ELTE

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZAKDOLGOZAT

VERSENYFELADATOK TÖBBFÉLE MEGKÖZELÍTÉSBEN

Témavezető:

Károlyi Gyula

egyetemi docens

Algebra és Számelmélet tanszék

Készítette:

Dobner Tímea Erzsébet

Matematika BSc

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A matematikában számomra az nyújtja az egyik legnagyobb élvezetet, amikor egy feladat megoldásán gondolkozom. Az, ahogy ilyenkor koncentrálok, minden mást kitöröl az agyamból, semmi más nem létezik, csak a háromszög területe, vagy hogy: szorzattá lehet ezt bontani..

A matematika önmagáért is van, önmagáért is jó. Tudjuk azt is, hogy eredményeit számos tudomány használja, sőt bizonyos tudományok létre sem jöttek volna nélküle. Tanár szakosként engem leginkább az érdekel, amit a matematika önmagán és eredményein túl adni tud, hiszen sokszor kell majd jól válaszolnom a „Ezt soha az életben nem fogom használni, akkor mi értelme megtanulni?" tartalmú kérdésre. Jó válasz (vagy legalábbis nem rossz) az, amikor a tanuló nem azért hallgat el, mert tart a tanártól, hanem azért, mert elgondolkodik a hallottakon. Bevallom, először félve tettem fel magamnak a kérdést, de örömmel tapasztaltam, hogy egyszerre több válasz is eszembe jutott: „ Mert sokoldalúvá, rétegeltté teszi a gondolkodásmódot", „ Mert megváltoztatja a problémákhoz való hozzáállást.", „Mert segít az önismertetben, az önértékelésben.", „Mert mindig hozzáférhető sikerélmény.".

Dolgozatom témáját is azért választottam, mert úgy gondolom, egy az eszközök között, amely segíthet megelőzni azt a bizonyos kérdést, ráadásul sok érv szól amellett, hogy egy feladatot jó többféleképpen megoldani.

(1) Ha több oldalról világítunk meg egy problémát, nagyobb az esély arra, hogy jobban megértsük azt.

(2) Miután megoldunk egy problémát legalább kétféleképpen, mikor legközelebb találkozunk hasonló feladattal, már két módszerünk is lesz a megoldására.

Például egy egyenletet próbálunk megoldani, és előzőleg már láttunk példát arra, hogy az algebrai út mellett grafikus megoldás is van. Ekkor törekedni kezdünk, hogy az egyenlőség két oldalán olyan kifejezések szerepeljenek, melyeket „könnyen" tudunk ábrázolni. Másrészt, ha nem is kapunk „szép" eredményt (például irracionális a gyök, és nem olvasható le), meg tudjuk becsülni, hogy a megoldás(ok) milyen tartományban lesz(nek).

A geometriai példák közül a területszámításosak kapcsolhatók ide: tudjuk, néha mennyivel egyszerűbb a kérdéses terület kiszámítása helyett a „maradék” területet kivonni az egészből.

Jó példa ide a kombinatorikai feladatok közül az a típus, amikor megszámolhatjuk azokat az eseteket, amelyekre a feladat rákérdez, de ezek komplementerét is.

(3) Megtanuljuk használni a „fegyvereinket”.

Sokszor van úgy, hogy ismerünk egy képletet vagy definíciót, de nem tudjuk pontosan, mire lehet (még) használni. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget például kreatív dolog területszámításra használni.

(4) Ellenőrizni tudjuk, hogy jó-e a megoldás.

(5) Motiválni lehet vele a gyerekeket.

(6) Olyan összefüggésekre derülhet fény, melyek a két (vagy több) **megoldásból külön-külön nem következnének.**

A dolgozat szerkezete

Dolgozatomban tehát két vagy több megoldást fogok mutatni egy-egy versenyfeladatra. Választásom azért pont ezekre a példákra esett, mert úgy gondolom, ezek olyan típusfeladatok, amelyekre szinte mindig adható két vagy több megoldás.

A feladatokat két verseny, az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny és a Győr-Moson-Sopron Megyei Matematikaverseny példái közül választottam. A dolgozat fejezeteit úgy állítottam össze, hogy a feladatokat témakörök szerint rendeztem, és bizonyos feladatokhoz a megoldások után megjegyzéseket írtam. A példák megoldásában a saját ötleteimen kívül a felhasznált irodalomban felsorolt honlapok segítettek.

A feladványok előtt álló kódok a, pl.: OKTV 2004/2005. I./1./1., a következőképpen oldhatók föl: elöl a verseny rövidített betűkódja szerepel, ezt az évszám követi, majd a kategória, a forduló, és végül a feladat száma.

Geometriai feladatok

OKTV 2010/2011. I./1./3.

Egy derékszögű háromszög oldalhosszainak összege 84 , az oldalak hosszának négyzetösszege 2738. Határozza meg a beírt kör sugarának hosszát!

I. megoldás

A szokásos jelöléseket használva a feladat feltételei szerint:

$$a+b+c=84$$

$$a^2+b^2+c^2=2738$$

A második feltételbe Pitagorasz tételét felhasználva a^2+b^2 helyére c^2-et helyettesítünk:

$$2c^2=2738$$

$$c=37$$

A kerületből az átfogó hosszát kivonva kapjuk, hogy

$$a+b=47$$

$$b=47-a$$

Újra Pitagorasz tételét használjuk:

$$a^2+(47-a)^2=37^2$$

Négyzetre emelés, majd 0-ra való rendezés után:

$$a^2-47a+420=0$$

$$a_1=35,\ a_2=12$$

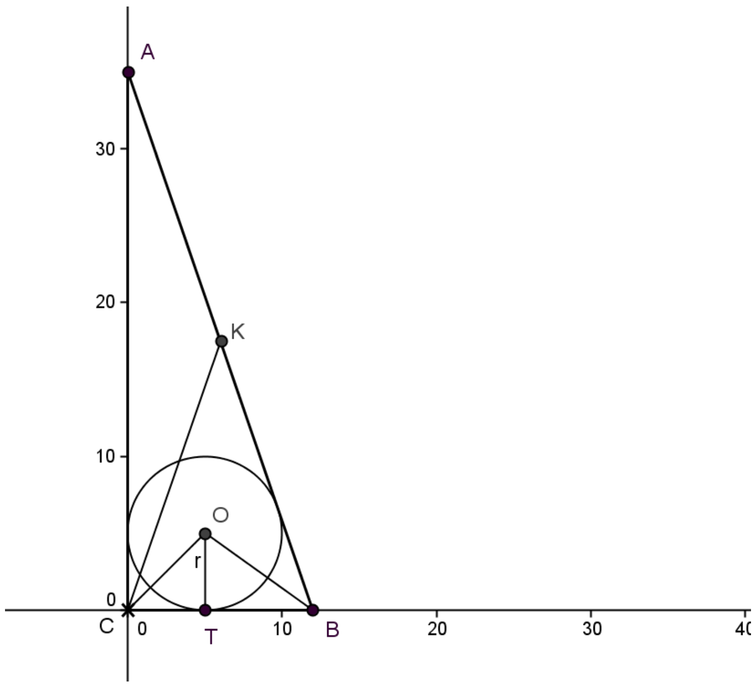
A háromszög oldalai tehát: a=37, b=12, c=37. Ezek ismeretében kiszámolható a terület és a kerület; a terület kétszeresének és a kerület hányadosából pedig a beírt kör sugara:

$$r=\frac{2T}{K}=\frac{ab}{84}=\frac{420}{84}=\underline{5.}$$

II. megoldás

c=37, b=47-a eredményekig ugyanúgy járunk el.

Helyezzük a derékszögű csúcsot a koordinátarendszer origójába. A csúcsok koordinátái: A(0, 47-a), B(a, 0) és C(0,0).



1.ábra

Thalész tételéből tudjuk, hogy a háromszög köré írt kör sugara az átfogó felével egyenlő derékszögű háromszögben. Mivel KAC és KCB háromszögek egyenlőszárúak, magasságvonalaik felezik az alapot, így a K $(\frac{a}{2}, \frac{47-a}{2})$ középpontú, $\frac{c}{2}$=18,5 sugarú köréírható kör és az x tengely metszéspontjaiból kiszámíthatjuk B csúcsainak koordinátáit.

$$(x - \frac{a}{2})^2+(y - \frac{47-a}{2})^2=18{,}5^2$$

$$y=0$$

Behelyettesítés és négyzetre emelés után:

$$2x^2+2ax+a^2-47a+420=0$$

Tudjuk, hogy valamelyik megoldás 0, felírjuk a Viéte-formulákat:

$$x_2=-a$$

$$0=\frac{a2-47a+420}{2}$$

Utóbbi másodfokú egyenletből ugyanúgy megkapjuk, hogy a=12 (vagy 35).

Az oldalak ismeretében kiszámolhatóak a háromszög szögei is.

$$\text{tg}\ \beta=\frac{35}{12}$$

$$\beta=71{,}08^{\circ}$$

A beírt kör sugara a szögfelezők metszéspontja, O. C csúcsból induló szögfelező 45°, a B csúcsból induló $\frac{\beta}{2}$=35,54°, COB szög pedig 99,46°. OB szakasz hossza szinusz tételből:

$$\frac{\sin 45°}{\sin 99{,}46°}=\frac{OB}{12}$$

$$8{,}6=OB$$

Legyen a beírt kör CB oldalra eső érintési pontja T! Így végül BOT háromszögből:

$$\sin 35{,}54°=\frac{r}{8{,}6}$$

$$\underline{\underline{r=5}}$$

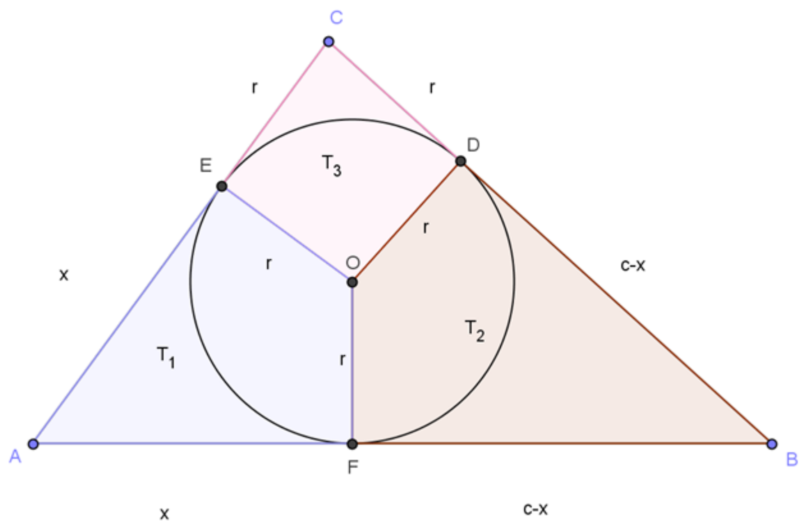
Megjegyzés

A második megoldás hosszabb és körülményesebb az elsőnél, hátránya az is, hogy a szinusz tételt használja, így a kerekítésből eltérések adódhatnak. Ami mégis vonzóvá teszi a megoldást az az, hogy amikor a koordinátageometria nyelvére fogalmazunk át egy feladatot, a megoldás kézzelfoghatóvá, közelivé válik: ábrázoljuk az adatokat, és már látjuk is a megoldást.

OKTV 2009/2010. I./1./2.

Egy derékszögű háromszög átfogóját a beírt kör érintési pontja két szakaszra osztja. Bizonyítsa be, hogy a háromszög területének számértéke egyenlő ezen két szakasz hosszának a szorzatával!

I. megoldás



2. ábra

Az ábra jelölései alapján a bizonyítandó állítás:

$$T_{ABC}=AF \cdot FB=x \cdot (c-x)$$

(1)Körhöz külső pontból húzott érintők hossza egyenlő.

(2)EODC négyszög négyzet, mivel 2-2 szomszédos oldala egyenlő, és minden szöge derékszög.

(1)-ből következik, hogy:

$$AE=AF=x, BD=BF=c-x,$$

így tehát:

$$CE=b-AE=b-x, CD=b-AE=c-x.$$

(1)-ből és (2)-ből következik, hogy:

$$CE=CD=r$$

Ezen összefüggásekből kifejezhető x és c-x az ABC háromszög oldalaival:

$$x=\frac{b+c-a}{2}$$

$$c-x=\frac{a+c-b}{2}.$$

A két szakasz szorzatának eredményeként kapjuk a háromszög területét:

$$x\cdot(c-x)=\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}=\frac{c+(b-a)\cdot c-(b-a)}{4}=\frac{c^2-(b-a)^2}{4}=\frac{c^2-b^2+2ba-a^2}{4}$$

Mivel $a^2+b^2=c^2$, ezért $c^2-a^2-b^2=0$, tehát

$$x\cdot(c-x)=\frac{2ab}{4}=\frac{ab}{2},$$

ami pedig a derékszögű háromszög területe.

II. megoldás

Az első megoldás jelöléseit és megállapításait felhasználva felírjuk, hogy:

$$AE=AF=x=b-r$$

$$BD=BF=c-x=a-r$$

Kifejezhetjük c oldalt a sugárral, és a másik két oldallal:

$$c=AF+FB=AE+BD=b-r+a-r=a+b-2r$$

Adjuk hozzá c oldalhoz a sugár kétszeresét, majd emeljünk négyzetre!

$$(c+2r)^2=(a+b)^2$$

$$c^2+4r^2+4rc=a^2+b^2+2ab \qquad /-c^2=a^2+b^2$$

$$4r^2+4rc=2ab$$

$$r \cdot (r+c)=\frac{a+b}{2}$$

Tudjuk, hogy:

$$c \cdot (c-x)=(b-r) \cdot (a-r)$$

Beszorzás és kiemelés után:

$$c \cdot (c-x)=ab-r(a+b-r)$$

$$c \cdot (c-x)=ab-r(a+b-2r+r) \qquad /c=a+b-2r$$

$$c \cdot (c-x)=ab-r(c+r)$$

Mivel ab a terület kétszerese, r(r+c) pedig egyenlő a területtel, az állítást bizonyítottuk.

III. megoldás

Az eddigiekhez hasonlóan az első megoldás jelöléseit és megállapításait használjuk, de most a és b oldalakat írjuk fel r, x és c segítségével:

$$a=r+c-x$$

$$b=r+x$$

Írjuk fel ABC területét két különböző módon! Először a három deltoid területösszegeként. Felhasználjuk, hogy a deltoid területe egyenlő két nem egyenlő oldalának, és az azok által bezárt szög szinuszának szorzatával, ami esetünkben a két oldal szorzata, hiszen a közbezárt szög mindig 90°, és $\sin 90° = 1$.

$$T_1+T_2+T_3=rx+r(c-x)+r^2$$

$$T_1+T_2+T_3=rx+rc-rc+r^2$$

$$T_1+T_2+T_3=r(c+r)$$

Terület a befogók szorzatának feleként:

$$T=\frac{(r+c-x)(r+x)}{2}=\frac{r^2+rc-rc+rc+xc-x^2}{2}$$

$$2T=r^2+rc+xc-x^2=r(r+c)+x(c-x) \qquad /-T=r(c+r)$$

$$T=x(c-x)$$

Megjegyzés:

Ha megelégszünk az első két megoldással, nem derül ki, hogy $r(c+r)=x(c-x)=T$. Ez azért fontos, mert így képletet kaptunk a derékszögű háromszög területére beírható körének sugarával és átfogójával kifejezve.

OKTV 2008/2009. I./1./1

Bizonyítsa be, hogy a kocka éléből, lapátlójából és testátlójából háromszög szerkeszthető, és ennek a háromszögnek van két egymásra merőleges súlyvonala!

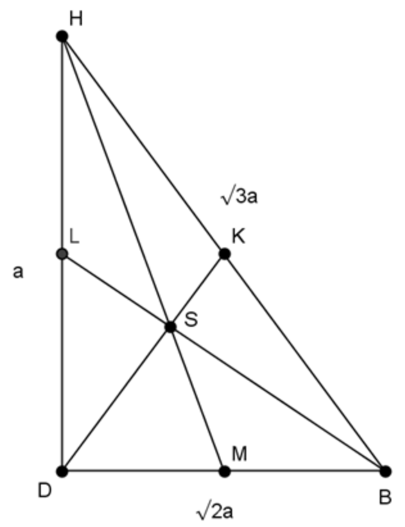
I.megoldás

Legyen a kocka éle **a** hosszú. A lapátló ekkor $\sqrt{2}\cdot a$, a testátló pedig $\sqrt{3}\cdot a$ hosszúságú. A három pozitív szám közül bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál, így a háromszög szerkeszthető. Mivel

$$a^2+(\sqrt{2}\cdot a)^2=(\sqrt{3}\cdot a)^2$$

Pitagorasz tételének megfordítása szerint a háromszög derékszögű.

Készítsünk ábrát, rajzoljuk be a súlyvonalakat, a súlypontot és az oldalfelező pontokat!



3. ábra

Ha megmutatjuk, hogy a HSD szög derékszög, akkor bizonyítottuk az állítást.

Mivel derékszögű háromszög körülíható körének sugara az átfogó felével egyenlő (Thalész-tétel), és az átfogóhoz tartozó súlyvonal is e kör egy sugara,

$$KH=KB=KD=\frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

SD szakasz a súlyvonal kétharmada, mivel a súlypont a súlyvonalat 2:1 arányban osztja úgy, hogy a hosszabbik rész van a csúcs felől.

$$SD=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{3}$$

Írjuk fel MDH háromszögre a Pitagorasz-tételt!

$$a^2+\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2=HM^2$$

$$\frac{\sqrt{6}a}{2}=HM$$

HS szakaszt SD-hez hasonlóan kapjuk:

$$HS=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}a}{2}=\frac{\sqrt{6}a}{3}.$$

Mivel

$$\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}a}{3}\right)^2=\frac{3a^2}{9}+\frac{6a^2}{9}=a^2,$$

igaz a Pitagorasz-tétel megfordítása, tehát a háromszög derékszögű.

II. megoldás

A háromszög szerkeszthetőségének bironyításáig ugyanúgy járunk el, mint az első megoldásban, belátjuk azt is, hogy a háromszög derékszögű. Használjuk itt is ugyanazokat a jelöléseket!

Helyezzük a D csúcsot a Descartes-féle koordinátarendszer origójába! A csúcsok koordinátái ekkor:

$$H(0, a)$$

$$D(0, 0)$$

$$B(\sqrt{2}a, 0).$$

Az ismert képlet segítségével könnyen kapjuk a súlypont koordinátáit:

$$S\left(\frac{\sqrt{2}a}{3}, \frac{a}{3}\right).$$

Készítsük el $\overrightarrow{HS}$ és $\overrightarrow{DS}$ vektorokat!

$$\overrightarrow{HS}=\left(\frac{\sqrt{2}a}{3}, \frac{-2a}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{DS}=\left(\frac{\sqrt{2}a}{3}, \frac{a}{3}\right)$$

Mivel

$$\overrightarrow{HS}_{+90°}=\left(\frac{2a}{3}, \frac{\sqrt{2}a}{3}\right),$$

és

$$\overrightarrow{HS}_{+90°} \cdot \sqrt{2}=\overrightarrow{DS},$$

a két súlyvonal merőleges egymásra, az állítást igazoltuk.

III. megoldás

A másodiktól abban tér el, hogy $\overrightarrow{DS}$ és $\overrightarrow{HS}$ vektorok merőlegességét skaláris szorzás segítségével igazoljuk:

$$\overrightarrow{HS}_1 \cdot \overrightarrow{DS}_1+\overrightarrow{HS}_2 \cdot \overrightarrow{DS}_2=|\overrightarrow{HS}| \cdot |\overrightarrow{DS}| \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{\sqrt{2}a}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{3}+\frac{-2a}{3} \cdot \frac{a}{3}=|\overrightarrow{HS}| \cdot |\overrightarrow{DS}| \cdot \cos\varphi$$

$$0=|\overrightarrow{HS}| \cdot |\overrightarrow{DS}| \cdot \cos\varphi$$

Mivel a bal oldalon 0 áll, a vektorok hossza pedig nem 0, ezért

$$0=\cos\varphi$$

$$90°=\varphi.$$

Megjegyzés:
Azért érdemes koordinátageometria feladatot csinálni a példából, mert így a súlypont sokkal egyszerűbben kiszámítható.

OKTV 2010/2011. I./1./6.

Igazolja, hogy ha valamely háromszög területe $\frac{1}{2}$ területegység, akkor kerülete 3 hosszúságegységnél nagyobb!

I.megoldás

Használjuk a megszokott jelöléseket, legyenek a háromszög oldalai: a, b, c; az oldalakhoz tartozó magasságvonalak: m_a, m_b, m_c!

A háromszög területe felírható egy oldal és a hozzá tartoró magasság szorzatának feleként. Ennek alapján a mi esetünkben:

$$a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c = 1.$$

Írjuk fel az oldalak és ahozzájuk tartozó magasságok által alkotott számpárokra az aritmetikai és geometriai közép közti egyenlőtlenséget!

$$\frac{a + m_a}{2} \geq \sqrt{a \cdot m_a}$$

$$\frac{b + m_b}{2} \geq \sqrt{b \cdot m_b}$$

$$\frac{c + m_c}{2} \geq \sqrt{c \cdot m_c}$$

Az első megállapítást felhasználva kapjuk, hogy

$$a + m_a \geq 2$$

$$b + m_b \geq 2$$

$$c + m_c \geq 2.$$

A három egyenletet összeadva:

$$a + m_a + b + m_b + c + m_c \geq 6$$

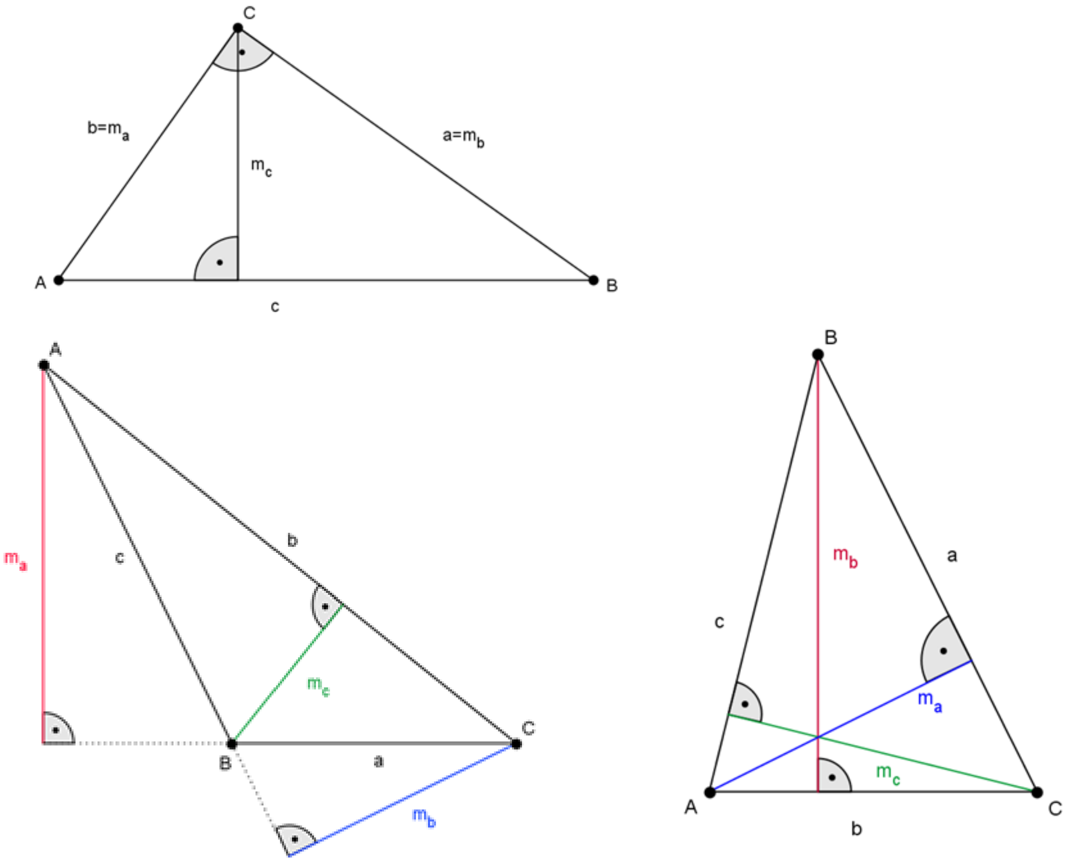
$$(a+b+c)+(m_a+m_b+m_c) \geq 6.$$

Derékszögű háromszögben az átfogó mindig nagyobb bármelyik befogónál. Az alábbi ábrahármasról leolvasható, hogy

$$a \geq m_b$$

$$b \geq m_c$$

$$c \geq m_a.$$



4. ábra

Egyenlőség nem állhat fenn egyszerre, így összeadva a fenti egyenlőtlenségeket adódik, hogy

$$a+b+c>m_b+m_c+m_c.$$

Ezt felkasználva, kettővel való osztás után a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$2\cdot(a+b+c) \geq 6$$

$$a+b+c \geq 3.$$

II. megoldás

Használjuk az első megoldás jelöléseit, és vezessük be s-t, ami legyen a kerület fele.

Írjuk fel a háromszög területére a Héron-képletet, majd alakítsuk át!

$$\frac{1}{2}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad /\text{reciprok}$$

$$2=\frac{1}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \qquad /(\,)^2;\cdot s$$

$$4s=\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

A nevezőben található három pozitív számra felírjuk a számtani és mértani közepek közti összefüggést:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \qquad /(\,)^3$$

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{(3s-2s)^3}{27}$$

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^3}{27}.$$

Eredményünket a Héron-képletből kapottal egyesítve kapjuk:

$$\frac{27}{s^3} \leq 4s \qquad /\cdot s^3;\ :4$$

$$\frac{27}{4} \leq s^4 \qquad /\sqrt[4]{\ }$$

$$\sqrt[4]{\frac{27}{4}} \leq s \qquad /\cdot\ 2$$

$$\sqrt[4]{\frac{27}{4}}\cdot 2 \leq 2s=K$$

Mivel $\sqrt[4]{\frac{27}{4}}\cdot 2 \cong 3{,}22 > 3$, ezért az állítást igazoltuk.

III.megoldás

Fogalmazzuk át a feladatot a következő módon: $T=\frac{1}{2}$ esetén mennyi a háromszög minimális kerülete?

Tudjuk, hogy azonos területű háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legkisebb. Ha a fél egységnégyzet területű szabályos háromszög kerülete nagyobb, mint 3, az állítást igazoltuk.

Szabályos háromszög területéből az oldal hossza:

$$T=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2 \qquad /:\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=a^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$1.07\cong a$$

A kerület pedig:

$$K=3a\cong 3{,}22>3.$$

Megjegyzés:

(1) A harmadik megoldásban tudottnak veszem, hogy azonos területű háromszögek közül a szabályosnak a legkisebb a kerülete. Ez Kiss György KöMaLban megjelent írásának tizenharmadik állítása .

(2) Az utolsó megoldás megmutatja, mennyire le tudja egyszerűsíteni a feladatmegoldást a példa szövegének átfogalmazása.

GMSM 2010./II./G/4.

Egy háromszög oldalai a, b, c; területe t=$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4}$. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

I. megoldás

Észrevesszük, hogy a számlálóban két szám összegének és különbségének szorzata áll, alkalmazzuk a nevezetes azonosságot.

$$T=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4}$$

$$T=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}$$

Bármely háromszögben a koszinusz-tétel szerint:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Ezt c^2 helyére írva, és a négyzetre emelést elvégezve kapjuk, hogy:

$$T=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2+2ab\cos\gamma}{4}$$

$$T=\frac{2ab+2ab\cos\gamma}{4}$$

$$T=\frac{ab(1+\cos\gamma)}{2}$$

Mivel háromszög területe:

$$T=\frac{ab\sin\gamma}{2},$$

ezért

$$1+\cos\gamma=\sin\gamma$$

$$1=\cos\gamma+\sin\gamma \qquad /(\,)^2$$

$$1=\sin^2\gamma+\cos^2\gamma+2\sin\gamma\cos\gamma$$

Felhasználjuk, hogy

$$1=\sin^2\gamma+\cos^2\gamma.$$

És mindkét oldalból kivonunk 1-et.

$$0=2\sin\gamma\cos\gamma$$

Egy szorzat akkor 0, ha legalább az egyik tényező 0, tehát vagy $\sin\gamma=0$, vagy $\cos\gamma=0$. Mivel egy háromszög szögeiről van szó, csak az utóbbi eset lehetséges. Így:

$$\cos\gamma=0$$
$$\gamma=90°$$

Derékszögű háromszögben pedig a derékszög a legnagyobb.

II. megoldás.

Az első megoldáshoz hasonlóan alkalmazzuk a nevezetes azonosságot:

$$T=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}$$

A négyzetre emelés után:

$$T=\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{4}$$

A területet felírjuk két tört összegeként:

$$T=\frac{2ab}{4}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$$

Tudjuk, hogy derékszögű háromszögben fenáll:

$$T=\frac{ab}{2}$$

Ezek szerint kellene, hogy:

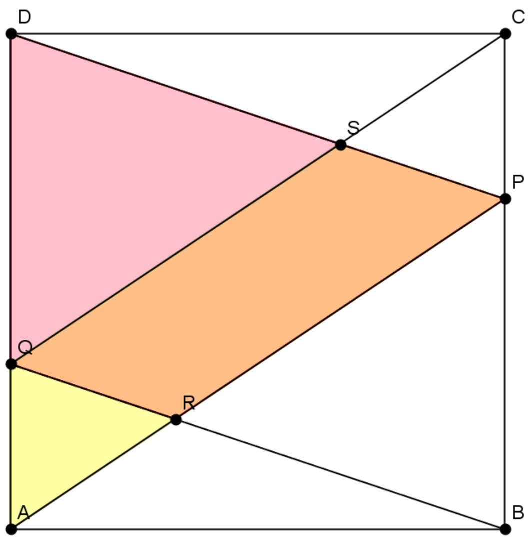
$$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}=0.$$

Ami viszont Pitagorasz tétele miatt teljesül. A háromszög legnagyobb szöge tehát 90°.

GMSM 2011./I./SZ/5.

Az ABCD négyzet oldala 6cm. A BC oldal P pontja C-től, a DA oldal Q pontja A-t 2cm távolságra van. Az AP és a BQ metszéspontja R, a CQ és a DP metszéspontja S. Számítsa ki a PSQR négyszög területét!

I. megoldás



5. ábra

Számoljuk ki APD háromszög területét! AD alapja 6, magassága szintén 6, így a területe:

$$T_{APD}=\frac{6\cdot6}{2}=18$$

Számoljuk ki, majd adjuk össze ARQ és QSD háromszögek területeit! ARQ, QSD, APD háromszögek hasonlóak, mivel szögeik megegyeznek. Így oldalaik és magasságvonalaik aránya is megegyezik.

$$T_{ARQ}=\frac{2\cdot2}{2}=2$$

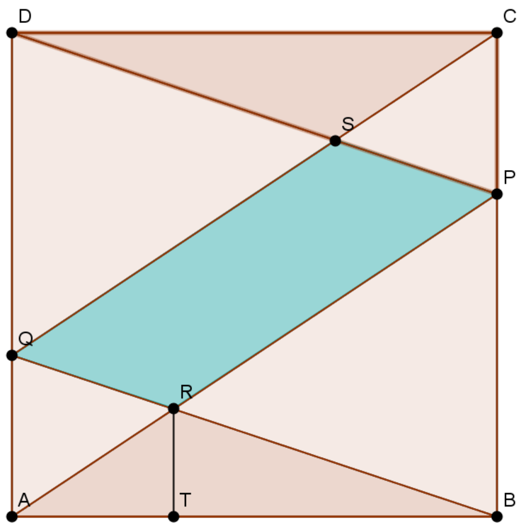
$$T_{QSD}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$$

$$T_{ARQ}+T_{QSD}=2+8=10$$

Ezt az összeget APD háromszög területéből kivonva kapjuk a keresett területet.

$$T_{PSQR}=T_{APD} - (T_{ARQ}+T_{QSD})=18\text{-}10=8.$$

II. megoldás



6. ábra

Számoljuk ki PQRS-en kívüli területet! $T_{QSPCD} = T_{QABPR}$, hiszen négyzet középpontjára középpontosan szimmetrikusak, így elég egyiket kiszámolni:

$$T_{QABPR}=T_{QAB}+T_{ABP} - T_{ABR}$$

QAB és ABP derékszögű háromszögeknek ismerjük a befogóit, tehát területeiket ki tudjuk számolni:

$$T_{QAB}+T_{ABP}=\frac{2\cdot 6}{2}+\frac{4\cdot 6}{2}=18$$

ABR magasságvonalát (T pontban metszi AB-t) kiszámolhatjuk a párhuzamos szelők tételéből. Először QAB, majd PAB szögszárra írjuk fel a tételt:

$$\frac{2}{6}=\frac{RT}{TB}$$

$$\frac{4}{6}=\frac{RT}{6-TB}$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy: TB=4, és RT=$\frac{4}{3}$.

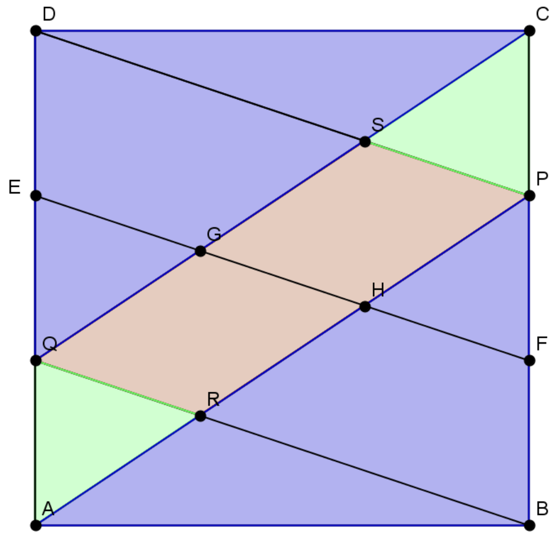
ABR területe:

$$\frac{6\cdot\frac{4}{3}}{2}=4$$

Minden szükséges adat ismeretében PSQR területe:

$$T_{PSQR}=T_{ABCD}\text{-}2\cdot T_{QABPR}=36\text{-}2\cdot(18\text{-}4)=8.$$

III. megoldás



7. ábra

APB és QCD háromszögek egybevágóak (két oldal és a közbezárt szög egyenlő), így területük is egyenlő. A négyzetéből kivonva az egyik kétszeresét APCQ területét kapjuk.

$$T_{APCQ}=T_{ABCD}\text{-}2\cdot T_{ABP}=6\cdot 6-2\cdot\frac{6\cdot 4}{2}=12$$

Húzzunk QB-vel párhuzamost QD felezőpontjába, legyen ez a metszéspont E, CB oldallal vett metszéspont F, továbbá QS$\cap$ EF=G ,és RP$\cap$ EF=H!

Ha egyenlő távolságra lévő párhuzamokat egymástól ugyanakkora távolságra lévő párhuzamosokkal metszünk, a keletkező paralelogrammák területe megegyezik. Ezért $T_{QRHG}=T_{GHPS}$, másrészt $T_{ARGQ}=T_{RHSG}=T_{HPCS}$.

De $T_{ARGQ}+T_{RHSG}+T_{HPCS}=T_{APCQ}=12$, ezért egy ilyen paralelogramma területe 12:3=4. QR átló ARGQ-t két részre osztja, SP pedig HPCS-t felezi. Következik, hogy $T_{AQR}=T_{SPC}=2$.

A szükséges adatok ismeretében PSQR területe:

$$T_{PSQR}=T_{APCQ}\text{-}2\cdot T_{AQR}=12\text{-}2\cdot 2=8.$$

Megjegyzés:

Sok olyan területszámításos feladat van, amelyet többféleképpen meg lehet oldani. Ezt azért választottam, mert három olyan megoldása van, amelyekben az alapötletek „jellegzetesek”: háromszögek hasonlósága, párhuzamos szelők tétele; összes területből a kérdéses területen kívüli kivonása; adott terület kétszer számolása, majd kivonása; átdarabolás.

Egyenletek, egyenlőtlenségek

OKTV 2004/2005. I./2./1

Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_3\frac{3}{x}\cdot\log_2 x-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\log_2 x$$

I. megoldás

$x>0$ a logaritmus értelmezési tartományának megfelelően.

A logaritmus és a hatványozás azonosságainak segítségével alakítjuk az egyenletet:

$$(\log_3 3+\log_3\tfrac{1}{x})\cdot\log_2 x-(\log_3 x^3+\log_3\tfrac{1}{\sqrt{3}})=\tfrac{1}{2}+\log_2 x$$

$$(1+\log_3 x^{-1})\cdot\log_2 x-(3\log_3 x-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}+\log_2 x$$

$$\log_2 x-\log_2 x\log_3 x-3\log_3 x+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}+\log_2 x$$

$$-\log_2 x\log_3 x-3\log_3 x=0$$

$$-\log_2 x\log_3 x=3\log_3 x \qquad /:(-\log_3 x),\ \text{ha } -\log_3 x\neq 0$$

$$\log_2 x=-3$$

$$x=\frac{1}{8}$$

Meg kell még vizsgálni a $-\log_3 x=0$ esetet. Az egyenletbe x=1-et helyettesítve azonosságra jutunk, tehát ez is megoldás.

II. megoldás

Az első megoldástól abban tér el, hogy

$$-\log_2 x \log_3 x - 3\log_3 x = 0$$

sor után szorzattá bontunk:

$$\log_3 x(\log_2 x + 3) = 0.$$

Egy szorzat értéke akkor 0, ha legalább az egyik tényező 0.

$$\log_3 x = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$\log_2 x = -3$$

$$x_2 = \frac{1}{8}$$

Megjegyzés:

(1) A két megoldás lényegileg nem tér el egymástól.

(2) A logaritmus azosságait más sorrendben alkalmazva újabb megoldások adhatók.

(3) Az első megoldásban elkerülhető a nullával való osztás, ha például $\log_2 x$-et átírjuk hármas alapú logaritmusra, majd $\log_3 x$-re új ismeretlent vezetünk be, és szorzattá bontunk.

(4) Azért választottam ezt a feladatot, és azért ezt a két megoldást mutattam meg, mert úgy gondolom, középiskolában ez kerülhet elő. Fontos megmutatni a szorzattá bontásos megoldást, mivel előfordulhat, hogy más feladatot másként nem tudnak majd megoldani.

OKTV 2006/2007. I./1./2.

Oldja meg az

$$(x^2+6x)^2-36=(x+3)^2+27$$

egyenletet a pozitív számok halmazán!

I. megoldás

$$(x^2+6x)^2=(x+3)^2+63$$

$$[(x+3)^2-9]^2=(x+3)^2+63$$

Érdemes $(x+3)^2$-re új ismeretlent bevezetni: legyen $(x+3)^2=a$. Ekkor:

$$(a-9)^2=a+63$$

$$a^2-19a+18=0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletéből:

$$a_1=18;\ a_2=1$$

A visszahelyettesítés után:

$$(x+3)^2=18$$

$$x+3=3\sqrt{2}$$

$$x_1=3\sqrt{2}-3$$

$$x_2=-3\sqrt{2}-3$$

$$(x+3)^2=1$$

$$x_3=-2$$

$$x_4=-4$$

Egyedül x_1 pozitív szám, így csak $3\sqrt{2}-3$ megoldás.

II. megoldás

$$(x^2+6x)^2-6^2=(x+3)^2+27$$

$$(x^2+6x+6)(x^2+6x-6)=x^2+6x+9+27$$

Vezessünk be x^2+6x-re új ismeretlent! Legyen $x^2+6x=b$!

$$(b+6)(b-6)=b+36$$

$$b^2-b-72=0$$

$$b_1=9$$

$$b_2=-8$$

Visszahalyettesítés után az első megoldáshoz hasonlóan az $x_1=3\sqrt{2}-3$, $x_2=-3\sqrt{2}-3$, $x_3=-2$, $x_4=-4$ eredményeket kapjuk, a feladat feltételeinek egyedül az x_1 felel meg.

III. megoldás

Mindkét előző megoldásban használtuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét (a másodikban ötször). Próbáljuk meg a képlet nélkül!

Az első megoldáshoz hasonlóan járunk el a $(a-9)^2=a+63$ sorig. Innen:

$$(a-9)^2-a=63$$

$$(a-9)^2-a=64-1$$

$$(a-9)^2-a=(1-9)^2-1$$

Az a tehát lehet 1. Visszahelyettesítésből kapjuk a -2, -4 eredményeket.

Bontsuk fel a 63-at máshogyan!

$$(a-9)^2-a=63$$

$$(a-9)^2-a=81-18$$

$$(a-9)^2-a=(18-9)^2-18$$

A 18-ból kapjuk a másik két lehetséges megoldást: $3\sqrt{2}-3$,$-3\sqrt{2}-3$. Csak $3\sqrt{2}-3$ jó.

Megjegyzés:

A harmadik megoldásban azért nem kell tovább vizsgálni, hogyan bomlik még fel a 64, mert az egyenlet negyedfokú, és mind a négy gyököt megtaláltuk.

OKTV 2008/2009. I./1./3.

Ha x, y, z számok eleget tesznek az

$$x+3y+5z=200$$

és az

$$x+4y+7z=225$$

egyenletnek, akkor mennyi a

$$K=x+y+z$$

kifejezés értéke?

I. megoldás

Észrevesszük, hogy, ha az első egyenletet hárommal, a másodikat kettővel szorozzuk, akkor az ismeretlenek együtthatóinak különbsége 1 lesz, így a keletkező egyenleteket egymásból kivonva megkapjuk K értékét.

$$3x+9y+15z=600$$

$$2x+8y+14z=450$$

$$x+y+z=150$$

II. megoldás

Készítsünk az egyenletrendszer együtthatóiból és a konstansokból kibővített együtthatómátrixot!

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 200 \\ 1 & 4 & 7 & 225 \end{bmatrix}$$

A Gauss-elimináció lépéseinek segítségével olyan alakra hozzuk a mátrixot, hogy az első sorban minden együttható egy legyen.

Először vonjuk ki a második sorból az elsőt!

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 25 \end{bmatrix}$$

Most az elsőből a második kétszeresét.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 2 & 25 \end{bmatrix}$$

Leolvasható az x+y+z=150 megoldás.

III. megoldás

Fejezzük ki y-t és z-t csak x-szel!

Az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazzuk, hogy z eltűnjön az első egyenletet héttel, a másodikat öttel szorozzuk.

$$7x+21y+35z=1400$$

$$5x+20y+35z=1125$$

A két egyenletet kivonjuk egymásból, az eredményt y-ra rendezzük:

$$2x+y=275$$

$$y=275-2x.$$

Hasonló módon kapjuk z-t is, az első egyenletet most néggyel, a másodikat pedig hárommal kell szorozni:

$$4x+12y+20z=800$$

$$3x+12y+21z=675$$

$$x-z=125$$

$$z=x-125.$$

Végül helyettesítsük be a kapott eredményeket!

$$K=x+275-2x+x-125=150.$$

GMSM 2010./I./G/3.

Oldja meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\mathbf{(1+x)^2 < \sqrt{(1-x^2)^2}}$$

I. megoldás

Átalakítás után:

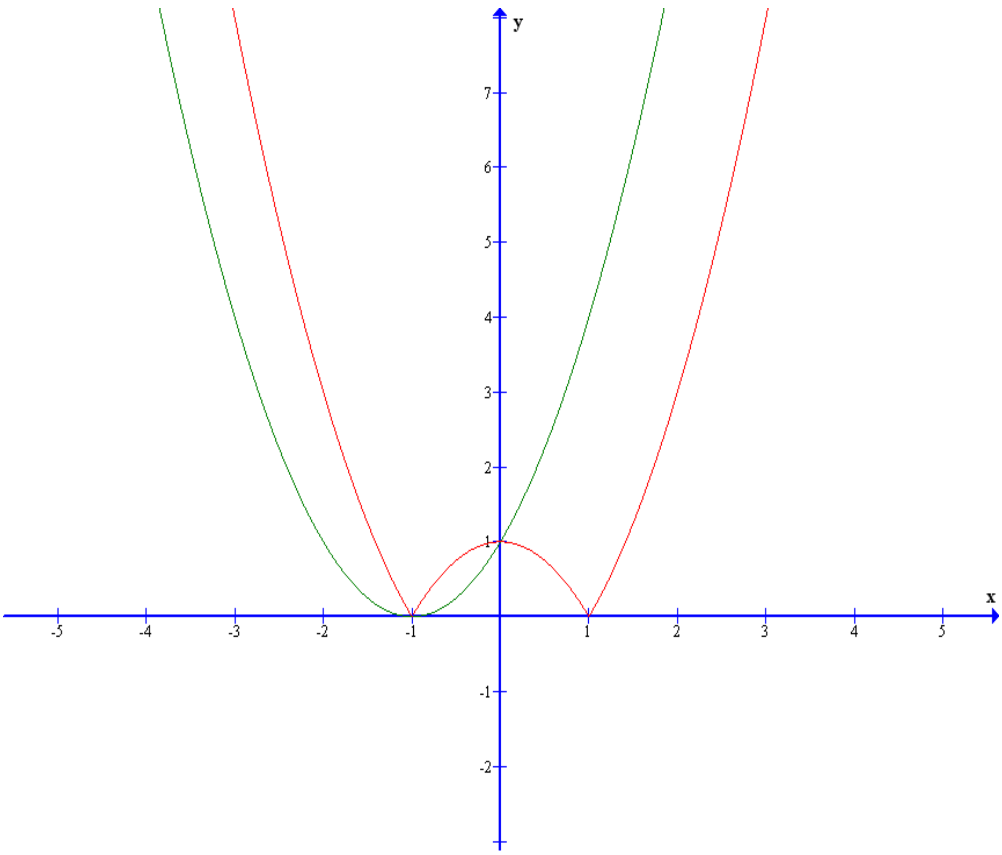
$$(1+x)^2 < |(1-x^2)|$$

Az egyenlőség két oldalán álló kifejezést egy-egy függvényként fogjuk fel. Az alábbi ábráról könnyen leolvasható az egyenlőtlenség megoldása:

$$x<0$$

és

$$x\neq -1$$



8. ábra

II. megoldás

Az egyenlőtlenséget négyzetre emeljük (megtehetjük, mivel mindkét oldal pozitív, vagy 0), majd 0-ra rendezzük és szorzattá bontjuk.

$$(1+x)^2 < \sqrt{(1-x^2)^2}$$

$$(1+x)^4 < (1-x^2)^2$$

$$(1+x)^4 - (1-x^2)^2 < 0$$

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+1-x^4-2x^2-1<0$$

$$4x^3+8x^2+4x<0$$

$$4x\,(x^2+2x+1)<0$$

$$4x\,(x+1)^2<0$$

$(x+1)^2$ nemnegatív, tehát $4x$ negatív, így $x<0$. Mivel az egyenlőség nincs megengedve, $x\neq-1$.

Megjegyzés:

A bevezetésben már említett típusfeladat a fenti: egyenletmegoldás függvényábrázolással vagy az algebra eszközeivel. Úgy gondolom, ez az a feladattípus, amelynek két megoldását mindenképpen érdemes megmutatni a középiskolában is. Mivel a megoldások menete teljesen eltér egymástól, a „gyengébb képességű" diákokat sem zavarja össze.

Sokan azt mondják, amikor megkérdezik tőlük, mit szeretnek a matematikában, hogy az egyenleteket kedvelik. Ha feladjuk nekik ezt a feladatot (nem muszáj egyenlőtlenségként), és esetleg nem sikerül szorzattá bontaniuk, valószínűleg kapva kapnak majd a függvényábrázolós megoldáson; így két legyet üthetünk egy csapásra: biztosabbak lesznek abban, hogy szeretik az egyenleteket, megnyílik egy út a függvények felé…

Egy kombinatorikai feladat

GMSM 2011./I./G/2.

Hány olyan 4 jegyű szám van, amelyben van ismétlődő számjegy?

I. megoldás

Dolgozzunk esetszétválasztással! Először határozzuk meg, hogy milyen lehet a szám alakja (jelöljük betűkkel a számjegyeket úgy, hogy azonos betűk azonos számjegyeket, különbözőek pedig egymástól eltérő számjegyeket jelentsenek), majd nézzük meg, milyen számjegyek kerülhetnek az egyes betűk helyére. Figyelünk arra, hogy az ezresek helyén nem állhat nulla. Végül adjuk össze az esetekből adódó megoldásszámokat!

(1)mind a négy számjegy megegyezik

a szám alakja lehet: $\overline{aaaa}$

esetből adódó megoldások száma: $9\cdot 1= 9$

(2) három számjegy megegyezik

a szám alakja lehet: $\overline{aaab}$, $\overline{aaba}$, $\overline{abaa}$, $\overline{baaa}$

esetből adódó megoldások száma: $9\cdot 9\cdot 4= 324$

(3) pontosan két számjegy egyezik meg

a szám alakja lehet: $\overline{aabc}$, $\overline{abac}$, $\overline{abca}$, $\overline{baac}$, $\overline{baca}$, $\overline{bcaa}$,

esetből adódó megoldások száma: $9\cdot 9\cdot 8\cdot 6= 3888$

(4) két különböző számjegyből áll

a szám alakja lehet: $\overline{aabb}$, $\overline{abba}$, $\overline{abab}$

esetből adódó megoldások száma: $9\cdot 9\cdot 3= 243$

Összesen: 9+324+3888+243= **4464** olyan szám van, amelyben van ismétlődő számjegy.

II. megoldás

Ne azokat az eseteket számoljuk meg, amikor van ismétlődő számjegy, hanem azokat, ahol minden számjegy különböző!

Az ezresek helyén 9 féle számjegy állhat (a nulla nem), a százasokén szintén 9 (az előzőtől különböző), a tízesekén 8, az egyesek helyén pedig 7.

Ez összesen $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7= 4536$.

Összesen 9000 négyjegyű szám van, ezért ezekből a különböző jegyekből állókat kivonva megkapjuk a megoldást.

9000-4536=4464 olyan szám van, amelyben van ismétlődő számjegy.

Megjegyzés:

Az első megoldás részfeladatait meg lehet oldani máshogyan is, azért nem írtam le ezeket, mert más volt a célom. Ezzel a két megoldással azt akartam megmutatni, hogy a feladat átfogalmazása mennyiben megkönnyítheti a megoldást.

Számelmélettel kapcsolatos példák

OKTV 2009/2010. III./3./1.

Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan derékszögű háromszög van, amelyben az oldalhosszak relatív prím egész számok, és az átfogó hosszából bármelyik befogó hosszát levonva egy-egy köbszámot kapunk.

I. megoldás

Használjuk a szokásos jelöléseket; írjuk fel, és alakítsuk át Pitagorasz tételét!

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2-a^2=b^2$$

$$(c-a)\cdot(c+a)=b^2$$

A feladat feltételei szerint (c-a) köbszám. Legyen ez az érték 1! Ekkor $c=a+1$. Írjuk ezt be a Pitagorasz-tételbe, és fejezzük ki a oldalt!

$$(a+1)^2-a^2=b^2$$

$$2a+1=b^2$$

$$a=\frac{b^2-1}{2}$$

Meg kell vizsgálnunk, (c-b) milyen feltételek mellett lesz köbszám.

$$c-b=a+1-b=\frac{b^2-1}{2}+1-b=\frac{b^2-2b+1}{2}=\frac{(b-1)^2}{2}$$

Írjuk fel (b-1)-et $2^k\cdot s$ alakban, és legyen s páratlan!

$$\frac{(b-1)^2}{2}=\frac{1}{2}\cdot(2^k\cdot s)^2=2^{-1}\cdot 2^{2k}\cdot s^2=2^{2k-1}\cdot s^2.$$

Ez akkor köbszám, ha $3|2k-1$, és s köbszám.k=2 és $s=x^3$ jó, ha x páratlan. Így $b=4x^3+1$, $a=8x^6+4x^3$ és $c=8x^6+4x^3+1$ alakban előállítottuk az oldalakat, és mivel végtelen sok páratlan pozitív szám van, végtelen a megoldások száma is..

II. megoldás

A pitagoraszi számhármasok azok a pozitív egészekből álló (a,b,c) számhármasok, amelyek kielégítik a $c^2=a^2+b^2$ diofantoszi egyenletet. Azokat a megoldásokat, ahol (a,b,c)=1, tehát a számok páronként relatív prímek, primitív pitagoraszi számhármasoknak nevezzük. A feladat feltételei alapján ezek között kell keresnünk a megoldást. Az egyenlet összes alapmegoldását a következő egyenletrendszer adja:

$$a=2mn$$
$$b=m^2-n^2$$
$$c=m^2+n^2,$$

ahol m,n pozitív,különböző paritású egészekre teljesül, hogy $m>n$, (m, n)=1.

Írjuk fel a két különbséget!

$$c-b=m^2+n^2-(m^2-n^2)=2n^2$$
$$c-a=m^2+n^2-2mn=(m-n)^2$$

Ezek szerint $2n^2$-nek, és (m-n)-nek köbszámnak kell lennie. Ha m-n=1 és $n=2x^3$, teljesül a feltétel bármely pozitív egész x-szel. $b=4x^3+1$, $a=8x^6+4x^3$ és $c=8x^6+4x^3+1$ tehát végtelen számú megoldást ad, de nem az összeset.
Az összes megoldást a kanonikus alak segítségével kapjuk:

$$n=2^{3\alpha_0+1}\cdot p_1^{3\alpha_1}\cdot p_2^{3\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_t^{3\alpha_t}$$
$$m-n=q_1^{3\beta_1}\cdot q_2^{3\beta_2}\cdot\ldots\cdot q_v^{3\beta_v}.$$

A p_i-k és q_j-k prímek, α_i-k és β_j-k tetszőleges pozitív egészek.

Megjegyzés:

A második megoldásban az összes megoldásra is adok képletet, a feladat csak azt kérte, mutassuk meg, hogy van végtelen ilyen számhármas.

OKTV 2004/2005. I./1./1

Melyek azok a 10-es számrendszerbeli háromjegyű pozitív egész számok, amelyeknek számjegyei közül valamelyik a 3-as, továbbá a számjegyek összege és szorzata egyenlő?

I. megoldás

A feltételek szerint felírhatjuk, hogy:

$$3+a+k=3ak.$$

„Válasszunk" a 3 mellé egy $a\neq 0$ számot (az összeg mindenképpen nagyobb lenne 0-nál), és keressünk hozzá egy megfelelő k-t!

$$3+a=3ak-k$$

$$3+a=k(3a-1)$$

A bal oldalon álló összeg a=3-tól kezdve mindig kisebb lesz, mint a jobb oldalon álló 3a-1, az osztás után tehát k értékére 1-nél kisebb törtet kapunk. Így csak a=1, 2 jó megoldások, hozzájuk k=2, 1 felelnek meg.

Hat olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű szám van, amely megfelel a feladat feltételeinek: 123, 132, 213, 231, 312 és a 321.

II. megoldás

Megint abból indulunk ki, hogy:

$$3+a+k=3ak.$$

Végezzünk ekvivalens átalakításokat; először vonjunk ki az egyenket mindkét oldalából a-t és k-t!

$$3=3ak-a-k \quad /\cdot 3$$

$$9=9ak-3a-3k \;/+1$$

$$10=9ak-3a-3k+1$$

$$10=(3a-1)(3k-1)$$

Tudjuk, hogy $a,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow(3a-1)$és$(3k-1)\in\mathbb{Z}$, és azt, hogy a szorzat mindkét tényezője hárommal osztva 2-t ad maradékul. Így a 10 a $2\cdot 5$ szorzatra bomlik, ami azt jelenti, hogy a=1 vagy 2, és b=2 vagy 1. A keresett háromjegyű számok tehát: 123, 132, 213, 231, 312 és a 321.

III. megoldás

A kiinduló egyenletet az összeadás asszociatív tulajdonságának felhasználásával a következő alakban írjuk fel:

$$3ak=3+(a+k)$$

Észrevesszük, hogy (a+k)-nak oszthatónak kell lennie 3-al. Figyelembe véve még azt, hogy $1\leq a+k\leq 18$, a+k értéke 3, 6, 9, 12, 15 és 18 lehet. Ezeket az egyenletbe helyettesítve kapjuk $a\cdot k$ keletséges értékeit: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Tekintsük a keletkezett ($a+k$, $a\cdot k$) számpárokat egyenletrendszerek eredményeiként, majd oldjuk is meg ezeket! Csak $a+k=3$, és $a\cdot k=2$ esetén kapunk a két ismeretlenre egész megoldást: a=1,2; b=2,1.

A 3, 2, 1 számokból képezhető háromjegyű számok: 123, 132, 213, 231, 312 és a 321.

OKTV 1995/1996. I/1./4.

Bizonyítsa be, hogy bármilyen pozitív egész n-re az

$$\mathbf{1+2+3+\ldots+n}$$

összeg nem végződhet a 2, 4, 7, 9 számjegyek egyikére sem!

I. megoldás

Mivel azt szeretnénk megállapítani, mi lehet az első n szám összegének utolsó számjegye, az egyszerűség kedvéért érdemes modulo 10 számolni.

Szeretnénk, hogy valahány összeadást elvégezve az összeg úgy végződjön egy már előfordult jegyre, hogy amikor a következő összeadást végezzük, ugyanazt a 0-9 közti számot adjuk hozzá mint legutóbb. Ugyanis ha az addig kapott sorozatban nem szerepelnek a „tilos” számjegyek, akkor ezt követően sem fordulhatnak már elő.

0+1=1	5+1=6	0+1=1
1+2=3	6+2=8	1+2=3
3+3=6	8+3=1	3+3=6
6+4=0	1+4=5	6+4=0
0+5=5	5+5=0	0+5=5
5+6=1	0+6=6	
1+7=8	6+7=3	
8+8=6	3+8=1	
6+9=5	1+9=0	
5+0=5	0+0=0	

A huszonegyedik összeadás ugyanaz, mint az első, és az egyenlőség jobb oldalán sehol sem áll 2 ,4 ,7 vagy 9, így az állítást igazoltuk.

II. megoldás

Írjuk fel a számtani sorozat összegképletét az első n számra!

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy:

S 2-re végződik→ n^2+n 4-re

S 4-re végződik→ n^2+n 8-ra

S 7-re végződik→ n^2+n 4-re

S 9-re végződik→ n^2+n 8-ra

Most pedig foglaljuk táblázatba n, n^2 és n^2+n lehetséges végződéseit!

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
n^2+n	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

Azt tapasztaltuk, hogy n^2+n sem 4-re, sem 8- ra nem végződhet, így négy feltevésünk közül egyik sem igaz, az első n szám összege nem végződhet a 2, 4, 7, 9 számjegyekre.

Befejezés

Dolgozatomban olyan versenyfeladatokból válogattam, amelyek véleményem szerint többnyire tipikusak. Vagy azért, mert mindig van két (vagy több) megoldásuk, vagy azért, mert a megoldáshoz vezető gondolatmenetben olyan ötlet van, ami más feladatok megoldásakor is alkalmazható. A bevezetésben, és a példákhoz fűzött megjegyzések többségében is próbáltam rávilágítani arra, miért érdemes egy feladatot többféleképpen megoldani.

A munkának számomra három kiemelt hozadéka volt: egyrészt összefoglaltam, rendeztem a témával kapcsolatos tudásomat és gondolataimat, másrészt sokat tanultam, harmadrészt elhatároztam, hogy a többféle megközelítést tanárként is alkalmazom.

Felhasznált irodalom

Kiss György – Amit jó tudni a háromszögekről
http://www.komal.hu/cikkek/kissgy/haromszogekrol/amitjotudni.h.shtml
(letöltés:2011 április)

Gaál Krisztina Ibolya - Feladatok többféle megoldással az iskolai gyakorlatban (szakdolgozat , ELTE TTK, 2010)

GeoGebra rajzoló program
www.geogebra.org (letöltés:2011 április)

Graph rajzoló program
http://www.padowan.dk/graph(letöltés:2011 április)

Győr-Moson-Sopron Megyei Matematikaverseny feladatai
http://gymsmmv.szolda.hu/ (letöltés:2011 április)

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny feladatai
http://www.oh.gov.hu/oktv/oktv-korabbi (letöltés:2011 április)
http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/oktv/oktv96/oktv96.html

Tóth Enikő – Feladatok többféle megoldással (szakdolgozat , ELTE TTK, 2009)

Tudja Éva Ilona (szakdolgozat , ELTE TTK, 2009)