 262 = \mathrm{f}(4)$

$f(4) = (((3 \cdot 4 - 8)4 + 0)4 + 4)4 - 10 = 262$, a polinomnak tehát nem gyöke a 4.

A Horner-elrendezést valójában egész együtthatós polinomok egész gyökeinek megkeresésére használjuk, de alkalmazható racionális együtthatós polinomok racionális gyökének megkeresésére is, hiszen minden racionális együtthatós polinom egyértelműen felbontható egy egész együtthatós primitív polinom és egy tovább már nem egyszerűsíthető racionális szám szorzatára.

3. Programok

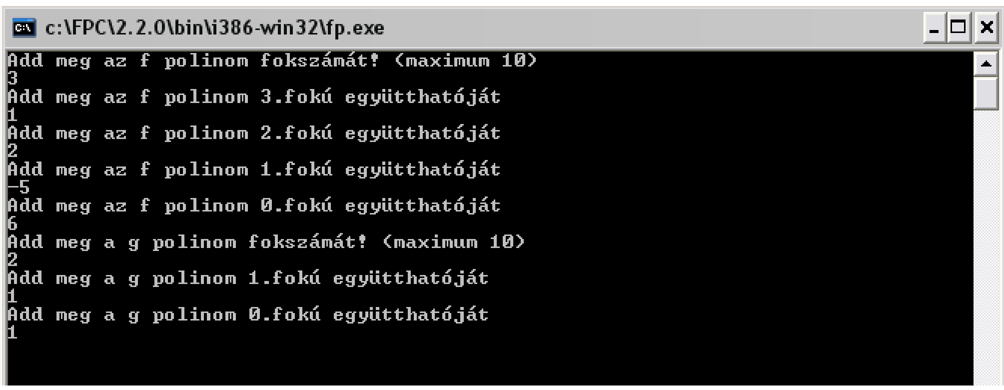
I. A program az egész együtthatós polinomok körében szemlélteti a maradékos osztást. A polinomot tömbben tároltam, az első koordinátája a fokszám, a többi az együtthatók.

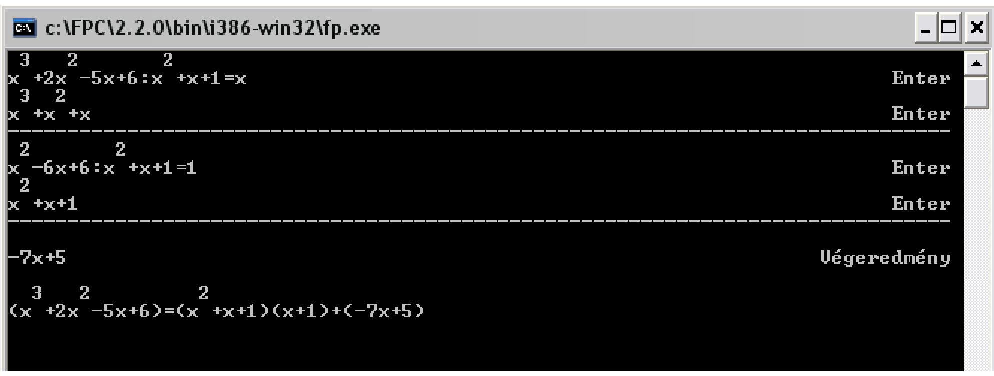
Eljárások, függvények:

1. Beolvas: Beolvassa az f (osztandó), g (osztó) polinomokat és lenullázza a maradék polinomot.
2. Kiír: Kiírja az f polinomot a karakteres képernyő adott pozíciójára.
3. Oszt: Elosztja az f legnagyobb fokú tagját g legnagyobb fokú tagjával.
4. Null: Logikai függvény, igaz, ha f a nulla polinom.
5. Szorzás: Egy tagot szoroz egy polinommal.
6. Ellentett: Egy polinom ellentettjét veszi.
7. Összead: Két polinomot összead.
8. Másol: Egy polinomot átmásol egy másikba.

Egy konkrét példa:

$x^3+2x^2-5x+6 : x^2+x+1 \qquad x^3+2x^2-5x+6=\underline{(x+1)}(x^2+x+1)+\underline{(-5x+7)}$





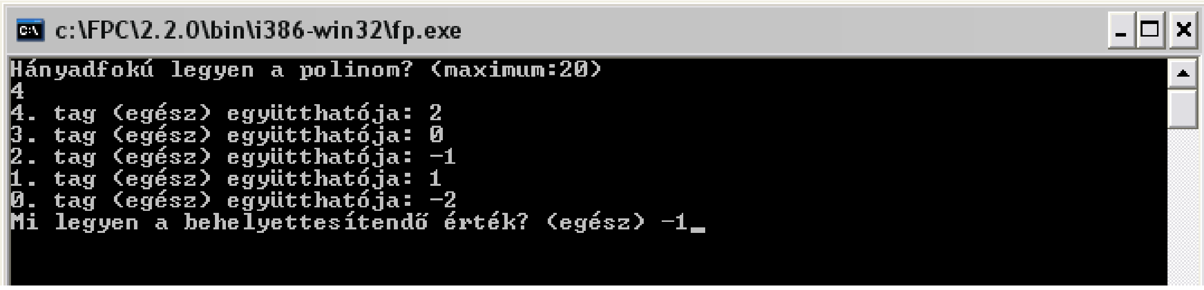
II. A program az egész együtthatós polinomok körében a Horner-elrendezés segítségével eldönti egy adott egész számról, hogy gyöke-e a polinomnak. A polinomot tömbben tároltam.

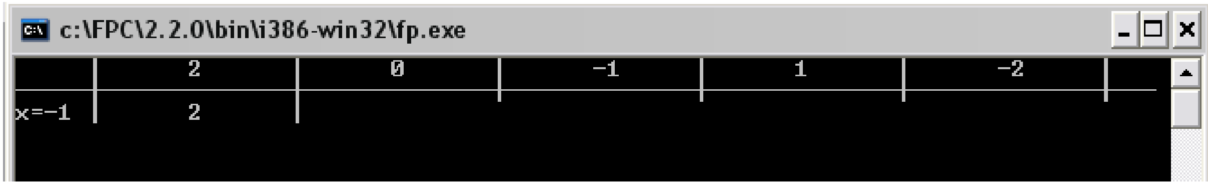
Főbb eljárások:

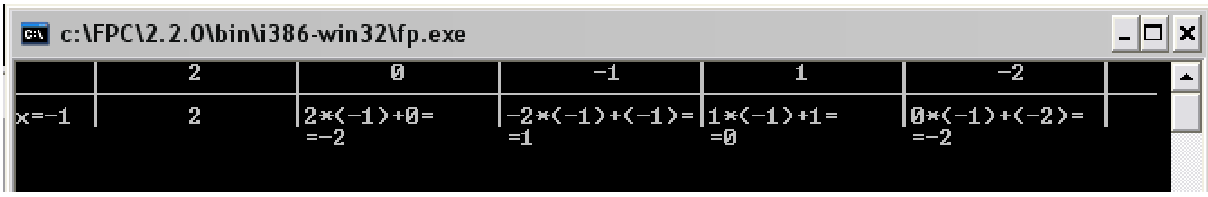
1. Beolvas: Beolvassa az f polinomot és a behelyettesíteni kívánt egész számot.
2. Kiír: Kiírja a táblázat adatait és a végeredményt a karakteres képernyő adott pozíciójára.

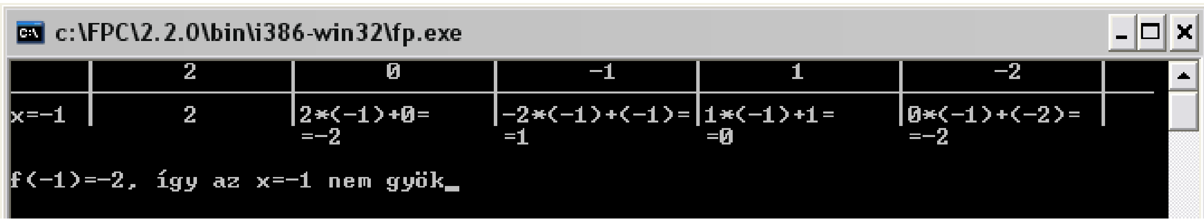
Egy konkrét példa:

$2x^4 - x^2 + x - 2 \qquad \alpha = -1 \qquad 2(-1)^4 - (-1)^2 - 1 - 2 = -2 \neq 0$









ÖSSZEFOGLALÁS

Szakdolgozatomban igyekeztem bemutatni az algoritmusok és kiváltképp az osztás fontosságát, alkalmazásukat. Az első fejezetben a rövid történelmi áttekintést követően próbáltam minél több és minél jellemzőbb, érdekesebb példát hozni az algoritmusok megjelenésére, használatára. Meglátásom szerint nagy hangsúlyt kell fektetni már az alapok tanításánál, vagyis az általános iskolában az úgynevezett algoritmikus gondolkodás kialakítására, illetve fejlesztésére, ugyanis ez jelentős segítséget nyújt a tanulók fejlődésében és a matematika megértését is elősegíti a későbbiek folyamán. Az osztás tanítása című fejezetben színes példákon és ábrákon keresztül szemléltettem az egyes osztással kapcsolatos tananyagokat, tanításuk módszerét. Véleményem szerint a diákok túlnyomó többsége nem is sejti, hogy milyen nagy szerepe lesz az általános iskolában megismert és megtanult osztásnak a későbbiek folyamán, fontos lenne az iskolában rávilágítani erre. Dolgozatom utolsó fejezetében egy szemléltető programot írtam, ami talán több szempontból is hasznos lehet. Egyrészt bármilyen témát is szeretnénk megtanítani a diákoknak nagy segítséget jelenthetnek az olyan eszközök, jelen esetben egy program, melyen kipróbálhatják önállóan a tanultakat. Másrészt az informatikatudásukra is ösztönző hatással lehet, ha ennek következtében kedvet kapnak saját program elkészítésére. A programot Free Pascal 2.2.0-ban írtam, mivel ez bárki számára ingyenesen elérhető, valamint középiskolában elsősorban ezen a nyelven tanulnak a diákok programozni.

Több típusú, korábban és később íródott szakirodalmat olvastam a témával kapcsolatosan, így szem előtt tartva az általános és középiskolás tantervet, egyetemi tananyagot, építettem egymásra a témaköröket, hogy jól követhető, egységes rendszert alkosson.

Arra törekedtem, hogy mindenütt a legfontosabbakat, legérdekesebbeket emeljem ki, hiszen egy ilyen óriási terület teljes, részletekbe menő vizsgálatára nincs lehetőség a szakdolgozat keretei között. Célom e szakdolgozat írásával az algoritmikus gondolkodásra való törekvés már az általános iskolától kezdve, a tananyag segítségével.

MELLÉKLET

- A fenti I. program kódja, Free Pascalban:

```
program polinomo;
uses crt;
type polinom=array[1..12] of integer;
var f,g,h,s,e,o,a,b,m:polinom;
   i,x,y:integer;

procedure szunet;
var c:char;
begin repeat c:=readkey
      until ord(c)=13; {enter leütési kódja}
end;

procedure enter;
begin gotoxy(75,wherey);
      write('Enter');
      szunet;
end;

procedure beolvas(var f,g,m:polinom);
var i:integer;
begin clrscr;
      repeat writeln('Add meg az f polinom fokszámát! (maximum 10)');
         {$i-}  readln(f[1]); {$i+}
      until (IOResult=0) and (f[1]>=0) and (f[1]<11);
      for i:=1 to f[1]+1 do repeat writeln('Add meg az f polinom ',f[1]-i+1,'.fokú együtthatóját');
                               {$i-}  readln(f[i+1]); {$i+}
                            until (IOResult=0) and (f[i+1]>=-32768) and (f[i+1]<32768) and ((i<>1) or (f[i+1]<>0));
      repeat writeln('Add meg a g polinom fokszámát! (maximum 10)');
         {$i-}  readln(g[1]); {$i+}
      until (IOResult=0) and (g[1]>=0) and (g[1]<11);
      g[2]:=1;
      for i:=2 to g[1]+1 do repeat writeln('Add meg a g polinom ',g[1]-i+1,'.fokú együtthatóját');
                               {$i-}  readln(g[i+1]); {$i+}
                            until (IOResult=0) and (g[i+1]>=-32768) and (g[i+1]<32768) and ((i<>1) or (g[i+1]<>0));
      for i:=1 to 12 do m[i]:=0;
end;

procedure kiir(var f:polinom);
var i:integer;
begin for i:=1 to f[1]+1 do begin if (i=1) and (f[i+1]<0) then write('-');  {elöjel az 1. tagra}
                                  if (i>1) and (f[i+1]>0) then write('+');  {+elöjel}
                                  if (i>1) and (f[i+1]<0) then write('-');  {-elöjel}
                                  if (f[i+1]>0) and (f[i+1]<>1) then write(f[i+1]);  {+együttható}
                                  if (f[i+1]<0) and (f[i+1]<>-1) then write(-f[i+1]);{-együttható}
                                  if (f[i+1]=1) and (i=f[1]+1) then write(f[i+1]);   {konstans tag}
                                  if (f[i+1]=-1) and (i=f[1]+1) then write(-f[i+1]); {konstans tag}
                                  if (f[1]=0) and (f[2]=0) then write(f[2]);        {konstans polinom}
                                  if (i<f[1]+1) and (f[i+1]<>0) then write('x');  {x}
                                  if (i<f[1]) and (f[i+1]<>0) then begin gotoxy(wherex,wherey-1);
                                                                         write(f[1]-i+1);         {kitevö}
                                                                         gotoxy(wherex,wherey+1);
                                                                   end;
                            end;
end;

procedure oszt(var f,g,h:polinom);
```

```
var i:integer;
begin for i:=1 to 12 do h[i]:=0;
      if (g[1]<=f[1]) and ((f[2] mod g[2])=0) then begin h[1]:=f[1]-g[1];
                                                         h[2]:=(f[2] div g[2]);
                                                   end;
end;

function null(var f:polinom):boolean;
begin if (f[1]=0) and (f[2]=0) then null:=true
                              else null:=false;
end;

procedure szorzas(var g,h,s:polinom);
var i:integer;
begin for i:=1 to 12 do s[i]:=0;
      if (null(g)) or (null(h)) then s[1]:=0
                               else s[1]:=g[1]+h[1];
      for i:=1 to g[1]+1 do s[i+1]:=g[i+1]*h[2];
end;

procedure ellentett(var f,e:polinom);
var i:integer;
begin for i:=1 to f[1]+1 do e[i+1]:=-f[i+1];
      e[1]:=f[1];
end;

procedure osszead(var f,g,o:polinom);
var i,j,s:integer;
    eleje:boolean;
begin s:=0;
      for i:=1 to 12 do o[i]:=0;
      if f[1]>g[1] then begin for i:=1 to f[1]-g[1] do begin o[i+1]:=f[i+1];
                                                          s:=s+1;
                                                    end;
                              for j:=1 to g[1]+1 do o[j+s+1]:=g[j+1]+f[j+s+1];
                              o[1]:=f[1];
                        end;
      if g[1]>f[1] then begin for i:=1 to g[1]-f[1] do begin o[i+1]:=g[i+1];
                                                          s:=s+1;
                                                    end;
                              for j:=1 to f[1]+1 do o[j+s+1]:=f[j+1]+g[j+s+1];
                              o[1]:=g[1];
                        end;
      if f[1]=g[1] then begin eleje:=true; s:=0;
                              o[1]:=f[1];
                              for i:=1 to f[1]+1 do begin if (eleje) and (0=f[i+1]+g[i+1])
                                                          then begin s:=s+1;
                                                                     if o[1]>0 then o[1]:=o[1]-1;
                                                               end
                                                          else begin o[i+1-s]:=f[i+1]+g[i+1];
                                                                     eleje:=false;
                                                               end;
                                                    end;
                        end;
end;

procedure masol(var f,a:polinom);
var i:integer;
begin for i:=1 to f[1]+2 do a[i]:=f[i];
end;
```

```
Begin clrscr;
      beolvas(f,g,m);
      clrscr;
      masol(f,a);masol(g,b);
      x:=1;y:=2;
      repeat gotoxy(x,y);
             kiir(f);
             write(':');
             kiir(g);
             x:=wherex;y:=wherey;
             enter;
             gotoxy(x,y);
             write('=');
             oszt(f,g,h);
             osszead(m,h,o);
             masol(o,m);
             kiir(h);
             enter;
             szorzas(g,h,s);
             x:=1;y:=wherey+2;
             gotoxy(x,y);
             kiir(s);
             enter;
             x:=1;y:=wherey+1;
             gotoxy(x,y);
             for i:=1 to 79 do write('-');
             ellentett(s,e);
             osszead(f,e,o);
             masol(o,f);
             x:=1;y:=wherey+2;
      until (f[1]<g[1]) or ((f[2] mod g[2])<>0);
      x:=1;y:=wherey+2;
      gotoxy(x,y);
      kiir(f);
      gotoxy(69,wherey);
      write('Végeredmény');
      szunet;
      x:=1;y:=wherey+3;
      gotoxy(x,y);
      write('(');kiir(a);write(')');write('=');write('(');kiir(b);write(')');write('(');kiir(m);write(')');
      write('+');write('(');kiir(f);write(')');
      readln;
End.
```

- A fenti II. program kódja, Free Pascalban:

```
program horner;
uses crt;
const maxn=20;
var a:array [0..maxn] of integer;
    n,x,k:integer;

procedure beolvas;
var i:integer;
begin clrscr;
      repeat writeln('Hányadfokú legyen a polinom? (maximum:',maxn,')');
             readln(n);
      until  (n>=0) and (n<=20);
      for i:=n downto 0 do begin write(i,'. tag (egész) együtthatója: ');
                               readln(a[i]);
```

```
                    end;
      write('Mi legyen a behelyettesítendő érték? (egész) ');
      readln(x);
end;

procedure szamol;
begin k:=70 div (n+1);
end;

function zn(var z:integer):string;
begin if z<0 then zn:='('
            else zn:='';
end;

function zz(var z:integer):string;
begin if z<0 then zz:=')'
            else zz:='';
end;

procedure kiir;
var i:integer;
    e,d:longint;
    szoveg:string;
begin clrscr;
      gotoxy(6,1);
      write(chr(179));
      for i:=n downto 0 do begin gotoxy(6+(n-i)*k+(k div 2),1);
                             write(a[i]);
                             gotoxy(6+(n-i+1)*k,1);
                             write(chr(179));
                          end;
      for i:=1 to 79 do begin gotoxy(i,2);
                           if (i mod k)=6 then write(chr(197))
                                          else write(chr(196));
                        end;
      gotoxy(1,3);
      write('x=',x);
      gotoxy(6,3);
      write(chr(179));
      gotoxy(6+(k div 2),3);
      write(a[n]);
      gotoxy(6+k,3);
      write(chr(179));
      d:=a[n];
      e:=0;
      readln;
      for i:=n-1 downto 0 do begin gotoxy(7+(n-i)*k,3);
                               e:=d*x+a[i];
                               write(d,'*',zn(x),x,zz(x),'+',zn(a[i]),a[i],zz(a[i]),'=');
                               gotoxy(7+(n-i)*k,4);
                               write('=',e);
                               gotoxy(6+(n-i+1)*k,3);
                               write(chr(179));
                               readln;
                               d:=e;
                            end;
      gotoxy(1,6);
      if d=0 then szoveg:='gyök' else szoveg:='nem gyök';
      write('f(',x,')=',d,', ','így az x=',x,' ',szoveg);
end;
```

```
begin clrscr;
      beolvas;
      szamol;
      kiir;
      readln;
end.
```

IRODALOMJEGYZÉK

- http://hu.wikipedia.org/wiki/Algoritmus
- http://www.ofi.hu/tudastar/algoritmikus
- Idegen szavak és kifejezések kéziszótára, Legújabb, regiszteres kiadás, Merényi Kiadó
- http://www.idegen-szavak.hu/keres/algoritmus
- Fried Ervin, Pásztor István, Reiman István, Révész Pál, Ruzsa Imre: Matematikai kisenciklopédia, Gondolat Könyvkiadó (Budapest, 1968)
- Sain Márton: Nincs királyi út! Matematikatörténet, Gondolat Könyvkiadó (Budapest, 1986)
- http://sdt.sulinet.hu/Player/Default.aspx?g=2eb7e97e-aae8-4b8c-9dab-aaf93c8e2f96&cid=aea9b0b4-28a7-41ff-be11-5e97912db5d9
- Angster Erzsébet: Programozás tankönyv I. Turbo Pascal, Kiadja: Angster Erzsébet, első kiadás (1995)
- Szlávi Péter, Zsakó László: Mikrológia 18 Módszeres programozás: Programozási bevezető, ELTE IK Informatika Szakmódszertani Csoport, 8., javított kiadás (1991, 2004)
- http://minerva.nik.bmf.hu/portal/eaf/AEK/01.%20%C3%B3ra/Algoritmusok01.pdf
- Szelezsán János: Fejezetek a matematikából I-II. (Számítástechnikusoknak) Tankönyv, LSI Oktatóközpont (Budapest, 1990)
- Dr. Gazdag Zsolt: Számításelmélet, órai jegyzet (2008)
- Zsakó László: Közismereti informatika alapjai 1., előadásjegyzet (saját) (2008)
- Obádovics József Gyula: Matematika, Nyolcadik kiadás, Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1972)
- Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet, második, javított és bővített kiadás, Nemzeti Tankönyvkiadó (Budapest, 2000, 2006)
- Dr. Obádovics J. Gyula: Matematika, I. Kötet, kiadja: az LSI Alkalmazástechnikai Tanácsadó Szolgálat, ERFATERV Nyomda (Budapest, 1990)
- http://svg.elte.hu/
- Freud Róbert: Lineáris algebra, Ötödik, változatlan utánnyomás, ELTE Eötvös Kiadó (2006)
- Ágoston István: Algebra I., gyakorlat jegyzet (saját) (2007)
- Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika, Elméleti matematika, Typotex Kiadó (2006)
- Borgulya István: Evolúciós algoritmusok, Dialóg Campus Kiadó
- Szerencsi Sándor, Papp Olga: A matematika tanítása II., egységes jegyzet, kézirat, 3. változatlan kiadás, Tankönyvkiadó (Budapest, 1989)
- Fried Ervin: Általános algebra, Tankönyvkiadó (Budapest, 1981)
- Filep László: A tudományok királynője, (A matematika fejlődése), Typotex Kft. (Budapest), Bessenyei Kiadó (Nyíregyháza) (1997)
- Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához, ötödik, átdolgozott és bővített kiadás, Tankönyvkiadó (Budapest, 1987)
- http://www.szoroban.hu/
- Esztergályos Jenő: Második matematikám, Az általános iskola 2. osztálya számára, Nyolcadik kiadás, Apáczai Kiadó (Celldömölk, 2008)

- Scherlein Márta, Dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné: Matematika 2., Első kötet, Általános iskola 2. osztály, Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 2005)
- Balassa Lászlóné, Csekné Szabó Katalin, Szilas Ádámné: Harmadik matematikakönyvem, Harmadik osztály, Második kötet, Negyedik kiadás, Apáczai Kiadó (Celldömölk, 2009)
- Dr. Hajdu Sándor főiskolai docens, Köves Gabriella főiskolai docens, Novák Lászlóné tanár, Scherlein Márta tanító: Matematika 2. Program, általános iskola 2. osztály számára, Műszaki Könyvkiadó (Budapest)
- Filep László – Bereznai gyula: A számírás története, Filum Kiadó
- Obádovics J. Gyula: Gyakorlati számítási eljárások, Gondolat Kiadó (1972)
- Pálfalvi Józsefné: Matematika didaktikusan, Typotex Kiadó (Budapest, 2000)
- Dr. Czeglédy István főiskolai docens, Dr. Czeglédy Istvánné vezetőtanár, Dr. Hajdu Sándor főiskolai docens, Novák Lászlóné tanár: Matematika 5. Program, általános iskola 5. osztály, nyolcosztályos gimnázium 1. osztály számára, Tanári kézikönyv átdolgozott kiadása, Calibra Kiadó (Budapest, 1993)
- http://www.youtube.com/watch?v=3ULXhiJqlPs
- http://www.youtube.com/watch?v=ulslr6ZHPbQ
- http://www.youtube.com/watch?v=eDClv8LDrbc&playnext=1&list=PL1E92D4ECC8BFE72D
- http://www.ntk.hu/segedletek/matek5.html
- Hajnal Imre, Némethy Katalin: Matematika I. Gimnázium, Nemzeti Tankönyvkiadó (Budapest)
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, Typotex Kiadó (Budapest, 2007)
- Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis 1., Nemzeti Tankönyvkiadó (Budapest, 2006)