Csörgő Judit

Lehetetlenségi bizonyítások

Szakdolgozat

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar
Matematika BSc tanári szakirány

Témavezető:

Juhász Péter

ELTE TTK Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Motiváció

A matematikával komolyabban foglalkozó középiskolás diákok fejében viszonylag hamar kialakul egy kép a bizonyításokról. Különféle technikákat ismernek meg, elsajátítják a teljes indukció, a direkt és az indirekt bizonyítás módszerét. Mégis, amikor olyan feladat kerül eléjük, hogy valamiről azt kell belátni, hogy lehetetlen, hirtelen üresnek érzik az eszköztárukat. Szakdolgozatom céljául ezért azt tűztem ki, hogy megmutassam: ilyen fajta bizonyításokra is ugyanazt a matematikát kell felhasználni, amit más feladatokhoz, egyedül a szemlélet különbözik egy kissé.

Nagyon fontosnak tartom azonban leszögezni, hogy a most következő feladatokra nem úgy kell tekinteni, mint egy tananyagra, amelyet minden gyereknek az elejétől a végéig végig kell csinálni ahhoz, hogy tudjon „lehetetlent bizonyítani" – ami itt szerepel, azt sokkal inkább válogatásnak nevezném. Nehézség szerint gyűjtöttem csokorba a feladatokat, azon belül pedig igyekeztem egymás után fűzni az összekapcsolódókat. Célom ezzel az volt, hogy az Olvasó összefüggőbben lássa a lehetetlenségek témakörét, még akkor is, ha nem gondolkodik el minden feladaton saját maga, hanem csak végigköveti a megoldás gondolatmenetét.

A tanítás során azonban nem feltétlenül ezt az elvet tartom követendőnek. Fontosnak tartom, hogy a gyerekek szabadon használják a fejüket gondolkodásra, így nem szeretném a gondolataikat egy szigorúan meghatározott mederbe terelni azzal, hogy már az elején világos, hogy milyen módszerrel kell megoldani a feladatot. Éppen ezért ha ezeket a feladatokat szakkörön vagy tanítási órán elővenném, akkor egyszerre csak egyet-kettőt adnék föl közülük, miközben párhuzamosan egészen más témakörökkel foglalkoznék. A hasonló gondolatot, ötletet használó feladatokat nem adnám fel ugyanazon az órán, inkább visszatérnék rá később, és így minden alkalommal újra felfedezhetik a gondolkodás örömét a feladat kapcsán, és egyre mélyebben rögzülne a gondolat. Ha ugyanis megtanulnák a sablont, akkor minden új feladatra azt próbálnák ráhúzni, és ezzel elveszne a szépsége, sőt rövid idő alatt unalmassá is válna. Ez természetesen csak a saját véleményem, javaslataimtól nyugodtan el lehet térni.

A szakdolgozatomban található feladatok alapvetően matematikában tehetséges gyerekek számára készültek, némelyik nagyon nehéz és mély gondolatot is tartalmaz. A három kategóriába való besorolásra is ezek alapján került sor, amelyik feladatok itt az alapszinten találhatók, azokat nyugodt szívvel feladhatjuk sokkal nagyobbaknak is – én személy szerint egyetemista koromban találkoztam először a legtöbbel, mégsem éreztem különösebben könnyűnek őket. Szépségüket azonban ez nem csökkenti.

Első olvasásra talán mesekönyvnek is tűnhet majd ez a gyűjtemény, a meseszerű megfogalmazás azonban nem véletlen: a feladatok könnyebb megérhetőségét, megjegyezhetőségét szolgálják, fejlesztik a vizualizációt és felkeltik az érdeklődést.

1.2. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Juhász Péternek, a témavezetőmnek, aki végigvezetett a lehetetlenségek témakörén, lépésről-lépésre, ha kellett, heteket várva, amíg én is eljutok a kérdéses helyre a gondolatmenetben. Ha rossz irányba indultam, finoman terelt a jó út felé, és úgy segített, hogy nem vette el a gondolkodás élményét közben. Köszönöm neki, hogy hagyott kibontakozni, és válaszolt a rengeteg kérdésemre is. Köszönöm neki a témajavaslatot is, nagyon szerettem írni ezt a szakdolgozatot. Köszönöm.

Köszönöm szépen a páromnak, hogy mindenben támogatott és mellettem állt, ez jelentette a legtöbbet. Köszönöm a családomnak, hogy nyugton tűrték, amikor a feladataimmal fárasztottam őket, és külön köszönöm Bazsinak, a 7 éves kisöcsémnek, hogy önzetlenül rendelkezésemre bocsátotta a sakktábláját.

2. fejezet

Alapszintű feladatok – Lehetetlenségek 7. osztálytól

2.1. Eszter születésnapja

Eszter a születésnapi ünnepségére négy barátját hívta meg: Annát, Balázst, Csengét és Danit. Összesen tehát öten voltak. A torta elfogyasztása után szerettek volna néhány sakkpartit játszani.

1. feladat. *Lehetséges-e ez úgy, hogy senki se maradjon ki?*

Ez sajnos lehetetlenség, ugyanis bárhogy állítom párba az öt résztvevőt, mindig lesz valaki, akinek nem jut párja. Eszteréknek más játékot kell kitalálni.

Ez a feladat a legegyszerűbb lehetetlenségi feladatok közé tartozik, egy óvodás is meg tudja oldani, ha érti a kérdést. Azért áll mégis itt, mert így talán világosabbá válik, mit is jelent *bizonyítani a lehetetlent.*

2.2. Tíz korong

2. feladat. *Egy 4×4-es négyzetre helyezzünk el 10 korongot úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban páros számú legyen. (Egy négyzetbe egy korongot tehetünk.) Lehetséges-e ez?*

Lehetséges, például a következő módon:[1]

[1] *Megjegyzés:* Az összes jó elrendezést ezen elrendezés oszlopainak vagy sorainak felcserélésével kapjuk.

•	•	•	•
•	•		
•		•	
•			•

3. feladat. *Tegyünk most egy 5×4-es téglalapra akárhányat, de úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban páratlan számú korong legyen. Lehetséges?*

Ez már lehetetlen. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik jó elrendezés. Vizsgáljuk meg, hogy ehhez hány korongot használtunk fel? Ha a sorokat nézzük, akkor páratlan, ha az oszlopokat, akkor páros a korongok száma. Ez pedig ellentmondás.

2.3. Úthálózatok

A következő „lehetetlenséghez” ezt a feladatot adnám fel a gyerekeknek:

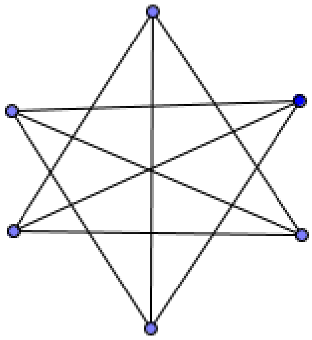
4. feladat. *Rajzoljanak 4 térképet, városokról és a köztük lévő úthálózatról, méghozzá a következő paraméterek alapján:*

1. *6 város, mindegyikből induljon út pontosan 3 másik városhoz*
2. *7 város, mindegyikből induljon út pontosan 3 másik városhoz*
3. *8 város, mindegyikből induljon út pontosan 3 másik városhoz*
4. *9 város, mindegyikből induljon út pontosan 3 másik városhoz*

Már három helyes térképért csokit ajánlanék fel a feladatmegoldónak.

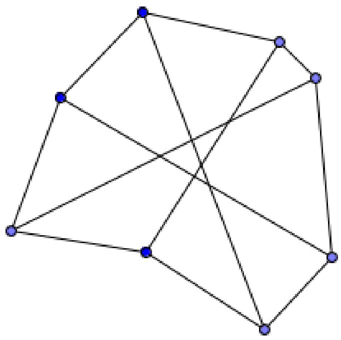
Az 1. feladatrészre a gyerekek nagyon hamar rá szoktak jönni, a megoldás a 2.1. ábrán látható.

A 2. résznél azonban már hiába próbálkoznak, a feladat lehetetlenség. Hiszen számoljuk csak meg, hány éle lenne egy ilyen gráfnak: minden csúcsból kiindul 3, tehát $7 \cdot 3$, de minden élet kétszer számoltunk, egyszer a két végpontjában lévő egyik városban, egyszer a másikban, így el kell osztani 2-vel. Viszont a $\frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$ nem egész szám, így nyilván nem lehet ilyen térképet rajzolni.



2.1. ábra. Úthálózat 6 város közt

A 8 város rajza a 2.2. ábrán látható.



2.2. ábra. Úthálózat 8 város között

9 városból pedig a 7-hez hasonlóan szintén nem lehet ilyen úthálózatot készíteni, mert a $\frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2}$ nem egész szám.
Tehát a csokoládé nem kerül kiosztásra.

2.4. Gyufásdoboz építmények

A most következő feladat kiengesztelésképp ismét csokoládéért megy. Mindenki kap 5 db gyufásdobozt.

5. feladat. *Hozzuk létre a következő építményeket az összes doboz felhasználásával:*

1. *Minden gyufásdoboznak pontosan 2 szomszédja legyen*

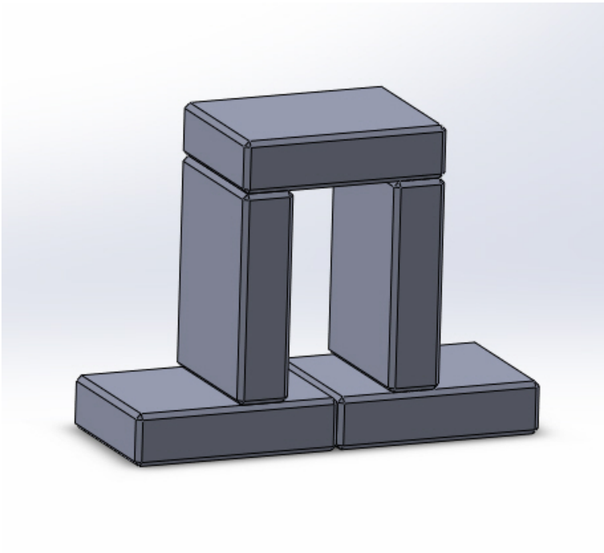
2. *Minden gyufásdoboznak pontosan 3 szomszédja legyen*

3. *Minden gyufásdoboznak pontosan 4 szomszédja legyen.*

(A szomszédság kölcsönös.)

A jutalom már két építmény elkészítéséért is jár.

A gyerekek hosszabb-rövidebb gondolkodás után elkészítik az első építményt a 2.3. ábrán láthatóhoz hasonló módon.

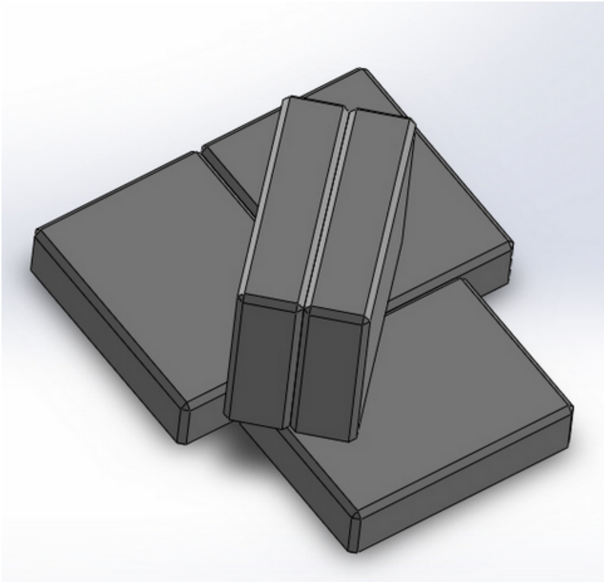


2.3. ábra. Gyufásdoboz építmény, ahol minden doboznak pontosan két szomszédja van.

A második építményre nem érkezhet jó megoldás, mert ilyen építményt nem lehet készíteni. Ennek bizonyításához tegyük fel indirekt, hogy létezik jó konstrukció. Legyenek a gyufásdobozok egy gráf pontjai, a köztük lévő érintkezések, szomszédságok pedig a gráf élei. Ekkor egy ötpontú gráfot kapunk, ahol két pont akkor van összekötve, ha az adott két gyufásdoboz szomszédos, azaz van közös felületrészük. Számoljuk meg most a gráf éleit! Ha mindegyik doboznak 3 szomszédja van, akkor minden pont fokszáma 3, tehát $\frac{5 \cdot 3}{2} = 7,5$ éle lenne, ami persze lehetetlen. Így nem lehet ilyen építményt létrehozni.

A harmadik építményre ezzel szemben egy szép konstrukciót láthatunk a 2.4. ábrán, így az ügyes gyerekek megkaphatják a jutalmul kitűzött csokoládét.

Fontos még a feladat kivitelezésével kapcsolatban, hogy a gyufásdobozok legyenek üresek, mielőtt a gyerekekhez kerülnek. Ez a biztonsági szempont mellett azért is lényeges, mert a gyerekek így valóban a feladatra tudnak összpontosítani, nincs ott a kísértés a gyufa gyújtogatására.



2.4. ábra. Gyufásdoboz építmény, ahol minden doboznak pontosan négy szomszédja van.

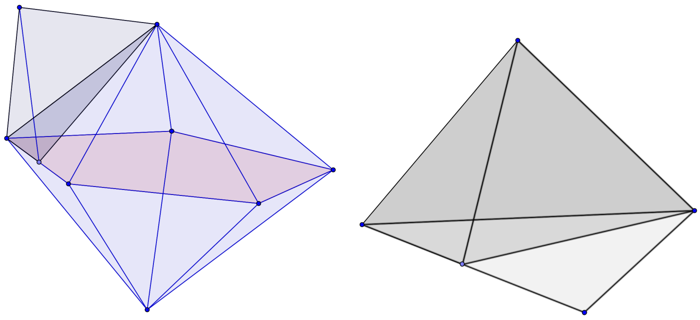
A jelen szakdolgozatban leírt feladatokat a gyakorlatban valószínűleg nem ebben a sorrendben adnám fel. Így ugyanis az úthálózatok után nem kell hozzá nagy ötlet, hogy kitalálják, hogy a hármas szomszédság lehetetlen, ha azonban egy egészen más „környezetben” adom fel a gyufásdobozokat, azaz olyankor, amikor ez a gondolat már régebben szerepelt, esetleg nem is szerepelt még, akkor ezzel újból feleleveníthetjük, vagy el is sajátíthatjuk a gondolatot, és nem lesz unalmas. Ezzel a szemlélettel szerintem a gyerekek sokkal inkább gondolkodásra fogják használni a fejüket, mint arra, hogy előre megmondott sémákat alkalmazzanak egyes feladatokra. Ilyenkor ugyanis könnyen előfordulhat, hogy a gyerekek elfelejtenek gondolkodni, és ha nem tudják, mi a séma, akkor nem tudnak elindulni egy feladat megoldásában.

2.5. A 13-lapos test

6. feladat. *Van-e olyan test, aminek pontosan 13 db háromszög lapja van, és más lapja nincs?*

Az előző feladat alapján már nincs túl nehéz dolgunk: számoljuk meg az éleket. $\frac{13 \cdot 3}{2} = 19,5$, ami nem egész szám. Így tehát nem létezik ilyen test.

Az érdekes azonban az, hogy ilyen test mégis létezik. Ilyen például a 2.5. ábrán látható test is: egy olyan ötszög alapú bipiramis – aminek tehát 10 darab háromszög lapja van –,



2.5. ábra. Példa egy olyan testre, aminek 13 darab háromszög lapja van, és más lapja nincs.

aminek az egyik lapjának a felére egy tetraédert illesztettünk.

És miért nem volt jó a fent említett „bizonyítás”? Az 2.5. ábrán látható nem szokványos él miatt. Az egyszerű poliéder definíciója ugyanis éppen az ilyen éleket küszöböli ki.

1. Definíció. *A poliéder egyszerű, ha közönséges (összefüggő és minden csúcsánál az azt tartalmazó lapok egyetlen ciklust alkotnak), felülete egyszeresen összefüggő (összefüggő és minden a poliéderfelületen elhelyezkedő sokszögvonal részekre darabolja), és minden lapja egyszerű sokszög.*

A gyerekeknek pedig ilyen feladatoknál ösztönösen is valami szép, konvex objektum jut eszükbe, jól meghatározott lapokkal, élekkel, csúcsokkal. A kérdés viszont nem egyszerű poliéderre vonatkozott, hanem testre, ebből fakadt a „bizonyítás” hibája.

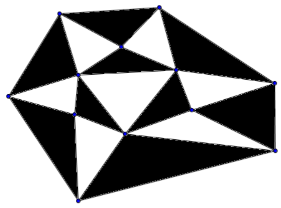
2.6. Ötszög átdarabolása

Az következő ábrán látható hatszöget háromszögekre bontottuk úgy, hogy a következő két tulajdonság teljesül:

1. Két háromszögnek vagy van közös oldala – ekkor az egyik háromszög fehér, a másik fekete –, vagy csak közös csúcsa van, vagy nincs közös pontja.

2. A hatszög minden oldala egy fekete háromszög egyik oldala.

7. feladat. *Fel lehet-e bontani ugyanígy egy konvex ötszöget háromszögekre?*



2.6. ábra. Egy jó felbontású hatszög

A válasz az, hogy nem. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik jó felbontás. Számoljuk most meg a behúzott szakaszok számát! Ha k darab fehér háromszögre bontottuk, akkor $3k$ darab vonalnak kell lennie, hiszen mindegyiknek három oldala van. Ha viszont l darab fekete háromszög keletkezett a felbontás során, akkor az élek száma $3l-5$, $k,l \in \mathbb{Z}$. Ez pedig ellentmondás, mert $3l-5$ nem osztható 3-mal.

2.7. Háromhatvány

8. feladat. *Létezhet-e a 3-nak olyan hatványa, amelyben a tízesek helyén páratlan szám áll?*

A lehetetlenséget most úgy fogjuk igazolni, hogy minden esetre belátjuk az ellenkező teljesülését.
Állításunk tehát a következő: 3-hatványokban a tízesek helyiértékén mindig páros szám áll.
A 3^n a következő módon írható fel:

$$3^n = 100k + 10l + m,$$

ahol k,l és $m \in \mathbb{Z}$. A bizonyítás teljes indukcióval történik.
$n=1$-re: triviális.
Tegyük fel, hogy valamely n-re teljesül, hogy a fönti felbontásban l páros.
Lássuk be, hogy ekkor $n+1$-re is teljesül az állítás!

$$3^{n+1} = 3(100k + 10l + m) = 300k + 30l + 3m.$$

A $30l$ biztosan páros az indukciós feltétel miatt, m pedig csak a 3-hatványok végződései közül kerülhet ki, azaz lehet 1, 3, 7 és 9. Így tehát

$$3m \in \{3, 9, 21, 27\}$$

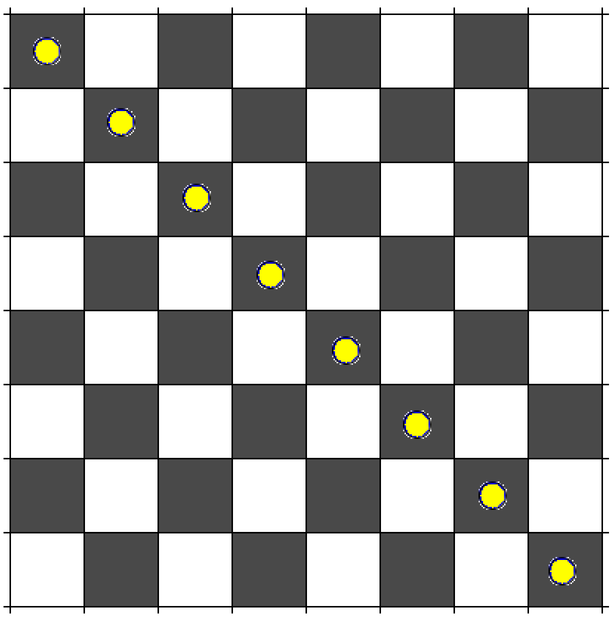
Ebből tehát látható, hogy 10-es átvitel vagy nincs, vagy 2 van, ami a paritást nem változtatja meg. Tehát nem létezhet olyan 3-hatvány, amelyben a 10-esek helyén páratlan szám áll.

2.8. Bástyák a sakktáblán

Bazsi nagyon szeret sakkozni, de éppen nem talált senkit, akivel játszhatott volna, így a következővel foglalatoskodott: 8 bástyát tett fel a sakktáblára, de úgy, hogy ne tudják ütni egymást, azaz minden sorba és minden oszlopba pontosan egyet rakott.

9. feladat. *Igaz-e, hogy a fekete mezőn álló bástyák száma mindig páros?*

Igaz. Vegyük észre, hogy a bástyák összes lehetséges helyzete a 2.7. ábrán látható állás oszlopainak vagy sorainak a felcseréléséből származik.



2.7. ábra. 8 bástya elrendezése úgy, hogy egyik se üsse a másikat

Bármely két sor vagy oszlop felcserélésével 1-et nő, illetve 1-et csökken a fekete mezőre eső korongok száma, tehát összességében nem változik. Mivel fönt páros sok korong áll fekete mezőn, ezért ez tetszőleges bástyaelrendezés esetében is így lesz. Tehát nem lehet páratlan a fekete mezőn lévő bástyák száma, így ismét lehetetlent bizonyítottunk.

Megjegyzés. A feladat az *invariáns* témakör feladatai közé tartozik, amiről később még többször is szó lesz. *Invariáns*nak nevezünk valamilyen mennyiséget vagy tulajdonságot, amely a feladat során nem változik, megmarad. Az előző feladatban a fekete mezőn álló bástyák száma maradt változatlanul az oszlopok vagy sorok cseréje közben.

2.9. Az elváltozott sakktábla

Kiszabadult a gonosz boszorkány a mesekönyvből, és garázdálkodni kezdett a gyerekszobában. Először is Bazsi sakktábláján változtatta el a mezők színét feketéről fehérre és fehérről feketére teljesen véletlenszerűen, ahogy éppen kedve szottyant. A tündérek természetesen nem nézhették tétlenül a pusztítást, és megpróbálták visszaállítani a táblát az eredeti állapotára. Sajnos azonban egy tündér csak egy sor vagy oszlop színeit tudja ellentétesre állítani, azaz minden, az adott sorban vagy oszlopban szereplő fekete mezőt fehérre változtatni, és fordítva.

10. feladat. *Elérhető-e minden kiindulási helyzetből a szép sakktábla, ha a tündérek korlátlan mennyiségben munkálkodhatnak?*

Sajnos nem garantált, hogy Bazsinak valaha is ismét szép lesz a sakktáblája, ugyanis van olyan átalakítás, ami a tündérek segítségével nem fordítható vissza. Vizsgáljuk meg például azt az esetet, amikor egyedül a bal alsó sarok fekete, a többi fehér! Ebből a kiindulási helyzetből nem állítható elő a szabályos sakktábla. Vegyük észre, hogy akárhogyan változtatunk sort vagy oszlopot, a fekete mezők paritása nem változik.[2] Így ha páratlan sok fekete van, sosem állítható vissza a tábla.

11. feladat. *Tegyük fel most, hogy páros sok fekete mezőt hagyott maga után a gonosz boszorkány. Mit mondhatunk ekkor?*

Észrevehetjük, hogy ekkor már van olyan állás, amikor a tündérek vissza tudják állítani a sakktáblát, de úgy tűnik, még így sem minden esetben. A sakktábla visszaállíthatóságára vonatkozó szükséges és elégséges feltétel nehéz egy hetedik-nyolcadik osztályos gyereknek, így erre később térünk vissza.

[2] Azaz ismét találtunk egy invariánst.

2.10. 5×5-ös elosztó

Kétféle ország királyának mindig nagyon nehéz dolga van a javak szétosztásában. Országában ugyanis 10 tartomány van, amikből 5 igen dúsan termő földterületekkel büszkélkedhet, a maradék 5 tartomány földje azonban nagyon sivár, mert állandó szárazság gyötri. A jól termő tartományokon lakó emberek kevesebb munkával is sok élelemhez jutnak, ezért mindig nagyon sokat esznek, így az évek során elég sok súlyfölösleget összegyűjtöttek maguknak. A rosszul termő tartományokon azonban az emberek hiába dolgoznak látástól vakulásig, mégsem jut a mindennapi betevőre, éppen ezért csupa csont és bőr valamennyiük. A király tanácsosai az egyenlőbb, jobban szabályozható elosztás érdekében kidolgoztak egy úgynevezett *elosztót*, ami valójában egy 5×5-ös táblázat volt. Ennek sorai a bőven termő, gazdag tartományoknak, oszlopai pedig a szűken termő, szegény tartományoknak feleltek meg. A mezőkbe pedig egy-egy szám került, ami azt mutatta, hogy az adott mezőhöz tartozó két tartomány (egy gazdag és egy szegény) mennyi almát, barackot, céklát, diót és epret (a, b, c, d, e) kap, így biztosítva, hogy mindenféle termésből minden gazdag tartománynak egy-egy szegény tartománnyal ugyanannyi jusson, és fordítva.

a	b	c	d	e
b	c	d	e	a
c	d	e	a	b
d	e	a	b	c
e	a	b	c	d

A király reformokat is be akart vezetni: csökkenteni akarta a különbséget a gazdag és a szegény tartományok közt, és ezt az elosztás segítségével akarta megvalósítani. Úgy határozott, hogy összesen a gazdag tartományok legfeljebb 2000 egység, a szegény tartományok pedig legalább 3000 egység élelmet kapjanak.

12. feladat. *Kitölthető-e úgy valós számokkal az elosztó, hogy a számok* **összege** *a sorokban legfeljebb 2000 legyen, az oszlopokban pedig legalább 3000?*

A feltételeknek eleget tevő kitöltés lehetetlen. Vegyük ugyanis a sorokra tett feltételt: eszerint az összes sor összege legfeljebb $5 \cdot 2000 = 10000$ lehet, míg az oszlopokra tett feltétel szerint az összes oszlop összegének legalább $5 \cdot 3000 = 15000$-nek kell lennie. Mivel mindkét összegzés az elosztó összes mezőjén szereplő számok összegét kell, hogy adja, ezért ez ellentmondás.

A király elszomorodva vette tudomásul, hogy reformjait nem lehet véghezvinni. A következő gondolat azonban szöget ütött a fejébe: mi lenne, ha a különböző javaknak megfelelő mezőknek nem az összegére tenne kikötéseket, hanem a szorzatára?

13. feladat. *Kitölthető-e úgy valós számokkal, hogy a számok* **szorzata** *a sorokban legfeljebb 2000 legyen, az oszlopokban pedig legalább 3000?*

Gondolkozzunk az előző feladathoz hasonló módon. Ha a sorokban szereplő számok szorzatát tekintjük, akkor az legfeljebb 2000^5 lehet, ha pedig az oszlopokban szereplő számok szorzatát, akkor annak legalább 3000^5-nek kell lenni. Így tehát nem lehet ilyen kitöltést találni.

Ez a gondolatmenet azonban *rossz.* Nézzük például a 2.8. ábrát[3]: a sorokban szereplő számok szorzatait a táblázat mellett, az oszlopokban szereplők szorzatait pedig alatta láthatjuk.

-1	2000	1	2	1	-4000
2000	-1	2	1	1	-4000
-1	2	1	2000	2	-8000
2	-1	1	1	2000	-4000
1	1	2000	1	1	2000
4000	4000	4000	4000	4000	

2.8. ábra. Egy minden feltételt kielégítő kitöltés szorzatra

Mi volt az oka mégis a hibás gondolatmenetnek?

A negatív számokkal való szorzás különleges tulajdonsága. Ez a feladat 6. osztályos gyerekeknél egészen érdekes eredménnyel szokott zárulni: az okosabb gyerekek oldják meg rosszul a feladatot, a közepesen jók pedig általában rájönnek a helyes megoldási módra. Ez pedig abból fakad, hogy az okos gyerekek látják, hogy a megoldás működött az összes szám összegére, ezért bizonyára működni fog az összes szám szorzatára is. Ez azonban tévedés, így beleesnek a csapdába.

[3] A negatív számok itt azt jelentik, hogy az adott tartományok az adott élelemből nem részesülnek, sőt, az ott szereplő mennyiséget be is kell szolgáltatniuk

A jól felépített csapda szerepe mindig az, hogy bizonyos dolgokat mélyebben megértsenek a gyerekek. Az okosabb gyerek látja már, hogy a két feladatrész közt elvben nincs lényegi különbség, így nem gondolkodik tovább. Azok a gyerekek viszont, akiknek ez az összefüggés még hiányzik a fejükből, a konkrét feladaton gondolkodnak: vajon hogyan tudnám csökkenteni az egyiket, hogy mégse csökkenjen a másik? Egy idő után mindenkinek eszébe jut, hogy ha például egy oszlopon belül kétszer szorzok -1-gyel, akkor az nem változtatja meg az oszlopba írt számok szorzatát, viszont két sor tagjainak szorzatát is ellentettjére változtatja! Ezzel a gondolatmenettel pedig kitölthetjük a táblázatot a feltételeknek megfelelően.

A király, miután látta, hogy reformjai milyen áron teljesíthetők, inkább öntözőrendszert vezettetett a szegény tartományok földjeire.

3. fejezet

Lehetetlenségek középszinten – 9. és 10. osztály

3.1. A 7 törpe és a bűvös szerkezet

Hófehérke és a hét törpe elmentek az erdőbe kirándulni. A törpék nagyon boldogok voltak, hogy végre mindenkinek jutott párja, nem maradt ki senki. A törpék egyébként is nagyon szerették a páros számokat, pontosabban a páratlanokat nem szerették, mert meggyőződésük volt, hogy ők azért törpék, mert heten vannak, a 7 pedig, mint az tudnivaló, páratlan szám. Amióta azonban Hófehérke is velük volt, mind nagyon boldogok voltak, és ennek természetesen az volt az oka, hogy végre 8-an lettek, a 8 pedig páros szám.

A törpék tehát mentek-mendegéltek az erdőben Hófehérkével. Egyszer csak Hapci, aki a legszemfülesebb volt, felfedezett az ösvény mellett egy kőtáblát. Ez a kőtábla 8×8 – Jaj, de jó, páros! – mezőből állt, minden mezőn pedig egy szám szerepelt. A törpék aggódva nézték, hogy vajon minden szám páros-e?

Sajnos nem volt szerencséjük, szerepelt a táblán néhány páratlan szám is. Elszomorodva mentek tovább, de azért vitték magukkal a kőtáblát is, hátha sikerül megjavítaniuk, elvégre ők is páratlanul voltak régen, és most mégis milyen boldogok lettek, hogy sikerült párosan lenniük.

Ahogy így bandukoltak tovább, szomorúan, Hapci két tüsszentés közt ismét meglátott valamit a földön: egy varázsszerkentyűt! Ez a szerkentyű 4×4 – Milyen szerencse, páros! – mezőből állt, és ha rátették egy kőtáblára, amin számok szerepeltek, akkor minden mezőt átváltoztatott úgy, hogy a rajta lévő számhoz 1-et hozzáadott.

Tudornak erről rögvest eszébe jutott az ő szerencsétlenül járt, páratlan számokat is tartalmazó kőtáblájuk. Nagy izgalomba jöttek így a törpék, és Hófehérke is: hát mégis megjavítható a kőtábla! Gyorsan neki is láttak a próbálgatásnak, a szerkentyű kitűnően működött. Próbálták egyszer, próbálták kétszer, aztán háromszor, négyszer, sokszor, és a kőtáblán még mindig maradtak páratlan számok. A törpék azonban nem veszítették el a lelkesedésüket. Egyedül Hófehérke ült le egy farönkre gondolkozni.

14. feladat. *Vajon visszaállítható-e a 4×4-es varázseszközzel a kőtábla csupa páros számúra?*

Hófehérke egy ideig törte a fejét, de rájött a megoldásra: egyáltalán nem biztos, hogy a varázseszköz segítségével párossá tudják varázsolni az egész kőtáblát. Ha ugyanis páratlan sok helyen szerepel páratlan szám, akkor sosem lesz „teljesen páros" a kőtábla.

A bizonyításhoz vegyük észre, hogy a 4×4-es varázseszköz egyszerre akárhogy változtat meg 16 mezőt eggyel, az ezen belüli páratlan mezők számának paritása nem változik.[1] Így tehát mindig maradt páratlan darab páratlan számot tartalmazó mező, amit nem tudunk kiküszöbölni.

Ezen a szomorú híren a szegény törpék megint elszomorodtak, és orrt lógatva bandukoltak tovább. Már egészen lemondtak a sanyarú sorsú kőtábla teljesen párossá változtatásának szándékáról, amikor egyszer csak észrevettek egy újabb varázsszerkezetet a földön heverni. Egészen hasonló volt ez is az előzőhöz, azzal a különbséggel, hogy ennek 3×3 mezője volt. A működési elvük semmiben sem különbözött, csak rá kellett tenni a kőtáblára, és a szerkezet szépen megnövelte minden alatta lévő szám értékét eggyel.

15. feladat. *Vajon az új szerkezettel együtt már megjavítható-e a kőtábla?*

Hagyjuk a törpéket egy kicsit gondolkozni, és térjünk vissza a feladathoz pár évvel később, a felsőbb szintű lehetetlenségek között.

3.2. Robbanó záras feladatok

3.3. A klasszikus robbanó zár esete

A negyven rabló, okulva Ali Baba esetén, egy új típusú zárral látta el a rejtett kincshez vezető ajtót. A zárnak egy számjegyű kódja volt, és úgy működött, hogy ha eltaláljuk a

[1] Ismét egy invariáns.

kódot, akkor kinyílik az ajtó, ha viszont nem, akkor eggyel eltolódik a titkos kód. (Tehát például ha az eredeti kód a 3 volt, és nem találtuk el, akkor 4-re váltott; ha most sem találtuk el, akkor 5-re stb.) Így lehet vele próbálkozni egy darabig, viszont ha egy számot másodszor is megnyomunk, és még akkor sem nyílik ki az ajtó, akkor a zár felrobban, leomlik a barlang, és betemeti az összes kincset.

16. feladat. *Ki lehet-e nyitni az ajtót, és ha igen, akkor hogyan?*

A megoldás egészen meglepő, ugyanis a zárat minden esetben ki lehet nyitni. Például egy jó megoldás a 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 5 számsorozat. A megértéshez készítsük el a következő táblázatot:

Beírt kód	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9	5
Titkos kód	0	1	2	3	4	6	7	8	9	0	5

Amint láthatjuk, az alsó sorban minden szám szerepel, tehát ez a tippsorozat tetszőleges kiindulási kód esetén kinyitja a zárat. Tehát ha 0-t nyomunk első próbálkozásra, az a 0-t nyitja ki. Ha a második próbálkozásunk a 2, az kinyitja azt a robbanó zárat, aminek eredetileg a titkos kódja az 1 volt. Ha a harmadik próbálkozásunk a 4, akkor az akkor nyitja ki a robbanó zárat, ha a kiindulási titkos kód a 2 volt. (Elsőre nem találtuk el, a titkos kód eggyel nőtt, 3 lett, másodikra sem találtuk el, a titkos kód még eggyel nőtt, 4 lett, és harmadikra mi is pont 4-et ütöttünk be.) Hasonlóan végigkövethető a többi számra is ugyanez.

Ellenőriznünk kell még, hogy nem robban-e fel a zár, mielőtt végigpróbálnánk a kódot. A számsorozatban az 5-ös számjegyen kívül minden szám pontosan egyszer szerepel, tehát csak akkor robbanna fel, ha az utolsó 5-ös se nyitná ki a zárat. Azonban éppen azért nyomjuk az 5-öst még egyszer, mert olyanunk még nem volt, ami 5-ös kiindulási titkos kódú zárat kinyitott volna, így a 10. sikertelen próbálkozás után éppen visszaér az eredeti állapotába a kód, tehát ha mi 11. próbálkozásra 5-öst ütünk, akkor éppen kinyitjuk a zárat.

Tehát a zárat ki lehet nyitni, és mivel Ali Baba elég eszes ember volt, rá is jött a nyitjára.

3.4. A nehezített robbanó zár

A rablók kapitánya nagyon mérges lett, amikor észrevette, hogy Ali Babát még a robbanó zár sem tudta megakadályozni abban, hogy a kincses barlangba bejusson, így egy hirtelen varázslattal megváltoztatta a robbanó zár működését: most már egyáltalán nem lehetett másodszor megnyomni ugyanazt a gombot, mert a zár rögvest felrobbant, a kincs pedig megsemmisült.

17. feladat. *Mit lehet tenni ebben az esetben? Kinyitható-e így a robbanó zár? Ha igen, hogyan? (A többi feltétel változatlan maradt, tehát minden sikertelen próba után eggyel nőtt az eredeti titkos kód.)*

A megoldáshoz nyilván az kell, hogy minden kiindulási titkos kód esetén működjön a beírt számsorozat, tehát a fönti táblázat alsó sorában minden szám szerepeljen egyszer. Ehhez legalább 10 lehetőségre van szükség. Viszont legfeljebb 10 próbálkozásunk lehet, mert a 11. szám, amit benyomnánk, az a skatulya elv alapján biztosan szerepelt már egyszer, azaz felrobbanna a zár. Így egy jó számsorozat pontosan 10 számból állna, tehát a próbálkozásunk biztosan a 0-tól 9-ig terjedő számok valamilyen permutációja lenne, jelöljük a_i-vel, $i = 1, \ldots, 10$. Ezen számok összege 45.

Beírt kód	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
Titkos kód	a_1-0	a_2-1	a_3-2	a_4-3	a_5-4	a_6-5	a_7-6	a_8-7	a_9-8	a_{10}-9

Nézzük meg most a titkos kód sorát! Itt is minden számnak pontosan egyszer kell szerepelnie. Számoljuk ki ennek a sornak is az összegét: az a_i-k összege ($i = 1, \ldots, 10$) páratlan a fentiek alapján, viszont a belőlük kivont számok összege is páratlan, mivel ezek ismét a 0-tól 9-ig terjedő számok, amik összege 45. Tehát összességében ennek a sornak az összege páros, tehát nem szerepelhet minden szám 0-tól 9-ig pontosan egyszer, így a nehezített robbanó zár már nem nyitható ki biztosan minden kiindulási helyzetből. Tehát a kincshez se Ali Baba, se a negyven rabló nem férhet hozzá biztosan. (Persze szerencséjük lehet, de ha már végigpróbálták mind a 10 lehetőséget, és nem nyílt ki a zár, akkor a kincses kamra örökre bezárult.)

3.5. Melyik út megyen itt Budára?

3.5.1. Két igazmondó, egy szeszélyes

Laczfi nádor és Toldi Miklós legendás találkozása helyett vegyünk most egy szegény vándorlegényt, tarisznyájában hamubasült pogácsával, amint éppen a királylányt kiszabadítani igyekszik a hétfejű sárkány karmai közül. Sajnos azonban félúton útelágazáshoz ér, csak annyit tud, hogy az egyik irányba folytatva az útját a gonosz boszorkány birodalmába érkezne, a másik út pedig a hétfejű sárkány palotája felé vezet, így hát nagyon fontos volt, hogy helyes utat válasszon. Az elágazásnál a szegénylegény azonban csak három embert látott, a fejük fölött pedig egy táblát, rajta a következő felirattal: *Két igazmondó, egy szeszélyes.* A szegénylegény tudta, mit jelent ez: az előtte álló három ember közül kettő minden kérdésére az igazat feleli, a harmadik válaszaiban viszont nem lehet megbízni, az is előfordulhat, hogy igazat szól, de az is, hogy az igazság ellenkezőjét feleli. Azt viszont nem tudta a legény, hogy melyikük melyik. A szegény legény csak eldöntendő kérdéseket tehet fel, és egy kérdést egyszerre csak egy embernek.

18. feladat. *Kitalálható-e így, hogy merre van a hétfejű sárkány palotája? Ha igen, legkevesebb hány kérdés szükséges?*

A megoldáshoz jelöljük a három embert A-val, B-vel és C-vel. Tegyük fel, hogy kitalálható, hogy melyik a helyes út. Vizsgáljuk most meg a szükséges kérdések számát! 1 kérdés biztosan kevés, mert nem tudunk arról semmit, hogy a válaszadó szeszélyes vagy igazmondó volt-e. Három kérdés triviális, hogy elég, ugyanis ha megkérdezzük mindhármuktól az egyik irányba mutatva, hogy *„Arra lakik-e a sárkány?”*, akkor a három válaszból legalább kettő egyezik, és az a helyes válasz lesz. De azt állítom, hogy két kérdés is elég abban az esetben, ha az első kérdéssel tudunk egy igazmondót találni. Legyen például az a kérdésünk például A-hoz, hogy *„B igazmondó-e?”*

1. Ha **igen** választ kapunk, akkor B biztosan igazmondó, ugyanis ha szeszélyes lenne, akkor az azt jelentené, hogy a válaszadónk, tehát A helytelenül válaszolt, tehát A szeszélyes. Ez viszont ellentmondás, ugyanis csak az egyikük lehet szeszélyes hármuk közül.

2. Ha viszont **nem** a válasz, akkor két lehetőség van: ha A igazmondó, akkor B valóban nem igazmondó, tehát ő a szeszélyes, ekkor viszont C biztosan igazmondó. Ha

viszont A szeszélyes, akkor B igazmondó; viszont nemcsak ő igazmondó, hanem C is az! Ha megfigyeljük, C mindkét esetben biztosan igazmondó.

Így tehát találtunk biztos igazmondót egy kérdés felhasználásával: az 1. esetben B-t, a 2. esetben pedig C-t. Az így kapott igazmondótól aztán megkérdezheti a szegénylegény, hogy *„Arra lakik a hétfejű sárkány?”*, miközben kezével az egyik irányba mutat.

3.5.2. Két igazmondó, két szeszélyes

A szegénylegény szerencsésen vette az akadályt, azonban alig folytatja útját, amikor ismét útkereszteződéshez ér. Itt négy ember és a következő tábla fogadja: *Két igazmondó, két szeszélyes.*

19. feladat. *Eldönthető-e, merre lakik a sárkány? Ha igen, hány kérdés kell? Ha nem, miért?*

Ez a probléma már jóval nehezebb az előzőnél. Próbálkozzunk először hasonló gondolatmenettel! Tegyük fel, hogy kitalálható, melyik a helyes út. Alapvetően kétfélét kérdezhetünk: az egyik típusú a helyes irányra vonatkozik, a másik típusúnak pedig az a célja, hogy találjunk egy biztos igazmondót. Viszont jelen esetben ugyanannyi az igazmondó, mint a szeszélyes, így ha például mindkét szeszélyes azt hiszi magáról, hogy igazmondó, és azt hiszik, hogy a másik a jó út, akkor hiába kérdezzük meg a négy embertől egyesével, hogy *„Arra lakik-e a sárkány?”*, kettő *igen*-nel és kettő *nem*-mel fog felelni. Igazmondót pedig ezzel analóg módon ugyanúgy nem fogunk tudni biztosan találni. Ilyen esetben akárhány kérdés sem elég, tehát nem tudjuk meg, merre van fogságban a királylány.

3.6. Egy megjelölt kocka

Vegyünk egy kockát, írjunk az egyik oldalára egy A betűt és tegyük le az asztalra úgy, hogy az A fölülre kerüljön. Megengedett lépés a kockát egy éle körül átbillenteni.

20. feladat. *Elképzelhető-e, hogy egyszer csak ismét visszakerül a kocka a kiindulási helyére és az A ismét a tetején van, de 90°-kal elforgatva?*

A válasz nem. Ennek bizonyításához két megoldást is ismertetek.

1. A kockának a következő két kritériumnak kell megfelelni:

(a) visszajusson az eredeti helyére,

(b) az A a tetején legyen 90°-kal elfordulva.

Az (a) kritériumnak való megfeleléshez páros sok lépésre van szükség: ha a kocka középpontjának az asztalra levetített útját tekintjük, akkor ugyanannyit kell föl és le, jobbra és balra menni ahhoz, hogy a kocka visszaérjen a kiindulási helyre. A (b) kritériumnak való megfeleléshez viszont páratlan sok lépés kell: először mindenképpen ki kell billenteni a kockát a kiindulásból. Itt több lehetőségünk is van: vagy csak egyet, hármat, ötöt,$\cdots$ $2k+1$-et billentünk egy adott irányba, ekkor az A a kocka oldalsó lapjainak egyikére kerül; vagy kettőt, négyet, nyolcat, $\cdots$ $2k$-t billentünk ugyanabba az irányba, ekkor az A a kocka tetején vagy az alján lesz, $k \in \mathbb{Z}$. Ennek az utóbbi esetnek most nincs értelme, mert nem tudjuk egy lépésből 90°-kal elforgatni az A-t. Tehát ott tartunk, hogy az A valamelyik oldallapon van, és ide $2k+1$ lépéssel juttattuk. Innen léphetek tovább egy adott irányba $2l$ vagy $2l+1$ lépéssel úgy, hogy az A még mindig oldallapon maradjon, $l \in \mathbb{Z}$. Ezekből csak a páratlan lépés lesz jó, mert a párosból a tetejére visszabillentéssel nem kapok elfordult A-t. Ahhoz is páratlan lépés kell, hogy oldalsó lapról fölkerüljön az A a kocka fölső lapjára, tehát összességében kaptuk:

(i) páratlan lépésből oldallapra került,

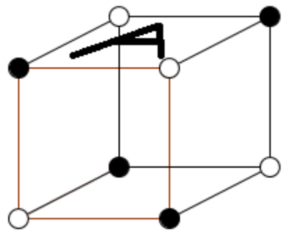
(ii) páratlan lépésből elfordult 90°-kal,

(iii) páratlan lépésből ismét visszakerült a kocka tetejére az A betű.

Ha az oldalsó görgetések közt volt még olyan lépés, amikor a kocka tetejére vagy aljára került az A, akkor az biztosan szintén páratlan lépésben történt, innen viszont ahhoz, hogy a kocka tetején legyen az A, páros számú lépés kell, ami a forgatáson már nem változtat. Így csak akkor lesz jó ilyen esetekben a végén az A helyzete, ha olyan oldalsó lépésből került az A alsó vagy felső lapra, ami már forgatott volt, azaz amit páratlan lépésben tudtunk elérni, tehát végeredményben így is páratlan lépést kaptunk. Azaz összesen páratlan lépés kellett a (b) kritérium teljesítésére, így mindkét kritérium nem teljesülhet egyszerre.

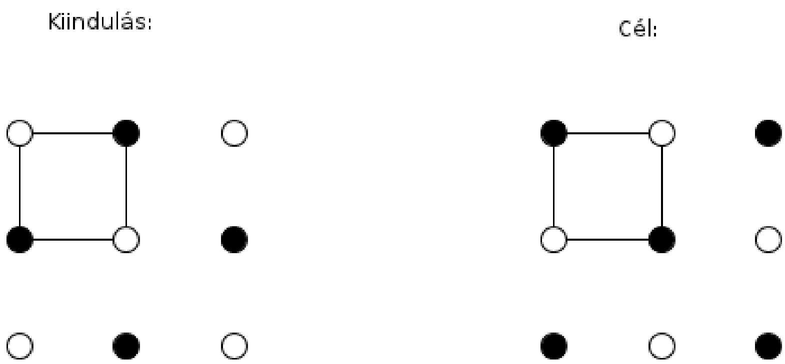
2. Fessük be a kocka csúcsait a 3.1. ábrán látható módon.

Ahogy görgetjük a kockát, a papíron maradt fekete-fehér nyom gyakorlatilag sakktáblát képez a 3.2. ábrán látható módon. Ahhoz viszont, hogy elforduljon a kocka



3.1. ábra. A kocka színezése

tetején az A, és a kocka visszajusson a kiindulási helyére, ugyanazon a helyen a papíron az inverz sakktáblát kellene kapnunk, ami nem lehet.

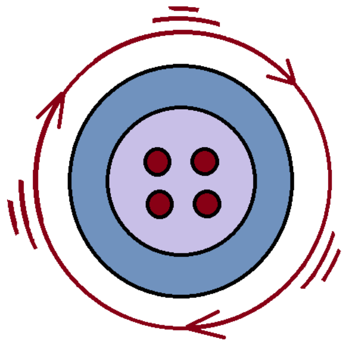


3.2. ábra. A festett kocka nyoma a papíron

Erdős Pál Nagy Könyvében minden bizonnyal ez a második bizonyítás szerepelne. A feladat jó példája annak, hogy hogyan lehet nekiesni egy problémának, megoldani az ismert módszerekkel, esetszétválasztással addig küzdeni vele, amíg meg nem adja magát, és hogyan lehet nyitott szemmel, jó ötletekkel, kreativitással egy sokkal egyszerűbb és szebb megoldást adni.

3.7. Forgó ajtó

Agyafúrt Alfonz, a hírhedt bandavezér már belefáradt a banda irányítgatásába. Szerette volna már végre jól megérdemelt pihenését tölteni a fáradságos munka árán összegyűjtött pénzből. Úgy gondolta, hogy itt az ideje, hogy átadja a hatalmat valamelyik fiának, csak azt nem tudta sehogysem eldönteni, hogy melyiknek. Ezért aztán kieszelt nekik egy próbát. Amelyikük a legagyafúrtabb megoldást adja az ő problémájára, az lesz majd az utódja, a banda feje. Össze is hívta rögvest mind a három fiát, és a következőket mondta nekik: *Fiaim, nem érzem egészen biztonságban a vagyonunkat a jelenlegi helyén. Csináltattam egy különleges széfet, már csak a záró kapcsolórendszer hiányzik róla. Olyan rendszert kell kieszelnetek, amit csak igazi Agyafúrt nyithat ki. Kiindulásnak megkapjátok az ajtó egy-egy másolatát: ez egy lapos, forgatható körlap, benne négy mélyedéssel, ide kellenek a kapcsolók. Amelyikőtök a tökéletesen agyafúrt zárat hozza el nekem holnapig, az lesz a bandavezér.*



3.3. ábra. A forgó ajtó

A három ifjabb Agyafúrt eztán külön-külön elvonult gondolkodni.

3.8. Kétállású kapcsolós forgó ajtó – Alfréd

Az első, Alfréd, már aznap estére készen lett a zárral, vitte is apja elé. Az ő konstrukciója a következő volt: a forgó ajtó mind a négy mélyedésébe egy-egy kapcsolót szerelt, ami befelé vagy kifelé állt. Az ajtó folyamatosan forgott, illetve szabálytalan időközönként néha megállt. Ekkor egyszerre legfeljebb két mélyedésbe bele lehetett nyúlni, és át lehetett állítani a benne lévő kapcsoló állását. Miután kivettük a kezünket, az ajtó kinyílt, ha mind a négy kapcsoló azonos állásban van, vagy pedig ismét forogni kezdett, ha nem voltak egyforma állásban.

21. feladat. *Kinyitható-e ilyen feltételek mellett a forgó ajtó? Ha igen, hogyan?*

Alfréd zára kinyitható, méghozzá a következő módon:

Vegyük észre, hogy az, aki ki akarja nyitni a zárat, háromféle módon nyúlhat a mélyedésekbe a kapcsolókhoz. Az első lehetőség az, hogy két egymás melletti kapcsolót kapcsol, ezt nevezzük *szomszédosnak*. A második az, hogy egymással átellenes mélyedéseket szemel ki magának, ezt nevezzük *átlós*nak. A harmadik lehetőség pedig az, hogy csak egy mélyedésbe nyúl bele, és annak a kapcsolónak a helyzetét billenti át, ez az *egyes* kapcsolás. (Természetesen nem kötelező átkapcsolni egy kapcsolót, attól, hogy belenyúltunk az üregbe – módosítás nélkül is kivehetjük a kezünket. Az ajtó eztán is fordulni fog.) Vegyük észre, hogy valójában a következő 3 kiindulási helyzettel[2] kell csak foglalkoznunk – a többi vagy ezekkel ekvivalens, vagy homogén, ami pedig nyitott ajtót eredményez.

szomszédos:	1	1	**átlós**:	1	0	**egyes**:	0	1
	0	0		0	1		0	0

A stratégia a következő:

1. *Átlós* mélyedésbe nyúlunk, és egyformára állítjuk, ha nem egyforma, illetve átbillentjük ellenkezőjére mindkettőt, ha egyforma. Mi történik ilyenkor?

   (a) Ha a kiindulás **szomszédos** volt, akkor most biztosan **egyes** lesz.

   (b) Ha a kiindulás **átlós** volt, akkor az ajtó kinyílt.

   (c) Ha a kiindulás **egyes** volt, akkor az ajtó vagy kinyílt, vagy **átlós** lett, vagy **egyes** lett.

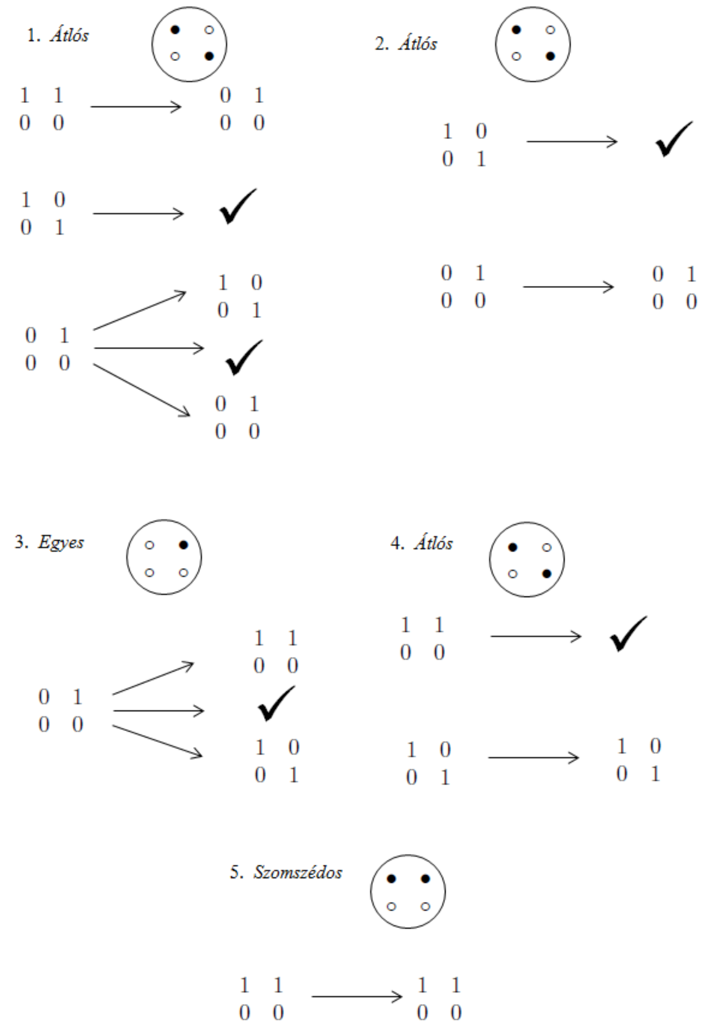
   Összefoglalva tehát az ajtónk vagy kinyílt, vagy **egyes** vagy **átlós** helyzetbe került. **Szomszédos** már biztos nem lehet.

2. Ismét *átlós* mélyedésbe nyúlunk és egyformára állítunk, ha különböző helyzetben vannak a kapcsolók, vagy mindkettőt átállítjuk, ha egyformában. Ha az ajtó nem nyílik, akkor már tudjuk, hogy **egyes**. (Ha **átlós** lett volna, akkor kinyílt volna.)

3. *Egyet* állítunk. Ez az **egyes** kiindulási helyzetet kinyithatja, **átlós**sá vagy **szomszédos**sá teheti.

4. Ismét *átlós* kapcsolás. Ez az **átlós**t kinyitja, a **szomszédos**t nem változtatja.

[2] Felhívom a figyelmet arra, hogy a kapcsolási lehetőségeket *dőlt* betűvel jelölöm, kiindulási helyzetek esetén pedig **félkövér** tipográfiát használok



3.4. ábra. Alfréd forgó ajtójának kinyitása

5. Ha még ekkor sem nyílt ki, akkor biztosan **szomszédos** helyzetűvel van dolgunk, így addig keresünk *szomszédos* mélyedéseket, amíg két egyformát nem találunk. Ekkor kinyitjuk.

Tehát a zárat ki lehet nyitni, ha elég sokat gondolkozik az ember.

3.9. Kétállású nyomógombos forgó ajtó – Albert

A második Agyafúrt, Albert, másnap délután kopogott be apjához. Az ő megoldása anynyiban tért el a bátyjáétól, hogy ő nem egyszerű billenős kapcsolót épített a zárba, hanem csak egy gombot, ami úgy működött, hogy egy megnyomás hatására egyet ugrott a kapcsoló, azaz 0-ról 1-re váltott, a következő nyomásra pedig 1-ről 0-ra. Tehát az, aki ki akarta nyitni, egyáltalán nem érezte, hogy milyen állásban volt az adott kapcsoló, csak át tudta állítani. Az ajtó ugyanúgy forgott, és ha minden kapcsoló egyforma állásban volt, akkor kinyílt.

22. feladat. *Ki lehet-e nyitni ilyen kapcsolóval az ajtót?*

Az ajtó még ilyen feltételek mellett is kinyitható! Az ajtó kiindulási helyzetei ugyanazok:

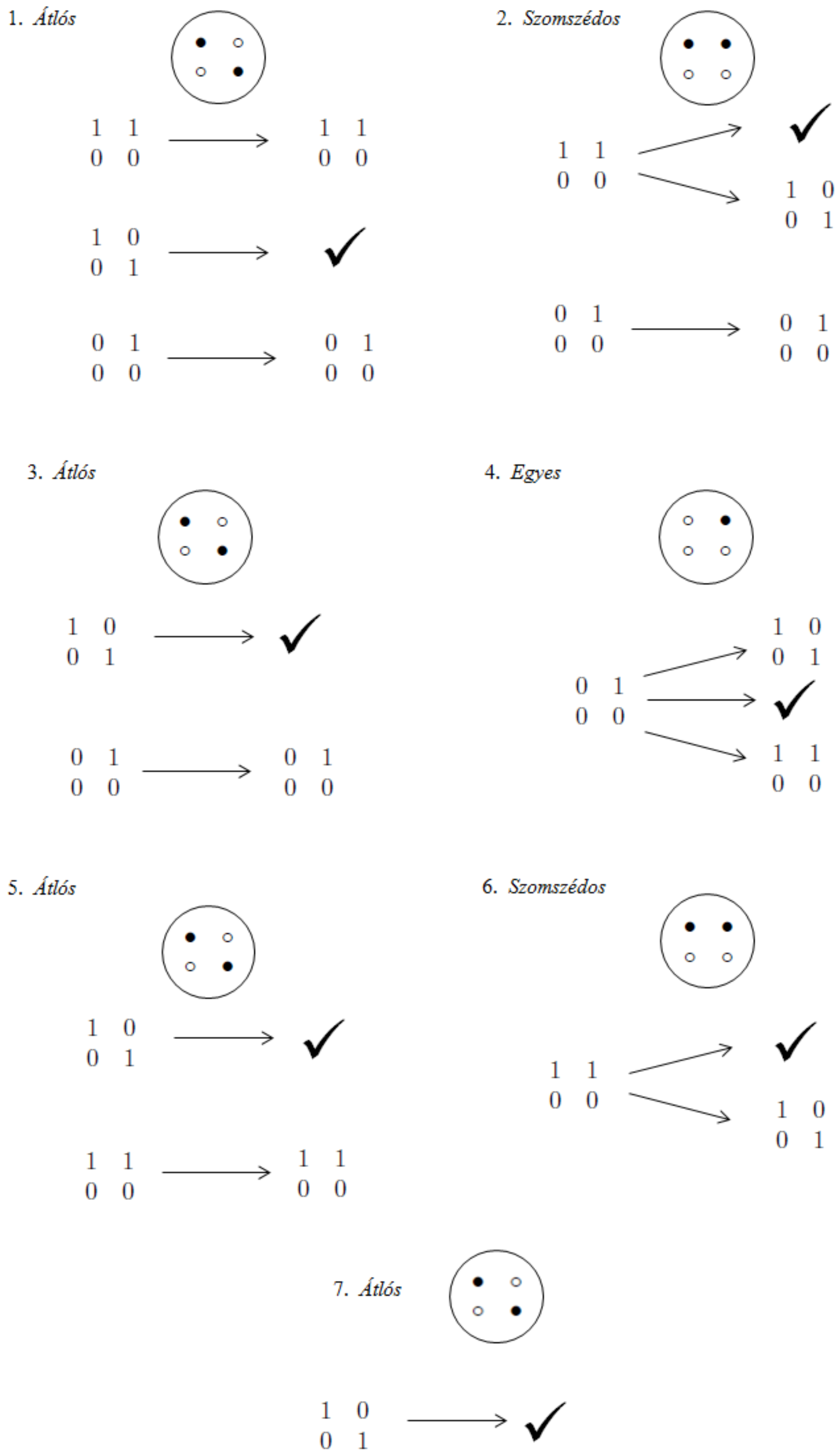
szomszédos:	1	1	**átlós**:	1	0	**egyes**:	0	1
	0	0		0	1		0	0

A nyomási lehetőségeink sem változtak: *szomszédos, átlós, egyes*. Vizsgáljuk meg, mit csinálnak a nyomási lehetőségek a kiindulási helyzetekkel!

1. *Szomszédos*
   (a) A **szomszédos**t kinyitja vagy **átlós**sá teszi.
   (b) Az **átlós**t **szomszédos**ra állítja.
   (c) Az **egyes**t változatlanul hagyja.
2. *Átlós*
   (a) A **szomszédos**t változatlanul hagyja.
   (b) Az **átlós**t kinyitja.
   (c) Az **egyes**t változatlanul hagyja.
3. *Egyes*
   (a) A **szomszédos**t **egyes**re állítja.
   (b) Az **átlós**t is **egyes**re állítja.
   (c) Az **egyes**t kinyitja, **szomszédos**ra vagy **átlós**ra állítja.

Ezek alapján a következő 7 lépés segítségével biztosan ki tudjuk nyitni a zárat:

1. *Átlós*t kapcsolunk – az ajtó kinyílik, ha **átlós** volt, egyébként nem változik semmi.
2. *Szomszédos*t kapcsolunk – ha nem nyílik, **átlós**t vagy **egyes**t kapunk.



3.5. ábra. Albert zárának kinyitása

3. *Átlós* – hátha **átlós** volt. Ha nem, akkor sem változott semmi, tudjuk, hogy **egyes** állásban van.
4. *Egyes* – ha pont eltaláltuk az egy különbözőt, kinyílik; ha nem, akkor **átlós** vagy **szomszédos** lett.
5. *Átlós* – hátha **átlós**.
6. *Szomszédos*, ugyanis ha még mindig nem nyílt ki, akkor biztos, hogy most **szomszédos** állásban van.
7. Az, hogy még ez a lépés is kell, azt jelenti, hogy az előző **szomszédos**nál rossz helyre nyúltunk, és **átlós**at csináltunk belőle – ezt pedig egy *átlós* kapcsolással biztosan kinyitjuk.

3.10. Háromállású nyomógombos forgó ajtó – Aladár

Aladár, a legkisebb fiú látta bátyjai próbálkozását. Alfréd zárát egészen gyengécskének ítélte, Albert zára viszont már tetszett neki. De ő még ennél is jobbat akart. Eszébe is jutott a nagy ötlet: mi lenne, ha az ő forgó ajtója is nyomógombos lenne, de nem kettő-, hanem háromállású? Le is ült mindjárt az asztalához, végiggondolni, hogy ebben az esetben milyen módszerrel lehet kinyitni a zárat. Telt-múlt az idő, Aladár törte a fejét, írogatott. Már a nap is lement, de még mindig nem tudott egy jó algoritmust adni a kinyitására. Az idő viszont nagyon elszaladt, apja pedig biztosan várja már a megoldást. Így aztán Aladár kapta magát, és gyorsan nekilátott a zár elkészítésének. Reggelre meg is lett vele, vitte apja elé. Mivel úgy gondolta, az öreg úgyis okosabb, mint ő (vagy legalábbis tapasztaltabb), majd ő kinyitja. El is mondta szabályt apjának, majd otthagyta, hadd gondolkozzon nyugodtan.

23. feladat. *Ki lehet-e nyitni Aladár zárát? Ha igen, hogyan? És ha nem, akkor miért nem?*

Agyafúrt Alfonz nem esett a feje lágyára, látta, hogy Alfréd és Albert zára elég agyafúrt próbálkozásra biztosan kinyílt, Aladáré viszont lehet, hogy akkor se nyílik ki, ha egy hangosbemondó bemondja, hogy az átlóban 1-2 szerepel. Ha **átlós** helyzetben két különböző szám szerepel, akkor azok biztosan egymást követő számok. Ha csak ezt a kettőt szeretnénk egyenlőre állítani, akkor úgy kell dolgoznunk, hogy a kisebb számot mutató kapcsolót nyomjuk meg, a másikat nem változtatjuk. Így azonban mindig csak tippelni tudunk a kettő közül, és ha tévedünk, akkor ismét ugyanabban a helyzetben találjuk magunkat: két egymást követő szám közül meg kell találnunk a kisebbet. Tehát nincs jó algoritmus az ajtó kinyitására, nem lehet biztosan kinyitni.

Azt viszont egyik agyafúrt fiú sem vette figyelembe, hogy véletlenül bármelyikük zárát ki lehetett nyitni! Egy ilyen széf pedig nem kell egy igazán agyafúrt bandavezérnek. Így aztán Alfonz inkább egyetemre küldte még a fiait, hadd okosodjanak, ő pedig készített magának egy négyállású nyomógombos forgó ajtót, azt ugyanis egészen meglepő módon ki lehetett nyitni[3], és folytatta tovább a banda irányítását.

[3]Alfonz arra jött rá, hogy nem 2-hatvány-állású forgó ajtók nem nyithatók ki, a 2-hatvány-állásúak viszont igen, speciális esetben a négyállásút 64 agyafúrt lépéssel lehetett biztosan kinyitni, ez pedig az ő csavaros eszének éppen megfelelő nehézségű feladvány volt.

4. fejezet

Felsőbb szintű lehetetlenségek 11. és 12. osztályosok számára

4.1. 7 törpe és 2 bűvös szerkezet

Emlékszünk még, hogy hol hagytuk el Hófehérkét és a hét törpét? Legutóbb, amikor találkoztunk velük, éppen egy problémán tanakodtak, ami a szerencsétlenül járt, páratlan számokat is tartalmazó kőtábla kapcsán merült fel. A kérdés az volt, hogy a 4×4-es és az újonnan talált 3×3-as varázsszerkezet segítségével már megjavítható-e a páratlan számokat is tartalmazó kőtábla csak páros számokat tartalmazóra?

A válasz sajnos a törpék nagy szomorúságára még mindig nem. Erre két bizonyítást is adok:

1. **Az egzisztencia bizonyítás**

   Először gondoljunk meg két apró észrevételt:

   (a) Mindegy, milyen sorrendben végzik a törpék a megengedett lépéseket a két varázsszerkezet segítségével – igen, hiszen csak az számít, hogy egy-egy mezőre hányszor tettük rá valamelyik szerkezetet.

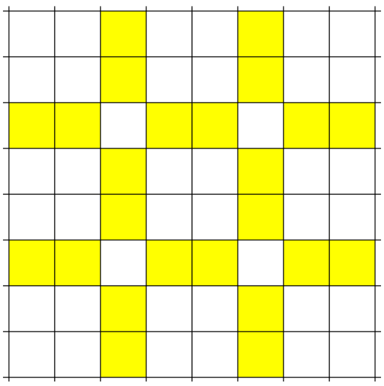
   (b) Minden „helyzetet" elég egyszer használni (*helyzet*nek nevezem valamelyik szerkezet egy adott helyen való elhelyezését). Ez azért igaz, mert ha mindegy a műveletek sorrendje a fentiek alapján, akkor ha egy helyzetet többször is használnánk, akkor ezeket egymás után téve kioltják egymást. Tehát csak anynyi a lényeges a feladat szempontjából, hogy használtunk-e egy adott helyzetet, vagy sem.

Vegyük észre, hogy a feladat átfogalmazható: a páros számok jelentsék a sakktáblán a fehér mezőket, a páratlanok pedig a feketéket. Így a törpék feladata a fekete-fehér sakktáblából fehéret készíteni a két szerkezet segítségével. A két szerkezet működése pedig egyszerű: invertálja azoknak a mezőknek a színét, amiket lefed. Induljunk most a feladat végéről: milyen sakktáblaszínezések érhetők el a megengedett lépések segítségével a csupa fehér sakktáblából?

Azt tudjuk, hogy a sakktáblának 2^{64}-féle színezése lehetséges. A 4×4-es szerkezetet 25 helyre tehetjük le, hiszen például a bal alsó sarkának a helye már egyértelműen meghatározza az egész szerkezet helyét. A 25 mező színezésére pedig 2^{25} lehetőség van. Ezzel analóg módon a 3×3-ast 36 helyre tehetjük, a 36 mező beállítására pedig 2^{36} lehetősége van a törpéknek.

Mivel a törpék mind a két szerkezettel dolgozhatnak, ezért az összes lehetőség száma a két szám szorzata lesz: $2^{25} \cdot 2^{36} = 2^{61}$, ami viszont még mindig kevés, tehát nem tudunk minden sakktábla-állásból csupa fehéret készíteni a két varázsszerkezet segítségével sem.

2. **A konstruktív bizonyítás**



4.1. ábra. Az ellenpélda konstrukciója – a sárga mezők közül egyszerre mindig páros sok kerül a szerkezet alá

Az ellenpélda készítéséhez vegyük észre, hogy akárhogyan helyezzük el a 3×3-as vagy a 4×4-es szerkezetünket a táblán, mindkettő páros számú sárga mezőbe metsz bele. Tehát, ha visszatérünk az eredeti, számokkal kitöltött kőtáblához, akkor a sárga mezőkön lévő számok összegének paritása nem változik, hiszen minden lépésben páros sok nő közülük 1-gyel. Ha a 4.1. ábrán például *egy* sárga mezőn páratlan szám szerepel, a többin páros, azaz kezdetben a sárga mezőkön lévő számok összege páratlan, akkor sosem fogjuk tudni kijavítani a táblát, mert minden javítás magával vonzza még páratlan számú sárga mező elrontását a fenti észrevétel miatt. Ezek alapján ellenpélda a következő: a sárga mezők egyikén 1-es szerepel, az összes többi azonban 0. Ebből nem érhető el csupa páros számot tartalmazó véghelyzet.

Mint láthattuk, a két bizonyítás között lényeges különbség van. Az egzisztencia bizonyítás során beláthattuk, hogy csupa párosból kiindulva nem lesz elég lehetőségünk arra, hogy minden lehetséges tábla-állást megvalósítsunk, azonban ez alapján a törpék még nem tudják eldönteni, hogy az előttük lévő konkrét kőtábla megjavítható-e. Csak annyit tudnak, hogy van olyan kőtábla, amit sosem fognak tudni megjavítani. Ezzel szemben a konstruktív bizonyítás esetében konkrét kőtábla-helyzetekről láthatjuk, ha biztosan javíthatatlanok.

A feladat tovább is gondolható: ha a törpék nem a páros számokat kedvelik, hanem a 3-mal vagy 17-tel oszthatóakat, akkor a konstruktív bizonyítás már nagyon nehézzé válik, az egzisztencia bizonyítás viszont teljesen analóg módon működik.

4.2. Rozsomákvadászat

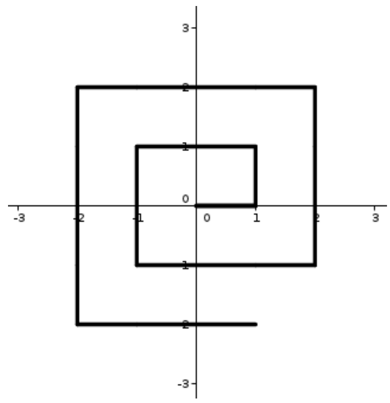
4.3. Rácspontokban menekülő vad esetén

Adott a síkban egy koordinátarendszer. Ennek origójában egy nagyon gonosz rozsomák ül, és csak arra vár, hogy lecsaphasson a következő áldozatára. Mi, a rozsomákvadászok pedig mindent megteszünk, hogy keresztülhúzzuk számításait, és elkapjuk. Sajnos azonban a rozsomák olyan ravaszul álcázza magát, hogy észrevehetetlen a mi szemszögünkből. Korlátlan mennyiségű koordináta-bomba áll rendelkezésünkre, azt ugyanis tudjuk, hogy a rozsomák csak a rácspontokban menekül, méghozzá egyenes vonalú egyenletes mozgással. Minden időpillanatban, amikor bombázhatunk, éppen egy rácspontban lesz. Ha az adott időpillanatban mi éppen arra a rácspontra dobunk le bombát, akkor a rozsomák egy nyekkenő hang kíséretében megsemmisül, innen tudjuk, hogy sikerrel jártunk.

24. feladat. *Elkaphatjuk-e így a rozsomákot, és ha igen, hogyan?*

Bármennyire is hihetetlenül hangzik, ha elég ügyes vadászok vagyunk, a rozsomák elkapható, például a következő stratégiát alkalmazva:

1. lépés: az $(1,0)$ pontba dobunk – ha talált, akkor a rozsomák az x-tengellyel párhuzamos, 1 hosszúságú vektorral menekül. Ha nem talált, akkor tovább próbálkozunk.
2. lépés: a $(2,2)$ pontba dobunk – hátha az $(1,1)$ pontba mutató helyvektorral menekül. Mivel most már a második időpillanatban vagyunk, a rozsomák már kettőt lépett.
3. lépés: a $(0,3)$ pont a következő célpont – ha a rozsomák a $(0,1)$ helyvektorral menekül, akkor a harmadik időpillanatban éppen a $(0,3)$ pontban lesz.



4.2. ábra. A rozsomák levadászására alkalmazható stratégia

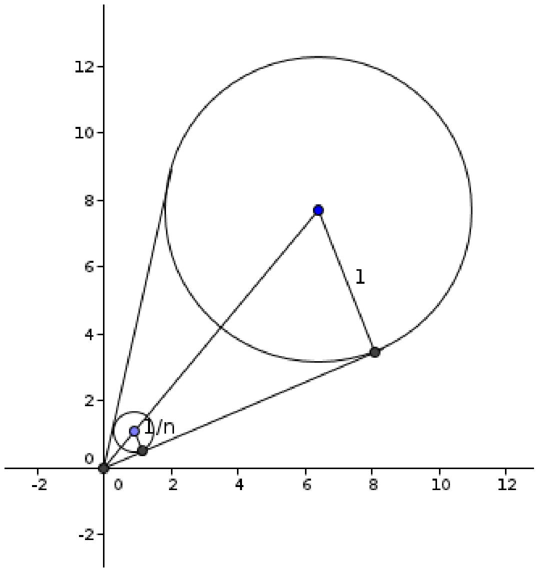
Most már érthető a stratégia lényege: az origó körül csigavonalban leellenőrizzük a kiindulási helyvektorok lehetséges értékeit. Az első 8 lépésben végig tudunk menni az origót körülvevő 4 egységoldalú négyzet origótól különböző csúcsaiba mutató vektorokon, a 9. lépésben pedig áttérünk a következő sávra a $(18,0)$ pont megcélzásával. (Ekkor a kiindulási vektor a $(2,0)$, de a 9. időpillanatban vagyunk.) Összességében tehát ha a $\mathbf{v}$ kezdővektort szeretnénk elintézni az n. lépésben, akkor az $n\mathbf{v}$ helyvektorú pontba célzunk.

4.4. Nem rácspontokban menekülő vad esetén

A feladat az előzővel analóg, annyi különbséggel, hogy a rozsomák, bár az origóból indul, nem a rácspontokban mozog, hanem csak annyit tudunk, hogy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Szerencsére azonban nekünk is javultak a lehetőségeink a vadászathoz: a koordináta-bombánkat lecseréltük koordináta-aknavetőre, ami a célbavett pont egységsugarú környezetén belül megsemmisíti az ott lapuló rozsomákokat. Tehát most egységsugarú körökkel bombázhatjuk a síkot rozsomákra vadászva.

25. feladat. *Elkapható-e ilyen feltételek mellett a rozsomák?*

A megoldáshoz dobjunk le egy egységsugarú akna-kört a síkra az n. lépésben. Ezzel a körrel milyen kezdővektorú rozsomákot intézhetünk el? Éppen azokat, akik a kör origóból n-edrészre lekicsinyített, $\frac{1}{n}$ sugarú körbe érkeztek valamilyen kezdővektorral, mint ahogy az ábra mutatja.



4.3. ábra. Az n-ed részre kicsinyített egységkör

Tehát a kérdés már csak annyi, hogy lefedhető-e a sík $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ sugarú körökkel? Ha ugyanis lefedhető, akkor minden kezdővektorral induló rozsomákot el tudunk kapni, ha nem, akkor marad olyan kezdővektor, amivel induló rozsomákot biztosan nem tudjuk eltalálni.

Becsüljük meg a területeket: az $r_n = \frac{1}{n}$ sugarú kör területét a $T_n = \frac{\pi}{n^2}$ képlettel számolhatjuk. Ha ezt minden n-re összeadjuk, akkor a $\sum \frac{\pi}{n^2}$ összeget kapjuk, ami véges.

Így tehát nem lehet biztosan elkapni a rozsomákot.[1]

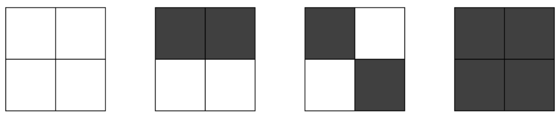
[1] Ha számegyenesen mozgó rozsomákra vadászunk ugyanilyen paraméterek mellett, akkor elkaphatjuk. (Itt az egység sugarú akna-körünk intervallumnak tekinthető, a feladat pedig az, hogy lefedjük a valós számokat n-edvektorokkal.)

4.5. Szükséges és elégséges feltétel a sakktábla-visszaváltoztató tündérekhez

Térjünk vissza most egy picit Bazsi sakktáblájához, a gonosz boszorkányhoz, és a 16 segítő jótündérhez, akik vissza szeretnék változtatni Bazsi sakktábláját, de egy tündér egyszerre csak egy sort vagy oszlopot tud ellentétes színűre változtatni. A 2.9. pontban láthattuk, hogy van olyan sakktábla, amit a tündérek vissza tudnak változtatni, de olyan is van, amit nem. Milyennek kell lennie egy sakktáblának, hogy visszaváltoztatható legyen ilyen módon?

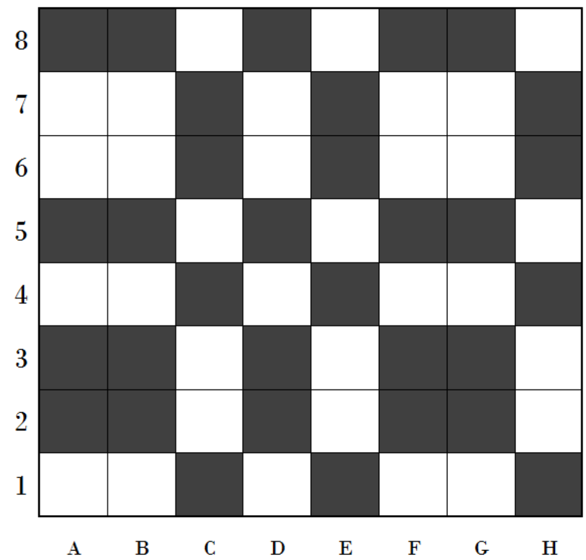
26. feladat. *Mi a szükséges és elégséges feltétele a sakktábla visszaváltoztathatóságának?*

Vizsgáljuk most a fekete mezők számának paritását! Vegyük észre, hogy egy tündér egy varázslata során a paritás nem változik, invariáns. Tehát kiindulásként mindenképpen páros számú fekete mezőt kell tartalmazni. Mivel egy tündér varázslata egy 2×2-es sakktáblarészlet esetén sem változtatja meg az itt lévő fekete mezők számát, ezért minden 2×2-es részletre is igaznak kell lenni, hogy páros sok feketét tartalmaz. Ez tehát szükséges feltétel. A 4.4. ábrán látható 4 eset lehetséges.



4.4. ábra. A négy lehetséges eset, amikor teljesül, hogy a fekete mezők száma páros

Kezdjünk el kitölteni a sakktáblát úgy, hogy teljesüljön a szükséges feltétel! Induljunk a jobb alsó sarokból. Tegyük be például a 4.4. ábrán a második helyen állót. Ekkor a mellette lévő C1 és C2 mezők színezésénél pontosan az egyiknek feketének kell lennie. Így két lehetőségünk van, dönthetünk. Legyen például az a döntésünk, hogy C1 fekete, C2 fehér. D1 és D2 színezésénél hasonló a helyzet, legyen például D2 a fekete, D1 pedig a fehér. Ez alapján az egész alsó két sort végigírhatjuk. Nézzük most a 3. sort! Mivel a 2. sor két feketével kezdődött, ezért a 3. sor első két mezőjének vagy mindkettőnek feketének kell lenni, vagy mindkettőnek fehérnek. Legyen például az előbbi, tehát A3 és B3 fekete. C3-mal kapcsolatban azonban már nincs választási lehetőségünk, ugyanis mivel C2 fehér, neki is fehérnek kell lennie. Hasonló gondolatmenettel lett fekete D3. Ez alapján tehát kitölhető az egész sakktábla, és amint az könnyen észrevehető, az elégséges feltétel a következő: Ha a sakktábla minden sora ugyanaz, vagy az inverze, akkor a tündérek vissza tudják változtatni.



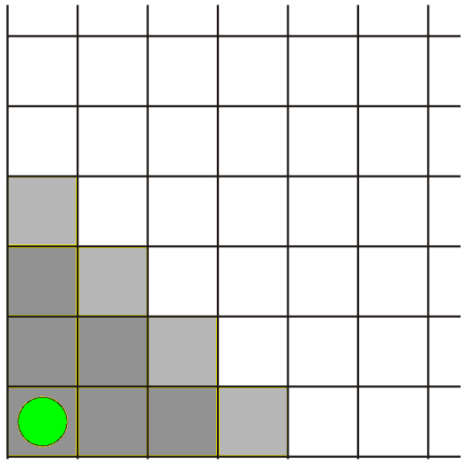
4.5. ábra. A visszaállítható sakktábla

Összességében tehát szükséges és elégséges feltételre kaptuk:
A tündérek pontosan akkor tudják visszaváltoztatni a sakktáblát, ha annak minden sora megegyezik az első sorával vagy annak az inverzével.

4.6. Sejtosztódás

4.7. Az első generáció

Lepottyant a sejtszállító autóról a sarokba egy pici sejt. Ücsörgött ott egy darabig, de nem érezte igazán jól magát. Olyan fajta sejt volt, aki szerette a világosságot, a sarokban pedig egészen sötét volt. Látta azonban, hogy nem messze tőle, a 4.6. ábrán látható módon, már süt a nap. Így hát el is indult a fény felé, méghozzá úgy, hogy ha a fölötte és a tőle jobbra lévő mezők üresek voltak, akkor osztódott, ezáltal a régi helye megüresedett, az előbb említett új helyeken pedig megjelent két új sejtecske. Ez a két új sejtecske persze ismét a fényre törekszik, így a kérdés már csak annyi marad, hogy ezen osztódási lépések végrehajtásával kiérhet-e minden sarokban lévő sejt a fényre? Azaz:

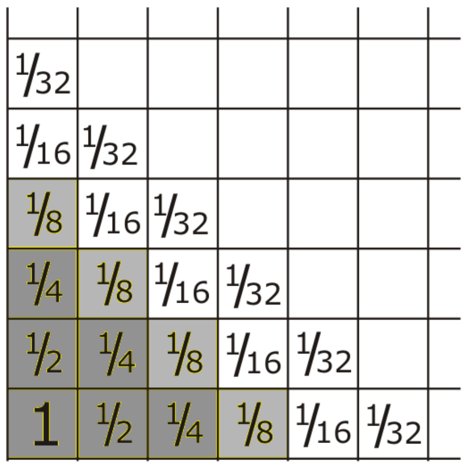


4.6. ábra. A sarokba pottyant sejt

27. feladat. *Kiüríthető-e a 4.6. ábrán jelölt terület a fönt leírt osztódási lépés segítségével, ha kiinduláskor egyetlen sejt van a sarokban?*

A feladat megoldása lehetetlen. Ennek bizonyításához ismét az *invariáns* módszert használjuk: írjunk úgy számokat a mezőkbe, hogy egy-egy osztódás során ne változzon a sejtek által elfoglalt mezőkbe írt számok összege.

Kiindulásnak legyen a sarokban 1. Ekkor a fölötte és a tőle jobbra lévő mezőbe $\frac{1}{2}$ kerül, az $\frac{1}{2}$-ek fölött és tőlük jobbra lévő mezőkbe $\frac{1}{4}$, és így tovább, azaz alulról az i-edik sor j-edik eleme $\frac{1}{2^{(i-1)+(j-1)}}$, amint az a 4.7. ábrán is látható.



4.7. ábra. Egy olyan kitöltés, amely során a mezőkben lévő számok összege egy-egy osztódás során nem változik

Ezzel a kitöltéssel elértük, hogy a sejtek által betöltött mezőkbe írt számok összege minden helyzetben 1, ugyanis egy osztódás során a következő történik: az $(i-1,j-1)$ mezőről az $(i,j-1)$ és az$(i-1,\, j)$ mezőkre kerül sejt. Az összeg ezáltal

$$\frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^{i+1+j}} + \frac{1}{2^{i+j+1}} = \frac{2}{2^{i+j+1}} = \frac{1}{2^{i+j}}$$

valóban nem változott, tehát ugyanannyi maradt, mint kezdetben, azaz 1.

Vizsgáljuk meg most, hogy a sötét terület kiürítése után mennyi lesz ez az összeg!

Ezen kitöltés szerint a mezőkre írt számok összegét a mértani sor összegképletével számolhatjuk. A legalsó sorban egy $\frac{1}{2}$ differenciájú mértani sor szerepel, ennek összege 2. A következő sor esetén $\frac{1}{2}$-et kiemelve kapjuk ugyanezt, tehát ezen sor összege 1. Hasonlóan okoskodva észrevehetjük, hogy a sorok összegei is $\frac{1}{2}$ differenciájú mértani sort alkotnak, ha kiemelünk belőle 2-t, így a teljes terület összegére 4-et kapunk. A sötét terület kiürítése után már csak világos területen lesz sejt, ennek összege pedig legfeljebb

$$4 - 1 - 2\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot\frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

lehet, ami ellentmondás, hiszen kisebb, mint 1.

Tehát mindig marad sejt a sötétben, a területet nem lehet kiüríteni.

4.8. A második generáció

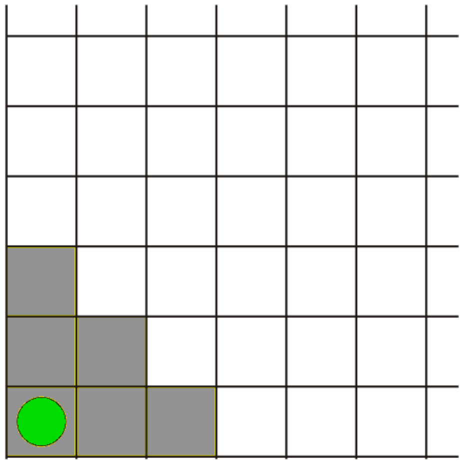
A sötétérzékeny sejtek egy generáció alatt tovább fejlődtek, ellenállóbbakká váltak a fénnyel szemben. Most már csak a legmélyebb sötét viseli meg őket, a félhomály már nem. Ha most egy ilyen sejt pottyan a sarokba, ki tud-e minden utódja jutni a félhomályig az előzőekben leírt osztódási lépéssel?

28. feladat. *Kiüríthető-e a 4.8. ábrán látható terület véges sok megengedett lépés segítségével akkor, ha kiindulásként egy sejt van a sarokban?*

Az látható, hogy az előző gondolatmenettel még nem tudjuk belátni, hogy ezt a területet sem lehet kiüríteni, ugyanis a világos területek összege itt

$$4 - 1 - 2\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4},$$

ami nagyobb, mint 1. A megoldási ötletet azonban ne vessük el, egy kis alakítással ugyanis könnyen kijöhet. Észrevehetjük ugyanis, hogy szélső sorban és oszlopban egyszerre legfeljebb csak 1-1 sejt lehet. Ha éppen kiürítettük a területet, akkor ezek éppen $\frac{1}{8}$-ok. Tőlük



4.8. ábra. A kevésbé fényérzékeny sejt

a fény felé haladva már legfeljebb

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{16} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{8}$$

a mezők összege, tehát tudjuk, hogy a szélső sorban és oszlopban sejt által elfoglalt mezőre írt szám legfeljebb $\frac{1}{8}$ lehet. A maradék napfényes terület összegére a mértani sor összegképletét felhasználva $\frac{3}{4}$ adódik, amit kiegészítve a két szélső $\frac{1}{8}$-dal, éppen 1-et kapunk. Ez pedig már elég a bizonyításhoz. A sejtek által betöltött mezőkbe írt számok összege a sejtek osztódása során mindig változatlanul 1 marad, ahhoz azonban, hogy az 1-et elérjük, minden napfényes mezőn lenni kell sejtnek. Ez pedig nem lehet, mert csak véges sok osztódás megengedett.

Tehát sajnos még a második generációs sejtek sem tudják mind elhagyni a sötét sarkot.

4.9. Tüskekatonák a fronton

A tüske játék katonái[2] csatába készülnek, a tüskeparancsnok pedig csatasorba állítja őket: a frontvonal déli oldalán helyezkednek el a parancsnok kívánsága szerint. A feladatuk az, hogy legalább egy katonát eljuttassanak a frontvonaltól északra 5 tüskelépés távolságra, oda van ugyanis leszúrva az ellenség zászlaja. Ha ezt meg tudják szerezni, megnyerik a háborút. A megengedett tüskelépés a következő: egy katonát a vízszintesen vagy függő-

[2]Az elnevezés a *szoliter* néven ismertté vált játékból ered, ahol egy 33 mezőből álló táblán lyukak vannak, amelyekbe szegecseket (tüskéket) tűzhetünk, a lépések pedig a fent írtakkal megegyező módon történhetnek.

legesen közvetlenül mellette álló katonával átugrunk, az átugrott katona ezáltal sajnos meghal, tehát lekerül a tábláról, az ugró katona pedig a levett katonán túli, vele közvetlenül szomszédos helyre kerül. Ugrás tehát csak akkor lehet, ha az átugrandó katona túloldalán van üres hely.[1], [2]

29. feladat. *Sikerülhet-e valamelyik tüskének az ötödik sorba jutni?*

A válasz sajnos elszomorító: katonáink sosem juthatnak el az áhított pozícióba. Tegyük fel indirekt, hogy egy katona mégis eljutott az 5. sor valamelyik mezőjére a megengedett tüskelépések segítségével.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & \dots & q^2 & q & q^2 & \dots & & \\
 & \dots & q^4 & q^3 & q^2 & q^3 & q^4 & \dots & \\
\dots & q^6 & q^5 & q^4 & q^3 & q^4 & q^5 & q^6 & \dots \\
\dots & q^7 & q^6 & q^5 & q^4 & q^5 & q^6 & q^7 & \dots \\
\hline
\dots & q^8 & q^7 & q^6 & q^5 & q^6 & q^7 & q^8 & \dots \\
\dots & q^9 & q^8 & q^7 & q^6 & q^7 & q^8 & q^9 & \dots \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

4.1. táblázat. A tüskecsatamező

Jelöljük ezt a mezőt az 1-gyel. Nevezzük a tüske-állás súlyának az adott állásban azon mezőkbe írt számok összegét, ahol katonák állnak. A lehetetlenséget úgy fogjuk igazolni, hogy olyan számokat keresünk súlynak, hogy egy-egy ugrás során az összsúly ne növekedjen; emellett az is teljesüljön, hogy az egy sorban, illetve a frontvonal déli oldalán lévő súlyok összege 1 legyen, éppúgy, mint az ötödik sorban, jó pozícióban lévő egyetlen súly nagysága. Ha ezt meg tudjuk valósítani, akkor készen vagyunk, mert ha egy katona mégis eljut az ötödik sor 1-es súlyú helyére, akkor az adott állás súlya 1-nél nagyobb lesz, mert az 1-en álló bábon kívül vannak még más bábok is a táblán, szintén valamilyen pozitív súllyal. (Csak akkor nem lennének, ha végtelen sok ugrással ért volna oda a katona, ami nyilván nem lehet.) Ez pedig ellentmondás, hiszen az ugrások során a súlyok nem növekedhetnek.

A kérdés már csak annyi, hogy mi legyen az alkalmas súlyozás. Legyen q a $q^2+q-1=0$ egyenlet pozitív megoldása, azaz

$$q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Tetszőleges mezőhöz rendeljünk q^k súlyt, ahol k az a szám, ahány lépést az 1-estől meg kell tenni ahhoz, hogy q^k-hoz jussunk. Így a 4.1. táblázatban látható súlyozást kapjuk.

Látható, hogy valóban teljesülnek a fent említett feltételek:

1. Egy ugrás nem növeli a rendszer összsúlyát. A bizonyításhoz legyen q^n az 1-től egy n távolságra lévő mező súlya. Ugorjuk át ezzel a katonával a fölötte lévőt, q^{n-1}-t! Ekkor q^{n-2} helyen lesz katona, q^n és q^{n-1} helyen viszont nem. Tehát az összeg eredetileg
$$q^n + q^{n-1} = q^{n-2}(q^2 + q)$$
volt, az ugrás után pedig
$$q^{n-2} = q^{n-2}(q^2 + q)$$
lett, mivel $q^2 + q = 1$. Tehát valóban nem változott.

2. A rendszer összsúlya 1. Ennek bizonyításához a mértani sor összegképletére van szükségünk:
$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q}$$
Az oszlopokra alkalmazva a fentit: Az 1-től j távolságra lévő oszlop összege
$$\frac{q^j}{1-q}.$$
Az 1 oszlopából csak egy van, a többi oszlopból viszont kettő, az 1 oszlopára szimmetrikusan. Így tehát a frontvonal déli részén elhelyezkedő katonák összsúlya
$$\frac{q^5}{1-q} + \frac{2q^6}{1-q} + \frac{2q^7}{1-q} + \ldots$$
Erre az összegre is alkalmazhatjuk a mértani sor összegképletét, és kapjuk:
$$\frac{q^5}{1-q} + \frac{2q^6}{(1-q)^2} = \frac{q^5 - q^6 + 2q^6}{(1-q)^2} = \frac{q^5(1+q)}{(1-q)^2}$$
Felhasználva, hogy $q + 1 = \frac{1}{q}$, és $q^2 = 1 - q$, ezért
$$\frac{q^5(1+q)}{(1-q)^2} = \frac{q^5 \cdot \frac{1}{q}}{q^4} = 1.$$
Tehát az összsúly 1, és éppen ezt akartuk belátni.

Így még ha végtelen nagy sereg is áll rendelkezésünkre a frontvonal déli oldalán, akkor sem juthatunk az ötödik sorba. Az ellenség valószínűleg ismerte már a bizonyítást, azért is tette nyugodt szívvel a zászlóját ilyen közel a támadó katonáinkhoz úgy, hogy azok mégse érhessék el sose.

4.10. Sziszüphosz és a jutalompontok

Az iskolában a kisdiák Sziszüphosz szorgalmát piros, kék és zöld pontokkal jutalmazzák. Három összegyűjtött piros pont beváltható egy kék pontra, három kék pont egy zöld pontra cserélhető be, és végül három zöld pontért ismét egy piros pont jár. Sziszüphosznak az év végén mindhárom színből 2011-2011 pontja van. Ezeket addig cserélgeti, amíg mindegyikből legfeljebb két pontja marad. [3]

30. feladat. *Elfogyhat-e minden korong valamelyik színből?*[3]

A feladat megoldása nem egyszerű. Némi próbálkozás után kialakul egy sejtésünk: végeredményként 1-1-1 lesz a három színből, mert akárhogy próbáltuk, sehogyan sem tudtunk más kombinációt létrehozni. A színek cserélgetése során láthatjuk, hogy rengeteg lehetőség van, összefüggést pedig nem nagyon látunk a közbülső eredményekként kapott számok közt. Észrevehetjük, hogy kezdetben is ugyanannyi van mindhárom színből, és azt sejtük, hogy a végeredményben is így lesz, tehát ez is egy lehetetlenség, ezért nevezzük A-nak a következő számot:

$$A = p + ck + dz,$$

ahol p, k és z a piros, kék és zöld pontok száma, $c, d \in \mathbb{Z}$ Nekünk most az kell, hogy ez a szám ne változzon a cserélgetések során, tehát A invariáns legyen. Nézzük meg, mi történik, ha három pirosat egy kékre cserélünk:

$$A = p - 3 + c(k + 1) + dz$$

Ekkor A értéke csak abban az esetben nem változik, ha $c = 3$. Három kék egy zöldre való cseréje után

$$A = p + c(k - 3) + d(z + 1) = p + 3k - 9 + d(z + 1).$$

A csak úgy nem változik, ha $d = 9$. Három zöld egy pirosra cserélésekor

$$A = p + 1 + 3k + 9(z - 3) = p + 3k + 9z - 26,$$

tehát minden beváltáskor 26-tal csökken A értéke. A végeredmény tehát ugyanannyi lesz mod 26, mint amennyi kezdetben volt. Kezdetben pedig $3 \cdot 2011 = 6033 \equiv 13$ mod 26. Mivel Sziszüphosz addig cserélgeti a színes korongjait, ameddig mindhárom színből

[3] A kérdés eredetileg így hangzott: Hány piros, kék és zöld pontja lehet Sziszüphosznak a cserék elvégzése után?

legfeljebb kettő marad hátra, ezért a végeredményül kapott számhármast elképzelhetjük egy hármas számrendszerbeli számnak. Ez éppen jól is jön nekünk, ugyanis ha megnézzük az A-ra kapott képletet:

$$A = p + 3k + 9d,$$

az pontosan egy hármas számrendszerbeli szám átváltása tízes számrendszerbe. Már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy melyek azok a hármas számrendszerbeli háromjegyű számok, amelyek tízes számrendszerben 13 maradékot adnak mod 26. Ilyen szám pedig csak egy van, a

$$13_{10} = 111_3.$$

Tehát a megoldás valóban az egy piros, egy kék és egy zöld jutalompont, azaz lehetetlen, hogy elfogyjon valamelyik szín.

5. fejezet

Összegzés

A lehetetlenségi bizonyításokra tehát mégis van eszköztárunk. A szakdolgozatom alapvetően három megoldási módot tárgyal, azonban egészen különböző típusú feladatok esetén alkalmaztuk őket – a módszer tehát a feladaton kívül áll. Nagyon hasznos az *indirekt bizonyítás*, amely során feltesszük az állítás ellenkezőjét, és így jutunk ellentmondásra. Gyakran kijönnek a lehetetlenségek a *paritások vizsgálatával* is. Valamilyen értelemben ennek a gondolatnak a továbbfejlesztése az *invariáns módszer*, amikor valami változatlanul maradót keresünk a feladatban, és azt próbáljuk igazolni, hogy ha lehetséges lenne a feladat megoldása, akkor sérülne az invariáns.

Az itt leírt módszerek mellett persze még rengeteg sok más is van, azonban nekem nem volt célom mindent összegyűjteni. A legfontosabb az, hogy gondolkodjunk a feladatokon, hiszen úgy tapasztalhatjuk meg a matematika szépségét.

Irodalomjegyzék

[1] Csákány Béla (1998): *Diszkrét matematikai játékok*. Polygon, Szeged

[2] Totik Vilmos (1998): Lehetetlen. *Természet Világa*. **III. különszám**. 87-92. oldal

[3] Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny (OKTV) 2011/2012-es tanév, 1. forduló, III. kategória. Feladatok a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére