Határérték fogalom Newtontól máig

Szakdolgozat

Készítette: Vasáros Martina
Szak: Matematika Bsc Tanári szakirány
Témavezető: Dr. Munkácsy Katalin
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A gimnáziumi tanulmányaim során azt láttam, hogy azok az osztálytársaim, akik nem jártak matematika fakultációra, kíváncsiak voltak az analízisre.

Dolgozatomban arra a kérdésre keresem a választ, hogy a határérték fogalma korábban szerepelt-e a középiskolában. Megvizsgáltam, hogy az évek során hogyan változott a matematikaoktatás ezen része, megnéztem, hogy a különböző tankönyvek milyen formában vezetik be a fontos fogalmakat, és azt hogy mi okozhatja a nehézségeket a tanulás folyamatában. Kitértem arra is a saját egyetemi tanulmányaimat felelevenítve, hogy az ezen könyvek által szerzett tudás mennyire könnyíti meg a későbbi tanulmányokat.

2. A történeti előzmények néhány adata

A határérték későn jelent meg, fontos előzményét jelentik az infinitezimálisok. Az infinitezimális helyzetét vettem szemügyre az analízis fejlődésében. Arra kerestem adatokat, hogy a kiemelkedő matematikusok elfogadták-e használatát, vagy éppen ellenkezőleg teljesen elutasították létezését. Az infinitezimális a végtelenül kicsi de nullánál nagyobb szám. Az archimédeszi axióma tagadja létezését, viszont számításokban alkalmazható volt. A határérték fogalmának szabatos definiálása és az 1960-ban megjelent nemstandard analízis tisztázta a helyzetet.[1] Az analízis történetéből kiemelek az infinitezimálisok szerepéről szóló néhány részt, és ehhez Davis-Hersh könyvet használtam

[1] A matematika új ágának, a nem standard analízisnek a megalkotója Abraham Robinson volt, aki újra használni kezdte az infinitezimális fogalmát, amelyet a 19. században kiűztek a matematika világából. Emiatt Karl Weierstrass újrafogalmazta Newton és Leibniz számításait is. Viszont Robinson az új matematikai ággal bizonyos értelemben megvédte a 18. században használt matematika nem teljesen szabatos levezetéseit. Az infinitezimálisokkal kapcsolatos ellentmondások tisztázásában pedig az euklideszi geometria számított mértékadónak.)

segítségként.

GÖRÖGÖK

Eukleidész kizárta a végtelen nagyot és a végtelen kicsit, ahogy Arisztotelész is.. Zénon érvelései teljesen tarthatatlanná tették az időnek, mint egymás utáni pillanatok sorozatának, vagy az egyenesnek, mint egymás utáni „oszthatatlanok" sorozatának fogalmát. Archimédesz használta az infinitezimálisokat a végtelen kicsi fogalmát, az eredmények megsejtésére. Ezek segítségével határozta meg bizonyos alakzatok területét. A kimerítés módszerével matematikailag korrekt módon bizonyította az állításokat. A kimerítési módszerében elkerüli az infinitezimálisokat. Az ókori Görögországban használták a következő eljárást: A görbefelülettel határolt testeket, tetszőleges pontossággal, felülről és alulról lépcsőzetes testekkel közelítették meg. Ezt alkalmazta Arkhimédész is a kimerítési módszernél, és ezzel elért az integrál számoláshoz, amit később a nyugati matematika felfedezett.

KÖZÉPKOR

A középkorban a nyugati matematikában először az infinitezimálisok jelentek meg. Cusanus vizsgálta a kör kerülete és területe közötti kapcsolatot. Ebben is felhasználta az infinitezimálisokat. Cusanus szerint: „A végtelen minden tudás forrása, eszköze s ugyanakkor elérhetetlen célja."

Kepler az infinitezimálisok segítségével határozta meg a boroshordók legideálisabb méretezését, ezzel szemben Pascal úgy tekintett a végtelenül nagyra és végtelenül kicsire, mint misztikumokra. L'Hospitaltól, az első analízis tankönyv megalkotójától származik a következő két fontos meghatározás:

Ha két mennyiség csak egy infinitezimálisban különbözik egymástól, akkor azok egyenlőnek tekinthetők.

A görbe olyan egyeneseknek a sokasága, amelyek mindegyike végtelenül kicsi.

Ebből is látszik, hogy L'Hospital elismerte az infinitezimálisok létezését. (Davis-Hersh: A matematika élménye)

NEWTON és LEIBNIZ

Ebben a részben Egmont Colerus: Pythagorastól Hilbertig című könyvét használtam segítségként. Ez egy meglehetősen régi könyv, ami a történetisége miatt is érdekes lehet, szerintem a részletes életrajzi adatok miatt a diákok érdeklődését is felkeltheti. Newton és Leibniz tulajdonképpen Arkhimédész modern megfelelőjének tekinthető. Az infinitezimális matematika megszületésnél nagyon fontos szerepet játszott a csillagászat és a fizika, amely Isaac Newton személyében találta meg legnagyobb képviselőjét. Newtonnak egy egységes mechanikus világképe volt, ennek ellenére vallásos munkákat is írt, és teológiai nézeteket is vallott. Legfontosabb könyve a Princípia volt, amelyet Leibniz meg akart cáfolni, ugyanis nem értett egyet vele az általános gravitációról írtakban, viszont Dynamika című műve végül nem készült el. Newton bár elismerte az infinitezimálisok létezését, számításaiban mégis megpróbálta elkerülni használatukat.

Leibniz nem matematikusnak készült, Nürnbergben tanult jogot, később viszont a párizsi szellemi élet gyújtópontjába került, és egy általános karakterisztikát képzelt el. A számológép feltalálásánál Pascal gondolatait folytatta. Nevéhez fűződik a Leibnizi sor, ami az arkus tangens sorfejtéséből keletkezik, abban az esetben ha x értéke egy. 1673-ban megállapította, hogy a végtelen kalkulus két különálló problémakörből áll. Szerinte az infinitezimálisok probléma nélkül használhatók a számítások során. Leibniztől származik több ma is használt matematikai jelölés: az egyenlőség, a szorzás, a hasonlóság, az egybevágóság, a differenciálhányados és az integrál jele, és jó néhány elnevezés is: függvény, koordináta, differenciálszámítás, integrálszámítás. Valamint Explication de l'Arithmétique Binaire című könyvében, ő írta le először a kettes számrendszert. Leibniz és Newton egymástól teljesen függetlenül fedezték fel a differenciál- illetve az integrálszámítást. Kettejük követői között kialakult az úgynevezett prioritási vita.

3. Tantervi előzmények

3.1 Nemzetközi kezdeményezések

A 20. században reformfolyamatok indultak. A New Math nevű mozgalom viszont nagyon hamar kudarcot vallott, mert hamar rájöttek, hogy ez a felfogás háttérbe szorítja a matematika gyakorlati alkalmazását, és nem veszi figyelembe a az életkori sajátosságokat. Az új irány egyik megkérdőjelezője a magyar származású az USA-ban élő Pólya György volt. Pólya György világhírű matematikus és fizikus volt. A matematikaoktatás megreformálásának egyik fő képviselője, és ő dolgozta ki a heurisztikát. How to solve it (Gondolkodás iskolája) című könyvét 1945-ben adta ki, és ebben írja le a problémamegoldás négy lépését:

1.Értsd meg a problémát

2. Készíts tervet a probléma megoldására

3. Hajtsd végre a tervedet

4. Ellenőrizd az eredményt és gondold át hogyan lehetne javítani rajta

E mozgalom bírálóinak legfőbb gondolata, ami a mai nevelési igényeket tükrözik, az hogy a diákok ne csupán kész ismereteket kapjanak, hanem a tanár segítségével saját maguk jussanak el gondolkodás által a felismerésig. Ez az úgynevezett „problámaorientált matematikaoktatás” elsősorban Pólya Györgynek köszönhetően indult el. [2]

A problémamegoldással kapcsolatban sokféle felfogás figyelhető meg az európai országokban. Itt elsősorban Angliát emelném ki. Az ottani tanterv megköveteli a 9. és 10. osztályos tanulóktól, hogy kutatómunkát végezzenek évente kétszer, és a kutatás közben felmerülő kérdéseket, a folyamatot, és problémamegoldását egy dolgozat formájában kell beadniuk. Igaz, hogy ez nem követel meg a gyerekektől kemény matematikát, mégis hasznos, hogy önálló gyakorlati munkát végeznek. Az Angol minta továbbá abban a lényeges pontban

---

[2] Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet honlapja, Somfai Zsuzsa: A matematika tantárgy helyzete a felső tagozaton és a középiskolában

különbözik a magyartól, hogy analízissel középiskolában alapszinten is foglalkoznak. Itt akik azt választják, hogy matematikából záróvizsgát tesznek, számot kell adniuk a határérték, folytonosság, deriválás, integrálás témaköréről is, ami nálunk közép szinten kiszorult az érettségi vizsgáról.

3.2 Magyarországi kezdeményezések a XX. század második felében

Az 1960-as évek elejétől merült fel a gondolat, hogy a matematika tanítás fejlesztésre szorul. A megújulás egyik kezdeményezője az a Varga Tamás volt, akinek magyarországi kezdeményezése kapcsolódott a külföldi új irányzatokhoz, és így ő is nemzetközileg elismertté vált új eredményeivel. Varga Tamás számos díjjal kitüntetett matematika tanár volt, és nemzetközileg is rengeteg elismerést kapott. Kezdetben matematika tanárként dolgozott, aztán az ELTE falain belül került kapcsolatba a matematikatanárok képzésével. Később kezdett el foglalkozni az általános iskolák matematikaoktatásának megreformálásával. Tanterveket készített, és nagyon sok tankönyv szerkesztésében vett részt. A dolgozatomban később bemutatom az egyik általa szerkesztett matematika tankönyvet. Azt hangsúlyozta, hogy a matematikatanítás lényege az, hogy a diákok aktívan részt vegyenek a tanulás folyamatában, gondolkozzanak, ne csak mechanikus ismereteket sajátítsanak el. Az ő megújítási terve bár csak az általános iskolákra korlátozódott, mégis hatására elindult a gimnáziumi tantervek fejlesztése is. A nyolcvanas és kilencvenes években történt iskolákat érintő változások a matematika-tanterveket is alapvetően megváltoztatta. A nemzeti alaptanterv létrehozása során az alkotóknak sikerült úgy ötvözniük a magyarországi nevelési hagyományokat az új szemléleti elemekkel, hogy a legtöbben egyetértsenek vele, és szívesen fogadják a változásokat. A középiskolai matematika-kerettanterv kiemeli a legfontosabb új elemeket a matematikatanárok számára. Ezek a következők:

- „a modellalkotás, matematizálás jelentőségének növekedése;
- a matematika alkalmazási terének növekedése;

- egyensúly a matematika belső struktúrájának kiépítése és a tanultaknak a mindennapi életben, más tárgyakban való felhasználása, eszközként való alkalmazása között;
- a modern oktatási, tanulási technológiák beépítése a mindennapi iskolai oktatási, nevelési tevékenységbe.”[3]

4. Határérték fogalom az egyetemi analízis tananyagban

A felsőoktatás matematika anyagának nagyon fontos, alapvető része a határérték és folytonosság témaköre. Ezért szeretnék most egy áttekintést adni arról, ahogy ez elhangzik az egyetem falain belül. Ehhez a részhez elsősorban a saját előadás, és gyakorlatjegyzeteimet használtam, és ezek alapján foglaltam össze a legfontosabb fogalmakat, és tételeket.

A határérték fogalmának egy nagyon leegyszerűsített módja a következő: Egy függvény határértéke az a pontban A, ha az a-hoz közeli helyeken a függvény A-hoz közeli értékeket vesz fel.

A sorozatok határérték fogalmának definiálásához szükség van a torlódási pont definíciójára:

Torlódási pont:

Legyen $H \subset R$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy egy $a \in R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ torlódási pontja H-nak, ha

$$\forall\ r > 0 \text{ esetén } \mathring{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset,$$

vagyis ha az a pont tetszőleges környezete tartalmaz tőle különböző H-beli elemet. Egy H részhalmaz R torlódási pontjainak halmazát jelölje H'.

Belátható, hogy ha $a \in H'$, akkor a lehet eleme a H-nak, de az is előfordulhat, hogy nem lesz benne a halmazban. Továbbá, ha H=N, akkor $H'=\{+\infty\}$, ha $H=[a,b]$, akkor $H'=[a,b]$, és ha H véges halmaz, akkor H' üres halmaz lesz.

---

3 Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet honlapja, Somfai Zsuzsa: A matematika tantárgy helyzete a felső tagozaton és a középiskolában

Még be kell vezetnünk egy a pont r > 0 sugarú kipontozott környezetét, amely az r-sugarú környezetből tartalmazza az a-n kívüli pontokat.

$$\mathring{K}_r(a) = (a-r,a) \cup (a+r), \text{ ha } a \in R,$$

$$\mathring{K}_r(+\infty) = K(+\infty) = (\frac{1}{r},+\infty),$$

$$\mathring{K}_r(-\infty) = K(-\infty) = (-\infty,\frac{-1}{r}).$$

Ezek fényében az **(a_n) sorozat határértékét** a következőképpen definiálhatjuk:
Az (a_n) sorozat határértéke az $A \in R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, ha

minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in N$ küszöbindex, melyre minden $n \geq N$ esetén $(a_n) \in K_\varepsilon A$.

A függvény határértéke:

Az f függvény a pontbeli határértékének fogalmát azokra a pontokra értelmezzük, amelyek a D(f)' -ben vannak benn, vagyis azon pontok halmaza, amelyek „elég közel” vannak az értelmezési tartományhoz, de nem feltétlenül vannak benne.

Legyen az f: R→R és $a \in D(f)'$ az értelmezési tartomány egy torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a-ban az $A \in R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ pont, ha

minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $x \in \mathring{K}_\delta(a) \cap D(f)$, akkor $f(x) \in K_\varepsilon(a)$,
ez annyit tesz, hogy az a-hoz „elég közeli” (értelmezési tartománybeli) pontok esetén a függvényértékek elég közel vannak A-hoz.

Jelölés: $\lim f_a = A$ vagy $\lim f(x)_{x\to a} = A$

Amennyiben a eleme az értelmezési tartománynak is, a definíció nem függ az a-ban felvett helyettesítési értéktől, vagyis az f(a)-tól, és azért fontos, hogy a torlódási pont legyen, mert így bármely $\delta > 0$ esetén a $\mathring{K}_\delta(a) \cap D(f)$ tartalmazzon x elemet.

A határérték fogalmak sorából, már csak a jobb, illetve bal oldali határértékek hiányoznak. Ezek leírásához is szükség van, csakúgy mint a fenti esetben a kipontozott bal (jobb) oldali környezet, valamint a bal (jobb) oldali torlódási pont meghatározására.

Kipontozott bal/jobb oldali környezet:

Egy a pont r > 0 sugarú kipontozott bal/jobb oldali környezetein azon halmazokat értjük, amelyek az r > 0 sugarú bal/jobb oldali környezetből az a-n kívüli pontokat tartalmazzák:

$$\mathring{K}_{r}-(a) = (a-r,a), \text{ ha } a \in R,$$

$$\mathring{K}_{r}+(a) = (a,a+r), \text{ ha } a \in R,$$

$$\mathring{K}_{r}-(+\infty) = K_r(+\infty),$$

$$\mathring{K}_{r}+(-\infty) = K_r(-\infty).$$

Bal (jobb) oldali torlódási pont:

Legyen H részhalmaz R tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az $a \in R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ pont bal (jobb) oldali torlódási pontja H-nak, ha

$$\forall\ r > 0 \text{ esetén } \mathring{K}_{r}-(a) \cap H \neq \emptyset \ (\mathring{K}_{r}+(a) \cap H \neq \emptyset).$$

Ez annyit jelent, hogy az a pont egy tetszőleges bal (jobb) oldali környezete tartalmaz tőle különböző H-beli pontot. Jelölés: H-', H+'.

Ezek után már könnyen meg tudjuk határozni a **bal (jobb) oldali határérték** definícióját:

Legyen f:R→R és $a \in D(f)-'$ ($a \in D(f)+'$) az értelmezési tartomány egy bal (jobb) oldali torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény bal (jobb) oldali határértéke az a-ban az $A \in R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ pont, ha

minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $x \in \mathring{K}_{\delta}-(a) \cap D(f)$ ($x \in \mathring{K}_{\delta}+(a) \cap D(f)$), akkor $f(x) \in K_{\varepsilon}(A)$.

Egyértelmű, hogy $+\infty$-ben csak baloldali, $-\infty$-ben csak jobboldali határérték létezik

5. A mai magyar tanterv

A magyarországi középiskolai oktatás alapját a NAT 2003 (nemzeti alaptanterv) és a középszintű érettségi vizsgakövetelmények határozzák meg. A nemzeti alaptantervet követve a Mozaik kiadó kiadott egy kerettantervrendszert a gimnáziumok és általános iskolák számára, amelyben segítséget találunk a tantervek elkészítéséhez, a tantárgyak rendszeréhez és időkereteihez, valamint az érettségihez való felkészítéshez.

A Matematika 9.-12. évfolyam részt Kosztolányi József állította össze, és ezen belül a 11. és 12. évfolyam tantervét vizsgáltam meg, hiszen ezekben az években kellene előkerülnie az analízis elemeinek. Minden évfolyamon öt fő részre oszlik fel a tananyag: gondolkodási módszerek, számtan és algebra, függvények és sorozatok, geometria és mérés, valószínűség és statisztika. A függvények és sorozatok témakör keretén belül a 11. évfolyamon előkerülnek az exponenciális függvények, az exponenciális folyamatok a természetben, a logaritmusfüggvény, mint az exponenciális függvény inverze, szögfüggvények, a függvények tulajdonságainak megvizsgálása, a szögfüggvények transzformációi.12. évfolyamon tárgyalásra kerül: A sorozat fogalma, számtani, mértani sorozatok, az n. tag, az első n elem összege, kamatoskamat-számítás, és példák egyéb sorozatokra. A tanév többi részében pedig a témakörben tanult ismeretek összefoglalása, felelevenítése, az érettségire való felkészülés kezdődik meg. Jól látszik hogy középszinten egyáltalán nem szerepel a határérték és folytonosság fogalma, a deriválás és az integrálás.[4]

6. Az analízis nehézségei

Mint ahogy említettem is a középiskolai tanulmányok alapján elég nehéz megemészteni az egyetemi meghatározásokat, és egyáltalán nem biztos, hogy a gimnázium padjaiból kikerülve teljes mértékben érteni fogják a tanulók, hogy miről is szól valójában a határérték fogalma. Ezen az állásponton volt Kósa András, aki le is írta, hogy miben látja az analízis oktatásának problémáit a középiskolai osztályokban. Véleményét a mellékletben mutatom be.

Természetesen sokak véleménye egészen más. Bár erről írásos formában nem találtam tanulmányokat, de vannak akik úgy gondolják, hogy sokkal hasznosabb, és biztosabb alapokat teremt a hagyományos módszer, mintha felületes módon belekezdenének a határérték fogalom tárgyalásába, és esetleg ezzel többet ártanak mint amennyit használnak a felső fokú tanulmányok előtt.

[4] Kosztolányi József: Kerettantervrendszer a gimnáziumok számára, NAT 2003, Mozaik kiadó, [2004]

7. Tankönyvvizsgálatok

A tanterv megváltoztatása mellett megindult az oktatásban használt eszközök fejlesztése is, így a tankönyvek modernizálása. Az elsődleges cél a matematikai fogalmak konkrét tapasztalatokkal való bevezetése, a gyakorlás folyamatának mechanikusságát lecsökkenteni, és a szemléltető problémákat érdekessé tenni. Az ELTE TTK-n folytak gimnáziumi módszertani kísérletek a Surányi János (ELTE TTK), majd Pósa Lajos (ELTE TTK) vezetésével. Surányi János szintén részt vett az általam vizsgált könyvsorozat második kötetének elkészítésében.

A korábbi években ugyan léteztek változatai a különböző tankönyveknek, pl. nemzetiségi, szakközépiskolai, esti-levelező, de választási lehetőség mégsem volt az iskolák számára, ugyanis szigorúan meghatározták, hogy milyen típusú iskolához, melyik könyvet használhatják. Mára ez teljesen megváltozott, az iskolai tanárok maguk dönthetik el, vagy az iskola egységes döntést hoz, hogy melyik könyvből akarnak tanítani, mit tartanak ők megfelelőnek.

Manapság úgy alkalmazkodtak a fakultációs tanításhoz, hogy megjelentek tankönyvek, amelyek azt az anyagrészt tartalmazzák, amit emelt szinten megkövetelnek, és emellett használják a közép szintű tankönyveket. Természetesen akad olyan tankönyvre is példa, amelyben szerepel mindkét anyagrész, de túlnyomó részben kiegészítő könyvekkel találkozunk, és ezeket is használják gyakrabban.

7.1. Közép szintű tankönyv

Ahogy már említettem az 1960-1970 között csupán az iskola típusának megfelelően kijelölt tankönyvsorozatot használhatták, nem volt választási lehetőség. Az Országos Pedagógiai Könyvtár állományából tudtam megszerezni az ebben az időszakban az általános gimnáziumokban használt könyvet, és tanulmányoztam ennek segítségével az akkori általános tantervet. A sorozat kötetei teljesen megegyező mintát követve épülnek fel, rengeteg ábrával, és sok magyarázattal a feladatok mellett. A mostani középiskolai középszintű tankönyvekhez képest, jóval részletesebbnek éreztem a magyarázatokat, és a tananyag is bővebb néhány dologban. Csakúgy mint ma középszinten, ebből a könyvsorozatból is hiányzik a határérték fogalma, a deriválás és az integrálás elmélete, alkalmazása, míg emelt szinten érettségizőknek, ma ez kötelező tananyag. Ennek ellenére nagyon tetszett a könyvek felépítése, és az egyes anyagrészhez tartozó kiegészítő magyarázatokat. Ugyan nincs a tankönyvben analízis mégis éreztem, hogy egy nagyon jó könyvet tartok a kezeim között, ezért mellékletnék csatoltam a részletesebb leírását.

7.2. Fakultatív tankönyv

A vizsgálataim során megnéztem fakultatív tankönyvet is. Ezeket a könyveket kevés iskolában használták, ahol a matematikát igen magas óraszámban a kivételesen tehetséges diákoknak tanították. Az általam választott könyv Hajnal Imre, Dr. Nemetz Tibor, Dr. Pintér Lajos és Dr. Urbán János által szerkesztett Matematika IV. osztály fakultatív B változat című 1982.-es kötet. Ez egy olyan úgynevezett emelt szintű anyagokat tartalmazó könyv, ami tartalmaz analízisbeli elemeket: integrálás, deriválás, határérték fogalom, folytonosság definíciója. De emellett rengeteg olyan matematikai részt tárgyal, amely középszinten nem is érintenek. Ilyen például a valószínűségszámításnál használt Markov- és a Csebisev-egyenlőtlenség, amivel én csupán az egyetemen találkoztam, középiskolában még nem. Elméleti bevezetők vannak minden új anyagrész elején, és mindegyikhez kapcsolódnak példafeladatok, csak ezután következnek a megoldandó példasorok.

Az első fejezet címe: Az integrál és alkalmazása. Először síkidomok területszámítását taglalja, ezzel vezeti be a különböző függvénygörbületek által határolt síkidomok területének megközelítését. Így jutunk el az alsó illetve felső közelítő összegig, és magához a területhez. Csak ezután következik a határozott integrál definíciója, aminél először szerepel a fontos kikötés, hogy a függvénynek korlátosnak kell lennie.

Határozott integrál: Az [a,b] intervallumon értelmezett korlátos f függvényt integrálhatónak nevezzük, ha egyetlen olyan szám létezik, amely f függvény alsó közelítőösszegénél sem kisebb, és egyetlen felső közelítőösszegénél sem nagyobb. Ezt a számot az f függvény [a,b] intervallumon vett határozott integráljának nevezzük, és így jelöljük: $\int$ f(x) dx. (Ezek az úgynevezett Riemann integrálható függvények)

A határozott integrállal kapcsolatban elővezet a könyv két igazán fontos tételt is:

1. Az [a,b] intervallumon értelmezett korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz található olyan beosztás, melyre $S-s<\varepsilon$.
2. Ha f függvény monoton [a,b] intervallumon, akkor ott integrálható.

A fejezet végén a primitív függvény fogalmát is meghatározzák, és megemlítik a Newton-Leibniz formulát is.

Primitív függvény: Adva van egy $f:[a,b]\rightarrow R$ integrálható függvény és egy $F:[a,b]\rightarrow R$ függvényt értelmezzük a következő módon: $F(x)=\int f(t)\,dt$, ekkor F az [a,b] intervallumon differenciálható függvény, és $F'(x)=f(x)$.

Newton-Leibniz formula: $\int f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)$.

A másik általam alaposabban megvizsgált rész Az analízis elemei című fejezet. Itt esik szó a függvény fogalmáról, grafikonjáról, az elemi függvényekről. Majd a sorozatot definiálja, amire a későbbiekben azért lesz szükség, mert így jutunk el a határértékhez, és a függvények határértékének fogalmához, illetve a folytonosság meghatározásához.

A fejezet által bemutatott fontos definíciók:

Sorozat: A pozitív egész számok halmazán értelmezett függvényt sorozatnak nevezzük.

Konvergens sorozat: Azokat a sorozatok, amelyeknek van határértéke konvergens sorozatoknak nevezzük. Monoton, korlátos sorozat konvergens, és konvergens sorozatnak egy határértéke van.

Függvények határértéke: Az f függvény a pontban vett határértéke az A valós szám, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz található olyan $\delta>0$ szám hogy bármely x esetén, amely eleme f értelmezési tartományának teljesül $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Folytonosság: Az f függvény xo pontban folytonos, ha minden $\varepsilon>o$ esetén található $\delta>0$, hogy $|x-xo|<0$, esetén $|f(x)-f(xo)|<\varepsilon$.

Ezt követi A derivált című fejezet, amihez az előző rész utolsó definíciója a folytonosságé szorosan kapcsolódik, ugyanis ha egy függvény egy pontban differenciálható, abban a pontban folytonos is. Ez az állítás visszafele már nem működik. Ebben a részben átvizsgálják a deriválás többféle alkalmazását, és az integrálhoz való kapcsolatát, és a fejezet végén visszatérnek a határozott integrál tulajdonságaihoz.[5]

Ezt a tankönyvet a mai ismereteim fényében nagyon jónak találom, viszont ha középiskolás lennék biztosan sok problémát okozna néhány dolog megértése. Nagyon részletes a könyv, sok nehezebb témakörre is kitér, rengeteg különböző témakört tárgyal. Viszont egyiket sem túl részletesen vezeti be, ami például a határérték megértéséhez nélkülözhetetlen. Ebben a könyvben talán túl sok ismerettel akarják elhalmozni a diákokat.

8. Tankönyv-összehasonlítás

8.1 1970-es években használt tankönyv

Az 1970-es években kísérleteztek az analízis elemeinek középiskolai oktatásával közép szinten. Ezt az új tantervet követő tankönyvet néztem meg, főleg a határérték bemutatásának szempontjából. Arra voltam kíváncsi, hogy vajon mennyire alapozza meg a tanulók tudását, és mennyire készíti fel őket az egyetemi követelményekre, és hogy megkönnyíti-e az ottani tanulási folyamatot. A tankönyv 1972-es kiadású, és a harmadik évfolyamnak szóló kötet tartalmazza a határérték fogalmát, a folytonosság fogalmát és a differenciálszámítást. Négy fő témakörből áll a könyv: trigonometria, koordinátageometria, differenciálszámítás, sorozatok.

A deriválás megismeréséhez és megértéséhez nélkülözhetetlen a függvények határértékének fogalma, ezért a könyv is ennek tárgyalásával kezdi a fejezetet. A véges helyen vett határértéket először konkrét példával szemlélteti.

Az f(x)=$\frac{x+x^2}{X}$ függvényt veszi alapul. A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, kivéve a 0, mert nullával nem oszthatunk. Egyszerűsíthetünk x-szel, ha kikötjük, hogy x≠0. Így kapjuk az f(x)=x+1

[5] Hajnal Imre- Dr. Nemetz Tibor- Dr. Pintér Lajos- Dr. Urbán János: Matematika IV. osztály, fakultatív tankönyv, B változat, Tankönyvkiadó 1982.

függvényt, amely egy egyenes, és szakadási helye lesz a (0,1) pontban. Meg akarjuk vizsgálni a függvény viselkedését a 0 környezetében. Ehhez a könyv bevezeti a környezet, illetve a szorosabb értelemben vett környezet fogalmát.

Az a=2 hely teljes δ sugarú környezete azon x számok összessége, melyekre fennáll a $2-\delta<x<2+\delta$ egyenlőtlenség. Ha az a=2 helyet kizárjuk, akkor beszélhetünk a szorosabb értelemben vett környezetről, amelyre teljesülnek a
$2-\delta<x<2$, a $2<x<2+\delta$ egyenlőtlenségek.

Az x+1 függvény esetében ha bármelyik oldalról közeledik a változó a 0 ponthoz, akkor a megfelelő függvényérték közeledik az 1-hez. Ennek belátásához az úgynevezett sávmódszert alkalmazza a könyv. Meg kell vizsgálnunk, hogy létezik-e a 0 helynek olyan környezete, amelyhez tartozó bármelyik abszcisszaértékhez rendelt függvénygörbepont a megadott sáv belsejébe esik. A koordináta-rendszerben ábrázoljuk az f(x)=x+1 és az y=1 függvényt. Az y=1 konstans egyenes alatt és felett behúzzuk az $y=1+\frac{1}{10}$ és az $y=1-\frac{1}{10}$ egyeneseket. Így kapjuk meg a sávot, amelynek a két határoló egyenes nem része, és a sávszélessége $\frac{2}{10}$. Ehhez a következő két egyenlőtlenség valamelyikét kell megoldani:

$$1-\frac{1}{10}<x+1<1+\frac{1}{10}, \text{ ahol } x\neq 0 \text{ vagy}$$

$$0{,}9<x+1<1{,}1 \quad | -1$$

$$-0{,}1<x<0{,}1$$

Ez azt jelenti, hogy ha x-et a (-0,1;0) vagy a (0;-0,1) intervallumból választjuk ki, akkor a függvénygörbepont a sáv belsejébe esik. Vagyis a 0 hely megfelelő környezetének a sugara δ=0,1.

Ha a sávszélesség fele ε (ε egy tetszőlegesen kicsi pozitív egész),

akkor $1-\varepsilon<1+x<1+\varepsilon$ ($x\neq 0$), ekkor ε=δ

Az $f(x)=\frac{x+x^2}{X}$ függvény esetében tehát a következőt tapasztaltuk: Az f függvénynek a 0 helyen vett határértéke az A=1 szám. Jelölése: $\lim\frac{x+x^2}{X}=1$.

A határérték tárgyalása során nagyon fontos még, hogy egy a helyen adódó határérték meghatározásánál nem számít, hogy azon a helyen értelmezve van-e a függvény. A határérték létezését, számértékét az a hely környezetének összes helyén felvett függvényértékek halmazán állapítjuk meg. És fontos még kiemelnünk, hogy különböző függvényeknek adott a helyen lehet közös határértéke.

Eddig az úgynevezett sávmódszer segítségével, konkrét példákra vizsgáltuk meg a határértéket, a következőkben egy általános definíciót adunk az y=f(x) függvény határértékére az a helyen:

Az a hely bizonyos környezetében mindenütt értelmezett y=f(x) függvénynek az a helyen a határértéke az A szám, ha a függvény eleget tesz az alábbi követelményeknek:

Bármely $\varepsilon>0$ számra az y=A egyenes körül sávot jelölve ki az $y=A-\varepsilon$ és az $y=A+\varepsilon$ egyenesekkel mindig megadható az a hely olyan $(a-\delta,\ a+\delta)$ környezete, hogy ha a változót ebből a környezetből vesszük $(x\neq a)$, akkor a változóhoz tartozó függvénygörbepont benne van a kijelölt sávban. Jelölése: limf(a)=A.

Ha az a hely δ sugarú környezetében bárhol kiszámítjuk a függvényértéket, akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Tehát az eddigi észrevételeket felhasználva a függvény véges helyen vett határértékének a definíciója a következő:

Limf(x)=A, ha bármilyen pozitív ε-hoz található olyan pozitív δ, hogy $|f(x)-A|<\varepsilon$, ha $a-\delta<x<a$ vagy $a<x<a+\delta$.

A könyv az eddigiekben csupán a véges helyen vett határértékkel foglalkozott, viszont a következő részben ugyan csak konkrét példa alapján ,de bemutatja a jobb illetve bal oldali határérték fogalmát. A könyv által hozott példa különböző sugarú köröket használ fel. O_1 és O_2 a középpontok egy egyenesre esnek. Az első kör 8 cm a második pedig 3 cm sugarú. Ezen középpontokat mozgatjuk az O_1 kezdőpontú félegyenesen, így változik a körök metszéspontjainak száma. Az f(x) függvény a két középpont távolságfüggvénye, az értelmezési tartomány a pozitív számok halmaza, az értékkészlet pedig a {0,1,2 } halmaz. Ezek alapján f(x)= 0, ha $0\leq x<5$

1, ha x=5

$$2, \text{ ha } 5<x<11$$
$$1, \text{ ha } x=11$$
$$0, \text{ ha } x<11$$

Ennek a függvénynek az esetében az x=11 helyen a függvénynek jobb oldali határértéke van, és a számértéke 0.

Fontos megjegyezni, hogy ha a helyen van határérték, akkor a helyen vett jobboldali és baloldali határérték egyenlő.(Ez a határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele)

A tankönyv ezután a határértékkel kapcsolatos fontos tételeket vezet be, ezek a határértékekkel való műveletekre vonatkozó tételek:

Az x_0 helyen f(x) és g(x) függvényeknek létezik határértéke és limf(x)=A, limg(x)=B, ekkor igazak a következő kijelentések:

1. $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B$
2. $\lim[c\times f(x)]=c\times \lim f(x)=c\times A$, ahol c adott állandó
3. $\lim[f(x)\times g(x)]=\lim f(x)\times \lim g(x)=A\times B$
4. $\lim[f(x)\div g(x)]=\lim f(x)\div \lim g(x)=A\div B$

Ezzel a résszel fejeződik be a határérték tárgyalása, ezután következik a folytonosság témaköre, ami szintén elengedhetetlen a differenciálás elsajátításához, és mindezek után következik a differenciálszámítás fejezet.[6]

8.2. Emelt szintű tankönyv

A mai matematika tanterv az érettséginek megfelelően a 11. és 12. évfolyamon különválik aszerint, hogy valaki emelt szinten, illetve közép szinten szeretne érettségi vizsgát tenni. Ennek megfelelően más tankönyveket használnak, és olyan anyagrészeket is elsajátítanak emelt szinten, amely közép szinten egyáltalán nem kerül tárgyalásra. A mai tankönyvpiacon azonban olyan könyveket gyártanak, amelyek nem az egész emelt szintű anyagot ölelik fel, hanem kiegészítik azt a részt, amit egységesen mindenkitől elvárnak. Így akik matematika fakultációra járnak használnak egy általános tantervet követő és egy kiegészítő tananyagú könyvet is. Ez a módszer egy kicsit megnehezíti a tanulás folyamatát. A

[6] Szakközépiskolai tankönyvek: Matematika a III. osztály számára, Tankönyvkiadó 1972. június

korábban bemutatott kísérleti tankönyvvel szemben az összefüggések nehezebben követhetők, hiszen két különböző helyről származnak az ismeretek.

A következőkben Czapáry Endre és Gyapjas Ferenc: Matematika a középiskolák 11-12. évfolyama számára (Emelt szintű kiegészítő tananyag) című könyvét elemzem a határérték bemutatásának szempontjából.

Négy témakörből tevődik össze a kötet: Számsorozatok, differenciálszámítás, integrálszámítás, valószínűség-számítás. A számsorozatok tárgyalása során előkerülnek a konvergens sorozatok, a sorozatok határértéke. Először az 1/n alakú sorozat példáján keresztül ad egy általános kezdetleges meghatározást a konvergens sorozatokra:

Bármilyen ε>o számot adunk meg, van olyan N természetes szám, amelyre $N>\frac{1}{\varepsilon}$, és innen $\frac{1}{N}<\varepsilon$. Ha n>N, akkor $\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\frac{1}{\varepsilon}$. Ez a meggondolás azt mutatja, hogy az $\frac{1}{n}$ sorozatban az N-nél nagyobb indexű tagok a]-ε;ε[intervallumban vannak.

Az $\frac{1}{n}$ sorozat példájának szempontjai szerint a könyv bemutatja a

$3+(\frac{1}{n})^n$, $(-1)^n$, $\frac{n}{10}$ sorozatokat. A példák során bevezet fontos fogalmakat, és végül összegzi a tapasztalatokat, amivel eljutunk magához a határérték fogalmához.

Fontos fogalmak:

Egy a (valós) szám ε>o sugarú környezetén az]a-ε,a+ε[nyílt intervallumot értjük.
Az ε-tól függő N természetes számot küszöbindexnek nevezzük.

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az a szám, ha bármely (az a számot tartalmazó)]a-ε,a+ε[(ε>o) intervallumon kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van. (Ezzel ekvivalens a következő meghatározás)

Az a_n valós számsorozat konvergens és határértéke a, ha minden (ε>o) számhoz van olyan N természetes szám, hogy ha n>N, akkor $|a_n-a| < \varepsilon$. Az N számot küszöbszámnak nevezzük.

A két definíció közötti ekvivalencia azt jelenti, hogy ha az a_n sorozat eleget tesz az első meghatározásban kiszabott feltételeknek, akkor a másodikban levőket is teljesíti, és ez megfordítva is igaz lesz.

Jelölés lim a_n =a vagy $a_n \to a$.

Ezek után a tankönyv bevezeti a divergens sorozat fogalmát: Az olyan sorozatokat, amelyeknek nincs határértéke, divergens (széttartó) sorozatoknak nevezzük. (A divergens szó latin eredetű, és széttartót jelent.)

A fejezet a végtelen határértékű sorozatok definíciójával záródik:

Az a_n sorozatról akkor mondjuk, hogy tart a $+\infty$-hez, ha tetszőleges K számhoz van olyan N küszöbszám, hogy ha n>N, akkor $a_n > K$.

Az a_n sorozat tágabb értelemben vett határértéke $-\infty$, ha tetszőleges k számhoz van olyan N küszöbszám, hogy ha n>N, akkor $a_n < k$.

A következő részben a konvergens sorozatokkal kapcsolatos legfontosabb állításokat és a műveleti tulajdonságait foglalják össze:

1. Minden konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.
2. Minden konvergens sorozat korlátos.
3. Ha a_n monoton növő (fogyó) és felülről (alulról) korlátos sorozat, akkor van határértéke.
4. Ha minden n-re $a_n \le c_n \le b_n$ és $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor $c_n \to a_n$
5. Ha $a_n \to +\infty$ vagy $a_n \to -\infty$, akkor $1/a_n \to 0$.
6. Feltételezzük, hogy az a_n és a b_n sorozatok konvergensek, és $a_n \to a$ és $b_n \to b$.

Ekkor: a) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$.

b) $\lim(a_n\, b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = a \times b$.

c) $\lim(c \times a_n) = c \times \lim a_n = c \times a$ (c tetszőleges valós szám).

d) $\lim(a_n / b_n) = \lim a_n / \lim b_n = a/b$ feltéve, hogy $b_n \neq 0$ és $b \neq 0$.

Csakúgy mint a kísérleti tankönyvnél itt is a differenciálszámítás bevezetéséhez, megértéséhez használják fel a függvények határértékének fogalmát. A fejezet a függvények néhány fontos és alapvető tulajdonságának felelevenítésével kezdődik, ez után következik a Függvény határértéke című rész. A határérték fogalmának bevezetése rövid, és két megközelítést alkalmaznak.

Az elsőben egy fizikai példát használ fel a tankönyv: Egy test egyenes vonalú pályán mozog, és x s alatt $f(x)=x^2$ méter hosszúságú utat tesz meg ($x \geq 0$). A test pillanatnyi sebességét az $x_0=5$ s időpillanatban, az A pontban kiszámoljuk. Ezután kiválasztunk egy x>5 időpontot, és kiszámítjuk az x-5 másodperc alatt megtett AB utat. Ekkor az AB útra eső átlagsebesség: $v(x)=\frac{x^2-5^2}{x-5}=x+5$. (Ha x<5 akkor is ugyanezt az eredményt kapjuk.) Ebből az következik, hogy minél kisebb időtartamot veszünk, vagyis minél kisebb az x-5 értéke, az átlagsebesség annál jobban megközelíti az A pontban vett pillanatnyi sebességet. Ez annyit jelent, hogy x minél közelebb van az öthöz, B annál közelebb lesz A-hoz.

A másik megközelítésben függetlenítünk az előbb használt függvény fizikai jelentésétől, és azt vizsgáljuk, hogy mi történik akkor ha az x értékei közelednek az $x_0=5$ helyhez. A függvénynek az $x_0=5$ pontban szakadási helye van, itt a függvény nincs értelmezve. Megfigyelhetjük, hogy ha x közel van az 5-höz, akkor a függvényérték közel lesz a 10-hez. Ezt matematikailag úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ha választunk egy x_n sorozatot, amelynek határértéke 5, de tagjai között nem szerepel az 5, akkor az $f(x_n)$ sorozat határértéke a 10 lesz. Ez könnyen belátható, mivel $f(x_n)=x+5$ és ha $x_n \to 5$, akkor $x_n+5 \to 10$. Ezt a tulajdonságát a függvénynek úgy fogalmazhatjuk meg, hogy: Az f függvénynek az $x_0=5$ pontban van határértéke, és ennek értéke 10.

A következőkben három különböző függvény segítségével mutatja be a könyv, hogy egy pontban lehet azonos a határértéke különböző függvényeknek. A példában adottak az $f:R\setminus\{2\} \to R$, $f(x)=\frac{x-2}{x-2}$, a $g:R \to R$, $g(x)=1$, és a $h(x)=1$, ha $x \neq 2$, és $h(x)=5$, ha $x=2$ függvények. A függvények ábrázolása, és megvizsgálása után jól látható, hogy mindegyiknek létezik határértéke az $x_0=2$ pontban, és az értéke 1 lesz.

A tankönyv ezután az $f:R \to R$, $f(x)=x+1$, ha $x \geq 0$ és $f(x)=-x^2$, ha $x<0$ függvény segítségével bemutatja, hogy a függvénynek nincs határértéke az $x_0=0$ pontban. Viszont, ha a 0 pont jobboldali környezetét vizsgáljuk, akkor azt mondhatjuk, hogy a függvénynek van jobboldali határértéke, és az értéke 1 lesz. Ha a 0 pont baloldali környezetét vesszük figyelembe, akkor azt mondhatjuk, hogy van baloldali határértéke, és ennek értéke a 0.

Ezen példák segítségével kétféleképpen definiálhatjuk a függvények határértékét:

1. Feltételezzük, hogy az f függvény az x_0 pont környezetében értelmezve van, kivéve esetleg az x_0 pontot. Az f függvénynek az x_0 pontban létezik a határértéke, és a határérték A, ha minden az f értelmezési tartományából vett $x_n \to x_0$ ($x_n \neq x_0$) sorozat esetén a függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozat az A-hoz tart.
2. Legyen az f függvény értelmezve az x_0 helyen, kivéve esetleg az x_0 pontot. Az f függvény határértéke létezik, és a határérték az A szám, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ szám, hogy ha $0 < |x-x_0| < \delta$, akkor $|f(x)-A| < \varepsilon$

A $0 < |x-x_0| < \delta$ egyenlőtlenséget az $x_0-\delta < x < x_0+\delta$ az $|f(x)-A| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget az $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$ kettős egyenlőtlenséggel is kifejezhetjük. Jelölés: $\lim f(x)=A$.

Csakúgy mint a számsorozatoknál a függvényeknél is előfordulhat, hogy egy adott a pontban a $+\infty$-hez vagy a $-\infty$-hez tartanak a függvényértékek. Az olyan függvényekről is szót kell ejtenünk, amelyeknél a változó értéke egy bizonyos határon túl nő vagy csökken, ekkor beszélünk a $+\infty$-ben vagy $-\infty$-ben vett határértékről.

Ezzel zárul a függvények határértéknek tárgyalása, ezután, mint a kísérleti tankönyvben is kezdődik a folytonosság bemutatása, vizsgálata, és csak ezek megismerése után következik a differenciálszámítás.[7]

Mint korábban írtam azért vizsgáltam meg a '70-es évekbeli, illetve a ma emelt szinten használt tankönyveket, hogy lássam az ezekben foglaltak a határértékről mennyiben segítenek abban, hogy az egyetemi anyagban szereplő részeket könnyebben megértsék, és hogy ezek az előismeretek mennyiben tudják megalapozni a későbbi egyetemi tudást. Alapvetően arra a következtetésre jutottam, hogy a kísérleti tankönyv jóval egységesebben mutatja az anyagrészeket, hiszen ez akkor egy megadott mindenkire egységesen érvényes tantervet követett, míg a mostani emelt szintű könyv csupán egy kiegészítés, amely ráadásul magában foglalja mind a 11. mind a 12. évfolyamban tanítani kívánt részeket. Bár nyilván a fakultációk kialakítása nem haszontalan, hiszen jó páran olyan szakirányt

[7] Czapáry Endre- Gyapjas Ferenc: Matematika a középiskolák 11-12. évfolyama számára, Nemzeti Tankönyvkiadó 2005.

választanak, ahol a későbbiekben nem lesz szükség matematikára főleg nem a határérték számításra. Viszont a tankönyvek nem idomultak eléggé az oktatás ezen formájához, hiszen pont azon diákok munkája nehezedik meg akik komolyabban szeretnének foglalkozni a matematikával.

A másik észrevételem, hogy a kísérleti tankönyv úgynevezett sávmódszere talán jobban elővezeti a határérték fogalmának megértését és jobban megközelíthetővé teszi az egyetemen felhasznált fogalmakat, mint a fizikai megközelítés. A példák jobban kidolgozottak részletesebbek, a jobb illetve bal oldali határérték fogalmát is érthetőbben fogalmazza meg, a körös példa nagyon jól szemlélteti a problémát.

Mindkét könyv igazán jó ábrákat tartalmaz, minden függvényhez tartozik grafikon, és a jelölések is szépen .átláthatók rajtuk. Ez megkönnyíti a leírtak megértését.

Ez persze nem jelenti azt hogy közép szinten, vagy akár általános iskolában nem jelennek meg olyan elemei a matematikának, amelyekben a határértékhez vezető gondolatok szerepelnek. Csupán ezek nincsenek kifejtve. Erre példa a kerekítés szabálya, a végtelen tizedes törtek, és még sok minden más is. Az is szintén említésre méltó, hogy határérték fogalom nincs közép szinten, ennek ellenére a függvényekről részletesen esik szó, és függvényvizsgálatot is tanulnak a diákok.

9. Érdekes problémák

9.1. Az $(1+\frac{1}{n})^n$ sorozat határértéke

Nagyon fontos tétel, amit az emelt szintű tankönyv is tárgyal:Ha $\{a_n\}$ monoton növő (fogyó) és felülről (alulról) korlátos sorozat, akkor van határértéke. A tétel szemléletesen könnyen belátható. A bizonyításhoz sok részletes technikai ismeretre is szükség van.

A tételt kimondhatjuk a következőképpen is a növekedő sorozatokra:
Monoton növő és felülről korlátos sorozat konvergens és határértéke a szuprémuma. Legyen (a_n) sorozat szigorúan monoton növő, ekkor létezik $\lim_{n\to} a_n = A \in R$. Fennáll: $A = \sup a_n$, $n \in N$.

- Ha a_n felülről korlátos, akkor a_n konvergens
- Ha a_n nem felülről korlátos, akkor $a_n \to +\infty$

Bizonyítás: A tételt csak a_n és a_{n+1} esetre bizonyítom és ha A∈R. Tudjuk:

- Hogy a sorozat tagjai $a_n \leq a_{n+1}$ minden n-re.
- Létezik K∈R úgy, hogy $a_n \leq K$, akkor létezik $\sup a_n \in R$.

Be kell látnunk, hogy létezik lim $a_n = \alpha$ legyen $\varepsilon > 0$. $\exists$ N>0, $\exists$N úgy, hogy $\alpha - \varepsilon$. De a_n monoton növő, akkor $\forall n \geq N$ úgy, hogy $a_N \leq a_n$. Másrészt: α egy felső korlát:

$\forall n \in N$: $a_n \leq \alpha$, akkor $\forall \alpha > 0$, $\exists$ N: $\forall n \geq N$: $\alpha - \varepsilon \leq a_n \leq \alpha \leq \alpha + \varepsilon$.

Ez a bizonyítás megfelelő magyarázat kíséretében középiskolásoknak is érthető lehet, a leírt változat önmagában abban a korban még nehézségeket okozhat.

Az $an = (1+\frac{1}{n})^n$ sorozatnak nagyon fontos szerepe van a matematikában, és a korábbi tételhez kapcsolódóan nagyon érdekes probléma, hogy az $an = (1+\frac{1}{n})^n$ szigorúan monoton növő, és az $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ szigorúan monoton fogyó sorozatok korlátosak és határértékük azonos.

Először az $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ sorozatnál kell belátnunk, hogy szigorúan monoton növekedő sorozat, azaz $a_{n+1} > a_n$ minden n-re. A bizonyításhoz alkalmazom a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget. ($\forall n \in Z^+$)

n+1-edik gyök alatt $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n \times 1} < \frac{n \times (1+\frac{1}{n}) + 1}{n+1}$, a gyök alatt n+1 darab tényező áll, és ezek között n darab megegyezik egymással, az n+1 pedig tényező egy lesz, ami nem egyenlő $(1+\frac{1}{n})$-nel. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát az n-edik hatványra emelve a következőt kapjuk:

$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$, ezzel bizonyítottuk, hogy szigorúan monoton növekedő. Most már csak a felülről való korlátosságot kell igazolnunk. Mivel minden tagja pozitív a sorozatnak, ezért az egyértelmű, hogy alulról korlátos. Most ismét felhasználom a számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget. Vegyük a következőt:

$(1+\frac{1}{n})\times(1+\frac{1}{n})\times\ldots\times(1+\frac{1}{n})\times(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})$, ez a szorzat n+2 darab tényezőből áll, tehát n+2-edik gyök alatt

$$\sqrt[n+2]{(1+\frac{1}{n})\times(1+\frac{1}{n})\times\ldots\times(1+\frac{1}{n})\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}<\frac{n\times(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}$$

ez annyit tesz, hogy

$\sqrt[n+2]{(1+\frac{1}{n})^n\times\frac{1}{4}}<\frac{n+2}{n+2}=1$, mindkét oldalt az n+2-edik hatványra emelve az egyenlőtlenség

$(1+\frac{1}{n})^n<4$, tehát az $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ sorozat felülről korlátos.

Most következzen az $a_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ sorozatra történő bizonyítás:

Itt is a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk fel, méghozzá az (n+1) darab $\frac{n}{n+1}$ számra és az 1-re alkalmazva:

$$(\frac{n}{n+1})^{n+1}\times 1=\frac{n}{n+1}\times\frac{n}{n+1}\times\ldots\times\frac{n}{n+1}\times 1\leq(\frac{(n+1)\times\frac{n}{n+1}+1}{n+2})^{n+2}=(\frac{n+1}{n+2})^{n+2}$$

$$(\frac{n}{n+1})^{n+1}\leq(\frac{n+1}{n+2})^{n+2}$$

$$(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}\leq(\frac{n+1}{n})^{n+1}$$

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}\leq(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

Ez minden $n\in N$ számra teljesül, ezért $a_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ sorozat valóban monoton csökkenő. Mivel $a_n>0$, ezért ezérta monoton fogyásból, már a korlátosság is következik.

9.2. Feltételesen konvergens végtelen sorozat

A következő érdekes példám König Gyula matematikustól származik. Az egyetemi tanulmányaim során esett pár szó a feltételesen konvergens végtelen sorozatokról, az általam választott következő példa igazán érdekes, és mivel a levezetés nem tartalmaz olyan lépést, amelyet középiskolában még nem ismernek, úgy gondoltam, hogy az érdeklődő gyerekeknek is meg lehet mutatni ilyen példákat is. A következő problémát Szénássy Barna tanulmánya alapján dolgoztam fel.

Bár König Gyula nemzetközi szinten a matematikai logika és halmazelmélet terén vált nagyon fontossá, mégis a magyarországi matematikában az analízis terén tett igazán nagy áttörést. Nagyon jelentősek az analízistárgyú tankönyvei. Egyik ilyen munkája az Algebra címet viseli, de ennek ellenére sok analízisbeli elem szerepel benne, sajnos csak az első kötet jelent meg belőle. Másik fontos könyve az Analízis című tankönyv 1887-ből, amely az addigi összegyűjtött tudnivaló mellett rengeteg saját bizonyítást tartalmaz. Ebből is csak egy kötet jelent meg, és helyet kap benne a valós függvénytan, illetve az analitikus számelmélet is. Ami különösen érdekes a könyvben, hogy a differenciálhányados tárgyalása során sok halmazok számosságával összefüggő meggondolás szerepel.[8]

Dolgozatom szempontjából a könyv legfontosabb eredménye a végtelen sorozatokról szóló részben található. Itt szerepel a matematikában elsőnek tartott példa a feltételesen konvergens végtelen sorozatra:

Legyen a $\Pi\ (1+u_n)$ sorozatban $u_n=(-1)^n\times(\frac{1}{n+1})$, ekkor

$$\Pi(1+u_n)=(1+1)\times(1-\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})\ldots=2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\frac{2m}{2m-1}\times\frac{2m-1}{2m}=1$$

Viszont, ha átrendezzük a szorzat tényezőit, akkor a következőt kapjuk:

$$(1+1)\times(1+\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{5})\times(1+\frac{1}{7})\times(1-\frac{1}{4})\times\ldots\times(1+\frac{1}{4k+1})\times$$

$$(1+\frac{1}{4k+3})\times(1-\frac{1}{2k+2})\ldots$$

[8] Szénássy Barna: A magyarországi matematika története a legrégibb időktől a 20. század elejéig

Ebben a szorzatban, ha hármasával csoportosítjuk a tényezőket, akkor a szorzat végeredménye 4/3-nál nagyobb szám lesz. Ez könnyen látszik, mert az első három hármas 4/3-dal egyenlő, a többi pedig egynél nagyobb lesz. Ez akkor is igaz lesz, ha nem hármasával történik a csoportosítás.[9]

Az imént leírt példa sarkalta Bauer Mihályt arra, hogy vizsgálatokba kezdjen a végtelen szorzatok konvergencia kérdéseivel kapcsolatban, és ez vezetett nagyon fontos tanulmányának, az Adatok a végtelen szorzatok elméletéhez létrejöttéhez.

9.3. Pósa Lajos kísérlete

A határérték definiálásával sok probléma adódik a középiskolában. Pósa Lajos, aki a matematikusi pályát a tehetséggondozás kedvéért adta fel, is foglalkozott ezzel a témával. Ő tanította a gyerekeknek úgy a határértéket, hogy először megkérte őket, adjanak rá saját definíciót maguktól. A diákok által mondott két meghatározást mutatom be:

1. „Egy sorozatnak csak akkor van határértéke, ha egyre közeledik egy számhoz."

Ez a definíció túl szűk meghatározás, mivel elképzelhető, hogy nem pontról pontra közeledünk egy szám felé, hanem hullámzanak, ingadoznak az értékek a határértékek körül.

2. „Egy sorozatnak van határértéke, ha beszorul egy előre adott sávba."

Ez a fogalom, így túl tág, hiszen elég gondolnunk a $(-1)^n$ sorozatra, ami ugyan beszorul -1 és 1 közé még sincs határértéke.

9.4. Középiskolások számára feladatok

A következőkben olyan feladatokat gyűjtöttem össze, amelyek a határérték témakörében feladhatók középiskolásoknak. Az első két feladat azoknak szól, akik emelt szinten tanulják a matematikát, és foglalkoznak a határérték fogalmával. De gyűjtöttem olyan problémát is, ami a közép szinten tanulók számára vezeti be ezt a

9 Szénássy Barna: A magyarországi matematika története a legrégibb időktől a 20. század elejéig

fogalmat, sokkal emészthetőbb formában.

Határérték számolása:

Vegyük a következő feladatot:

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{3n+2}$, ennek a hányadosnak kell meghatároznunk a határértékét.

Először is látható, hogy a számláló és a nevező is elsőfokú polinom, ezért egyszerűsíthetjük a törtet n-nel. Így a következőt kapjuk:

$\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}$, a sorozat határértékét két másik sorozat határértékeinek hányadosára tudjuk visszavezetni a megfelelő tétel alapján:

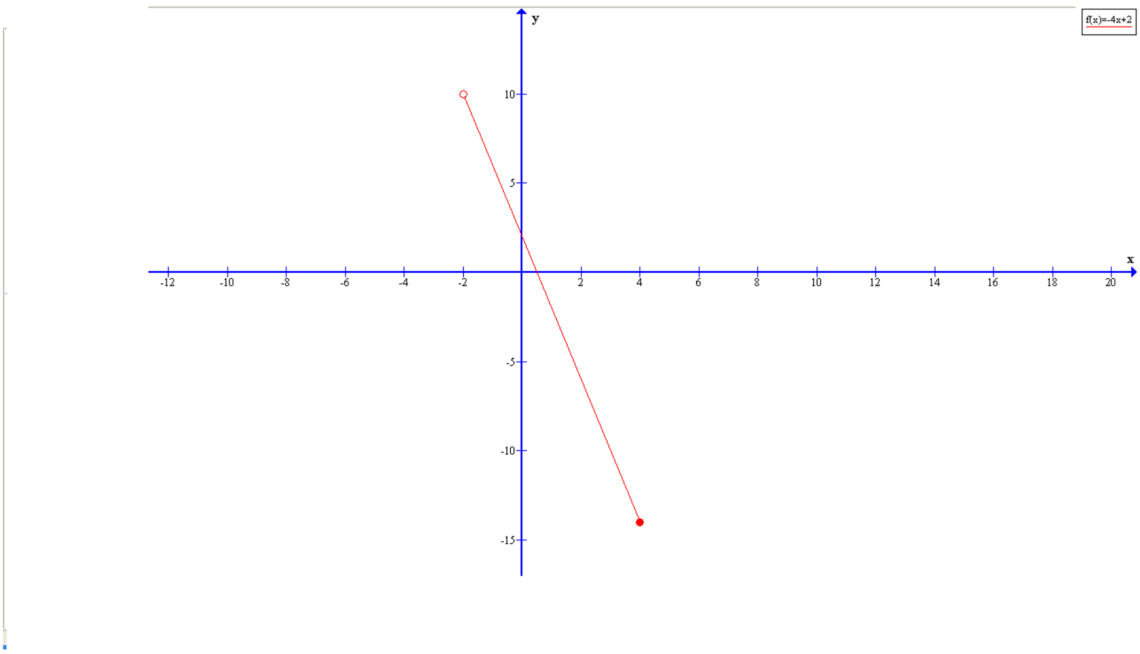
Ha $a_n=b_n/c_n$ és létezik $\lim_{n\to\infty} b_n$ és $\lim_{n\to\infty} c_n$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n= \lim_{n\to\infty} b_n / \lim_{n\to\infty} c_n$.

Ezután felhasználunk egy nevezetes határértéket: $\lim_{n\to\infty} 1/n=0$.

Így a számláló 5-höz fog tartani, a nevező pedig 3-hoz, ezért a tört határértéke $\frac{5}{3}$ lesz. Látható, hogy az ilyen feladatoknál mennyire fontos, hogy fel tudják használni a már megtanult tételeket, és azokkal sokkal könnyebb lesz megoldaniuk a kitűzött feladatokat.

Koordináta-rendszerből való következtetés:

Koordináta-rendszerben ábrázolandó függvények segítségével is következtethetünk a függvények határértékére. Induljunk ki egy teljesen egyszerű függvényábrázolásból, és vegyük az f(x)= -4x+2 függvényt, az értelmezési tartomány pedig legyen az x€]-2,4] intervallum. Az ábrázolás után először érdemes megállapítani a szélsőértéket, és ezután szemléltetni kell a szélsőérték és a határérték közötti különbséget. Ennek a függvénynek a képe egy balról nyitott jobbról zárt szakasz lesz a képe. El kell mondanunk a diákoknak, hogy szélsőérték csak azon a helyen lehet, ami az értelmezési tartomány eleme. Vagyis itt az x=4 pontban van a minimumhely, és értéke f(x)= -14. Viszont maximumhely nem lesz az x= -2 pontban, mert az nem lesz benn az értelmezési tartományban. De ez azt jelenti, hogy a függvény tetszőlegesen megközelíti a (-2,10) pontot, de sohasem fogja elérni azt.



A végtelen sor összegéről szóló probléma:

Ez a példa Péter Rózsa Játék a végtelennel című könyvéből származik, és nagyon jól szemlélteti a végtelen sor összegének a fogalmát.

Egy bizonyos csokoládét úgy próbálnak népszerűsíteni, hogy minden darabhoz csomagolnak egy szelvényt, és ha 10 darab ilyen szelvényt beszolgáltatnak, akkor cserébe kapnak egy újabb darab csokoládét. A kérdés az, ha van egy ilyen csokoládénk az eredeti csomagolásában, akkor az mennyit ér.

Abban biztosak lehetünk, hogy nem egy tábla csokoládét ér, hiszen a csomagolásban ott a szelvény, ami $\frac{1}{10}$ csokoládét ér. Viszont ehhez az $\frac{1}{10}$-ed csokoládéhoz jár $\frac{1}{10}$-ed szelvény is, és ha egy darab szelvényért $\frac{1}{10}$-ed csokoládét kapunk, akkor $\frac{1}{10}$-ed szelvényért ennek a tized részét vagyis $\frac{1}{100}$ csokoládét kapunk. Az $\frac{1}{100}$ csokoládéhoz ismét tartozik $\frac{1}{100}$ szelvény, amihez jár ismét tizedannyi csokoládé is, vagyis $\frac{1}{1000}$. És ez így megy tovább a végtelenségig, vagyis sohasem szakad meg. Ezért egy tábla csokoládé az eredeti csomagolásban:

$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$ darab csokoládét ér.

Ezután azt fogjuk megmutatni, hogy ez az összeg egészen pontosan $1\frac{1}{9}$-del egyenlő. Az teljesen egyértelmű, hogy az egy egész az adott csokoládé értéke, így már csak azt kell látnunk, hogy a vele járó szelvény értéke lesz $\frac{1}{9}$ csokoládé. Ehhez elég lesz azt belátnunk, hogy 9 darab szelvény ér egy darab csokoládét, mert ebből az fog következni, hogy egy szelvény éri ennek az $\frac{1}{9}$ részét. Ez pedig nagyon egyszerűen igazolható a következő módon. Ha bemegyek egy üzletbe 9 darab szelvénnyel, kérek egy darab csokoládét, és azt mondom, hogy miután azt a helyszínen megeszem fogok fizetni. Elfogyasztom a csokoládét kiveszem a hozzá tartozó szelvényt, hozzáteszem a többi kilenchez, és az így összesen 10 darab szelvényt odaadom a boltosnak. Látható, hogy egy darab csokoládét kaptunk 9 darab szelvényért, tehát egy szelvény $\frac{1}{9}$ csokoládét ér, ezért egy csokoládé szelvényestül $1\frac{1}{9}$ csokoládé.

Vagyis arra jutottunk, hogy:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots=1\frac{1}{9}\ .$$

9.Összefoglalás

A határérték fogalmának megértése tényleg nem a legegyszerűbb dolog a középiskolások számára, viszont ennek ellenére az egyik legérdekesebb témakör, amivel megismerkedhetnek a tanulmányaik során. A tankönyvvizsgálatok során láttam, hogy rövid ideig ugyan, de szerepelt az általános tantervben is a határérték, és a tankönyv tanítási módszere is hatékonynak tűnt. Megnéztem mai emelt szintű könyvet, ahol szintén szerepelt ez a téma, más megközelítésben, de szemléletes bemutatást adott róla, mégis talán a másik könyvet ítéltem célravezetőbbnek. A nehézségeket többnyire abban láttam, hogy vagy annyira próbálnak egyes fogalmakat leegyszerűsíteni, hogy az elveszíti lényegét, vagy túl komplikáltan közelítik meg, és nehezen befogadható a diákoknak. A kutatásaim során megnéztem néhány külföldi mintát is, Angliában szerepel a tantervben a határérték, és sok önálló munkát kívánnak a gyerekektől. Saját egyetemi tanulmányaimat is felelevenítettem, hogy lássam, mennyire használhatók a középiskolában tanultak később. Sajnos itt arra a következtetésre jutottam, hogy egy kicsit mélyebb alapokra lenne a szükség, hogy később valóban tudjanak rá a tanulók támaszkodni. A mai helyzetben úgy látom, hogy a határérték fogalmának oktatásához a tanórákon kívüli lehetőségeket kell megragadnunk középszinten. Erre lennének alkalmasak a szakkörök, vagy iskolai táborok, kirándulások. Ezen alkalmakkor játékos formában, vagy Pósa Lajos módszerével lehetne megismertetni az érdeklődő gyerekeket a határértékkel.

10. Melléklet

10.1. Közép szintű tankönyv elemzése:

Tankönyvkiadó Matematika a gimnáziumok I. osztálya számára (1965. május). Tizennegyedik kiadás. Két fő részből áll a tankönyv, van egy algebra és egy geometria fejezet. Az algebrai rész Varga Tamás, a geometriai Dr. Faragó László munkája. Az ábrákat Buday Árpád és Vidéki Gusztáv rajzolta. Rövid bevezető található az algebránál: Az algebra alapvetően az egyenletek megoldásának tudománya. „különféle" számokról, a velük való műveletekről, és ezeknek a műveleteknek a tulajdonságairól tanulunk a matematika ezen ágán belül. Nagy fejlődésen ment át, már olyan dolgokat is tárgyal, ami csak távolról függ össze az egyenletekkel, de ez ebben a könyvben, és középiskolában nem szerepel. A függvény fogalmának a matematika minden ágában fontos szerepe van. És a halmaz fogalmának bevezetése a függvények felhasználásával történik a tankönyvben.

Geometriánál csak pár bemutató sor szerepel: Geometria más néven mértan, térbeli alakzatok tudománya. Térbeli alakzatok például testek, felületek, vonalak, pontok.

A tankönyv tartalmi felépítése:

Algebra:

I. A racionális számok halmaza.

II. Műveletek a természetes számok körében

III. Műveletek a pozitív racionális számok körében. Valós számok

IV. Műveletek a tetszés szerinti előjelű számok körében

V. Függvények.

VI. Racionális egész kifejezések azonos átalakításai

VII. Racionális törtkifejezések azonos átalakításai

VIII. Egyenletek ekvivalenciája

IX. Az egyenlet megoldás technikája

X. Egyenletrendszerek

Geometria:

I. Bevezetés: Az egyenes. A szög és a szögek mérése

II. A szögpárok

III. A geometriai transzformáció. A tengelyes tükrözés

IV. Az egyenes vonalú síkidomok néhány közös tulajdonságairól

V. A háromszög

VI.A négyszögek

VII. A kör

Tankönyvkiadó: Matematika az általános gimnáziumok II. osztálya számára (1965 július)

A könyv Gallai Tibor, Péter Rózsa, Surányi János, Tolnai Jenő munkája. Az ábrákat Balogh András, Csáki Imre és Hornyák László rajzolta. Két részre tagolódik ez a kötet is, de itt az első egy több témakört felölelő rész, a második pedig trigonometria.

A tankönyv tartalmi felépítése:

Első rész:

I. Hasonló idomok

II. A hasonlóság néhány alkalmazása

III. Terület átalakítások

IV. A négyzetgyökvonás és a Pitagorasz-tétel alkalmazása

V. Műveletek négyzetgyökökkel.

VI. Pitagorasz-tétel további alkalmazásai

VII. Területszámítási feladatok

VIII. A körívek hossza és a kör részeinek területei

IX. A mértani közép

X. A másodfokú egyenlet

XI. Egyenletek négyzetgyökökkel

XII. Másodfokúra redukálható negyedfokú egyenletek

XIII. Másodfokú egyenletrendszerek

XIV. A hatványfogalom kiterjesztése

XV. A logaritmus

XVI. A 10-es alapú logaritmustáblázat

XVII. A logaritmustáblázat felhasználása a számolásban

XVIII. Nem 10-es alapú logaritmus kiszámítása. Exponenciális egyenletek.

XIX. A logarléc

Trigonometria:

I. A tangens fogalma és felhasználása

II. Új szögfüggvények bevezetése

III. Összefüggés egy szög szögfüggvényei között

IV. Összetett feladatok megoldásának visszavezetése derékszögű háromszögek megoldására

Tankönyvkiadó: Matematika a gimnáziumok III. osztálya számára.(1967. Február). Tizenhetedik kiadás. A könyv Gallai Tibor, Hódi Endre, Dr. Péter Rózsa, Szabó Piroska és Tomai Jenő munkája. Ez a kötet három fő részből tevődik össze: trigonometria, sorozatok és analitikus (koordináta-) geometria.

A könyv tartalmi felépítése:

Trigonometria:

I. Sinus- és cosinustétel

II. A sinus- és cosinustétel tompaszögű háromszögben és a szögfüggvények általánosítása

III. Összegzési tételek

IV. A logaritmusok előnyösebb alkalmazását biztosító összefüggések

V. A szög és a szögfüggvények fogalmának kiterjesztése

VI. A szögfüggvények vizsgálata és ábrázolása

VII. Az ívmérték

Sorozatok

Analitikus (koordináta-) geometria:

I. Az egyenes

II. A kör

III. A parabola

IV. Az ellipszis és a hiperbola

V.A kúpszeletek összefoglalása

Tankönyvkiadó: Matematika az Általános gimnáziumok IV. osztálya számára(1965 február). Tizennegyedik kiadás. A könyv Hódi Endre, Szász Gábor, Tolnai Jenő munkája. Az ábrákat Erdősi József és Hornyák László rajzolta. Itt három fő részre van osztva a tananyag: Függvények, térmértan, egyenletek, polinomok osztása.

A könyv tartalmi felépítése:

Függvények:

I. Értelmezési tartomány

II. Függvények menetének vizsgálata

III. Függvények meghatározása

VI. Függvénytranszformációk

V. Szélsőérték kiszámítása

Térmértan:

I. Tájékozódás a térben

II. Hengerszerű testek

III. Kúpszerű testek

IV. Csonka gúla, csonka kúp

V. A gömb és részei

Egyenletek, polinomok osztása:

I. Magasabb fokú egyenletek egész és tört gyökeinek meghatározása

II. Osztás gyöktényezővel, polinomok osztása

10.2. Az analízis nehézségei Kósa András megközelítésében

Kósa András úgy fogalmaz, hogy a tanulók elsajátítanak néhány alapvetően fontos analízisbeli technikát, de még az alapvető fogalmakat sem értik meg többségében.

Középiskolában az analízist egy teljesen deduktív szellemű sablon szerint tanítják. A kiindulási pont a határérték fogalma, amit anélkül tanítanak, hogy eredetét, vagy bármilyen érdemleges alkalmazását bemutatnák. A középiskolai analízisoktatás könyvszerű, és nem hatékony. Eddigi séma: a határérték fogalma az elsődleges, ebből került visszavezetésre a folytonosság és a deriválhatóság. Ezzel szemben állítana fel ő egy másik megközelítést, és ezeket a szoros összefüggésben lévő definíciókat más módon kapcsolná össze. Itt szükséges néhány fontos fogalom bemutatása:

Pontbeli folytonosság fogalma:[10]

Legyen f valós-valós függvény, azt mondjuk, hogy az f függvény értelmezési tartománya valamely a pontjában folytonos, ha minden egyes $\varepsilon \in R$ számhoz létezik olyan $\delta \in R$, hogy bármely $x \in Df \cap k_{\delta}(a)$ esetén teljesül az $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ egyenlőtlenség folytonos

Végesben vett határérték fogalma:[11]

Legyen f valós-valós függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a torlódási pontjában a határértéke az A valós szám, ha minden egyes $\varepsilon \in R$ számhoz létezik olyan $\delta \in R$, hogy bármely $x \in Df \cap k_{\delta}(a) \setminus \{a\}$ esetén teljesül az $|f(x)-A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Torlódási pont:[12]

Legyen $H<R$, $a \in R$, azt mondjuk, hogy a torlódási pontja, ha bármely $\gamma \in R$ esetén $H \cap k\gamma(a)$ halmaz végtelen.

Elvileg minden egyes A valós számmal kapcsolatban feltehető, hogy a határértéke az a pontban f-nek. Ha valamelyik A szám határértéke az a pontban f-nek, akkor azt is ki kell mutatni, hogy ez A-tól különböző valós számra nem állhat fenn.

Legyen f valós-valós függvény, a Df egy belső pontja, és tegyük fel, hogy f deriválható a-ban. Ekkor létezik olyan Fa: $Df \rightarrow R$ függvény. Hogy

1) $f(x)-f(a)=Fa(x)(x-a)$ $(x \in Df)$

és Fa folytonos az a helyen

2) $Fa(x)=f(x)-f(a)/x-a$ $(x \in Df \setminus \{a\})$,

vagyis az Fa függvény az f függvény a-hoz tartozó különbségihányados-függvényének Df halmazra vonatkozó, mégpedig az a pontban folytonos kiterjesztése.

Az f a-hoz tartozó különbségihányados-függvényének az értelmezési tartománya a $Df \setminus \{a\}$ halmaz, a kiterjesztés tehát a mindössze egy ponttal bővebb Df halmazra

---

[10] Kósa András: Matematikai analízis a középiskolában, Tankönyvkiadó, Budapest

[11] Kósa András: Matematikai analízis a középiskolában, Tankönyvkiadó, Budapest

[12] Kósa András: Matematikai analízis a középiskolában, Tankönyvkiadó, Budapest

történik. A-beli kiterjesztésről beszélhetünk. Jelöljük f a-hoz tartozó különbségihányados-függvényét K-val. Fa│Df\{a}=K. A K függvénynek végtelen sok a-beli kiterjesztése van. Az f függvény pontosan akkor deriválható az a pontban, ha K-nak létezik a-beli folytonos kiterjesztése, vagyis K-nak létezik határértéke az a pontban.

Valós-valós függvény pontbeli határértéke:[13]

Legyen f valós-valós függvény, a pedig Df torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy f-nek a-ban van határértéke, ha az f│Df\{a} függvénynek létezik a-beli folytonos kiterjesztése, vagyis ha létezik olyan x€Df, hogy x→f(x), ha x€Df\{a}

A, ha x=a

f függvény folytonos az a pontban. Ekkor az A€R számot f a pontbeli határértékének nevezzük.

Könnyű belátni, hogy ha f-nek létezik a-ban határértéke, akkor az egyértelmű. Azt a tényt, hogy valamely f valós-valós függvénynek Df valamelyik a torlódási pontjában A€R a határértéke, a limf A szimbólummal fejezzük ki.

Egy f valós-valós függvény értelmezési tartományának egy a belső pontjában pontosan akkor deriválható, ha létezik az a-hoz tartozó K különbségihányados-függvényének a-beli folytonos kiterjesztése,vagyis ha létezik K-nak a-ban határértéke. Ez a határérték éppen f-nek a-beli deriváltja.

Formulával: f a-ban pontosan akkor deriválható, és a-beli deriváltja az A valós szám, ha minden egyes ε€R számhoz létezik olyan δ€R, hogy bármely x € kδ(a)\{a} esetén

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A \right| < \varepsilon$$

Legyen f valós-valós függvény, a€Df pedig egyben torlódási pontja is Df-nek. Az f függvény a-ban pontosan akkor folytonos, ha van f-nek a-ban határértéke, és ez f(a), vagyis ha limf=f(a)

Ha az a eleme Df pont nem torlódási pontja Df-nek, akkor a folytonosság fogalmát nem tudjuk a határérték fogalmára visszavezetni.

Számsorozat határértéke:[14]

---

[13] Kósa András: Matematikai analízis a középiskolában, Tankönyvkiadó, Budapest

[14] Kósa András: Matematikai analízis a középiskolában, Tankönyvkiadó, Budapest

Számsorozat határértékének a fogalma már szerepel a valós számok halmazának a felépítésekor. Pontbeli folytonosság, deriválhatóság, határérték mind visszavezethetők a számsorozat határértékének fogalmára.

Azt mondjuk, hogy valamely a számsorozat határértéke az $A \in R$ szám, ha minden egyes $\varepsilon \in R$ számhoz létezik $n0 \in N$, hogy bármely $n \in N$, $n>n0$ esetén teljesül az $|an-A|<E$ egyenlőtlenség.

Könnyű belátni, hogy ha a-nak létezik határértéke, akkor az egyértelmű. Azt a tényt, hogy valamely a számsorozatnak A a határértéke, a $\lim a=A$ szimbólummal fejezzük ki.

Ha egy számsorozatnak létezik határértéke, akkor azt konvergensnek, ellenkező esetben divergensnek mondjuk.

Legyen a, illetve b konvergens számsorozat az A, illetve a $B \in R$ határértékkel. Ekkor az a+b valós függvény is számsorozat, ezen felül konvergens is, és

$$\lim(a+b)=(A+B) \ (=\lim a+\lim b)$$

Valós-valós függvény pontbeli folytonossága visszavezethető számsorozat határértékének fogalmára.

Bár valóban minden könyv a határérték fogalmával kezdi a differenciálszámítás témakörét, csak ezután vezeti be a folytonosságot, és mindezek megismerése után vág bele a deriválás tárgyalásába. De alapvetően nem ez a séma a legnagyobb probléma az analízis oktatásával. Ezen fogalmak megértése időigényes és nem is egyszerű feladat az érettségi előtt állók számára, és ha az elején elveszítik érdeklődésüket, a későbbiekben már csak egyre nehezebb lesz a probléma megoldása. A tankönyveknek és a tanításnak annyiban kellene változnia, hogy szemléletesebben, jobban követhetően kellene ezeket a fogalmakat bevezetnie, és olyan könyvekre lenne szükség, amely kifejezetten emelt szinten tanulóknak szól, viszont a közép szintű anyagot is magában foglalná.

11. Irodalomjegyzék

1. Czapáry Endre- Gyapjas Ferenc: Matematika a középiskolák 11-12. évfolyama számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005
2. Egmont Colerus: Pythagorastól Hilbertig, Franklin kiadó, Budapest, 1942
3. Kósa András: Matematikai analízis a középiskolában, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990
4. Kosztolányi József: Kerettantervrendszer a gimnáziumok számára, NAT 2003, Mozaik kiadó, Budapest, 2004
5. Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet honlapja, Somfai Zsuzsa: A matematika tantárgy helyzete a felső tagozaton és a középiskolában
6. Péter Rózsa: Játék a végtelennel, Typotex kiadó, Budapest, 2004
7. Philip Davis, Reuben Hersh: A matematika élménye, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1984
8. Szakközépiskolai tankönyvek: Matematika a III. osztály számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972
9. Szénássy Barna: A magyarországi matematika története a legrégibb időktől a 20. század elejéig, Akadémiai kiadó, Budapest, 1974