Számelmélet feladatok a KöMaL-ban

Szakdolgozat

Készítette: **Vindics Dóra**
Matematika BSc Tanári szakirány

Témavezető: **Freud Róbert** egyetemi docens
Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Prímszámok, négyzetszámok, összetett számok **5**

2.1. Négyzetszámok 5

2.2. Prímszámok és összetett számok 8

3. Számok számjegyeivel kapcsolatos feladatok **12**

4. Oszthatóság **20**

4.1. Szorzattá alakítással megoldható feladatok 20

4.2. Kongruenciával megoldható feladatok 23

4.3. Egyéb 25

5. Egyenletek **26**

6. Egyéb feladatok **32**

Feladatok listája:

Feladat sorszáma	Fejezet	Oldalszám
B.3773.	4.1	21
B.3825.	4.2	23
B.3852.	4.1	22
B.3922.	3	17
B.3932.	5	29
B.3942.	6	37
B.3952.	6	35
B.4022.	4.3	25
B.4092.	4.3	25
B.4104.	5	27
B.4193.	3	19
B.4204.	6	36
B.4206.	2.1	6
B.4216.	2.1	7
B.4223.	6	36
B.4243.	2.2	9
B.4255.	2.2	10
B.4300.	4.2	23
C.870.	6	33
C.875.	6	34
C.880.	3	14
C.885.	6	33
C.887.	3	18
C.899.	5	30
C.900.	3	13
C.910.	6	32
C.911.	4.1	20
C.915.	2.2	8
C.922.	5	26
C.928.	2.1	5
C.931.	3	12
C.940.	4.1	20
C.945.	6	35
C.980.	6	32

1. Bevezetés

Választásomban elsősorban az motivált, hogy olyan témát találjak, ami kötődik a középiskolához, így esetleg később a tanítás során is felhasználhatom. Gimnáziumi éveim alatt kerültem először kapcsolatba a KöMaL-lal, több pontversenyben is rendszeresen oldottam meg feladatokat, ezért szimpatikus volt a gondolat, hogy mélyebben tanulmányozzam a témát.

Sajnálatos módon az utóbbi években egyre csökken a KöMaL iránti lelkesedés, mind az olvasói bázis, mind a megoldók tábora egyre zsugorodik, pedig sokat profitálhatnának a rendszeres forgatásával nyerhető kifinomultabb matematikai gondolkodásból. Fontos lenne, hogy a diákok maguk is elgondolkozzanak egy-egy bonyolultabb problémán, illetve hogy a feladatokat ne csak megoldani, hanem leírni is tudják, hiszen a matematikaversenyeken és az érettségin is elvárt a megoldás részletes indoklása, nem elég pusztán közölni az eredményt.

A létszám visszaesésének több oka is van. Sokan talán nem is hallanak a KöMaL-ról, vagy ha hallanak is, úgy vélik, hogy ez nekik túl nehéz, és meg sem próbálkoznak vele, vagy egyszerűen teljesen motiválatlanok, azt gondolják, hogy erre semmi szükségük nincs.

A tanár feladata, hogy ennek ellenkezőjéről megpróbálja meggyőzni a diákokat. Matematika szakkör keretei között, esetleg órán, ha van rá idő, meg lehet oldani régebbi feladatokat, megbeszélni, hogyan kell leírni, és könnyebb példákat kötelezően vagy szorgalmi jelleggel otthonra is feladni, hogy a tanulók érezzék, milyen, mikor önállóan rájönnek egy-egy megoldásra. Így lehet, hogy kedvet kapnak arra, hogy újabb feladatokon gondolkozzanak.

A folyamatot már kilencedik osztályban hasznos elkezdeni. A számelméleti feladatok azért különlegesen alkalmasak ilyen célokra, mert a hozzájuk szükséges tananyag jelentős részét már kilencedik osztályban megtanulják a diákok, ráadásul a témakör sok érdekességet tartalmaz.

Szakdolgozatomba a feladatokat korábbi KöMaL számokból és az interneten megtalálható anyagok közül választottam, 2004-től 2010-ig. A megoldásokat én dolgoztam ki, némelyiket több különböző módszerrel is levezettem, és néhány feladatot általánosítottam is, illetve hasonló feladatokat találtam ki. A feladatok között vannak egészen egyszerűek, de több nehezebb feladatot is kiválasztottam. (Például a második fejezetben a B.4206. feladat, a harmadikban a B.4193. feladat, a negyedikben a B.3852., vagy a hatodik fejezetben a B.3942. feladat.) A megoldásoknál általában középiskolás eszközöket alkalmaztam, de egyes esetekben az egyetemen elsajátított módszerek alkalmasabbnak bizonyultak, ilyenkor ezeket használtam.

Az általánosítások célja, hogy a tanár ezek alapján az óraihoz hasonló feladatokat adhasson a tanulóknak, hogy azok kipróbálhassák, egyedül is meg tudnak-e oldani ilyen jellegű feladatokat. Ezen kívül a tanulókat is lehet arra ösztönözni, hogy ők is találjanak ki újabb feladatokat, a megoldáson túl is gondolkozzanak el a feladatokon.

Szeretnék ezúton is köszönetet mondani a munkámban való támogatásért mindazoknak, akik tanácsaikkal, ötleteikkel vagy biztatásukkal hozzájárultak a szakdolgozatom elkészültéhez. Külön kiemelném Freud Róbertet, aki témavezetőmként a legjelentősebb segítséget adta, állandó visszajelzést biztosított számomra a már elkészült részekről, a hátralevő feladatokkal kapcsolatban pedig hasznos iránymutatásokkal szolgált.

2. Prímszámok, négyzetszámok, összetett számok

A fejezetben található feladatok közül a C.928. és C.915. példát ajánlanám a diákoknak önálló megoldásra. Előbbihez mindössze annyi ismeret szükséges, hogy hogy írható fel a számok összege egytől n-ig, utóbbi pedig gondolkodtató feladat, a megoldáshoz lényegében csak azt kell tudni, hogy a kettőnél nagyobb prímszámok páratlanok. A B.4243. és B.4255 feladatokban kifejezéseket kell szorzattá bontani, majd a tényezőkről bizonyítani, hogy nem egyenlők eggyel – ezt a második esetben bonyolult belátni. Kisebb tanári segítséggel ezeket is meg lehet oldatni a tanulókkal. A B.4206. és B.4216. feladatok kifejezetten bonyolultak, javaslom, hogy megoldásukat a tanár mutassa be. A B.4206. feladat megoldása előtt a tanulók keressenek példákat, hogy $p = 2$, illetve 3 esetben miért nem igaz az állítás.

2.1. Négyzetszámok

C.928. Felírjuk az egész számokat egytől egy ötvennel osztható n számig, majd elhagyjuk közülük az ötvennel oszthatókat. Mutassuk meg, hogy a maradék számok összege négyzetszám!

1. Megoldás

Az egész számok összege egytől egy ötvennel osztható n-ig, miután az ötvennel oszthatókat elhagytuk közülük:

$$\begin{aligned} & 1+\ldots+49+51+\ldots+99+101+\ldots+n-1= \\ = \; & 0\cdot 49\cdot 50+(1+\ldots+49)+1\cdot 49\cdot 50+(1+\ldots+49)+\ldots= \\ = \; & k(\frac{49\cdot 50}{2})+49\cdot 50\cdot(1+\ldots+k-1)= \\ = \; & \frac{49\cdot 50}{2}\cdot k+49\cdot 50\cdot\frac{k\cdot(k-1)}{2}= \\ = \; & \frac{49\cdot 50}{2}\cdot(k+k^2-k)=35^2\cdot k^2 \end{aligned}$$

Az összeg felírható két négyzetszám szorzataként, tehát négyzetszám.

2. Megoldás

Az egész számok összege egytől egy ötvennel osztható n-ig, kivonva belőle az ötvennel oszthatókat:

$$\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{j=1}^{\frac{n}{50}} 50j \;=\; \sum_{i=1}^{n} i-50\cdot\sum_{j=1}^{\frac{n}{50}} j=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n}{2}-50\cdot\frac{\left(\frac{n}{50}+1\right)\cdot\frac{n}{50}}{2} \;=\; \frac{n^2+n-50\cdot\left(\frac{n^2}{50^2}+\frac{n}{50}\right)}{2}=$$

$$= \frac{n^2 + n - \frac{n^2}{50} - n}{2} = \frac{(\frac{50n^2 - n^2}{50})}{2} =$$
$$= \frac{49 \cdot n^2}{100} = \left(\frac{7 \cdot n}{10}\right)^2$$

Tehát a maradék számok összege négyzetszám.

B.4206. Legyen $p > 3$ prímszám, k és m pedig nemnegatív egész számok. Igazoljuk, hogy $p^k + p^m$ nem lehet négyzetszám.

Megoldás

Tegyük föl, hogy $k \leq m$, ekkor $p^k + p^m = p^k(1 + p^{m-k})$. Ha $p \neq 2$, akkor $p \nmid 1 + p^{m-k}$, ezért $p^k(1 + p^{m-k})$ pontosan akkor lehet négyzetszám, ha p^k és $1 + p^{m-k}$ is azok.

p^k akkor négyzetszám, ha k páros.

Tegyük föl, hogy $1 + p^{m-k} = x^2$. Átrendezve $p^{m-k} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, így $p^a = x + 1$, $p^b = x - 1$ (ahol $m - k = a + b$). Ekkor $p^b + 1 = p^a - 1$, azaz $2 = p^a - p^b = p^b(p^{a-b} - 1)$. Ha $p^b = 2$, akkor $p = 2$. Ha $p^{a-b} - 1 = 2$, $p^{a-b} = 3$, akkor $p = 3$, de azt tettük fel, hogy $p > 3$. Ezért $1 + p^{m-k}$ nem lehet négyzetszám, így $p^k + p^m$ sem lehet az.

Megjegyzés

A $p > 3$ feltétel szükséges.

1. eset:

   Ha $p^b = 2$, akkor $p = 2$ és $b = 1$. Ebben az esetben $2^1 + 1 = 2^a - 1$, tehát $a = 2$. A megoldás szerint $a + b = m - k$, ekkor $m = 3 + k$. Látható, hogy $1 + p^{m-k} = 1 + 2^3 = 9$ négyzetszám. Ha k páros, akkor 2^k is négyzetszám, tehát a megoldás szerint $p^k + p^m$ négyzetszám.

   Ha $p = 2$ és $k = m$, akkor $2 \mid 1 + 2^0$, ezért $p^k + p^m$ akkor is négyzetszám lehet, ha $m = k$ és k páratlan.

   Ha $m = 3 + k$ és $k = 2n$, akkor $p^k + p^m = 2^k + 2^{3+k} = 2^{2n} \cdot (1 + 2^3) = (2^n)^2 \cdot 3^2 = (2^n \cdot 3)^2$.

   Ha $k = m = 2n + 1$, akkor $p^k + p^m = 2^{2n+1} + 2^{2n+1} = 2 \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n+2} = (2^{n+1})^2$.

2. eset:

   Ha $p^{a-b} - 1 = 2$, akkor $p^{a-b} = 3$, tehát $p = 3$ és $a - b = 1$, vagyis $a = b + 1$. Ebben az esetben $3^b + 1 = 3^{b+1} - 1$, átrendezve $2 = 3^{b+1} - 3^b = 3^b \cdot (3 - 1)$, tehát $b = 0$ és $a = 1$. A megoldás szerint $a + b = m - k$, ekkor $m = 1 + k$.

Látható, hogy $1 + p^{m-k} = 1 + 3^1 = 4$ négyzetszám. Ha k páros, akkor 3^k is négyzetszám, tehát a megoldás szerint $p^k + p^m$ négyzetszám.

Ha $m = 1+k$ és $k = 2n$, akkor $p^k+p^m = 3^k+3^{1+k} = 3^{2n}\cdot(1+3^1) = (3^n)^2\cdot 2^2 = (3^n \cdot 2)^2$.

B.4216. Keressük meg az összes $\overline{\underbrace{aa\dots a}_{n}\underbrace{bb\dots b}_{n}}$ alakú négyzetszámot.

Megoldás

Ha $n = 1$, akkor $\overline{ab}$ alakú négyzetszámok kellenek. Ezek a következők: 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ha $n = 2$, akkor $\overline{aabb}$ alakú négyzetszámokat keresünk.
$\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b)$ pontosan akkor négyzetszám, ha $100a + b = 11x^2$. Itt x^2 egy kétjegyű négyzetszám kell legyen, mert $11 \cdot 9$ kétjegyű, de $11 \cdot 16$ már háromjegyű, hasonlóan $11 \cdot 81$ még háromjegyű, de $11 \cdot 100$ már négyjegyű.

$$\begin{aligned}
11 \cdot 16 &= 176\\
11 \cdot 25 &= 275\\
11 \cdot 36 &= 396\\
11 \cdot 49 &= 539\\
11 \cdot 64 &= 704\\
11 \cdot 81 &= 891
\end{aligned}$$

Ezek közül az kell, ami $\overline{a0b}$ alakú. Ez csak a 704-re igaz. Tehát $a = 7$, $b = 4$, $\overline{aabb} = 7744 = 88^2$.

Ha $n \geq 3$, akkor nincsen $\overline{\underbrace{aa\dots a}_{n}\underbrace{bb\dots b}_{n}}$ alakú négyzetszám.

Egy négyzetszám utolsó két számjegye a következő számok közül valamelyik: 00, 01, 21, 41, 61, 81, 24, 84, 44, 04, 64, 25, 56, 36, 96, 76, 16, 89, 29, 69, 09, 49. Ezek közül csak a 00 és a 44 jöhet szóba.

Ha $n^2 \equiv 44 \pmod{100}$, akkor $n \equiv 38, 88, 12, 62 \pmod{100}$.

$\overline{x12}^2$ és $\overline{x88}^2$ utolsó három számjegye a következő lehet: 544, 944, 344, 744, 144.
$\overline{x62}^2$ és $\overline{x38}^2$ utolsó három számjegye a következő lehet: 044, 244, 444, 644, 844.

Így csak a 444 végződés lehetséges.

Ha $n^2 \equiv 444 \pmod{1000}$, akkor $n \equiv 038, 538, 462, 962 \pmod{1000}$.

$\overline{x038}^2$, $\overline{x538}^2$, $\overline{x462}^2$ és $\overline{x962}^2$ utolsó három számjegye a következő lehet: 5444, 9444, 3444, 7444, 1444. Tehát nincs olyan négyzetszám, aminek utolsó négy számjegye ugyanaz.

Az $n = 3$ esetben pedig $38^2 = 1444$, $462^2 = 213\,444$, $538^2 = 259\,444$, $962^2 = 925\,444$. Így tehát nincs $\overline{\underbrace{aa\dots a}_{n}\underbrace{bb\dots b}_{n}}$ alakú négyzetszám, ha $n \geq 3$.

Ha egy négyzetszám utolsó n darab számjegye 0, akkor előtte egy négyzetszám áll. Az előzőekből látszik, hogy nincs $\overline{\underbrace{aa\dots a}_{n}}$ alakú négyzetszám, ha $n \geq 2$, ezért nincs $\overline{\underbrace{aa\dots a}_{n}\underbrace{00\dots 0}_{n}}$ alakú négyzetszám sem.

Tehát az összes $\overline{\underbrace{aa\dots a}_{n}\underbrace{bb\dots b}_{n}}$ alakú szám: 16, 25, 36, 49, 64, 81, 7744.

2.2. Prímszámok és összetett számok

C.915. Melyek azok a prímszámok, amelyek felírhatóak két pozitív összetett szám összegeként?

Megoldás

$p - 9 = a$ (ahol a páros összetett szám), ha $p > 11$. Átrendezve $p = 9 + a$, tehát ha $p > 11$, minden prím felírható két összetett szám összegeként.

Megjegyzés

1. A megoldás során nem használtam ki azt, hogy p prímszám, csak azt, hogy p páratlan. Ennek következtében minden 11-nél nagyobb páratlan számra igaz az állítás. Ha p páros és hatnál nagyobb, akkor $p - 4 > 2$ és páros szám, tehát összetett. Így $p = 4 + a$.

   Tehát 8, 10 és minden 11-nél nagyobb szám felírható két összetett szám összegeként.

2. Ez a feladat kapcsolatban van a Goldbach-sejtéssel, ami azt mondja ki, hogy minden kettőnél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.

B.4243. Mutassuk meg, hogy $65^{64} + 64$ összetett szám.

Megoldás

$$\begin{aligned}
& 65^{64} + 64 = 65^{64} + 2^6 = \\
= \; & \left(65^{32}\right)^2 + \left(2^3\right)^2 = \left(65^{32} + 2^3\right)^2 - 2 \cdot 65^{32} \cdot 2^3 = \\
= \; & \left(65^{32} + 2^3\right)^2 - 65^{32} \cdot 2^4 = \left(65^{32} + 2^3\right)^2 - \left(65^{16} \cdot 2^2\right)^2 = \\
= \; & (65^{32} + 2^3 + 65^{16} \cdot 2^2) \cdot (65^{32} + 2^3 - 65^{16} \cdot 2^2)
\end{aligned}$$

Ebből látszik, hogy a $65^{64} + 64$ felbontható két szám szorzatára, amik közül egyik sem 1, tehát ez a szám tényleg összetett.

Általánosítás

A feladatot sokféleképpen lehet általánosítani. Az a fontos, hogy az összeget szorzattá lehessen bontani és a tényezők közül egyik se legyen egy. Az általánosításhoz felhasználhatjuk a nevezetes azonosságokat, például $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ vagy $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Ha az eredeti feladatot általánosítjuk, akkor $a^b + 2^c$ számról kell bizonyítani, hogy összetett. Legyen $b = 4k$, $c = 4n + 2$ és a, b, c pozitív egész számok. Ekkor a következőképpen lehet szorzattá bontani a számot:

$$\begin{aligned}
& a^b + 2^c = \left(a^{2k} + 2^{2n+1}\right)^2 - 2 \cdot a^{2k} \cdot 2^{2n+1} = \\
= \; & \left(a^{2k} + 2^{2n+1}\right)^2 - a^{2k} \cdot 2^{2(n+1)} = \\
= \; & \left(a^{2k} + 2^{2n+1}\right)^2 - \left(a^k \cdot 2^{n+1}\right)^2 = \\
= \; & \left(a^{2k} + 2^{2n+1} - a^k \cdot 2^{n+1}\right) \cdot \left(a^{2k} + 2^{2n+1} + a^k \cdot 2^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Annak, hogy a szám összetett, az a feltétele, hogy egyik tényező sem lehet 1. A második tényező, $a^{2k} + 2^{2n+1} + a^k \cdot 2^{n+1}$ mindenképp nagyobb egynél. Megmutatjuk, hogy az $n = k = 0$ esettől eltekintve az első tényező sem egy.

Tegyük fel, hogy $a^{2k} + 2^{2n+1} - a^k \cdot 2^{n+1} = 1$, azaz $a^{2k} + 2^{2n+1} - a^k \cdot 2^{n+1} - 1 = 0$. Legyen $x = a^k$, ekkor a következő másodfokú egyenletet kapjuk: $x^2 - 2^{n+1} \cdot x + 2^{2n+1} - 1 = 0$. A megoldóképletet felírva:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{2^{n+1} \pm \sqrt{2^{2n+2} - 4 \cdot (2^{2n+1} - 1)}}{2} = \\
&= \frac{2^{n+1} \pm \sqrt{4 \cdot (2^{2n} - 2^{2n+1} + 1)}}{2} = \\
&= 2^n \pm \sqrt{2^{2n} - 2^{2n+1} + 1} = \\
&= 2^n \pm \sqrt{2^{2n} \cdot (1 - 2) + 1} = \\
&= 2^n \pm \sqrt{-(2^{2n}) + 1}
\end{aligned}$$

Mivel a és b pozitív egész számok, ezért x is az. A megoldóképletben a gyök alatt egy négyzetszámnak kell állnia. Ha $n > 0$, akkor a gyökjel alatt negatív szám áll, ha $n < 0$, akkor pedig törtszám.

Tehát $n = 0$ és $a^k = x = 1$. Ebből következik, hogy $k = 0$, a bármilyen pozitív egész szám lehet, $b = 4k = 0$ és $c = 4n + 2 = 2$.

Ezeket behelyettesítve a feladatba azt kapjuk, hogy az $a^b + 2^c = a^0 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ számról kellene bizonyítani, hogy összetett szám, de mivel a szorzattá bontás után ez egyik tényező egy, ezért nem az.

Példák:

1. példa:

   Legyen $a = 1023$, $b = 1024$, $c = 10$. Ekkor azt kell megmutatni, hogy $1023^{1024} + 1024$ összetett. Végezzük el az általánosítás alapján a szorzattá alakítást:

   $$1023^{1024} + 1024 = (1023^{512} + 2^5 + 1023^{256} \cdot 2^3) \cdot (1023^{512} + 2^5 - 1023^{256} \cdot 2^3)$$

   Egyik tényező sem egy, tehát a szám összetett.

2. példa:

   Legyen $a = 41$, $b = 40$, $c = 10$. Ekkor azt kell megmutatni, hogy $41^{40} + 1024$ összetett. Szorzattá alakítás után:

   $$41^{40} + 1024 = (41^{20} + 2^5 + 41^{10} \cdot 2^3) \cdot (41^{20} + 2^5 - 41^{10} \cdot 2^3)$$

   Egyik tényező sem egy, tehát a szám összetett.

B.4255. Mutassuk meg, hogy ha az n pozitív egészre $2n+1$ és $3n+1$ négyzetszámok, akkor $5n+3$ nem lehet prímszám.

Megoldás

Legyen $2n + 1 = a^2$, $3n + 1 = b^2$ (feltehetjük, hogy $a, b \in \mathbb{Z}^+$). Az $a^2 + b^2 = 5n + 2$ és $1 = 6n + 3 - (6n + 2) = 3a^2 - 2b^2$ egyenleteket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$5n + 3 = a^2 + b^2 + 3a^2 - 2b^2 = 4a^2 - b^2 = (2a + b)(2a - b).$$

Eszerint $5n + 3$ biztosan nem lehet prím, ha $2a - b \neq 1$.

Maradt a $2a - b = 1$ eset. Ekkor $2a + b = 5n + 3$.

$$\begin{aligned}
b &= 2a-1\\
2a+(2a-1) &= 5n+3\\
n &= \frac{4a-4}{5}\\
2n+1 &= a^2\\
2\cdot\frac{4a-4}{5}+1 &= a^2\\
8a-8+5 &= 5a^2\\
5a^2-8a+3 &= 0\\
a_1 &= \frac{8+\sqrt{64-60}}{10}=1\\
a_2 &= \frac{8-\sqrt{64-60}}{10}=0,6
\end{aligned}$$

Ha $a=1$, akkor $n=0$, de a feltétel az volt, hogy n pozitív, tehát $2a-b\neq 1$, így $5n+3$ nem lehet prímszám, ha $2n+1$ és $3n+1$ is négyzetszámok.

3. Számok számjegyeivel kapcsolatos feladatok

Önálló megoldásra javasolnám a C.931., C.900., C.880., B.3922. feladatokat. Megoldásukhoz fontos tudni, hogy $\overline{abcd}$ alakban felírt számok hogyan írhatók át összegalakba. A C.887. feladatban könnyű megállapítani, milyen számjegyek vannak egy ilyen számban, összeszámolni azonban nehezebb. A B.4193. bonyolultabb, legjobb lenne, ha ezt a tanár magyarázná el a diákoknak.

C.931. Adjuk meg azokat a pozitív egész számokat, melyekből a számjegyei összegét kivonva 2007-et kapunk!

Megoldás

Ha egy n-jegyű számból kivonjuk a számjegyeinek összegét, akkor vagy n-jegyű számot, vagy $\underbrace{999\ldots9}_{n-1}$-et kapunk, ugyanis

$$\begin{aligned} & x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + x_1 - (x_n + x_{n-1} + \ldots + x_1) = \\ = \; & (10^n - 1) \cdot x_n + (10^{n-1} - 1) \cdot x_{n-1} + \ldots + (10 - 1) \cdot x_2 + 0 = \\ = \; & \underbrace{999\ldots9}_{n-1} \cdot x_n + \underbrace{999\ldots9}_{n-2} \cdot x_{n-2} + \ldots + 9 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Ez akkor a legkisebb, ha $x_n = 1$ és $x_{n-1} = \ldots = x_2 = 0$, ekkor lesz az eredmény $\underbrace{999\ldots9}_{n-1}$, különben egy n-jegyű szám lesz.

Ezért a keresett számok négyjegyűek, jelöljük $\overline{abcd}$-vel őket.

$$\begin{aligned} \overline{abcd} - (a + b + c + d) &= 2007 \\ 1000a + 100b + 10c + d - a - b - c - d &= 2007 \\ 999a + 99b + 9c &= 2007 \qquad / : 9 \\ 111a + 11b + c &= 223 \\ c &= 223 - (111a + 11b) \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 2,\ b = 0,\ c = 1,\ d$ bármelyik számjegy lehet.

A keresett számok: 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019.

C.900. Egy különböző számjegyekből álló háromjegyű szám 75%-a ugyanazokból a számjegyekből áll, mint az eredeti, de egyik sem marad a helyén. Melyik ez a szám?

Megoldás

Jelöljük a számot $\overline{abc}$-vel. Két olyan eset van, amikor egyik számjegy sem marad a helyén:

1. eset:

$$\begin{aligned} 0,75 \cdot \overline{abc} &= \overline{bca} \\ \frac{3}{4}(100a + 10b + c) &= 100b + 10c + a \\ 300a + 30b + 3c &= 400b + 40c + 4a \\ 296a - 370b - 37c &= 0 \\ 296a &= 37(10b + c) \\ 8a &= 10b + c = \overline{bc} \end{aligned}$$

Ekkor a szám és a 75%-a a következők lehetnek:

a	$\overline{abc}$	0,75$\cdot\overline{abc}$
0	000	000
1	108	81
2	216	162
3	324	243
4	432	324
5	540	405
6	648	486
7	756	567
8	864	648
9	972	729

Ezek közül $a = 0$ nem megoldás, mert $\overline{abc}$ nem háromjegyű, de a többi számra igaz, hogy a szám 75%-a ugyanazokból a számjegyekből áll, mint az eredeti, de egyik sem marad a helyén.

2. eset:

$$\begin{aligned} 0,75 \cdot \overline{abc} &= \overline{cab} \\ \frac{3}{4}(100a + 10b + c) &= 100c + 10a + b \\ 300a + 30b + 3c &= 400c + 40a + 4b \\ 260a + 26b - 397c &= 0 \\ 26 \cdot (10a + b) &= 397c \end{aligned}$$

Az egyenlet bal oldala osztható 13-mal, a jobb oldala viszont nem, ezért a két oldal nem lehet egyenlő.

Tehát csak az első esetben kapott számok a feladat megoldásai.

C.880. Egy hatjegyű számot úgy lehet hárommal szorozni, hogy az első jegyét hárommal csökkentjük és a végére írunk egy hármast. Melyik ez a szám?

1. Megoldás

Ha egyjegyű számot szorzunk 3-mal, az utolsó számjegy mindig különböző, ezért az utolsó számjegyből következtethetünk arra, hogy mit szoroztunk hárommal.

$$\begin{array}{ll}
 & \overline{abcdef} \cdot 3 = \overline{(a-3)bcdef3} \\
f = 1 & \overline{abcde1} \cdot 3 = \overline{(a-3)bcde13} \\
e = 7 & \overline{abcd71} \cdot 3 = \overline{(a-3)bcd713} \\
d = 5 & \overline{abc571} \cdot 3 = \overline{(a-3)bc5713} \\
c = 8 & \overline{ab8571} \cdot 3 = \overline{(a-3)b85713} \\
b = 2 & \overline{a28571} \cdot 3 = \overline{(a-3)285713} \\
a = 4 & \overline{428571} \cdot 3 = \overline{1285713}
\end{array}$$

Tehát ez a szám a 428571.

2. Megoldás

Jelölje a számot $(a \cdot 10^5 + x)$. Ekkor a következő egyenlet írható fel:

$$\begin{aligned}
(a \cdot 10^5 + x) \cdot 3 &= (a-3) \cdot 10^6 + 10x + 3 \\
3 \cdot 10^5 \cdot a + 3x &= 10^6 \cdot a - 3 \cdot 10^6 + 10x + 3 \\
3 \cdot 10^6 - 3 &= (10^6 - 3 \cdot 10^5) \cdot a + 7x \\
2\,999\,997 &= 7 \cdot 10^5 \cdot a + 7x \qquad / : 7 \\
428\,571 &= 10^5 \cdot a + x
\end{aligned}$$

A keresett szám $10^5 \cdot a + x = 428\,571$.

Általánosítás

Első általánosítási lehetőség, hogy az első jegyet nem hárommal csökkentem és a végére nem hármast írok. A feladat szövege módosítás után: Egy hatjegyű számot úgy lehet hárommal szorozni, hogy az első számjegyet csökkentem α-val és a végére írok β-t. Melyik ez a szám?
Vizsgáljuk meg, hogy mi lehet α, illetve β!

Az előző megoldáshoz hasonlóan felírható egy egyenlet, ahol a számot $10^5 \cdot a + x$ jelöli:

$$\begin{aligned}
(10^5 \cdot a + x) \cdot 3 &= (a - \alpha) \cdot 10^6 + 10x + \beta \\
3 \cdot 10^5 \cdot a + 3x &= 10^6 \cdot a - \alpha \cdot 10^6 + 10x + \beta \\
\alpha \cdot 10^6 - \beta &= 7 \cdot 10^5 \cdot a + 7x = 7 \cdot (10^5 \cdot a + x)
\end{aligned}$$

$$\frac{\alpha \cdot 10^6 - \beta}{7} = 10^5 a + x$$

Mivel a szám hatjegyű, ezért:

$$10^5 \leq \frac{\alpha \cdot 10^6 - \beta}{7} < 10^6 \Rightarrow 0 < \alpha < 8$$

$10^5 \cdot a + x$ egész szám, tehát $7 \mid \alpha \cdot 10^6 - \beta$.

Ekkor α-ra és β-ra a lehetőségek az alábbiak:

α	1	2	3	4	5	6	7
β	8, 1	9, 2	3	4	5	6	7

α-tól és β-tól függően a feladatban keresett számok a következők lehetnek:

α	β	$\frac{\alpha \cdot 10^6 - \beta}{7}$	$\frac{\alpha \cdot 10^6 - \beta}{7} \cdot 3$
1	1	142 857	428 571
1	8	142 856	428 568
2	2	285 714	857 142
2	9	285 713	857 139
3	3	428 571	1 285 713
4	4	571 428	1 514 284
5	5	714 285	2 142 855
6	6	857 142	2 571 426
7	7	999 999	2 999 997

További általánosítási lehetőség, hogy nem hárommal szorzunk, hanem egy tetszőleges pozitív számmal. Ekkor a feladat szövege a következő: Egy hatjegyű számot γ-val úgy szorzok, hogy az első számot csökkentem α-val és a végére írok β-t.
Itt azt vizsgálom, hogy γ-tól függően α, β, illetve a keresett szám milyen lehet.

Most is felírhatunk egy egyenletet az előzőekhez hasonlóan. A számot megint $10^5 \cdot a + x$ jelöli.

$$\begin{aligned}
(10^5 \cdot a + x) \cdot \gamma &= (a - \alpha) \cdot 10^6 + 10x + \beta \\
\gamma \cdot 10^5 \cdot a + \gamma \cdot x &= 10^6 \cdot a - \alpha \cdot 10^6 + 10x + \beta \\
\alpha \cdot 10^6 - \beta &= (10 - \gamma) \cdot (10^5 \cdot a + x) \\
10^5 \cdot a + x &= \frac{\alpha \cdot 10^6 - \beta}{10 - \gamma}
\end{aligned}$$

Mivel a szám hatjegyű és pozitív, ezért:

$$10^5 \leq \frac{\alpha \cdot 10^6 - \beta}{10 - \gamma} < 10^6$$

Ha $0 < \gamma < 10$, akkor $0 < \alpha \leq 10 - \gamma$.
Ha $10 < \gamma$, akkor $10 - \gamma < \alpha \leq -1$.

$10^5 a + x$ egész szám, tehát $10 - \gamma \mid \alpha \cdot 10^6 - \beta$.

Ha $\gamma = 10$, akkor $10 - \gamma = 0$, tehát $\alpha \cdot 10^5 - \beta = 0$, amiből következik, hogy $\alpha = 0$ és $\beta = 0$. Ekkor a feladat szövege: egy hatjegyű számot úgy szorzok 10-zel, hogy az első számjegyet nullával csökkentem és a végére írok egy nullát. Ez pedig minden számra igaz.

Példák:

1. $\gamma = 7$-re

$$10^5 \cdot a + x = \frac{\alpha \cdot 10^6 - \beta}{3}$$
$$0 < \alpha \leq 3$$
$$3 \mid \alpha \cdot 10^6 - \beta$$

α	1	2	3
β	7, 4, 1	8, 5, 2	9, 6, 3

α -tól és β-tól függően a feladatban keresett számok a következők lehetnek:

α	β	$\frac{\alpha \cdot 10^6 - \beta}{3}$	$\frac{\alpha \cdot 10^6 - \beta}{3} \cdot 7$
1	1	333 333	2 333 331
1	4	333 332	2 333 324
1	7	333 331	2 333 317
2	2	666 666	4 666 662
2	5	666 665	4 666 655
2	8	666 664	4 666 648
3	3	999 999	6 999 993
3	6	999 998	6 999 986
3	9	999 997	6 999 979

2. $\gamma = 22$-re

$$-12 < \alpha \leq -1$$
$$10^5 \cdot a + x = \frac{\alpha \cdot 10^6 - \beta}{-12} = \frac{-\alpha \cdot 10^6 + \beta}{12}$$
$$12 \mid -\alpha \cdot 10^6 + \beta$$

β	4	8	0
$-\alpha$	2, 5, 8, 11	1, 4, 7, 10	3, 6, 9

α -tól és β-tól függően a feladatban keresett számok a következők lehetnek:

$-\alpha$	β	$\frac{-\alpha\cdot 10^6+\beta}{12}$	$\frac{-\alpha\cdot 10^6+\beta}{12}\cdot 22$
3	0	250 000	5 500 000
6	0	500 000	11 000 000
9	0	750 000	16 500 000
2	4	166 667	3 666 674
5	4	416 667	9 166 674
8	4	666 667	14 666 674
11	4	916 667	20 166 674
4	8	333 334	7 333 348
7	8	583 334	12 833 348
10	8	833 334	18 333 348

Ha $-\alpha = 1$, akkor $\frac{-\alpha\cdot 10^6+\beta}{12} = 83334$, ami nem hatjegyű.

De $083\,334 \cdot 22 = 1\,833\,348$, tehát erre is teljesül, hogy ha az első számjegyet, ami itt 0, eggyel növelem és a végére nyolcat írok, akkor a szám 22-szeresét kapom.

B.3922. Gondoltam egy hatjegyű számot. Az első számjegyét letöröltem és átírtam a végére, így az eredeti szám háromszorosát kaptam. Mire gondoltam?

Megoldás

Jelölje a számot $(a \cdot 10^5 + x)$. Ekkor a következő egyenlet írható fel:

$$\begin{aligned}
(a \cdot 10^5 + x) \cdot 3 &= 10x + a \\
3 \cdot 10^5 \cdot a + 3x &= 10x + a \\
299\ 999 &= 7x \qquad /:7 \\
42\ 857 \cdot a &= x
\end{aligned}$$

Ha $a = 1$, akkor a keresett szám 142 857.
Ha $a = 2$, akkor a keresett szám 285 714.
Ha $a = 3$, akkor x=42 857$\cdot a$ hatjegyű lesz, pedig x legfeljebb ötjegyű lehet.

$142\,857 \cdot 3 = 428\,571$ és $285\,714 \cdot 3 = 857\,142$, tehát ez a két szám valóban megoldás.

Általánosítás

Ennél a feladatnál is lehet általánosítani úgy, hogy nem hárommal szorzok, hanem egy másik egyjegyű számmal. Az általános feladat:
Egy hatjegyű számot úgy szorzok α-val, hogy az első számjegyet a szám végére teszem. Mi lehet ez a szám?
Azt vizsgálom, hogy mi lehet α.

Az eredeti feladat megoldásához hasonlóan itt is legyen a szám $10^5 a + x$. Ismét felírható egy egyenlet:

$$\begin{aligned}
(10^5 \cdot a + x) \cdot \alpha &= 10x + a \\
\alpha \cdot 10^5 \cdot a + \alpha \cdot x &= 10x + a \\
\frac{\alpha \cdot 10^5 - 1}{10 - \alpha} \cdot a &= x
\end{aligned}$$

Itt x egy ötjegyű egész szám, ezért $10 - \alpha \mid \alpha \cdot 10^5 \cdot a - 1$. Ebből következik, hogy α nem lehet páros szám vagy 5.

Ha $\alpha = 1$, akkor $x = \frac{99\,999}{9} \cdot a = 11\,111a$.

$a = 1$	111 111
$a = 2$	222 222
$a = 3$	333 333
$a = 4$	444 444
$a = 5$	555 555
$a = 6$	666 666
$a = 7$	777 777
$a = 8$	888 888
$a = 9$	999 999

Ha $\alpha = 7$, akkor $x = \frac{699\,999}{3} \cdot a = 233\,333a$, ez nem lehet ötjegyű szám.

Ha $\alpha = 9$, akkor $x = \frac{899\,999}{1} \cdot a = 899\,999a$, ez nem lehet ötjegyű szám.

C.887. Hány olyan nyolcjegyű szám van, amelyben minden előforduló számjegy pontosan annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke?

Megoldás

Hatféle olyan szám van, amelyben minden előforduló számjegy pontosan annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke. A nyolcat hatféleképpen lehet pozitív egész számok összegére bontani, úgy, hogy egy szám csak egyszer szerepeljen az összegben. $8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1$. A hatféle számból több darab is lehet, ha más a számjegyek sorrendje.

88 888 888	1 db
77 777 771	$\binom{8}{1} = 8$ db
66 666 622	$\binom{8}{2} = 28$ db
55 555 333	$\binom{8}{3} = 56$ db
55 555 221	$\frac{8!}{5! \cdot 2!} = 168$ db

$$44\,443\,331 \qquad \frac{8!}{4!\cdot 3!} = 280 \text{ db}$$

Tehát összesen $1+8+28+56+168+280=541$ darab ilyen szám van.

B.4193. Egymillió darab kiadott sorsjegyből, amelyek sorszáma 000 000-tól 999 999-ig változik, egy baráti társaság megvásárolta az összes olyan – általuk szerencsésnek mondott – sorsjegyet, amelyek $\overline{abcdef}$ sorszámára teljesül, hogy $af+be+cd=100$. Bizonyítsuk be, hogy a megmaradt sorsjegyek sorszámainak összege osztható 1001-gyel.

Megoldás

Összes sorsjegy sorszámának összege:

$$\frac{(000\,000+999\,999)\cdot 1\,000\,000}{2} = 499\,999\,500\,000$$

Ez osztható 1001-gyel. Ha a szerencsés sorsjegyek sorszámainak összege osztható 1001-gyel, akkor a maradék sorszámok összege is osztható 1001-gyel.

Ha $\overline{abcdef}$ szerencsés, akkor $\overline{defabc}$ is az, mert $dc+eb+fa=af+be+cd=100$.

$$\begin{aligned}
\overline{abcdef}+\overline{defabc} &= 10^5\cdot a+10^4\cdot b+10^3\cdot c+10^2\cdot d+10\cdot e+f+\\
&+ 10^5\cdot d+10^4\cdot e+10^3\cdot f+10^2\cdot a+10\cdot b+c=\\
&= 100\ 100\cdot(a+d)+10\ 010\cdot(b+e)+1001\cdot(c+f)=\\
&= 1001\cdot(100\cdot(a+d)+10\cdot(b+e)+(c+f))
\end{aligned}$$

Ezért két ilyen szerencsés sorszámú sorsjegy összege osztható 1001-gyel.

Ha $\overline{abdcef}=\overline{defabc}$, akkor nem tudunk a sorszámhoz ilyen párt találni, de ekkor $\overline{abcdef}$ osztható 1001-gyel, mert $\overline{abc}=\overline{def}$, tehát $\overline{abcdef}=\overline{abcabc}=1001\cdot\overline{abc}$.

Tehát egy szerencsés sorszámú sorsjegynek vagy van párja, amivel ha összeadjuk, akkor az összeg osztható 1001-gyel, vagy maga a szám osztható 1001-gyel. Ezért aztán a maradék sorsjegyek sorszámának összege is osztható 1001-gyel.

4. Oszthatóság

A fejezetben találhatóak közül a C.911., B.3825., B.4300., B.4092. és B.4022. feladatokat ajánlanám önálló megoldásra. A C.940., B3773. feladatokhoz ismerni kell a $a^{2k} - b^{2k}$, illetve $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ összeg szorzattá bontását. Ha ezt valaki tudja, akkor a feladatok megoldása nem jelent nagy nehézséget. A B.3852. példához szükséges a $x \mid y$, $x \mid z \Rightarrow x \mid sy + tz$ összefüggés, ezért ez a nehezebb feladatok közé tartozik.

4.1. Szorzattá alakítással megoldható feladatok

C.911. Melyek azok a pozitív egész számok, melyek esetén $n^3 + 1$ és $n^2 - 1$ is osztható 101-gyel?

Megoldás

Az olyan n számokat keressük, amelyekre igaz az, hogy $101 \mid n^3 + 1$ és $101 \mid n^2 - 1$. A kifejezéseket szorzattá bontva a következőt kapjuk: $101 \mid (n + 1)(n^2 - n + 1)$ és $101 \mid (n + 1)(n - 1)$. Mivel a 101 prímszám, ezért $101 \mid n + 1$ vagy $101 \mid n - 1$.

1. eset:

   $101 \mid n + 1$, ekkor $101 \mid (n + 1)(n^2 - n + 1) = n^3 + 1$ is teljesül.
   Az oszthatóságot másként felírva: $101 \cdot c = n + 1$, tehát $n = 101 \cdot c - 1$.

2. eset:

   $101 \mid n - 1$, ekkor $101 \nmid n + 1$, tehát ha $101 \mid n^3 + 1$, akkor $101 \mid n^2 - n + 1$.
   Az oszthatóságot másként felírva: $101 \cdot c = n - 1$. Mivel

   $$n^2 - n + 1 = (n - 1) \cdot n + 1 = 101 \cdot c + 1,$$

   ezért 101 nem osztója $n^2 - n + 1$-nek.

Összefoglalva: azok a pozitív egész számok, amikre $n^3 + 1$ és $n^2 - 1$ is osztható 101-gyel, a $101c - 1$ alakú pozitív számok.

C.940. Bizonyítsuk be, hogy minden n-re $2^{4n} - 1$ és $2^{4n} + 1$ közül valamelyik osztható 17-tel.

Megoldás

Azt kell bizonyítani, hogy $2^{4n} - 1 = 16^n - 1$ vagy $2^{4n} + 1 = 16^n + 1$ osztható 17-tel. Ha $n = 2k$, akkor $16^{2k} - 1^{2k} = (16 + 1)(\ldots)$, tehát ebben az esetben $2^{4n} - 1$ osztható 17-tel.

Ha $n = 2k+1$, akkor $16^{2k+1} + 1^{2k+1} = (16+1)(\ldots)$, tehát ebben az esetben $2^{4n}+1$ osztható 17-tel.

B.3773. Osztható-e 323-mal $20^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} - 1$?

Megoldás

Mivel $323 = 17 \cdot 19$ és $(17, 19) = 1$, ezért azt kell megmutatni, hogy

$$17 \mid 20^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} - 1 \text{ és } 19 \mid 20^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} - 1.$$

Alakítsuk át a kifejezést:

$$\begin{aligned} & 20^{2004} - 3^{2004} + 16^{2004} - 1^{2004} = \\ = \; & (20-3)(20^{2003} + 20^{2002} \cdot 3 + \ldots + 3^{2003}) + (16+1)(16^{2003} - 16^{2002} + \ldots - 1^{2003}) = \\ = \; & 17 \cdot (20^{2003} + 20^{2002} \cdot 3 + \ldots + 3^{2003} + 16^{2003} - 16^{2002} + \ldots - 1) \end{aligned}$$

Ezért osztható 17-tel.

$$\begin{aligned} & 20^{2004} - 1^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} = \\ = \; & (20-1)(20^{2003} + 20^{2002} + \ldots + 20 + 1) + (16+3)(16^{2003} - 16^{2002} \cdot 3 + \ldots - 3^{2003}) = \\ = \; & 19 \cdot (20^{2003} + 20^{2002} + \ldots + 20 + 1 + 16^{2003} - 16^{2002} \cdot 3 + \ldots - 3^{2003}) \end{aligned}$$

Tehát osztható 19-cel is.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $323 \mid 20^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} - 1$.

Általánosítás

A feladatot a következőképpen általánosíthatjuk:

$$p_1 \cdot p_2 \mid a^x + b^x - c^x - d^x$$

Itt p_1, p_2 relatív prímek, a, b, c, d pozitív egészek, x bármilyen páros pozitív szám lehet és ha p_1, p_2, d adott, akkor a másik három adatot ki lehet számolni: $a = p_2 + d$, $b = p_1 - d$, $c = p_2 - p_1 + d$.

Példák:

1. példa:

   Legyen $p_1 = 29$, $p_2 = 31$, $d = 5$, $x = 10$. Ekkor $a = 36$, $b = 24$, $c = 7$.

   A feladat pedig: $899 \mid 36^{10} + 24^{10} - 7^{10} - 5^{10}$.

$$\begin{aligned} & 36^{10} - 7^{10} + 24^{10} - 5^{10} = \\ = \; & (36-7)(36^9 + 36^8 \cdot 7 + \ldots + 7^9) + (24+5)(24^9 - 24^8 \cdot 5 + \ldots - 5^9) = \\ = \; & 29 \cdot (36^9 + 36^8 \cdot 7 + \ldots + 7^9 + 24^9 - 24^8 \cdot 5 + \ldots - 5^9) \end{aligned}$$

Ezért osztható 29-cel.

$$\begin{aligned} & 36^{10} - 5^{10} + 24^{10} - 7^{10} = \\ = \quad & (36-5)(36^9 + 36^8 \cdot 5 + \ldots + 5^9) + (24+7)(24^9 - 24^8 \cdot 7 + \ldots - 7^9) = \\ = \quad & 31 \cdot (36^9 + 36^8 \cdot 5 + \ldots + 5^9 + 24^9 - 24^8 \cdot 7 + \ldots - 7^9) \end{aligned}$$

Tehát osztható 31-gyel is és ezért 31·29=899-nel is.

2. példa:

   Legyen $p_1 = 13$, $p_2 = 17$, $d = 1$, $x = 200$. Ekkor $a = 18$, $b = 12$, $c = 5$.

   A feladat pedig: $221 \mid 18^{200} + 12^{200} - 5^{200} - 1$.

$$\begin{aligned} & 18^{200} - 5^{200} + 12^{200} - 1^{200} = \\ = \quad & (18-5)(18^{199} + 18^{198} \cdot 5 + \ldots + 5^{199}) + (12+1)(12^{199} - 12^{198} + \ldots - 1^{199}) = \\ = \quad & 13 \cdot (18^{199} + 18^{198} \cdot 5 + \ldots + 5^{199} + 12^{199} - 12^{198} + \ldots - 1) \end{aligned}$$

Ezért osztható 13-mal.

$$\begin{aligned} & 18^{200} - 1^{200} + 12^{200} - 5^{200} = \\ = \quad & (18-1)(18^{199} + 18^{198} + \ldots 18 + 1) + (12+5)(12^{199} - 12^{198} \cdot 5 + \ldots - 5^{198}) = \\ = \quad & 17 \cdot (18^{199} + 18^{198} + \ldots + 18 + 1 + 12^{199} - 12^{198} \cdot 5 + \ldots - 5^{198}) \end{aligned}$$

Tehát osztható 17-tel is és ezért 13·17=221-gyel is.

B.3852. Az a, b egészekre $2005 \mid a^3 + b^3$ és $2005 \mid a^4 + b^4$. Bizonyítsuk be, hogy $2005 \mid a^5 + b^5$.

Megoldás

Az $a^5 + b^5$ összeg felbontható a következőképpen:

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 + b^4) - ab(a^3 + b^3)$$

Ha $x \mid y$ és $x \mid z$, akkor $x \mid s \cdot y + t \cdot z$. Legyen $x = 2005$, $y = a^4 + b^4$, $z = a^3 + b^3$, $s = a + b$, $t = -ab$. Mivel $2005 \mid a^3 + b^3$ és $2005 \mid a^4 + b^4$, ezért:

$$2005 \mid (a+b)(a^4 + b^4) - ab(a^3 + b^3) = a^5 + b^5.$$

Megjegyzés

Azt, hogy $x = 2005$, a megoldás során nem használtam ki, tehát x bármilyen más pozitív egész szám lehetne.

4.2. Kongruenciával megoldható feladatok

B.3825. Az n olyan pozitív egész, amelyre $2n+1$ és $3n+1$ is négyzetszám. Bizonyítsuk be, hogy n osztható 40-nel.

Megoldás

Mivel $40 = 5 \cdot 8$ és ez a két szám relatív prím egymáshoz, ezért azt kell bizonyítani, hogy $5 \mid n$ és $8 \mid n$ is teljesül.

1. $5 \mid n$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$\pmod 5$
$2n+1 \equiv$	1	3	0	2	4	$\pmod 5$
$3n+1 \equiv$	1	4	2	0	3	$\pmod 5$

Négyzetszám öttel osztva 0, 1, vagy 4 maradékot adhat. $2n+1$ és $3n+1$ is négyzetszámok, tehát $n \equiv 0 \pmod 5$.

2. $8 \mid n$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\pmod 8$
$2n+1 \equiv$	1	3	5	7	1	3	5	7	$\pmod 8$
$3n+1 \equiv$	1	4	7	2	5	0	3	6	$\pmod 8$

Négyzetszám nyolccal osztva szintén 0, 1, vagy 4 maradékot adhat. $2n+1$ és $3n+1$ is négyzetszámok, tehát $n \equiv 0 \pmod 8$.

Ezek szerint n osztható öttel és nyolccal, tehát negyvennel is.

B.4300. Bizonyítsuk be, hogy 35 egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege mindig osztható 35-tel.

Megoldás

Mivel $35 = 7 \cdot 5$ és $(7, 5) = 1$, ezért ha 35 egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege mindig osztható 7-tel és 5-tel, akkor 35-tel is osztható.

1. $5 \mid n$ bizonyítása

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$\pmod 5$
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1	$\pmod 5$

35 egymást követő szám négyzete közül hét osztható öttel, 14 darab ad 1 maradékot és 14 darab 4-et. Ezért 35 egymást követő szám négyzetének összege $14 \cdot 1 + 14 \cdot 4 = 145$ maradékot ad, tehát osztható öttel.

2. $7 \mid n$ bizonyítása

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	(mod 7)
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1	(mod 7)

35 egymást követő szám négyzete közül öt osztható héttel, 10 darab 2, 1, illetve 4 maradékot ad. Ezért 35 egymást követő szám négyzetének összege $10 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 2 = 70$ maradékot ad, tehát osztható héttel.

Ezek szerint 35 egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege osztható öttel és héttel, tehát 35-tel is.

Általánosítás

Milyen k-ra igaz, hogy k darab egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege mindig osztható k-val?

k db egymás utáni szám négyzetének összege:

$$\begin{aligned} & (a+1)^2 + (a+2)^2 + \ldots + (a+k)^2 = \\ = \; & k \cdot a^2 + 2a \cdot (1 + 2 + \ldots + k) + (1^2 + 2^2 + \ldots + k^2) = \\ = \; & k \cdot a^2 + 2a \cdot \frac{(1+k) \cdot k}{2} + \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} \end{aligned}$$

$k \mid k \cdot a^2$ és $k \mid 2a \cdot \frac{(1+k) \cdot k}{2} = a \cdot k \cdot (k+1)$ mindig teljesülnek. Ha $2 \nmid k$ és $3 \nmid k$, akkor $k \mid \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}$ is mindig igaz.

4.3. Egyéb

B.4092. Megadható-e négy pozitív egész szám úgy, hogy közülük bármely kettő legnagyobb közös osztója nagyobb, mint egy és bármely három legnagyobb közös osztója egy?

Megoldás

$(a, b) > 1 \Rightarrow \exists p,\ p \mid a$ és $p \mid b$
$(a, b, c) = 1 \Rightarrow$ egyik fenti p sem osztója c-nek

Például:

$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
$b = p_1 \cdot p_4 \cdot p_5 = 2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$
$c = p_2 \cdot p_4 \cdot p_6 = 3 \cdot 7 \cdot 13 = 273$
$d = p_3 \cdot p_5 \cdot p_6 = 5 \cdot 11 \cdot 13 = 715$

B.4022. Az első ezer pozitív egész szám közül legfeljebb hányat választhatunk ki úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám összege ne legyen osztható a különbségükkel?

Megoldás

Jelöljük a két kiválasztott számot a-val, illetve b-vel! A feltételt így írhatjuk föl: $a - b \nmid a + b$.

Egymás melletti számokat nem választhatunk ki, mert akkor a különbség egy lesz, ez pedig mindennek osztója. Szintén nem választhatunk ki olyan számokat, amiknek a különbsége 2, mert ekkor a számok paritása megegyezik, tehát összegük páros, így osztható kettővel. Tehát a különbség legalább három és a kiválasztott számok nem lehetnek oszthatók hárommal.

Egytől ezerig kiválasztom a $3n + 1$ alakú számokat, ezekből 334 darab van. Ezek közül bárhogy választhatok a-t és b-t, $a - b \nmid a + b$ mindig teljesülni fog. Ennél többet nem lehet így kiválasztani.

5. Egyenletek

A C.922., B.4104. és B.3932. feladatokat önálló megoldásra javasolnám. Az első két feladatnál egyenletrendszert kell felírni és megoldani, a harmadik feladatban pedig a prím számok tulajdonságait kell használni a megoldáshoz. A C.899. feladat összetett, ezért tanár általi bemutatását ajánlom.

C.922. Adjuk meg az alábbi egyenlet összes egész megoldását: $x^2 + 12 = y^4$.

Megoldás

Az egyenletet a következőképpen rendezhetjük át:

$$12 = y^4 - x^2 = (y^2 + x)(y^2 - x)$$

Két egész szám összege és különbsége is egész szám, ezért $(y^2+x)(y^2-x)$ felbontása $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$, $(-1) \cdot (-12)$, $(-2) \cdot (-6)$ vagy $(-3) \cdot (-4)$ módon lehetséges. Mivel $(y^2 + x)$ és $(y^2 - x)$ paritása megegyezik, $(y^2 + x)(y^2 - x) = 2 \cdot 6$ vagy $(-2) \cdot (-6)$.

$$\begin{aligned} y^2 - x &= 2 \\ y^2 + x &= 6 \end{aligned}$$

Az egyenleteket összeadva a $2y^2 = 8$ egyenletet kapjuk, amiből $y = \pm 2$ adódik. A második egyenletből kivonva az elsőt a $2x = 4$ egyenlethez jutunk, amiből látható, hogy $x = 2$.

Ha x és y megoldások, akkor nyilván $\pm x$ és $\pm y$ is azok. A többi esetben is ugyanezeket a megoldásokat kapjuk.

Tehát a megoldások:

x	2	2	-2	-2
y	2	-2	2	-2

B.4104. Keressünk olyan a, b, c számokat, amelyekre minden pozitív egész n esetén teljesül az

$$(n+3)^2 = a\cdot(n+2)^2 + b\cdot(n+1)^2 + c\cdot n^2$$

egyenlőség.

Megoldás

A zárójelek felbontása után:

$$\begin{aligned} n^2+6n+9 &= an^2+4an+4a+bn^2+2bn+b+cn^2 \\ n^2+6n+9 &= n^2(a+b+c)+n(4a+2b)+4a+b \end{aligned}$$

Ha két polinom végtelen sok helyen egyenlő, akkor a megfelelő együtthatók megegyeznek. Így a következő egyenleteket írhatjuk föl:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 1 \qquad (1) \\ 4a+2b &= 6 \qquad (2) \\ 4a+b &= 9 \qquad (3) \end{aligned}$$

A (2) és (3) egyenletből kifejezhetjük b-t: $b = 9-4a$. Ezt a (2) egyenletbe beírva: $4a+2\cdot(9-4a) = 6$. Tehát $a = 3$, $b = -3$, $c = 1$.

1. Általánosítás

Első általánosítási lehetőség, hogy a polinomok nem másodfokúak, hanem harmadfokúak. A feladat:
Keressünk olyan a, b, c, d számokat, amelyekre minden pozitív egész n esetén teljesül az

$$(n+4)^3 = a\cdot(n+3)^3 + b\cdot(n+2)^3 + c\cdot(n+1)^3 + d\cdot n^3$$

egyenlőség.

A zárójelek felbontása után:

$$\begin{aligned} n^3+12n^2+48n+64 &= an^3+9an^2+27a+27a+ \\ &\quad +bn^3+6bn^2+12bn+8b+cn^3+3cn^2+3cn+c+dn^3 \\ n^3+12n^2+48n+64 &= n^3(a+b+c+d)+n^2(9a+6b+3c)+ \\ &\quad +n(27a+12b+3c)+27a+8b+c \end{aligned}$$

Az eredeti feladat megoldásához hasonlóan itt is felírhatunk egyenleteket:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 1 \\ 3a+2b+c &= 4 \\ 9a+4b+c &= 16 \\ 27a+8b+c &= 64 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy $a = 4$, $b = -6$, $c = 4$ és $d = -1$.

2. Általánosítás

Keressünk olyan a, b, c számokat, amelyekre minden pozitív egész n esetén teljesül az

$$(n+\omega)^2 = a\cdot(n+\alpha)^2 + b\cdot(n+\beta)^2 + c\cdot(n+\gamma)^2$$

egyenlőség, ahol ω, α, β, γ különböző adott számok.

A zárójelek felbontása után az egyenlet:

$$n^2 + 2\omega\cdot n + \omega^2 = n^2(a+b+c) + n(2\alpha\cdot a + 2\beta\cdot b + 2\gamma\cdot c) + a\cdot\alpha^2 + b\cdot\beta^2 + c\cdot\gamma^2$$

Az együtthatók egyenlőek, tehát:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 1 \\ a\cdot\alpha + b\cdot\beta + c\cdot\gamma &= \omega \\ a\cdot\alpha^2 + b\cdot\beta^2 + c\cdot\gamma^2 &= \omega^2 \end{aligned}$$

Fel lehet írni egy lineáris egyenletrendszert a-ra, b-re és c-re:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \omega \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \omega^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \omega-\alpha \\ 0 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 & \omega^2-\alpha^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \omega-\alpha \\ 0 & 0 & (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) & (\omega-\alpha)(\omega-\beta) \end{array}$$

Ebből következik:

$$a = \frac{(\omega-\gamma)(\omega-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$b = \frac{(\omega-\alpha)(\omega-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

$$c = \frac{(\omega-\alpha)(\omega-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

Megjegyzés

Három egyenlet és három ismeretlen van, ezért alkalmazható a Cramer szabály: ha az együtthatókból képzett mátrix determinánsa nem nulla, akkor csak egy megoldás van, mégpedig:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega & \beta & \gamma \\ \omega^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \omega & \gamma \\ \alpha^2 & \omega^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}}, \quad c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \omega \\ \alpha^2 & \beta^2 & \omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}}$$

Ezek Vandermonde determinánsok, így ki lehet őket számolni a következőképpen:

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = (\beta - \alpha) \cdot (\gamma - \alpha) \cdot (\gamma - \beta).$$

Ha $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$, akkor a determináns nem lehet nulla, tehát:

$$\begin{aligned} a &= \frac{V(\omega, \beta, \gamma)}{V(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{(\beta - \omega) \cdot (\gamma - \omega) \cdot (\gamma - \beta)}{(\beta - \alpha) \cdot (\gamma - \alpha) \cdot (\gamma - \beta)} = \frac{(\omega - \gamma)(\omega - \beta)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \\ b &= \frac{V(\alpha, \omega, \gamma)}{V(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{(\omega - \alpha) \cdot (\gamma - \alpha) \cdot (\gamma - \omega)}{(\beta - \alpha) \cdot (\gamma - \alpha) \cdot (\gamma - \beta)} = \frac{(\omega - \alpha)(\omega - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} \\ c &= \frac{V(\alpha, \beta, \omega)}{V(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{(\beta - \alpha) \cdot (\omega - \alpha) \cdot (\omega - \beta)}{(\beta - \alpha) \cdot (\gamma - \alpha) \cdot (\gamma - \beta)} = \frac{(\omega - \alpha)(\omega - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \end{aligned}$$

B.3932. Oldjuk meg az $x^2+y^2 = z-16$ egyenletet a pozitív prímszámok halmazán.

Megoldás

Az egyenlet bal oldala két prímszám négyzetének összege, tehát biztosan pozitív, ezért a jobb oldalnak is pozitívnak kell lennie, vagyis $z > 16$. Ebből következik, hogy z páratlan.

Az egyenlet jobb oldalán egy páratlan szám áll, ezért a bal oldal is páratlan. Ez pontosan akkor teljesül, ha x és y paritása különböző. Mivel x és y prímszámok, paritásuk csak akkor különbözhet, ha egyikük egyenlő kettővel. Legyen $x = 2$. Behelyettesítve $4 + y^2 = z - 16$, azaz $20 + y^2 = z$ alakra jutunk.

Ha $y > 3$ prímszám, akkor $y^2 \equiv 1 \pmod 3$, ezért $z = 20 + y^2 \equiv 0 \pmod 3$. Ez ellentmond annak, hogy z prímszám. Tehát $y = 3$. Ekkor $z = 20 + 9 = 29$, ez valóban egy prímszám.

Az egyenletben betöltött szerepük alapján látszik, hogy x és y felcserélhetőek. Tehát a megoldások: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $z_1 = 29$ és $x_2 = 3$, $y_2 = 2$, $z_2 = 29$.

C.899. A v valós paraméter milyen értékére nincs megoldása az

$$\begin{aligned} x+y+z &= v & (1)\\ x+v\cdot y+z &= v & (2)\\ x+y+v^2\cdot z &= v^2 & (3) \end{aligned}$$

egyenletrendszernek?

Megoldás

A (2) egyenletből kivonva az (1)-et kapjuk, hogy $vy-y=0$, y-t kiemelve: $y\cdot(v-1)=0$. Ez akkor teljesül, ha $y=0$ vagy $v=1$.

1. Ha $v=1$, akkor az egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1\\ x+1\cdot y+z &= 1\\ x+y+1^2\cdot z &= 1^2 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásai az $x+y+z=1$ egyenlet megoldásai.

2. Ha $y=0$, akkor az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x+0+z &= v & (1)\\ x+v\cdot 0+z &= v & (2)\\ x+0+v^2\cdot z &= v^2 & (3) \end{aligned}$$

A (3) egyenletből kivonva az (1)-et:

$$\begin{aligned} v^2\cdot z-z &= v^2-v\\ z\cdot(v^2-1) &= v\cdot(v-1)\\ z &= \frac{v\cdot(v-1)}{(v-1)\cdot(v+1)} \end{aligned}$$

Ez akkor nem jó, ha $v=1$ vagy $v=-1$. A $v=1$ esetet már vizsgáltam.

Ha $v=-1$, akkor az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x+y+z &= -1 & (1)\\ x+-1\cdot y+z &= -1 & (2)\\ x+y+(-1)^2\cdot z &= (-1)^2 & (3) \end{aligned}$$

Ez ellentmondás, mert az (1) egyenlet szerint $x+y+z=-1$, a (3) szerint pedig $x+y+z=1$.

Ha $v \neq 1$ és $v \neq -1$, akkor $z = \frac{v}{(v+1)}$ és $x = v - z = v - \frac{v}{(v+1)} = \frac{v^2}{v+1}$, $y = 0$. Ez valóban megoldás, ugyanis ezeket az értékeket beírva az eredeti egyenletrendszerbe a

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{v+1} + 0 + \frac{v}{(v+1)} &= v \qquad (1) \\ \frac{v^2}{v+1} + v \cdot 0 + \frac{v}{(v+1)} &= v \qquad (2) \\ \frac{v^2}{v+1} + 0 + v^2 \cdot \frac{v}{(v+1)} &= v^2 \qquad (3) \end{aligned}$$

azonosságokat kapjuk.

Tehát $v = -1$-en kívül minden v paraméterre van az egyenletrendszernek megoldása.

6. Egyéb feladatok

A C.910., C.980., C.885., C.870., C.875., C.945., B.4204. és B.3952. feladatok egyszerűek, egyedül is könnyen megbirkózhatnak velük a diákok. A B.4223. feladat első része próbálkozással megoldható, a második része viszont nehezebb, ezért ezt és a B.3942. példa megoldását a érdemes a tanárnak prezentálnia.

C.910. Egy kör kerületére kilenc egész számot írtunk, amelyek összege 90. Bizonyítsuk be, hogy van négy egymás utáni, amelyek összege legalább 40.

Megoldás

A számok legyenek a, b, c, d, e, f, g, h, i. Azt tudjuk, hogy

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 90.$$

Tegyük fel indirekt, hogy nincs négy egymás utáni, amelyek összege legalább 40, vagyis bármely négy egymás utáni összege legfeljebb 39. Tehát

$$(a + b + c + d) + (b + c + d + e) + \ldots + (i + a + b + c) \leq 9 \cdot 39 = 351,$$

de

$$(a + b + c + d) + \ldots + (i + a + b + c) = 4 \cdot (a + b + \ldots + i) = 4 \cdot 90 = 360.$$

Azt kaptuk, hogy $360 \leq 351$, ami ellentmondás. A feltétel nem volt igaz, tehát van négy egymás utáni, amelyek összege legalább 40.

C.980. Melyek azok a természetes számpárok, amelyek szorzata egyenlő a különbségük ötszörösével?

1. Megoldás

Legyen a két szám a és b. Ekkor felírhatjuk a következő egyenletet: $(a - b) \cdot 5 = a \cdot b$. Ezt átrendezve: $b(a + 5) = 5a$, tehát $b = \frac{5a}{a+5} = \frac{5(a+5)-25}{a+5} = 5 - \frac{25}{a+5}$.

Mivel a és b természtes számok, ezért $a + 5 \mid 25$ és $a + 5 \geq 5$. Tehát $a + 5 = 5$, $a = 0$ és $b = 0$, vagy $a + 5 = 25$, $a = 20$ és $b = 4$.

2. Megoldás

Az $(a - b) \cdot 5 = a \cdot b$ egyenletet másképpen rendezve $ab + 5b - 5a = 0$ jön ki. Ezt szorzattá bontva: $(b - 5)(a + 5) = -25$. Mivel a és b is egész számok, ezért $a + 5$ és $b - 5$ a következők lehetnek:

$a+5$	$b-5$	a	b
-1	25	-6	30
25	-1	20	4
1	-25	-4	-20
-25	1	-30	6
5	-5	0	0
-5	5	-10	10

Itt azok a feladat megoldásai, ahol a és b is pozitívak, tehát: $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ és $a_2 = 20$, $b_2 = 4$.

C.885. Bankautomatából való pénzfelvétel költsége két részből tevődik össze. Van egy alapdíj, amely független a felvett összegtől. Ehhez járul a felvett összeggel egyenesen arányos rész. Mennyi a költség 85 000 Ft esetén, ha 40 000 Ft esetén 221 Ft, 100 000 Ft esetén pedig 485 Ft?

Megoldás

Jelölje x az alapdíj összegét! Ekkor az egyenes arányosság miatt:

$$\begin{aligned}
\frac{221-x}{40\,000} &= \frac{485-x}{100\,000}\\
(221-x)\cdot 5 &= (485-x)\cdot 2\\
1105-5x &= 970-2x\\
135 &= 3x\\
x &= 45
\end{aligned}$$

Tehát az alapdíj 45 forint. Szintén az egyenes arányosság miatt:

$$\frac{221-45}{40\,000} = \frac{176}{40\,000} = \frac{y}{85\,000}$$

Ebből $y = 374$ Ft, ennyi a költség 85 000Ft esetén.

C.870. Egy autókereskedő átlagosan napi hét autót adott el egy bizonyos időszakban. A leggyengébb forgalmú napot figyelmen kívül hagyva a fennmaradó napokban átlagosan értékesített autók száma nyolc. A legerősebb napot nem számítva ez a szám öt. Végül ha sem a leggyengébb, sem a legerősebb napot nem vesszük figyelembe, akkor a napi átlag 5,75-nek adódik. Hány autót adott el?

Megoldás

A napok száma legyen n, az összesen eladott autók száma d, a leggyengébb napon eladottaké min, a legerősebben eladott autók száma pedig max. Felírhatjuk az egyenleteket:

$$\begin{aligned} \frac{d}{n} &= 7 && (1)\\ \frac{d-min}{n-1} &= 8 && (2)\\ \frac{d-max}{n-1} &= 5 && (3)\\ \frac{d-min-max}{n-2} &= 5,75 && (4) \end{aligned}$$

Ebből:

$$\begin{aligned} & d &= n\cdot 7 && (1)\\ & d &= n\cdot 8 - 8 + min && (2)\\ & d &= n\cdot 5 - 5 + max && (3)\\ & d &= n\cdot 5,75 - 11,5 + min + max && (4)\\ (2)+(3)-(4) \quad & d &= 7,25n - 1,5 && (5)\\ (1)-(5) \quad & 0 &= -0,25n + 1,5 && (6) \end{aligned}$$

Tehát $n = 6$ és $d = 42$, azaz 42 autót adott el a kereskedő.

C.875. Egy zsömle ára 15 Ft, egy kiflié 12 Ft. Mindkettőből vásároltunk valamennyit.
a) Fizethettünk-e 500 Ft-ot?
b) Fizethettünk-e 600 Ft-ot?

Megoldás

Mindkét áruból vásároltunk valamennyit, ez azt jelenti, hogy a fizetett összeg előáll $s\cdot 12+t\cdot 15$ alakban, ahol s a kiflik és t a zsömlék száma, tehát s és t pozitív egészek.

a) Mivel $3 \mid 12$ és $3 \mid 15$, ezért $3 \mid s\cdot 12 + t\cdot 15$, de $3 \nmid 500$, ezért nem fizethettünk 500 Ft-ot.

b) 600 Ft-ot fizethettünk. Legyen $s\cdot 12 + t\cdot 15 = 600$, ahol $0 < s < \frac{600}{12} = 50$, $0 < t < \frac{600}{15} = 40$.

$$\begin{aligned} s\cdot 12 + t\cdot 15 &= 600\\ 15t &= 600 - 12s\\ 5t &= 200 - 4s\\ t &= \frac{200}{5} - \frac{4s}{5} = 40 - \frac{4s}{5} \end{aligned}$$

Mivel t természetes szám és $(4,5) = 1$, ezért $5 \mid s$. Ezek szerint s és t a következők lehetnek:

s	5	10	15	20	25	30	35	40	45
t	36	32	28	24	20	16	12	8	4

C.945. Marci minden reggel vesz két darab kiflit. Néhány nap elteltével a kerekítések miatt megtakarít pontosan egy kifli árát. Tudjuk, hogy a kifli ára több, mint 10 Ft. Hány forint lehet a kifli egységára, ha ez a megtakarítás a leggyorsabban következik be?

Megoldás

Jelöljük x-szel a kifli egység árát! $2x$ utolsó számjegye: 1, 2, 6, vagy 7 lehet. Mivel x egész szám, ezért 2 vagy 6 lehet csak. Ekkor x utolsó számjegye 1, 6, 3 vagy 8.

x	11 Ft	13 Ft	16 Ft	18 Ft
$2x$	22 Ft	26 Ft	32 Ft	36 Ft
napi megtakarítás	2 Ft	1 Ft	2 Ft	1 Ft
hány nap alatt jön össze egy kifli ára	soha	13 nap	8 nap	18 nap

Ezek közül a legkevesebb a 8 nap, tehát egy kifli egységára 16 Ft.

B.3952. A Mikulás puttonyba rakja a szaloncukrokat, mindegyikbe 35-öt. Így a végén 7 szaloncukor megmarad. Mennyi maradna meg, ha csak 15-öt rakna egy csomagba?

Megoldás

A szaloncukrok számát jelölje x, a második esetben kimaradó szaloncukrok számát pedig c. Felírható egy szimultán kongruencia:

$$\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{35} \\ x &\equiv c \pmod{15} \end{aligned}$$

Ez akkor oldható meg, ha $(35, 15) \mid c - 7$, azaz $5 \mid c - 7$. Ezt más alakba írva: $5t = c - 7$, vagyis $c = 5t + 7$, ahol t egy egész szám. A c azt jelöli, hogy mennyi szaloncukor marad ki, ha 15-öt rak egy csomagba. Tehát $0 \leq c < 15$ és egész szám.

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq & c & < 15 \\ 0 \leq & 5t + 7 & < 15 \\ -7 \leq & 5t & < 8 \\ \frac{-7}{5} \leq & t & < \frac{8}{5} \end{array}$$

Ezek szerint $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$ és $c_1 = -1 \cdot 5 + 7 = 2$, $c_2 = 0 \cdot 5 + 7 = 7$, $c_3 = 1 \cdot 5 + 7 = 12$. Tehát ha csak 15-öt rakna egy csomagba, akkor 2, 7, vagy 12 szaloncukor maradna ki. Ez mind valóban meg is valósul, például ha 42 cukor volt, akkor ha tizenötösével teszi csomagba őket, akkor 12 marad ki. Ha 77 szaloncukor volt, akkor 2, ha pedig 112 volt, akkor 7 darab marad ki.

B.4204. Adott négy pozitív szám, a, b, c, d. Az ab, ac, ad, bc, bd, cd számok közül ötnek az értékét ismerjük, ezek 2, 3, 4, 5, 6. Mennyi a hatodik szorzat értéke?

Megoldás

$a \cdot b \cdot c \cdot d = ab \cdot cd = ac \cdot bd = ad \cdot bc$. Tehát a szorzatok közül kettő-kettő-kettő szorzata meg kell, hogy egyezzen. Ebben az esetben 2· 6=3· 4=12. Az utolsó két szorzat szorzatának értéke is 12, ezért a hatodik szorzat értéke $\frac{12}{5} = 2{,}4$.

Megjegyzés

Ilyen számok valóban léteznek, például:

Legyen $ab = 2$, $ac = 3$, $ad = 5$, $bc = 2{,}4$, $bd = 4$, $cd = 6$. Ekkor $\frac{ac}{dc} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, tehát $d = 2a$. Ezt behelyettesítve az $ad = 5$ egyenletbe azt kapjuk, hogy $2a^2 = 5$, vagyis $a = \sqrt{2{,}5}$, $b = \frac{2}{\sqrt{2{,}5}}$, $c = \frac{3}{\sqrt{2{,}5}}$, $d = \frac{5}{\sqrt{2{,}5}}$.

Másik lehetőség, ha $ab = 2$, $ac = 3$, $ad = 2{,}4$, $bc = 5$, $bd = 4$, $cd = 6$. Ekkor $\frac{ac}{dc} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, tehát $d = 2a$. Ezt behelyettesítve az $ad = 2{,}4$ egyenletbe azt kapjuk, hogy $2a^2 = 2{,}4$, vagyis $a = \sqrt{1{,}2}$, $b = \frac{2}{\sqrt{1{,}2}}$, $c = \frac{3}{\sqrt{1{,}2}}$, $d = \frac{2{,}4}{\sqrt{1{,}2}}$.

B.4223. Tekintsük az (1; 36), (2; 35), ... ,(12; 25) számpárokat. Kiválasztható-e a megadott számpárok mindegyikéből egy-egy szám úgy, hogy a kiválasztott számok összege egyenlő a nem kiválasztott számok összegével? Módosul-e a válasz, ha az utolsó két számpárt elhagyjuk?

Megoldás

Az összes szám összege 444, tehát a kiválasztott és a nem kiválasztott számok összege is 222 kell legyen. Ez például a következőképpen lehetséges:

$$36 + 35 + 34 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 27 + 26 + 25 = 222,$$

$$1 + 2 + 3 + 33 + 32 + 31 + 30 + 29 + 28 + 10 + 11 + 12 = 222.$$

Ha az utolsó két számpárt elhagyjuk, akkor nem lehetséges a kiválasztás. Ekkor az összes szám összege 370 lesz, ennek fele 185.

Ha minden számpárból a kisebb számot választom, akkor az összegük 55 lesz. Ha valamelyik helyett a nagyobbat választom, akkor az összeg páratlan számmal fog növekedni. 185-55=130-cal kell növelni az összeget, tehát páros darab szám helyett kell a nagyobbat választani.

Ha az első négy számpárból a nagyobb számot választom, az összeg 183 lesz, ami kisebb, mint 185.

Ha az utolsó hat számpárból a nagyobb számot választom, akkor az összeg 187, ami viszont nagyobb, mint 185.

Tehát nem választható ki mindegyikből egy-egy szám úgy, hogy a kiválasztott számok összege egyenlő legyen a nem kiválasztottak összegével.

B.3942. Melyek azok a kétjegyű páros $\overline{ab}$ számok, amelyek ötödik hatványa $\overline{ab}$-re végződik?

1. Megoldás

$$(\overline{ab})^5 = \overline{\ldots ab}$$
$$(10a+b)^5 = 100\ 000a^5 + 50\ 000a^4b + 10\ 000a^3b^3 + 1000a^2b^3 + 50ab^4 + b^5$$

Az utolsó két jegyben számít: $50ab^4 + b^5$. Mivel b páros, ezért $50ab^4$ osztható százzal, emiatt az utolsó két jegyben csak b^5 számít.

b	b^5 utolsó két számjegye
2	32
4	24
6	76
8	68

Tehát azok a kétjegyű páros $\overline{ab}$ számok, melyek ötödik hatványa $\overline{ab}$-re végződik: 24, 32, 68, 76.

2. Megoldás

$x^5 \equiv x \pmod{100}$ akkor teljesül, ha $x^5 \equiv x \pmod{4}$ és $x^5 \equiv x \pmod{25}$.

Mivel x páros, $x^5 \equiv 0 \pmod{4}$, tehát $x \equiv 0 \pmod{4}$.

$x^5 \equiv x \pmod{25}$-ből következik, hogy $25 \mid x^5 - x = x(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Ha valamelyik tényező osztható öttel, akkor biztos, hogy semelyik másik nem osztható öttel, ezért ez csak úgy teljesülhet, ha 25 osztója valamelyik tényezőnek.
Tehát $x \equiv 0$, $x \equiv -1$, $x \equiv 1$ vagy $x^2 \equiv -1 \pmod{25}$.

Az utolsó kongruencia megoldása:

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv -1 \pmod{25} \\ x^2 &\equiv 49 \pmod{25} \\ 25 \mid x^2 - 49 &= (x+7)(x-7) \end{aligned}$$

Tehát $25 \mid x+7$ vagy $25 \mid x-7$ vagy $5 \mid x+7$ és $5 \mid x-7$. Tegyük fel, hogy az utolsó eset teljesül! Az oszthatóságokat máshogy felírva azt kapjuk, hogy léteznek a

és b egész számok, amire:

$$\begin{aligned} x-7 &= 5\cdot a \\ x+7 &= 5\cdot b \\ x=5a+7 &= 5b-7 \\ 5(a-b) &= -14 \\ a-b &= \frac{-14}{5} \end{aligned}$$

Ez ellentmond annak, hogy a, b egész számok, tehát csak az első két eset teljesülhet:

$$\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{25} \quad \text{vagy} \\ x &\equiv -7 \pmod{25} \end{aligned}$$

1. eset:

   $x \equiv 0 \pmod{25}$ ekkor $x \equiv 0 \pmod{100}$, tehát $\overline{ab} = 00$.

2. eset:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{25} \\ x &= 25t+1 \\ 25t+1 &\equiv 0 \pmod{4} \\ t &\equiv 3 \pmod{4} \\ t &= 4s+3 \\ x=25(4s+3)+1 &= 100s+76 \end{aligned}$$

   Tehát $\overline{ab} = 76$.

3. eset:

$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod{25} \\ x &= 25t-1 \\ 25t-1 &\equiv 0 \pmod{4} \\ t &\equiv 1 \pmod{4} \\ t &= 4s+1 \\ x=25(4s+1)-1 &= 100s+24 \end{aligned}$$

   Tehát $\overline{ab} = 24$.

Az utolsó két eset is hasonlóan oldható meg. Az $x \equiv 7 \pmod{25}$ esetben a megoldás $\overline{ab} = 32$, $x \equiv -7 \pmod{25}$ esetén pedig $\overline{ab} = 68$ eredményt kapjuk.

Összefoglalva: $\overline{ab} = 24, 32, 68$ vagy 76.