PROJEKTÍV GEOMETRIAI ISMERETEK A CAYLEY–KLEIN-MODELLBEN

SZAKDOLGOZAT

Írta: Fontanji Andor

Matematika BSc. Matematika tanári szak

Témavezető: Verhóczki László

ELTE TTK Matematikai Intézet

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

Előszó

„Semmiből egy új, más világot teremtettem” – fogalmazta meg egyetlen mottóban Bolyai János egy, az apjához írott levelében munkásságának addig elért eredményét 1823-ban, amidőn hosszú évek munkásságágának köszönhetően megalkotta a hiperbolikus geometriát. Kortársai ebben az időben még idegenként tekintettek minden, az addig jól bevált euklideszi geometriától eltérő elméletre, így a remélt elismerés elmaradt. Egészen 1832-ig váratott magára a korszakalkotó újítás papíron való megjelenése, amelyre végül *Appendix* néven, apja *Tentamen*[1] című művének függelékekén kerítettek sort. Elmélete a párhuzamossági axióma tagadásán alapul, amellyel azt kívánta belátni, hogy maga a párhuzamossági axióma független a többi axiómától. Vele párhuzamosan Ny. I. Lobacsevszkij is foglalkozott a hiperbolikus geometriával, így az irodalom Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriaként hivatkozik az elméletre.

Munkásságuk azonban semmiképpen sem mondható teljesnek, hiszen bárhogyan is próbálkoztak, végül nem sikerült nekik olyan modellt találniuk, amelyben teljesült volna elméletük. Erre egészen az 1860-as évekig várni kellett, amikor is A. Cayley és F. Klein megalkották gömbmodelljüket, amelyben teljesül ez a korszakalkotó felfedezés.

Ezekkel a fent említett fogalmakkal igyekszem foglalkozni munkámban, vázolva magát az elméletet és a hozzá vezető, cseppet sem bukkanómentes út során felhasznált különféle, megkerülhetetlen állításokat, definíciókat, egy működő axiómarendszerét próbálván adni a modellnek, valamint néhány a felépítéséhez nélkülözhetetlen projektív geometriai ismeretbe is bepillantást nyújtok majd. Szakdolgozatom fő célja alapvető szerkesztési problémák megoldása a hiperbolikus síkgeometria Cayley-Klein modelljében. A modell és a szerkesztések tárgyalására a dolgozat harmadik fejezetében kerül majd sor. Meghatározzuk egy pont adott egyenesre vonatkozó tükörképét, korrespondeáló pontokat jelölünk ki két adott egyenesen, valamint a szakasz felezőmerőlegesét is kiszerkesztjük.

Miért nem elégedhetünk meg magával az euklideszi geometriával, amely így is számos más kérdésünkre választ ad? – tehetné fel a kérdést a nyájas olvasó. A válasz igen egyszerű: egyet kell ugyan értenem azzal a szentenciával, miszerint *"Isten elménket bezárta a térbe"*, de gondolkodó lények lévén megvan rá a lehetőségünk, sőt kötelességünk az, hogy ezt a teret korlátainkhoz mérten feltérképezzük.

1 Lásd:http://mek.oszk.hu/06500/06507/pdf/tentamen1_1.pdf

1. A geometria axiomatikus megalapozása

1. 1. Történeti áttekintés

A geometria – ahogyan számos más tudományág is – hierarchikus felépítést tudhat a magáénak, ugyanis az egyes tételek, állítások lépcsőzetesen épülnek egymásra. Ahhoz, hogy be tudjunk vezetni, más szóval be tudjunk bizonyítani egy állítást, meg kell győződnünk a bizonyítás során felhasznált kijelentések helyességéről is. Mivel azonban ezt az eljárást nem áll módunkban a végtelenségig ismételgetni, ezt elkerülendő szükségünk van olyan kijelentésekre, amelyek helyességét bizonyítás nélkül elfogadjuk. Az olyan állításokat tehát, amelyeket bizonyítás nélkül mondunk igaznak, *axiómáknak* nevezzük.

A geometria axiomatikus felépítésének módszere nagy múltat tudhat a magáénak, hiszen évezredekkel ezelőtt már a görög matematikusok is próbálkoztak az ilyen felépítéssel. Az első ismert összefoglalást Euklidesz adta, aki *Elemek* című művében[2] írta össze a matematika addig elért eredményeit i. e. 300 körül, nagyban megkönnyebbítve ezzel a későbbi generációk munkáját. Azt a geometriát, amely az általa megadott axiómákra épül, *euklideszi geometriának* mondjuk.

Ezen rendszer kialakításában még érvényesült az az elv, miszerint az axiómáknak egyszerűeknek kell lenniük, és a világ tapasztalatokra épülő leírását kell adniuk. Mint később kiderült, ez nem feltétlenül célravezető módszer, hiszen így olyan fogalmakat is meg kellene határoznunk, amelyek definiálásához további fogalmakat és kapcsolatokat szükséges bevezetnünk, feleslegesen elnyújtván az egy-egy tétel belátásához nélkülözhetetlen láncolatot. Éppen ezért *primitív fogalmaknak* nevezzük az olyan, axiómákban szereplő fogalmakat, amelyeket külön nem definiálunk. Ilyenek például a pont, az egyenes vagy a sík.

Megemlítendő még, hogy míg az ókorban a geometria – egyéb tudományok mellett – azért létezett, hogy az embert körülvevő világot a lehető legjobban szemléltesse, és a pontot ebből a fizikai valóságból és az ideák világából származtatták, addig napjainkban ez a szemléletmód alakult ki, hogy a létezőt a geometriai axiómarendszer egy működő modelljének véli.

2 Lásd: http://mek.niif.hu/00800/00857/html/

1. 2. Kritériumok

Mielőtt vázolnánk az euklideszi síkgeometria axiómáit, fontos kikötnünk két feltételt, amelyek teljesülése nélkül az egész axiómarendszer az értelmét veszhetí. Ezek az ellentmondásmentesség és a függetlenség.

Egy axiómarendszert *ellentmondásosnak* nevezünk, ha létezik olyan állítás, hogy azt és annak tagadását is le lehet vezetni az axiómákból. Értelemszerűen ennek ellentéte az *ellentmondásmentesség.* Tehát egy axiómarendszert *ellentmondásmentesnek* mondunk, ha nincs olyan állítás, hogy azt és annak tagadását egyaránt le lehet vezetni az axiómákból.

Egy axiómarendszert *függetlennek* nevezünk, ha nem tartalmaz olyan alapigazságnak vett állítást, amelyet közvetve vagy közvetlenül levezethetünk a többi axiómából. Ellentéte az *összefüggőség*, vagyis amikor az egyik axióma levezethető a rendszer néhány, vagy az összes tagjának felhasználásával.

1. 3. Az euklideszi síkgeometria axiómái

Az első, modern elvárásoknak is eleget tevő axiómarendszer megszületésére egészen a XIX. század végéig várni kellett, amikor is David Hilbert német matematikus publikálta axiómáit, amelyeket ugyan G. D. Birkhoff amerikai matematikus később hiányosnak mondott, de lehetővé tették az addig kevéssé életképes axiomatikus gondolkodásmódot.

Az alábbiakban egy olyan axiómarendszert adunk meg tehát, amelyben kulcsszerepet játszik a távolságfüggvény és az úgynevezett vonalzó-axióma. Ezen axióma alkalmazását éppen Birkhoff javasolta az 1930-as években.

Induljunk ki egy H nemüres halmazból, $H \neq \emptyset$, amelyet *sík*nak, elemeit pedig *pontok*nak mondunk. H részhalmazait nevezzük *alakzatok*nak. Ezek között vannak kitüntetett ponthalmazok, amelyeket eg*yenesek*nek nevezünk. Jelölje E az egyenesek halmazát. Ha $P(H)$-val jelöljük a H halmaz hatványhalmazát, amely ennek a halmaznak az összes részhalmazát tartalmazza, akkor az E ennek egy részhalmaza, vagyis $E \subset P(H)$.

DEFINÍCIÓ:

Azt mondjuk, hogy egy $A \in H$ pont *illeszkedik* egy szintén H-ban lévő e egyeneshez, ha ez az A pont eleme e-nek, azaz fennáll $A \in e$.

DEFINÍCIÓ:

Egy véges sok elemmel rendelkező pontrendszert *kollineárisnak* mondunk, ha van olyan egyenes, amely a pontrendszer összes pontját tartalmazza.

A SÍKBELI ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK:

(IA1) Van a síkban három nem kollineáris pont.

(IA2) Tetszőleges két ponthoz egyetlen egyenes illeszkedik.

A BIRKHOFF-FÉLE VONALZÓ AXIÓMA:

Adva van egy olyan $d : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre fennáll, hogy tetszőleges e egyeneshez létezik olyan $\xi : e \rightarrow \mathbb{R}$ bijekció, hogy az összes $A, B \in e$ pontra teljesül:

$$|\xi(A) - \xi(B)| = d(A, B).$$

MEGJEGYZÉS:

A d függvény elnevezése *távolságfüggvény.* Tulajdonságai:

(i) d értékei nemnegatív valós számok.

(ii) Tetszőleges $A \in H$ pont esetén $d(A, A) = 0$.

(iii) Tetszőleges $A, B \in H$ pontokra igaz, hogy $d(A, B) = d(B, A)$.

A fenti axiómák alapján bevezetünk néhány alapvető fogalmat, amelyeket majd alkalmazunk a későbbiekben.

DEFINÍCIÓ:

Legyen a síkban adott három pont, $A, B, C \in H$. Azt mondjuk, hogy a *C* pont az *A* és *B* között van, ha a pontok kollineárisak, különbözőek és fennáll:

$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B).$$

MEGJEGYZÉS:

A továbbiakban jelölje $\langle A, B \rangle$ az *A* és *B* pontokon áthaladó egyenest.

DEFINÍCIÓ:

Legyenek *A* és *B* különböző pontok. Ekkor az *A* és *B* végpontokkal meghatározott *szakaszon* az $\overline{AB} = \{P \in \langle A, B \rangle \mid P \text{ pont az } A \text{ és } B \text{ pontok között van}\} \cup \{A, B\}$ ponthalmazt értjük.

Ezek után értelmezni lehet a félegyenest is.

DEFINÍCIÓ:

Az *A* kezdőpontú és a *B* pontot tartalmazó *félegyenes*en a következő alakzatot értjük:

$$[A, B> = \{P \in \langle A, B \rangle \mid A \text{ nincs a } B \text{ és } P \text{ pontok között}\}.$$

DEFINÍCIÓ:

Azt mondjuk, hogy egy *e* egyenes *elválasztja* egymástól az *A* és *B* pontokat, ha az *e* egyenes egy belső pontjában metszi az $\overline{AB}$ szakaszt.

DEFINÍCIÓ:

Legyenek adottak *A, B* és *C* nem kollineáris pontok, ekkor az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$ szakaszok által meghatározott alakzatot *háromszögvonal*nak nevezzük. Az *A*, *B*, *C* pontokat a háromszög csúcsainak mondjuk.

Az imént felírt fogalmak segítségével már ki tudjuk mondani a Pasch-féle rendezési axióma síkgeometriára alkalmazott formáját, amelyet M. Pasch német matematikus vázolt fel először, miután belátta azt, hogy Euklidesz munkáiban ugyan használja, de közvetlenül nem mondja ki ezt.

A PASCH-FÉLE SÍKBELI RENDEZÉSI AXIÓMA (PRA):

Amennyiben adva van egy háromszögvonal, valamint egy olyan egyenes, amely nem megy át a háromszögvonal egyik csúcsán sem, de metszi a háromszögvonal egy oldalát, akkor az egyenes metszi a háromszögvonal még egy oldalát.

Ezzel az axiómával már meg tudjuk határozni a félsík mibenlétét.

DEFINÍCIÓ:

Legyen egy *e* egyenes és egy arra nem illeszkedő *A* pont. Az *e* egyenessel határolt *A*-t tartalmazó *félsík*on az *[e, A>* = $\{P \in H \mid e \text{ nem választja el az } A, P \text{ pontokat}\}$ alakzatot értjük.

MEGJEGYZÉS:

Igazolható, hogy tetszőleges *e* egyenes a síkot két félsíkra osztja fel. Vagy konkrétabban: pontosan két olyan félsík van, amelyeket az *e* egyenes határol. A két félsík uniója a teljes sík, metszetük pedig az *e* egyenes.

DEFINÍCIÓ:

Egybevágóságon egy olyan $\varphi : H \to H$ bijektív leképezést értünk, amely távolságtartó, vagyis bármely $A, B \in H$ pontokra fennáll a $d(A, B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$ összefüggés, és egyenest egyenesbe képez.

DEFINÍCIÓ:

Síkbeli zászlón egy félsíkot, valamint egy annak határán fekvő félegyenest értünk. A félsíkot a zászló lapjának, a félegyenest pedig a zászló rúdjának nevezzük.

A SÍKBELI EGYBEVÁGÓSÁGI AXIÓMA (SEA):

Ha adva van két síkbeli zászló, akkor egyértelműen létezik egy olyan egybevágósági transzformáció, amely az első zászlót a másodikba viszi.

Az eddig felsorolt axiómákból már bevezethető a következő kijelentés.

Állítás:

Legyen adva egy tetszőleges e egyenes, valamint egy e-re nem illeszkedő P pont. Ekkor létezik olyan egyenes, amely áthalad P-n, de nem metszi e-t.

Ez az állítás könnyen belátható az eddigi axiómák felhasználásával, mivel csak a létezést mondtuk ki benne, így azzal együtt axiómarendszerünk nem alkotna független rendszert.

Felvetődik persze az a kérdés, hogy vajon az axiómákból le lehet-e vezetni azt is, hogy a P ponton át csak egy olyan egyenes halad, amely nem metszi el az e-t. A XIX. század közepéig sok matematikus úgy gondolta, hogy talán ez a kijelentés is levezethető, csak nem könnyű megadni hozzá a bizonyítást. A próbálkozások viszont rendre sikertelenek maradtak, és Bolyai János jött rá arra, hogy az alábbi kijelentés valójában nem vezethető le az eddigi axiómákból.

A párhuzamossági axióma:

Legyen adott egy tetszőleges e egyenes, és egy e-re nem illeszkedő P pont. Ekkor egyetlen egy olyan egyenes létezik, amely átmegy P-n, de nincs közös pontja e-vel.

A párhuzamossági axióma tagadása:

Legyen adott egy tetszőleges e egyenes, és egy arra nem illeszkedő P pont. Ekkor legalább két olyan egyenes létezik, amely áthalad P-n és nem metszi az e egyenest.

Ahhoz, hogy tudjunk dönteni ennek az axiómának a függetlenségéről, először azt kell belátnunk, hogy létezik olyan rendszer, más szóval modell, amelyben teljesülnek az eddigi axiómák, valamint a párhuzamossági axióma tagadása is.

Az (IA1), (IA2), (BVA), (PRA), (SEA) axiómák felhasználásával nyert elmélet elnevezése *abszolút síkgeometria*. Ezt a rendszert a párhuzamossági axióma tagadásával kibővítve nyerjük a *hiperbolikus síkgeometriát*, amellyel tulajdonképpen az alábbiakban foglalkozni fogunk, felhasználva azt a taglalt modell felépítéséhez.

2. Projektív geometriai ismeretek

Mivel a hiperbolikus geometria Cayley–Klein-féle modelljében alkalmazni fogjuk a projektív geometria fogalmait és tételeit, ezért az alábbiakban térjünk ki kicsit részletesebben is erre a témakörre, amelyet ha egyetlen mondatban kellene összefoglalni, akkor talán a „párhuzamosok a végtelenben találkoznak" szlogen jellemezne a leginkább.

2. 1. A centrális vetítés és hiányosságai

Egy parányit elrugaszkodva a már megszokott síkgeometriától, vegyük most górcsövünk alá az euklideszi teret, amelynek egyeneseinek halmazát szintén *E*, az immáron a többesszám jelét kapó síkokét pedig *S* jelöli.

Definíció:

Vegyünk tehát az euklideszi térben egy tetszőleges *P* pontot. A *P*-t tartalmazó egyenesek összességét nevezzük *sugárnyaláb*nak, $E(P)=\{e\in E|P\in e\}$. Ekkor *P* a sugárnyaláb *tartópont*ja.

Hasonló megfontolások alapján a *P* ponthoz illeszkedő síkok összessége lesz a *síknyaláb*, $S(P)=\{\sigma\in S|P\in\sigma\}$, ahol *S* az euklideszi tér síkjainak a halmaza. *P* itt a síknyaláb tartópontja.

Definíció:

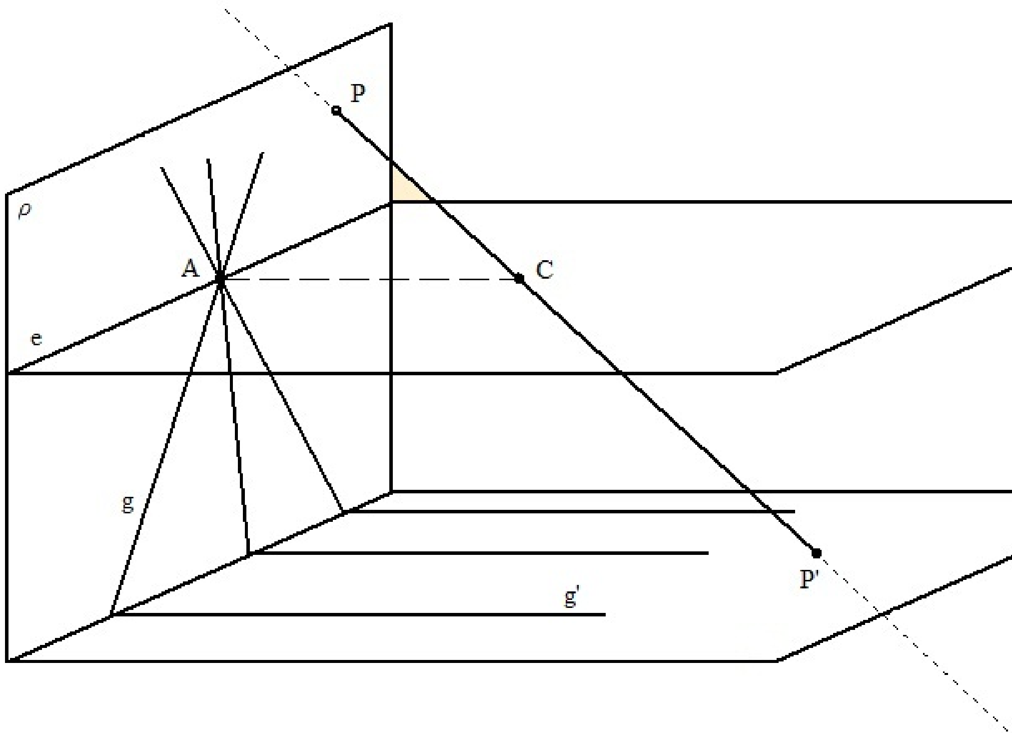
Vegyünk egy tetszőleges σ síkot és egy $P\in\sigma$ pontot. Az $E(\sigma,P)=\{e\in E \mid e\subset\sigma, P\in e\}$ halmazt *sugársor*nak mondjuk.

Legyen adva egy *C* pont, valamint egy arra nem illeszkedő σ sík. Egy *P* pont *centrális vetületének* nevezzük azt a *P'* pontot, amely esetén a *C, P, P'* pontok kollineárisak, és $P'\in\sigma$. *C* a centrális vetítés centruma *(2. 1. 1. ábra)*.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a centrális vetítés az eddig megszokott keretek között nem minden esetben eredményez bijektív leképezést.

Vegyünk egy tetszőleges ρ síkot, amelyet a *C* centrumból vetítsünk rá egy olyan σ síkra, amely metszi ρ -t, $C \notin \sigma, C \notin \rho$. Nézzük a *C*-re illeszkedő, σ -val párhuzamos σ' síkot. A σ' és a ρ síkok metszésvonala legyen az *e* egyenes. Akárhogyan is veszünk pontokat erről az egyenesről, egyiknek sem lesz centrális vetülete, hiszen bármely $A \in e$ pont esetén a $\langle C, A \rangle$ egyenes párhuzamos a σ síkkal, vagyis $\langle C, A \rangle \parallel \sigma$.

Mindezek után tekintsük azokat a ρ -ban elhelyezkedő A pontra illeszkedő egyenesekből álló $E(\rho, A) = \{g \in E \mid A \in g, g \subset \rho, g \neq e\}$ sugársort. Vegyük ezen sugársor egy *g* egyenesét. Ekkor a $\langle g, C \rangle$ sík metszeni fogja a σ síkot egy g' egyenesben, amely egyben *g* centrális vetülete is. Azonban, minél közelebb veszünk fel *A*-hoz pontokat erről az egyenesről, vetületei annál távolabb kerülnek majd a ρ és a σ síkok metszésvonalától.



2. 1. 1. Ábra

Egy másik megközelítésből az is elmondható, hogy mivel a $\langle g, C \rangle$ sík tartalmazza a $\langle C, A \rangle$ egyenest is, ezért a $\langle C, A \rangle$ egyenes és a *g* egyenes vetülete párhuzamosak lesznek egymással. Ez az $E(\rho, A)$ sugársor minden eleméről elmondható, ily módon a sugársor elemeit a σ képsík egymással párhuzamos egyeneseibe képeztük.

2. 2. A projektív sík értelmezése

Mivel a fenti példából kitűnik, hogy – az *e* egyenes bármely más pontjához hasonlóan – az *A* pontnak nem lesz centrális vetülete, így a bijektivitás eléréséhez egy új módszerhez, a kibővítéshez kell folyamodnunk. Nézzük a σ sík egy tetszőleges *e* egyenesét és rendeljünk ehhez hozzá egy *ideális*nak nevezett pontot, úgy, hogy az egymással párhuzamos egyenesekhez ugyanazt a pontot csatoljuk. (Ennek alapján a fentebb szereplő $\langle C, A\rangle$ egyeneshez és a vele párhuzamosakhoz ugyanaz az ideális pont tartozik, bár munkánkat a továbbiakban kizárólag csak a síkon végezzük, így a projektivitás meghatározását is.) Az *e* egyeneshez tartozó ideális pontot I_e-vel jelöljük, ezek pedig egy ideális egyenest alkotnak $i_\sigma = \{I_e | e \subset \sigma\}$. Az így nyert alakzatok lesznek a *projektív egyenesek*, vagyis szakszerűen felírva $\bar{e} = e \cup \{I_e\}$. A projektív sík tehát magából az euklideszi síkból és a hozzá tartozó ideális egyenesből tevődik össze, azok uniója $\bar{\sigma} = \sigma \cup i_\sigma$

A fentiek ismeretében tehát a párhuzamos egyenesnyalábhoz rendelt pontot ideálisnak, míg a sík összes többi pontját közönséges pontnak nevezzük.

A PROJEKTÍV SÍKON IGAZAK AZ ALÁBBI KIJELENTÉSEK:

(1) Két ponthoz egyetlen egyenes illeszkedik.

(2) Bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

2. 3. A kollineáris pontnégyes kettősviszonya és tulajdonságai

DEFINÍCIÓ:

Legyenek *A*, *B*, *C* pontok az euklideszi sík kollineáris pontjai. Irányítsuk az őket tartalmazó egyenest, majd vegyük az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ irányított szakaszok előjeles hosszait, amelyeket jelöljön AC és CB. Az *A*, *B*, *C* ponthármas *osztóviszonyán* az előjeles hosszakból nyert $(ABC) = \frac{AC}{CB}$ számot értjük.

DEFINÍCIÓ:

Legyenek adva A, B, C és D kollineáris közönséges pontok a síkon. A négy pont *kettősviszonyán* az $(ABCD)=\dfrac{(ABC)}{(ABD)}$ számot értjük, ahol $(ABCD)\in\mathbb{R}$. Az irányított szakaszok előjeles hosszainak felhasználásával az $(ABCD)=\dfrac{AC}{CB}:\dfrac{AD}{DB}$ kifejezést írhatjuk fel.

A KETTŐSVISZONYRA MINDIG TELJESÜLNEK AZ ALÁBBI ÖSSZEFÜGGÉSEK:

(i) $(ABCD)\neq 1$.

(ii) $(ABCD)\neq 0$.

(iii) $(ABCD)\cdot(ABDC)=(\dfrac{AC}{CB}:\dfrac{AD}{DB})\cdot(\dfrac{AD}{DB}:\dfrac{AC}{CB})=1$.

(iv) $(ABCD)=\dfrac{AC}{CB}:\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{CA}{AD}:\dfrac{CB}{BD}=(CDAB)$.

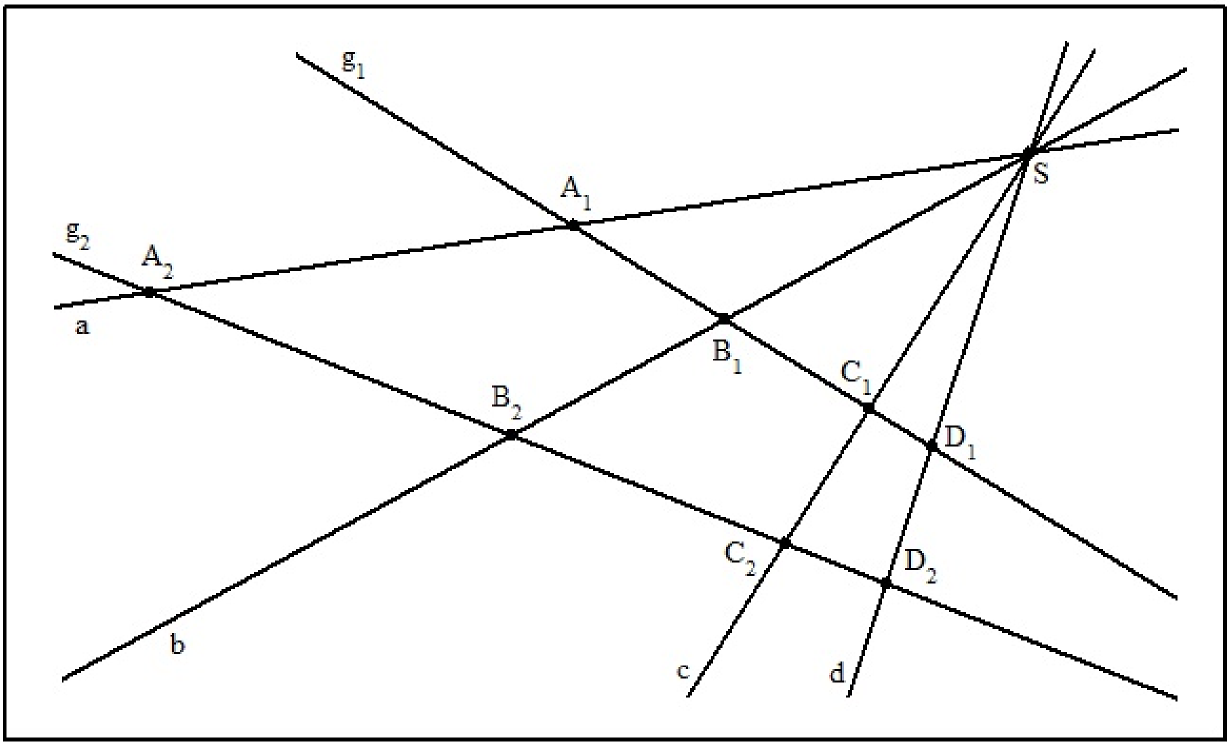
(v) $(ABCD)=\dfrac{1}{(ABDC)}$.

DEFINÍCIÓ:

Az A, B, C, D kollineáris pontokról azt mondjuk, hogy egy *harmonikus pontnégyest* alkotnak, ha a kettősviszonyuk értékére fennáll $(ABCD)=-1$.

PAPPOS TÉTELE:

Amennyiben az a, b, c és d egyenesek egy sugársor elemei, és ezeket elmetsszük a g_1 és g_2 egyenesekkel, akkor a kapott $A_i=a\cap g_i$, $B_i=b\cap g_i$, $C_i=c\cap g_i$ és $D_i=d\cap g_i$ $(i=1,2)$ metszéspontokkal fennáll az $(A_1B_1C_1D_1)=(A_2B_2C_2D_2)$ összefüggés *(2. 3. 1. ábra)*.



2. 3. 1. ÁBRA

DEFINÍCIÓ:

A fentiek szerint értelmezett $\bar{\sigma}$ projektív síkon legyen adva négy egyenes, *a*, *b*, *c* és *d*, amelyek közül bármelyik hármat véve, azoknak nincs közös pontja. Ekkor ezek egy teljes négyoldalt alkotnak, amelynek ők az oldalegyenesei. Az egyenesek páronként vett metszéspontjai lesznek a *szögpont*ok, amelyekből értelemszerűen hat darab van. Két szögpont abban az esetben átellenes, ha egyik oldalegyenes sem tartalmazza mindkettőt. Két átellenes szögpont összekötő egyenese lesz a teljes négyoldal *átlós egyenese*e, az átlós egyenesek metszéspontjai pedig az *átlóspont*ok. Ily módon tehát egy teljes négyoldalban három átlós egyenes és három átlóspont van.

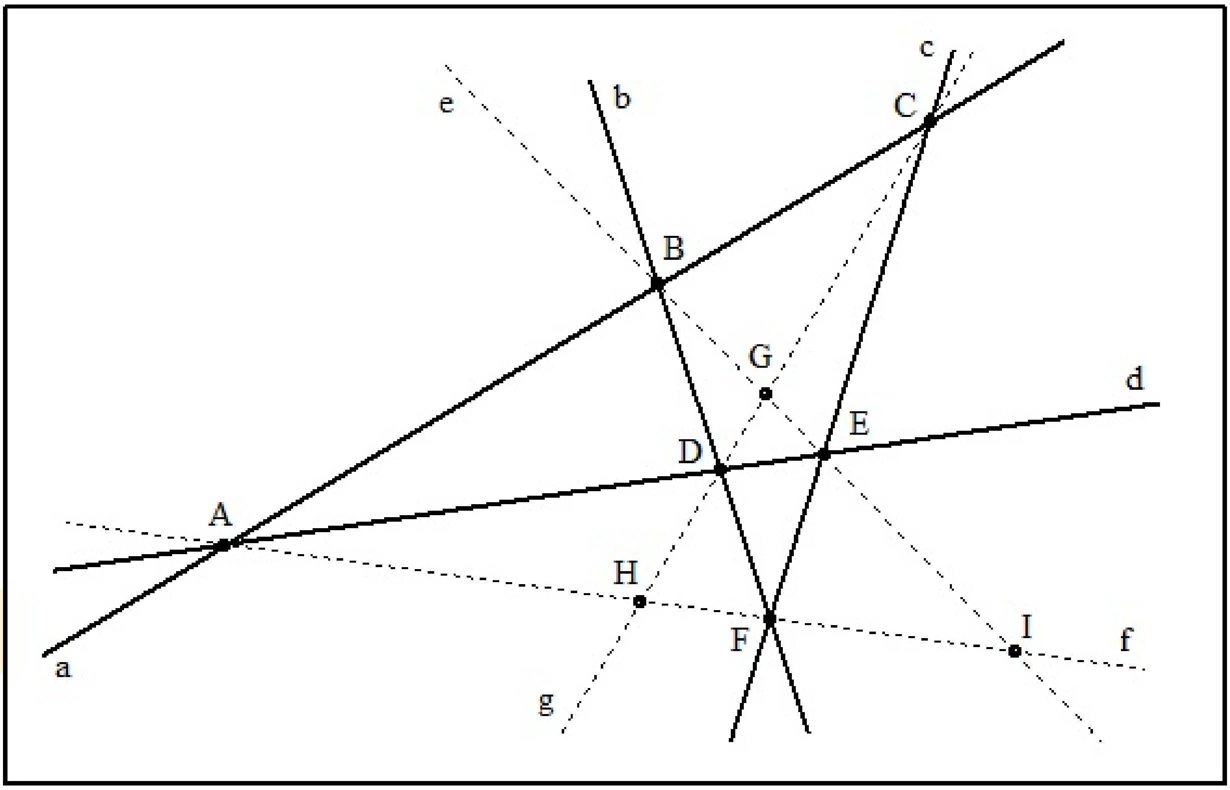
TELJES NÉGYOLDAL TÉTELE

A teljes négyoldal egyik átlós egyenesén levő két szögpont és két átlóspont egy *harmonikus pontnégyes*t alkotnak egymással.

Megjegyzés:

A fenti meghatározás alapján a mellékelt ábrán tehát az a, b, c és d egyenesek lesznek a teljes négyoldal oldalegyenesei, az e, f és g egyenesek az átlós egyenesek, az A, B, C, D, E, F pontok a szögpontok, a G, H, I pontok pedig az átlóspontok lesznek. Ezekkel a jelölésekkel a tétel szerint teljesül a következő kijelentés:

$$(AFIH)=(BEIG)=(CDHG)=-1 .$$



2. 3. 2. Ábra

2. 4. A projektív sík kollineációi

DEFINÍCIÓ:

A $\bar{\sigma}$ projektív sík egy $\kappa:\bar{\sigma}\to\bar{\sigma}$ leképezését kollineációnak nevezzük, abban az esetben, ha az bijektív és egyenestartó, vagyis egyenest egyenesbe képez.

MEGJEGYZÉS:

Amennyiben κ_1 és κ_2 a $\bar{\sigma}$ projektív sík kollineációi, abban az esetben ennek a két kollineációnak az egymásutánja, $\kappa_2\circ\kappa_1$ leképezés is kollineáció lesz.

Ha κ kollineáció, akkor az inverze, $\kappa^{-1}:\bar{\sigma}\to\bar{\sigma}$ leképezés is az.

DEFINÍCIÓ:

Vegyünk egy $\kappa:\bar{\sigma}\to\bar{\sigma}$ kollineációt. A $\bar{\sigma}$ projektív sík egy *t* egyenesét a *kollineáció tengelyének* mondjuk, akkor, ha κ fixen hagyja a *t* egyenes összes pontját. Egy *C* pontot pedig a *kollineáció centrumának* nevezzük, ha κ fixen hagyja az összes *C*-re illeszkedő egyenest.

MEGJEGYZÉS:

A centrummal és tengellyel is rendelkező kollineációkat *centrális-axiális kollineáció*knak nevezzük. Az ilyen típusú, nem identikus kollineációk összes fixpontjai a centrum maga, és a tengely minden pontja.

A KOLLINEÁCIÓK TULAJDONSÁGAI:

(i) Minden κ kollineációra teljesül, hogy megőrzi a kollineáris pontnégyesek kettősviszonyát, vagyis: $(A'B'C'D')=(ABCD)$.

(ii) Ha adott a $\bar{\sigma}$ projektív síkon két általános helyzetű pontnégyes, akkor pontosan egy olyan kollineáció létezik, amely az egyik pontnégyest a másikba viszi át.

(iii) A κ centrális-axiális kollineációt a *C* centrum, a *t* tengely és egy tetszőleges *P*, *P′* pontpár egyértelműen meghatározza, ahol $C \in \langle P, P' \rangle$ $P \notin t$.

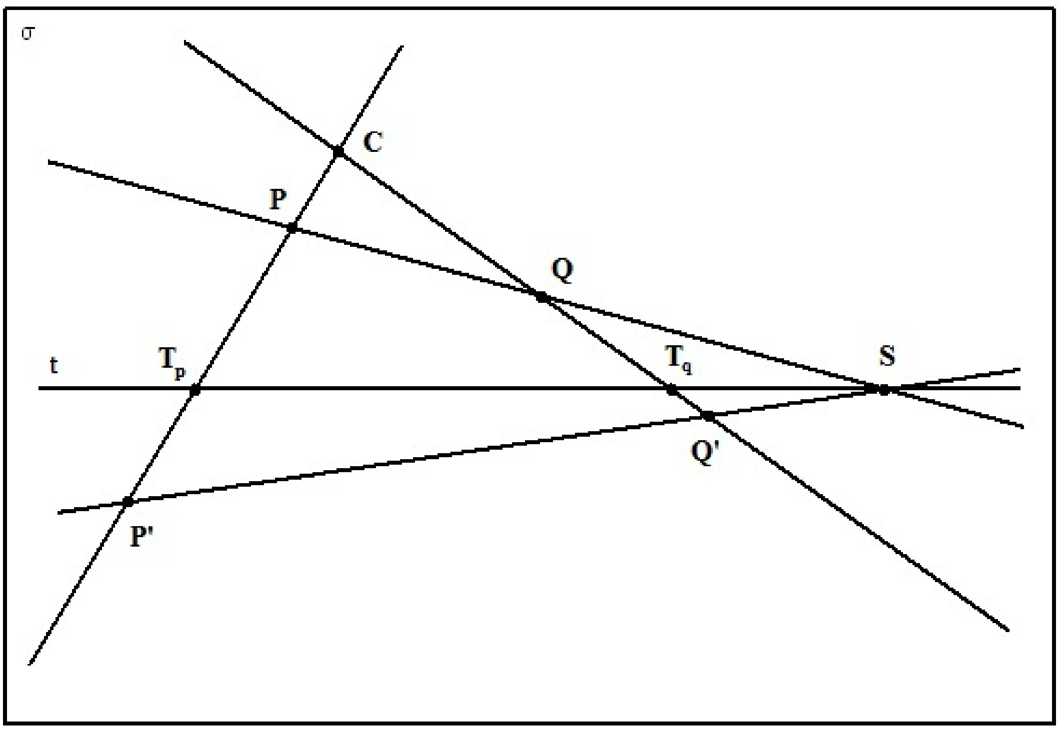
A legutolsó kijelentést be is fogjuk bizonyítani az alábbiak során.

Ahogyan az az alábbi ábrán is látszik, amennyiben adottak a *C*, *P*, *P′* pontok és a *t* tengelyegyenes, úgy tetszőleges *Q* pont képe is megszerkeszthetővé válik, a következők alapján:

1) Vegyük a $\langle C, Q \rangle$ egyenest, amelynek a t tengellyel vett metszéspontja legyen T_q .

2) Húzzuk meg ezután a *P*-n és *Q*-n átmenő $\langle P, Q \rangle$ egyenest, amely a *t* tengelyt egy *S* pontban metszi.

3) A $\langle P', S \rangle$ egyenes a *Q′* pontban metszi a $\langle C, Q \rangle$ egyenest, amely egyben a *Q* pont képe is lesz.



2. 4. 1. ÁBRA

MEGJEGYZÉS:

Amennyiben berajzolnánk a $\langle C, S\rangle$ egyenest is, úgy négy, az *S*-en keresztülhaladó egyeneshez jutnánk, amelyek szintén négy pontban metszik a $\langle C, P\rangle$, $\langle C, Q\rangle$ egyeneseket – amelyek közül a *C* közös pontjuk –, így az imént felvázolt Pappos-tétel egy illusztrálását kapnánk eredményül, amelyre egyúttal az is igaz, hogy $(CT_p PP')=(CT_q QQ')$.

DEFINÍCIÓ:

Legyen T_P a *t* tengely és a *P*, *P'* pontok által meghatározott egyenes metszéspontja. Ebben az esetben a $\lambda_\kappa=(CT_P PP')$ számot a $\kappa:\bar{\sigma}\rightarrow\bar{\sigma}$ kollineáció *karakterisztikus kettősviszonyának* mondjuk.

MEGJEGYZÉS:

A λ_κ szám nem függ a síkbeli *P* pont megválasztásától. Ezt a Pappos-tétel felhasználásával beláttuk az előbbiekben.

MEGJEGYZÉS:

Amennyiben a κ centrális-tengelyes kollineáció karakterisztikus kettősviszonyára fennáll $\lambda_\kappa=(CT_P PP')=-1$, akkor $\kappa\circ\kappa=\kappa^2=id_{\bar{\sigma}}$.

Vegyünk ugyanis egy κ kollineációt *C* centrummal, *t* tengellyel, egy *P* ponttal, amelynek a képe *P'* lesz. Legyen továbbá a három megadott pontra fektetett egyenes és a *t* tengely metszéspontja T_p. Ebben az esetben erről a kollineációról feltettük, hogy karakterisztikus kettősviszonya $(CT_p PP')=-1$. A kettősviszonyról ugyanakkor már korábban beláttuk, hogy $(CT_p P'P)=-1$ is teljesül.

Alkalmazzuk tehát ezt a kollineációt kétszer, és tegyük fel, hogy a *P'* pont képe $\kappa(P')=P''$ lesz. Mivel azonban tudjuk azt is, hogy a kettősviszony értéke nem változik, azaz $(CT_p P'\kappa(P'))=(CT_p P'P'')=-1$, így a kapott P'' pont nem más, mint maga a *P*. Mivel ez tetszőleges $P(P\notin t, P\neq C)$ pontra igaz, ezért $\kappa\circ\kappa=id_{\bar{\sigma}}$.

2. 5. A pólus és a poláris

A továbbiakban feltesszük, hogy a projektív síkon bevezettük a *homogén koordinátáka*t.

Ha egy közönséges *P* pontot veszünk, akkor ennek egy homogén koordináta-hármasát jelölje $P[x_1, x_2, x_3]$. A *P* pont Descartes-féle koordinátáit az $x_P = \frac{x_1}{x_3}$ és $y_P = \frac{x_2}{x_3}$ alakban kapjuk vissza a homogén koordinátákból. Célszerű még megjegyeznünk, hogy az i_σ ideális egyenest az $x_3 = 0$ egyenlet írja le.

Legyenek adva olyan $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ számok, amelyek között legalább egy nem 0.

DEFINÍCIÓ:

A $\bar{\sigma}$ projektív sík azon pontjainak halmazát, amelyek homogén koordinátái kielégítik a $a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$ egyenletet, *másodrendű görbének* nevezzük. (A továbbiakban ezt a másodrendű görbét $\bar{M}$ jelöli.)

Az egyenlet tömörebb alakja: $\sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} a_{rs} \cdot x_r \cdot x_s = 0$.

A hat együtthatóból képezhető egy 3x3-as $\underline{A}$ szimmetrikus mátrix, amelynek értékeire teljesül, hogy $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, 3)$

DEFINÍCIÓ:

Egy $\bar{M}$ másodrendű görbét *projektív kúpszeletnek* mondunk, ha a leíró egyenletben szereplő együtthatókból képzett $\underline{A}$ mátrixra fennáll $det\, \underline{A} \neq 0$ és $\bar{M} \neq \emptyset$.

MEGJEGYZÉS:

A projektív kúpszelet vagy egy σ -beli ellipszis, vagy egy σ -beli parabola projektív lezárása, vagy pedig egy az euklideszi síkban vett hiperbola projektív lezárása.

Definíció:

Vegyük a $P[y_1, y_2, y_3]$ és a $Q[z_1, z_2, z_3]$ pontokat. A *P* és *Q* konjugáltak egymáshoz az $\bar{M}$ másodrendű görbére nézve, abban az esetben, ha koordinátáik kielégítik az alábbi egyenletet:

$$\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\cdot y_r\cdot z_s=0$$

A továbbiakban feltesszük, hogy az $\bar{M}$ másodrendű, amelyet a $\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\cdot y_r\cdot z_s=0$ egyenlet ír le, egy projektív kúpszelet.

Definíció:

Egy *P* pont $\bar{M}$ projektív kúpszeletre vonatkozó konjugált pontjai egyenest alkotnak. Ezt a *P* poláris egyenesének nevezzük.

Definíció:

Amennyiben a *P* pont egy *g* egyenes minden pontjához konjugált, úgy *P*-t a *g* egyenes $\bar{M}$-re vonatkozó pólusának mondjuk.

Definíció:

Egy *e* egyenest az $\bar{M}$ projektív kúpszelet érintőjének mondunk, ha *e*-nek és $\bar{M}$-nek egyetlen közös pontja van.

A konjugáltságra vonatkozó eredmények:

(i) Ha egy *t* egyenes két pontban metszi az $\bar{M}$ kúpszeletet, akkor *t*-nek a metszéspontokat egymástól harmonikusan elválasztó pontjai egymáshoz konjugáltak.

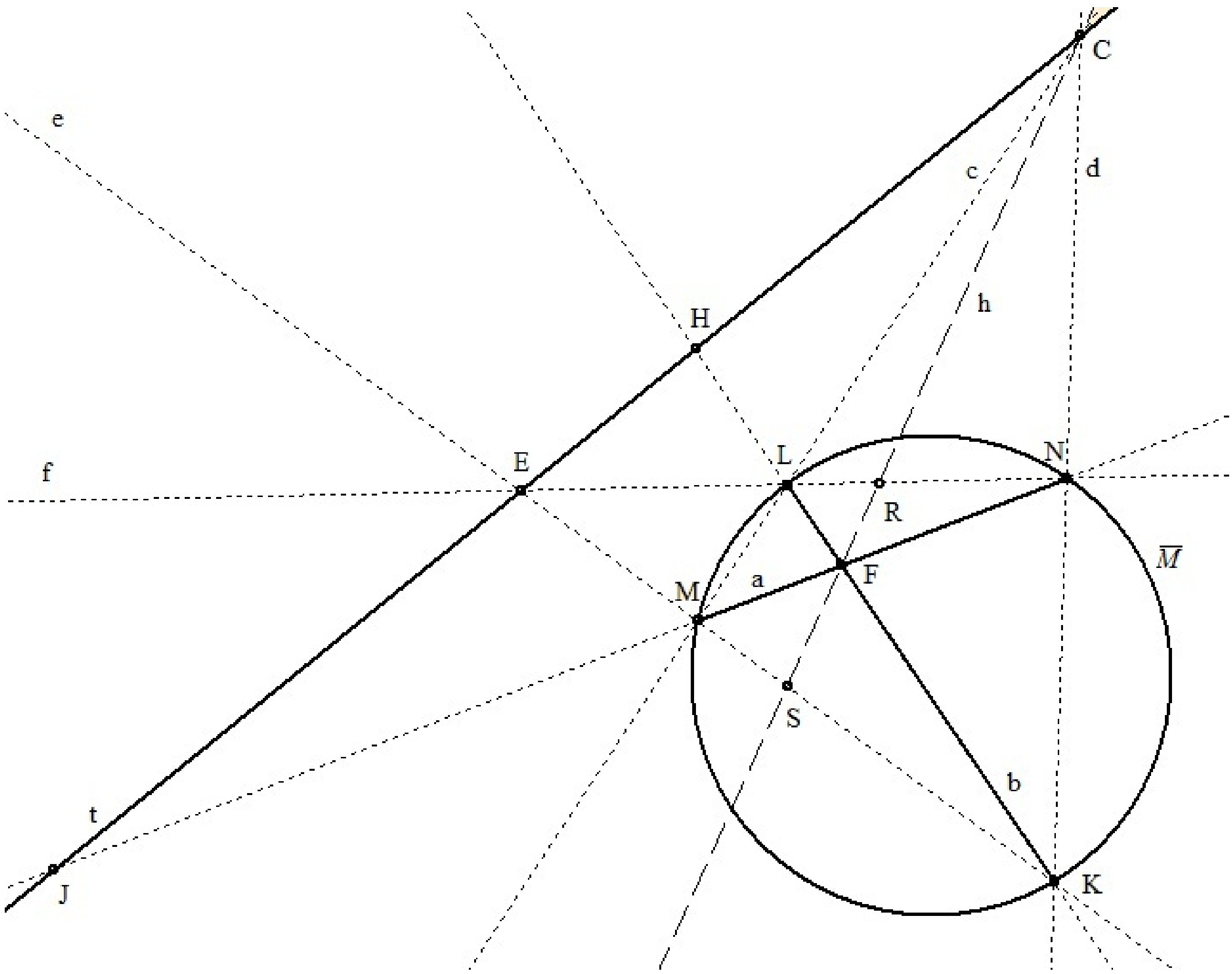
(ii) Ha a P, Q pontok konjugáltak az $\bar{M}$ kúpszeletre nézve és a $\langle P, Q\rangle$ egyenes az A, B pontokban metszi az $\bar{M}$-et, akkor fennáll $(ABPQ)=-1$.

(iii) Ha a P pont rajta van az $\bar{M}$ projektív kúpszeleten, akkor P polárisa azonos az $\bar{M}$ kúpszelet P-beli érintőjével.

2. 6. A kör belső pontjának polárisának szerkesztése

Legyen adott egy $\bar{M}$ kör és azon belül egy tetszőleges *F* pont. A fentiek ismeretében szerkesszük meg ennek az *F* pontnak a poláris egyenesét a körre vonatkozóan.

Kezdésképpen vegyünk két, az *F* ponton áthaladó egyenest, *a*-t és *b*-t, amelyek az *M*, *N* és *K*, *L* pontokban metszik majd a kört. Az így nyert metszéspontokon áthaladó egyenesek rendre legyenek *c*, *d*, *e* és *f*. Mivel páronként létezik metszéspontjuk, legyen most a *c* és a *d* egyenes metszete *C*, az *e* és *f* egyeneseké pedig *E*. Az ezen a két ponton áthaladó *t* egyenes, ahogyan azt a *2. 6. 1. ábra* is mutatja, két pontban metszi majd az *a* és a *b* egyeneseket, amelyeket nevezzünk el *H*-nak és *J*-nek.



2. 6. 1. ÁBRA

Az imént meghatározott *c*, *d*, *e* és *f* egyenesek, mivel bármely háromnak közülük nincs közös pontja, egy teljes négyoldalt alkotnak, amelynek átlós egyenesei *a*, *b* és *t* lesznek. Mint azt már előzőleg meghatároztuk, a teljes négyoldal átlós egyenesén lévő két átlóspontja és két szögpontja harmonikus pontnégyest alkot, amelynek kettősviszonya -1 lesz.

Ily módon azt kapjuk, hogy ezeken az átlós egyeneseken levő pontok karakterisztikus kettősviszonya szintén -1. Vagyis $(MNFJ)=(LKFH)=(ECHJ)=-1$ következik.

Mivel az *a* és a *b* egyenes két-két pontban metszi a kört, és a metszéspontoktól különböző, rajtuk lévő pontok harmonikusan választják el a metszéspontokat, így ezek a pontok konjugáltak lesznek egymáshoz, vagyis az ábrának megfelelően $F \sim H$ és $F \sim J$ adódik. Azt is tudjuk továbbá, hogy amennyiben az F pont konjugált két másik ponthoz, abban az esetben a két ponton keresztülhaladó egyenes minden pontjához konjugált, így azt kapjuk, hogy $F \sim E$ és $F \sim C$ is fennáll, azaz az *F* pont polárisa a *t* egyenes lesz. (Két pont konjugáltját ~ jelöli.)

Végezetül belátjuk azt is, hogy a *2. 6. 1. ábrán* szereplő *E* és *C* pontok is konjugáltak egymással a körre nézve. Tekintsük azt a teljes négyoldalt, amelyet az *a*, *b*, *c* és *d* egyenesek alkotnak. Ennél az e, f, $h=\langle C, F\rangle$ egyenesek az átlók, továbbá az *E*, *R*, *S* pontok az átlóspontok. A teljes négyoldal tétele szerint $(LNER)=-1$, $(MKES)=-1$ teljesül, tehát *E* konjugált az *R*, *S* pontokhoz. Ebből következik, hogy *E* polárisa a *h* egyenes. Mivel *h* a *C*-t is tartalmazza, ezért *E* és *C* is konjugáltak lesznek.

3. A Cayley–Klein-féle körmodell

3. 1. A modell felépítése

Vegyünk az euklideszi térben egy σ síkot, ezen pedig rögzítsünk egy $k(O,r)$ körvonalat, O centrummal és r sugárral. Jelölje E_σ a síkbeli egyenesek halmazát.

A körmodell alapjául szolgáló pontok halmaza legyen a $k(O,r)$ körvonal által határolt nyílt körlemez, vagyis $\hat{Y}=\{P\in\sigma|OP<r\}$.

Ezek után vegyük azokat a σ -beli egyeneseket, amelyek belemetszenek ebbe a nyílt körlemezbe. A modell egyenesei legyenek a kör által kimetszett nyílt körhúrok, vagyis:

$$\hat{E}=\{g\cap\sigma|g\in E_\sigma,\, g\cap\hat{Y}\neq\emptyset\}\ .$$

A TÁVOLSÁGFÜGGVÉNY ÉRTELMEZÉSE:

Határozzuk meg most a modellbeli $\hat{d}:\hat{Y}\times\hat{Y}\rightarrow\mathbb{R}$ távolságfüggvényt. Vegyük a nyílt körlemezünk tetszőleges, de egymástól különböző A és B pontjait, és a rajtuk áthaladó g egyenest, amely a $k(O,r)$ körvonalat az M és N pontokban metszi. A $\hat{d}$ függvény értéke legyen a következő: $\hat{d}(A,B)=|\ln(MNAB)|$, ahol $(MNAB)$ a pontnégyes kettősviszonyát, ln pedig a természetes logaritmust jelöli. Emellett tetszőleges A pont esetén legyen $\hat{d}(A,A)=0$.

Az így leírt modellt nevezzük *Cayley–Klein-féle körmodell*nek. Ebben teljesülnek a következő, fentebb már említett síkbeli illeszkedési axiómák:

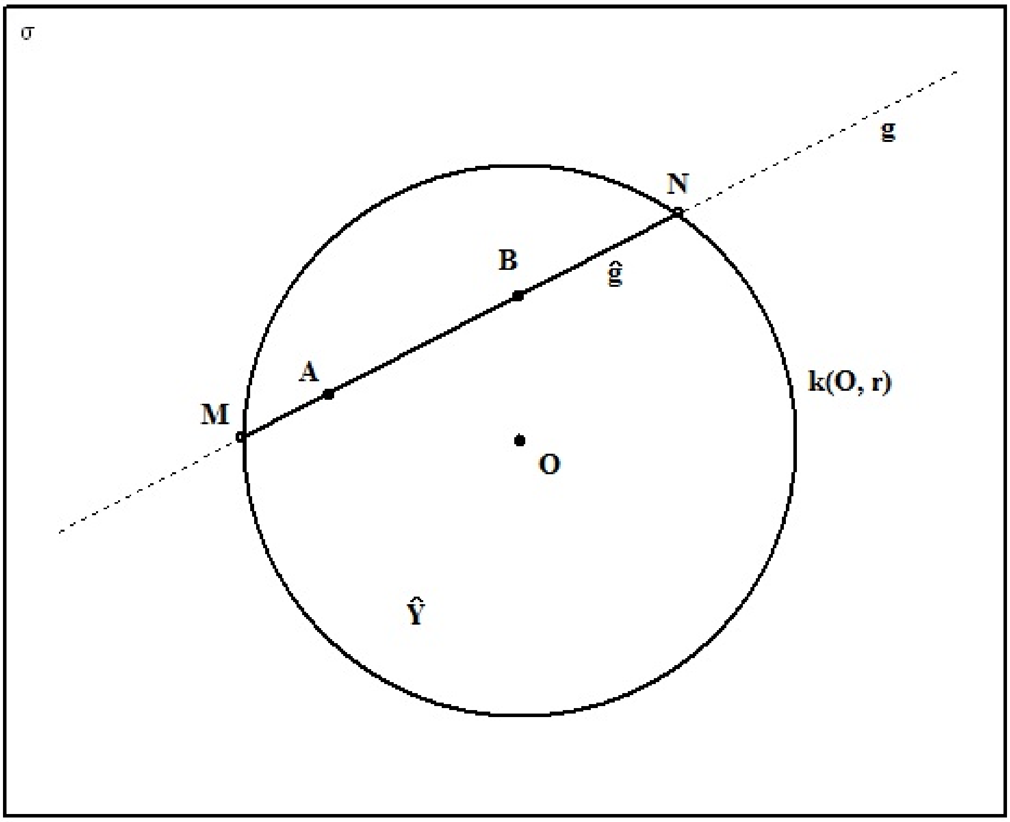
(I A1) Van a síkban három nem kollineáris pont.

(I A2) Tetszőleges két ponthoz egyetlen egyenes illeszkedik.

A Birkhoff-féle vonalzó axióma (BVA) teljesülésének igazolása:

Vegyünk egy olyan $\xi:\hat{g}\rightarrow\mathbb{R}$ leképezést, amely esetében tetszőleges $P\in\hat{g}$ pontra fennáll: $\xi(P)=\ln(MNP)$, ahol *M* és *N* a fentiek alapján meghatározott pontok. Mivel a *P* a két másik pont között van, így $(MNP)=\frac{MP}{PN}>0$ teljesül minden *P* esetén.

Mivel a fenti osztóviszony értéke befutja a pozitív valós számok halmazát, így tetszőleges $t\in(0,\infty)$ érték esetén létezik olyan $P\in\hat{g}$ pont, amelyre $(MNP)=t$ teljesül. Mivel a pozitív valós számok körében értelmezett logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ezért a $\xi:\hat{g}\rightarrow\mathbb{R}$ leképezés bijektív lesz.



3. 1. 1. ábra

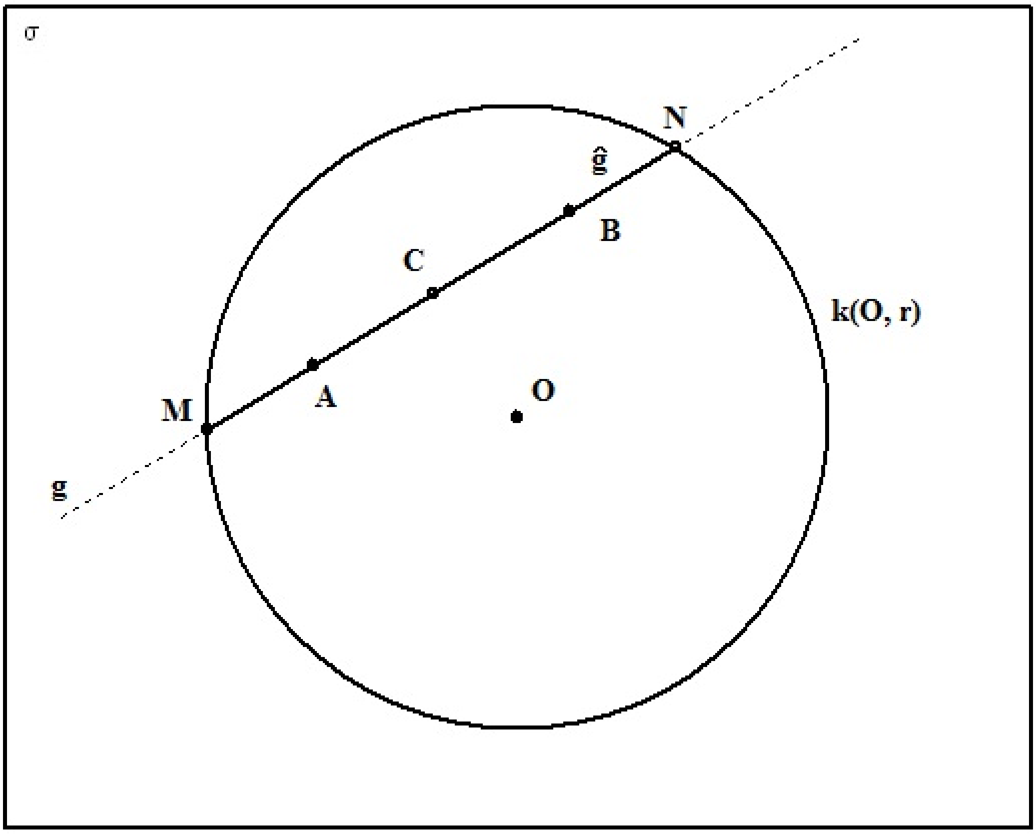
A fentiek következtében ha tehát felveszünk a $\hat{g}$ egyenesen egy *A* és egy *B* pontot, a következők teljesülnek:

$$\xi(A)-\xi(B)=\ln(MNA)-\ln(MNB)=\ln\frac{(MNA)}{(MNB)}=\ln(MNAB)$$

$$\Rightarrow|\xi(A)-\xi(B)|=|\ln(MNAB)|=\hat{d}(A,B)$$

Ezek szerint a (BVA) axióma teljesül a modellben.

A PASCH-FÉLE RENDEZÉSI AXIÓMA TELJESÜLÉSE



3. 1. 1. ÁBRA

Mivel a $\bar{\sigma}$ projektív sík modellünkre történő leszűkítése nem változtat az euklideszi értelemben vett közötte levésen (vagyis a C pont az A és a B pontok között van abban az esetben, ha $d(A,B)=d(A,C)+d(C,B)$), bővebben kifejtve:

$$\hat{d}(A,C)+\hat{d}(C,B)=|\ln(MNAC)|+|\ln(MNCB)|$$

$$= \left|\ln(MNAC) + \ln(MNCB)\right|$$

$$= \left|\ln((MNAC)\cdot(MNCB))\right| = \left|\ln\left(\frac{(MNA)}{(MNC)}\cdot\frac{(MNC)}{(MNB)}\right)\right|$$

$$= \left|\ln\left(\frac{(MNA)}{(MNB)}\right)\right| = \left|\ln(MNAB)\right| = \hat{d}(A, B) .$$

Vagyis a modellünkben felvett szakaszok az euklideszi síkon is szakaszokat eredményeznek, továbbá a modellbeli háromszögvonalak euklideszi értelemben is háromszögvonalak, így a (PRA) axióma itt is teljesül.

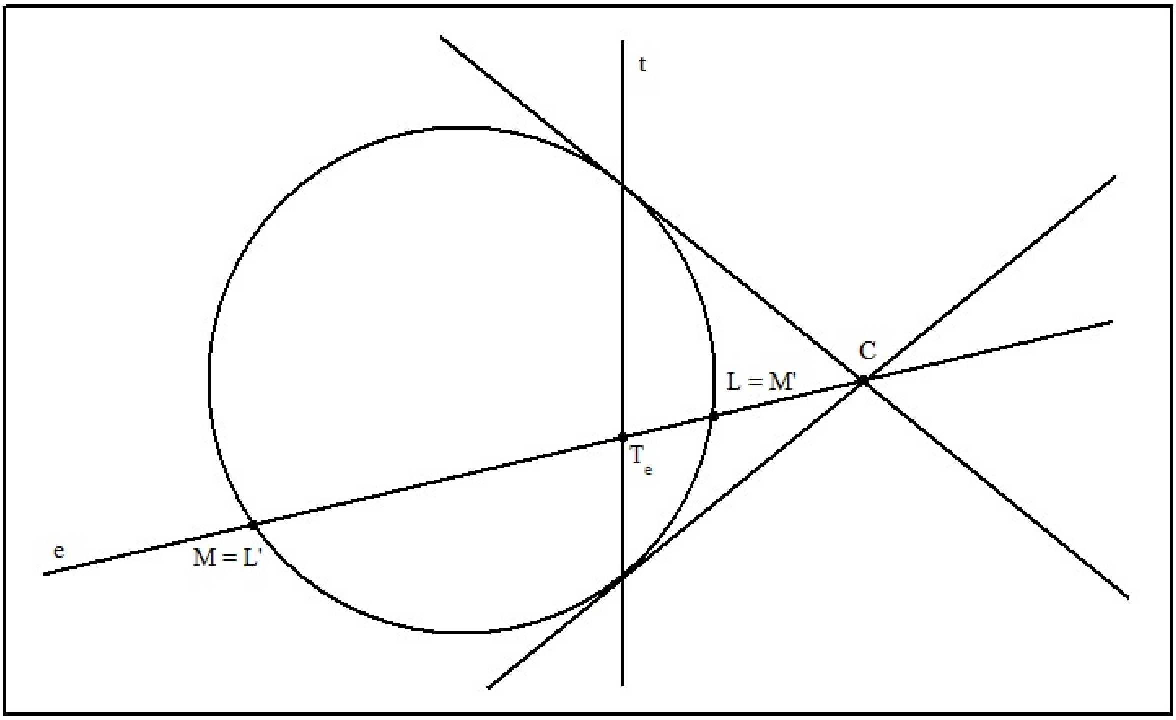
A projektív geometriai eszközök felhasználásával igazolható, hogy az (SEA) egybevágósági axióma is teljesül a modellben.

3. 2. Egyenesre tükrözés a modellben

Vegyünk egy olyan *t* egyenest, amely nem megy át az alapkör centrumán. Ezen egyenesnek a *k* alapkörre vonatkozó pólusa legyen *C*. Ha vesszük a *t* egyenes és a *k* kör metszéspontjait, majd azokban a körérintőket, akkor ezek metszéspontja eredményezi a *C* pólust. Ez abból adódik, hogy *C* konjugált a *t* két pontjához, tehát magához a *t* egyeneshez is, így *t* a *C* pont polárisa lesz.

Tekintsük most azt a κ centrális-tengelyes kollineációt, amelynek *C* a centruma, *t* a tengely és a karakterisztikus kettősviszonya -1. Be lehet látni, hogy κ a *k* alapkört önmagába képezi, az alábbiak szerint.

A *C*-n átmenő egyik *e* egyenesnek a körrel vett metszéspontjai legyenek *M* és *L*, továbbá vegyük a $T_e = e \cap t$ pontot is. Ismeretes, hogy mivel *C* és T_e konjugáltak egymáshoz, ezért teljesül $(MLCT_e) = -1$. Ebből adódik, hogy $(CT_eML) = -1$ is teljesül, tehát κ egymásba képezi az *M*, *L* pontokat, vagyis fennáll $\kappa(L) = M$ és $\kappa(M) = L$.



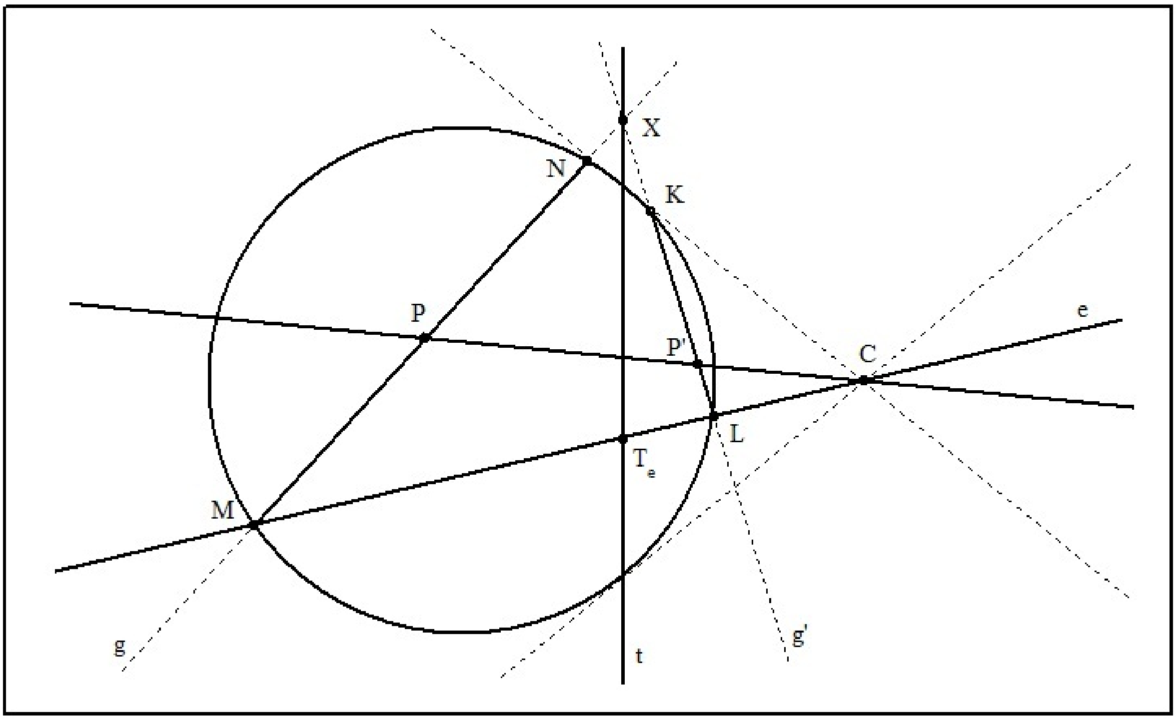
3. 2. 1. ÁBRA

Ez az összefüggés bármely a *C*-n átmenő egyenesnél fennáll, tehát κ önmagába képezi a *k* kört. A κ kollineáció megőrzi a kollineáris pontnégyesek kettősviszonyát, és a modellkört önmagába képezi. Emiatt κ-nak a modellkörre vett leszűkítése megőrzi a modellbeli távolságot, azaz fennáll $\hat{d}(A, B) = \hat{d}(\kappa(A), \kappa(B))$ is bármely *A*, *B* pontok esetén.

Ezzel beláttuk, hogy a κ kollineáció a modellben egy egybevágósági transzformációt ad. Ez az egybevágóság fixen hagyja a *t* egyenest, és kétszer végrehajtva az identikus leképezést adja. Következik ebből, hogy a κ egybevágóság éppen a *t* egyenesre történő tükrözés a modellben.

Szerkesszük most meg egy tetszőleges *P* pont tükörképét a *t* egyenesre!

Tükrözzük a *g* egyenes modellbeli részét a *t* egyenesre. Legyen a *t* és a *g* egyenesek metszéspontja *X*. A keresett egyenes megszerkesztését a *C* centrum meghatározásával kezdhetjük, ahogyan azt már fentebb is leírtuk.



3. 2. 2. ÁBRA

A t tengely két pontban metszi a modellkört. Ezekben a pontokban húzhatunk érintőket a körhöz. Az így kapott két egyenes metszéspontja lesz a kollineáció centruma, amelyet, az ábrának megfelelően jelöljünk el C-vel. Mivel a C pont egyben a t egyenes pólusa (a t pedig a C polárisa) is, így minden rajta keresztülmenő egyenes egyúttal merőleges is t-re a modellben. Ennek következtében tudható, hogy a P pont képe a $\langle P, C\rangle$ egyenesen található.

A g egyenes két pontban metszi a modellkört, M-ben és N-ben. Ha meg tudjuk szerkeszteni ennek a két pontnak a tükörképét, akkor ezzel egyúttal g képét is megkapjuk. Húzzuk meg az $\langle M, C\rangle$ egyenest, amely az L pontban metszi majd a kört. Ez a pont egyúttal az M pont képe is. Ha összekötjük a kapott L pontot a g és a t egyenesek metszéspontjával, X-el, akkor éppen ennek a két egyenesnek a metszéspontja, azaz $\langle P, C\rangle \cap \langle L, X\rangle$ eredményezi a P pont képét, P'-t.

Ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy a modellbeli tengelyes-tükrözés egy centrális-tengelyes kollineáció. A t egyenesre történő tengelyes tükrözés csak a tengelyre merőleges egyeneseket hagyja fixen. Ebből pedig az következik, hogy a modellben azok az egyenesek merőlegesek t-re, amelyek meghosszabbításai áthaladnak a C póluson.

3. 3. Síkbeli (modellbeli) félegyenesek egyirányúsága

DEFINÍCIÓ:

Azt mondjuk, hogy az előzőekben már értelmezett *[A, B>* és *[C, D>* félegyenesek a modellben egyező irányúak, ha az alábbi két feltétel egyike teljesül:

1) Az egyik félegyenes tartalmazza a másik félegyenest.

2) a) Az *[A, B>* és *[C, D>* félegyeneseknek nincs közös pontja.

b) Ha az $ACD\sphericalangle$ konvex szög belsejében veszünk egy tetszőleges *C* kezdőpontú félegyenest, az már metszi az *[A, B>* félegyenest.

MEGJEGYZÉS:

Ha adott egy *[A, B>* félegyenes és egy *C* pont, akkor a modellben pontosan egy olyan *C* kezdőpontú félegyenes van, amely egyirányú az *[A, B>* félegyenessel.

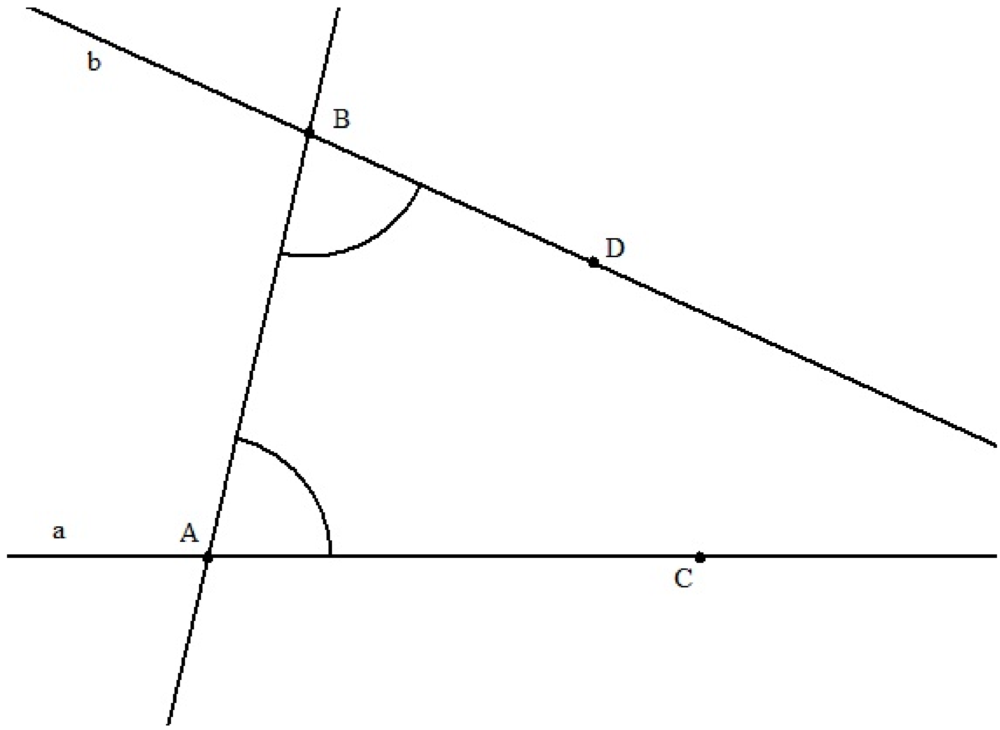
3. 4. Korrespondeáló pontok adott egyeneseken

DEFINÍCIÓ:

Legyen adott két egyenes, *a* és *b*, valamint azokon egy-egy *A* és *B* pont. Vegyünk ezeken az egyeneseken olyan *C* és *D* pontokat, amelyek az $\langle A, B \rangle$ egyenes egyazon oldalára esnek. Azt mondjuk, hogy az *a* és *b* egyenesek *A*, *B* pontjai *korrespondeálnak* egymással, ha fennáll $CAB\sphericalangle = DBA\sphericalangle$ összefüggés, ahogyan azt a mellékelt *3. 4. 1. ábra* is mutatja.

Az euklideszi síkon a korrespondeáló pontok könnyen szerkeszthetőek, gondoljunk csak az egyenlőszárú háromszög alapján lévő két pontra. Azonban a Cayley–Klein-modellben ezek szerkesztése egy kevéssé bonyolultabb.

Arra a kérdésre keresünk tehát választ az alábbiakban, hogy hogyan szerkeszthető meg a *B* pont, amely az *A*-hoz korrespondeál, amennyiben adott a két egyenes, *a* és *b*, valamint az *a*-n egy tetszőleges *A* pont. A feladatot három esetre bontva vizsgáljuk.



3. 4. 1. ÁBRA

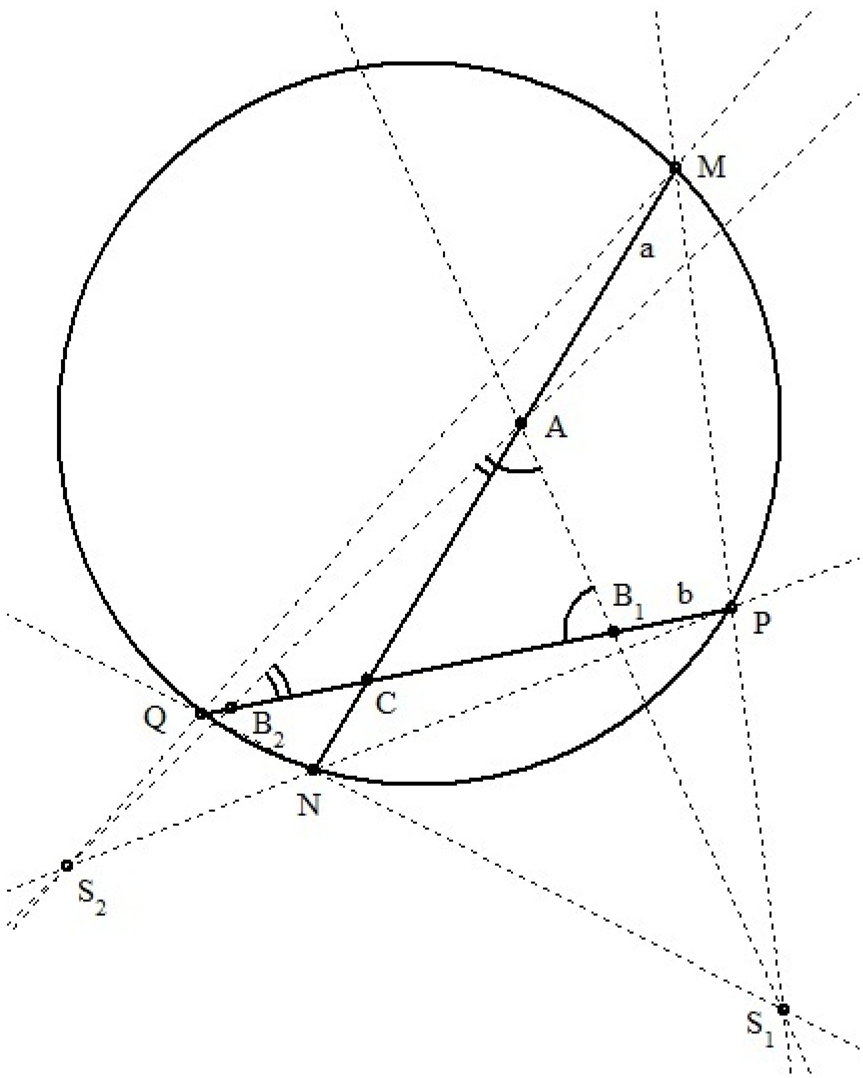
MEGJEGYZÉS:

A korrespondeáló pontok kifejezést Bolyai János vezette be.

3. 5. Korrespondeáló pontok két metsző egyenesen

Vegyünk egy *a* és egy *b* egyenest a modellben, amelyek a *C* pontban metszik egymást. Az *a* és *b* határpontjai rendre *M*, *N* és *P*, *Q*. Tetszőleges *a* egyenesre illeszkedő *A* pont esetén olyan *B* pontot keresünk, amely teljesíti a korrespondeálás feltételét a modellben. Evidens, hogy az $ABC\,\Delta$ -ben a $CAB\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle$ szögek egyenlőek akkor és csak akkor, ha a szemközti oldalak hossza megegyezik. Eszerint egy olyan *B* pontot keresünk a *b* egyenesen, ahol az *A*, *C* és *B*, *C* pontok modellbeli távolsága megegyezik $\hat{d}(A,C)=\hat{d}(B,C)$. Ez abban az esetben teljesül, ha az $(MNCA)$ kettősviszony értéke megegyezik a $(PQCB)$ értékkel.

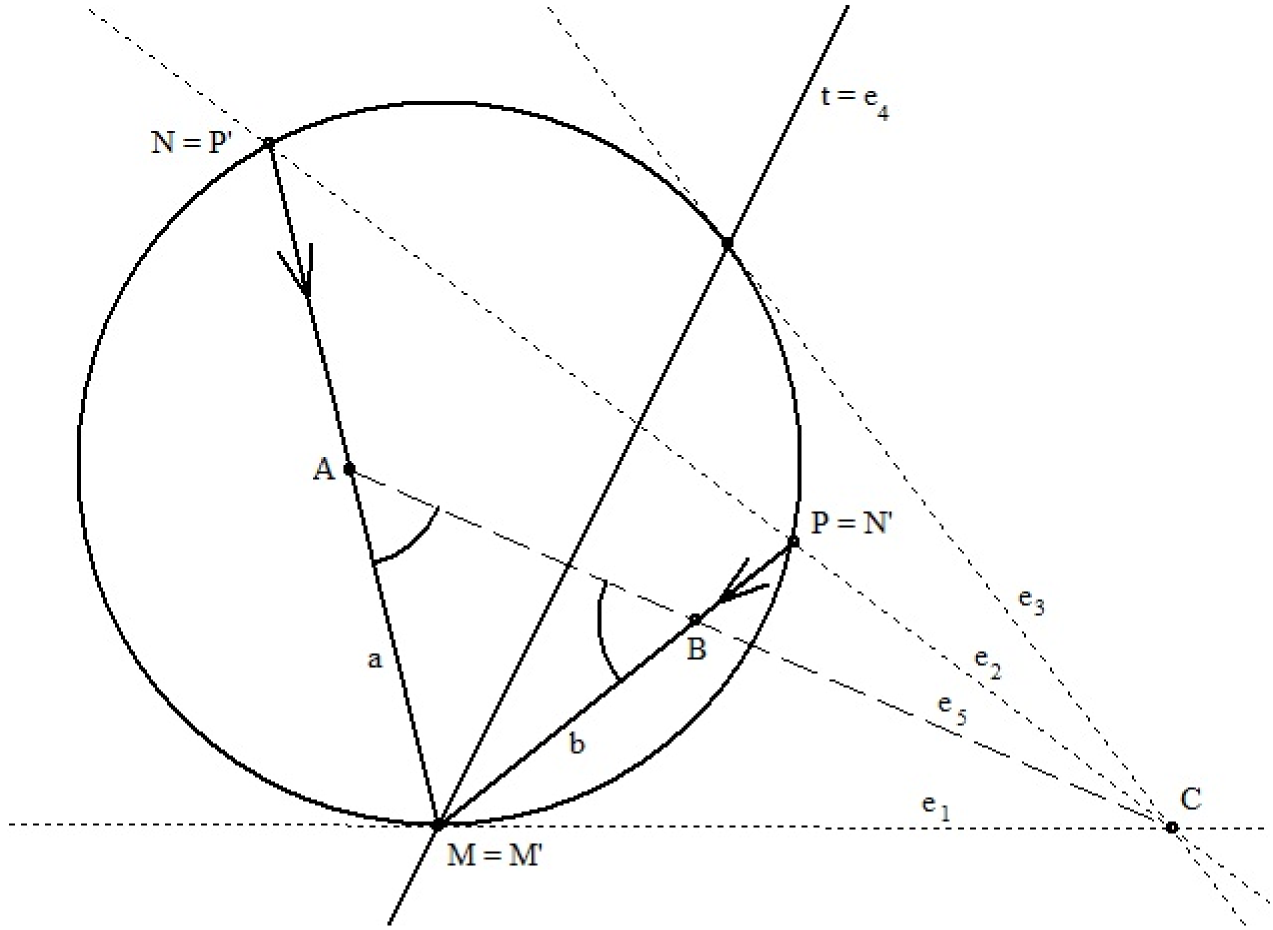
Húzzuk meg a $\langle Q, N\rangle$ és $\langle M, P\rangle$ egyeneseket. Ha megrajzoljuk az ezek közös metszéspontján, S_1-en, és az A ponton keresztülhaladó egyenest, akkor ez egy olyan B_1 pontban metszi majd a $\langle Q, P\rangle$ egyenest, amelyre $(MNCA)=(PQCB_1)$ teljesül a Pappos-tétel szerint.



3. 5. 1. ÁBRA

Teljesen ugyanezekkel a lépésekkel kaphatjuk meg a B_2 pontot is. Vagyis rajzoljuk be a $\langle Q, M\rangle$ és $\langle N, P\rangle$ egyeneseket, amelyek metszéspontja legyen S_2. Az $\langle S_2, A\rangle$ egyenes $\langle Q, P\rangle$-vel vett metszéspontja eredményezi majd a keresett B_2 pontot.

3. 6. Korrespondeáló pontok szerkesztése két egyállású (irányított) egyenesen



3. 6. 1. ÁBRA

Vegyünk a modellben egy *a* és egy *b* egyenest, amelyek a kör egy határpontjában, *M*-ben metszik egymást. Ekkor a modellben vannak olyan félegyenesek, amelyek az *a*, *b* egyenesekre esnek és egyező irányúak. A *3. 6. 1. ábrán* szereplő *a*, *b* egyeneseket nevezhetjük egyállású irányított egyeneseknek. Tetszőlegesen választott *A* pontról szeretnénk megtudni, hogy mely *B* pont korrespondeál hozzá.

Első lépésként húzzunk egy érintőt az *M* pontban, amelyet e_1 -nek nevezhetünk el. Az *a* és *b* egyenesek másik két határpontján, *N*-en és *P*-n keresztül egy e_2 egyenest húzva az egy *C* pontban metszi majd az első egyenesünket. Ebből a pontból egy további e_3 érintőt húzhatunk a körhöz.

A két érintési ponton keresztülhaladó t egyenes, ahogyan azt már a pólus szerkesztése résznél is láthattuk, a C pont polárisa lesz. Vegyük most azt a centrális-tengelyes kollineációt, amelynek C a centruma, t a tengelye és a karakterisztikus kettősviszonya -1. Mivel egy ilyen kollineációt a tengely, a centrum, egy pont és annak a képe egyértelműen meghatároz, és mivel esetünkben N a P pont képe és fordítva, így meg tudjuk határozni az A pont képét is.

Húzzuk meg az A és a C pontok összekötő egyenesét, e_5-öt, és jelöljük be az $\langle M, P\rangle$ egyenessel vett metszéspontját. Ezzel eljutunk az A pont képéhez, amelyet jelöljön B.

Vegyük észre, hogy a t egyenesre történő tükrözés egymásba képezi az a, b egyeneseket, továbbá az A, B pontokat. Mivel a tükrözés önmagába képezi az $\langle A, B\rangle$ egyenest, a fentiekből következik, hogy az A, B pontoknál nyert szögek egyenlőek lesznek, azaz A és B korrespondeálnak.

3. 7. Korrespondeáló pontok két nem metsző egyenesen

A harmadik, és egyben legbonyolultabb eset az, amikor a két egyenesünk a modellben nem metszi egymást. Ilyenkor a már korábban ismertetett dolgokat kell alkalmaznunk. Vegyük fel a szükséges a, b egyeneseket és az A pontot a *3. 7. 1. ábrának* megfelelően.

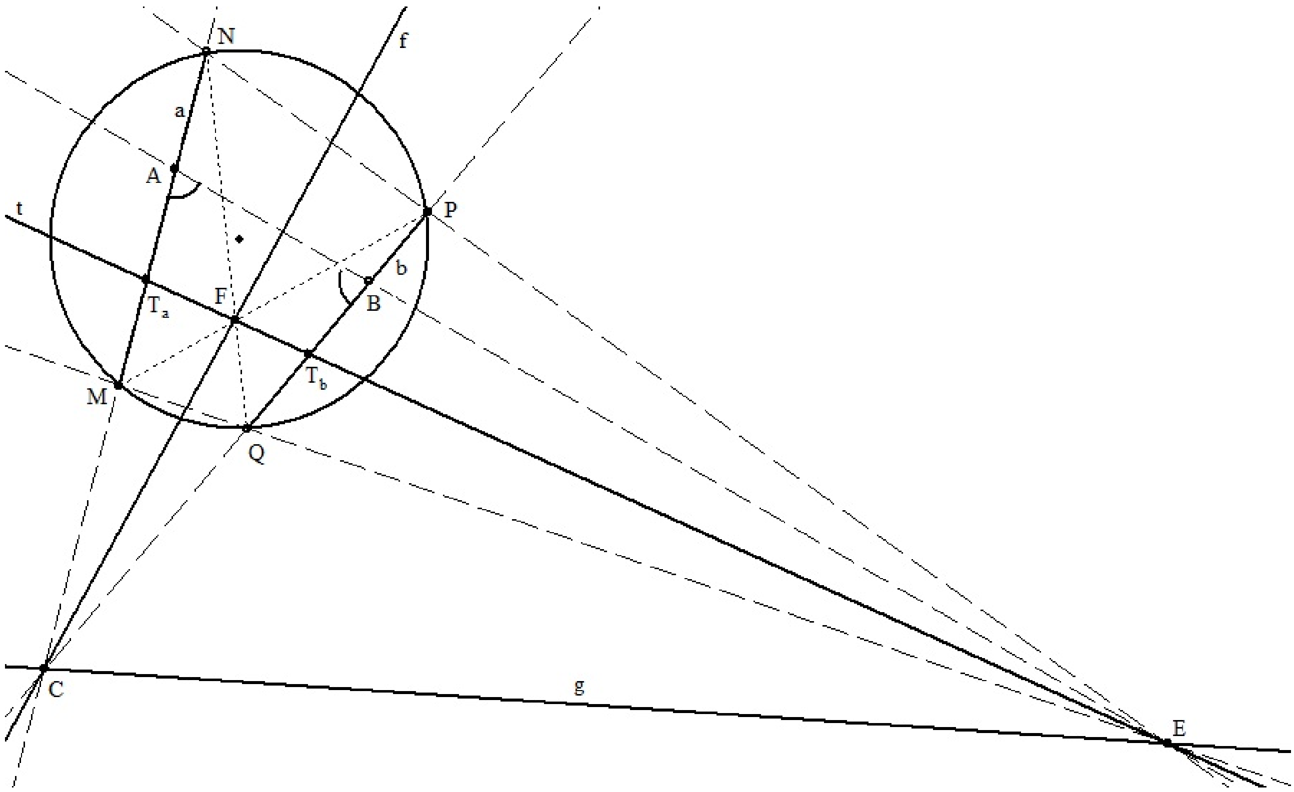
Az ábra szerint az a egyenes messe az alapkört az M, N pontokban, a b egyenes pedig a P, Q pontokban. A projektív síkon az a, b egyenesek metszéspontját jelölje C. Vegyük továbbá az $\langle M, P\rangle$ és $\langle Q, N\rangle$ egyenesek F metszéspontját, valamint az $\langle M, Q\rangle$ és $\langle N, P\rangle$ egyenesek E metszéspontját.

A kapott ábra megfelel a második fejezet végén szereplő *2. 6. 1. ábrának*, ahol az F belső pont polárisát szerkesztettük meg. Az ott leírtak alapján az F, C, E pontok közül bármelyik kettő konjugált egymással. Eszerint az E pont poláris egyenese az $f = \langle C, F\rangle$ egyenes. Tekintsük azt a centrális-tengelyes kollineációt, amelynél E a centrum, f a tengely és a karakterisztikus kettősviszony értéke -1. Ez a kollineáció az f egyenesre való tükrözést adja a modellben, továbbá egymásba képezi az M, Q, valamint az N, P pontokat. Ebből következik, hogy ez a tükrözés egymásba viszi az a, b egyeneseket. Vegyük az A pont képét ezen kollineációnál. Ezt a $B = A'$ képpontot a $\langle C, A\rangle$ egyenes metszi ki b-ből.

Mivel a tükrözés fixen hagyja az $\langle A, B \rangle$ egyenest és felcseréli az *a*, *b* egyeneseket, azt kapjuk, hogy *A* és *B* korrespondeálnak egymással az *a*, *b* egyeneseken.

MEGJEGYZÉS:

Vegyük észre, hogy a $t = \langle E, F \rangle$ egyenes, amely a *C* polárisa, a modellben derékszögben metszi az *a*, *b* egyeneseket. Amennyiben kijelöljük a T_a, T_b metszéspontokat, akkor adódik, hogy fennáll $\hat{d}(T_a, A) = \hat{d}(T_b, B)$. A $T_a T_b B A$ négyszögben tehát két derékszög szerepel.

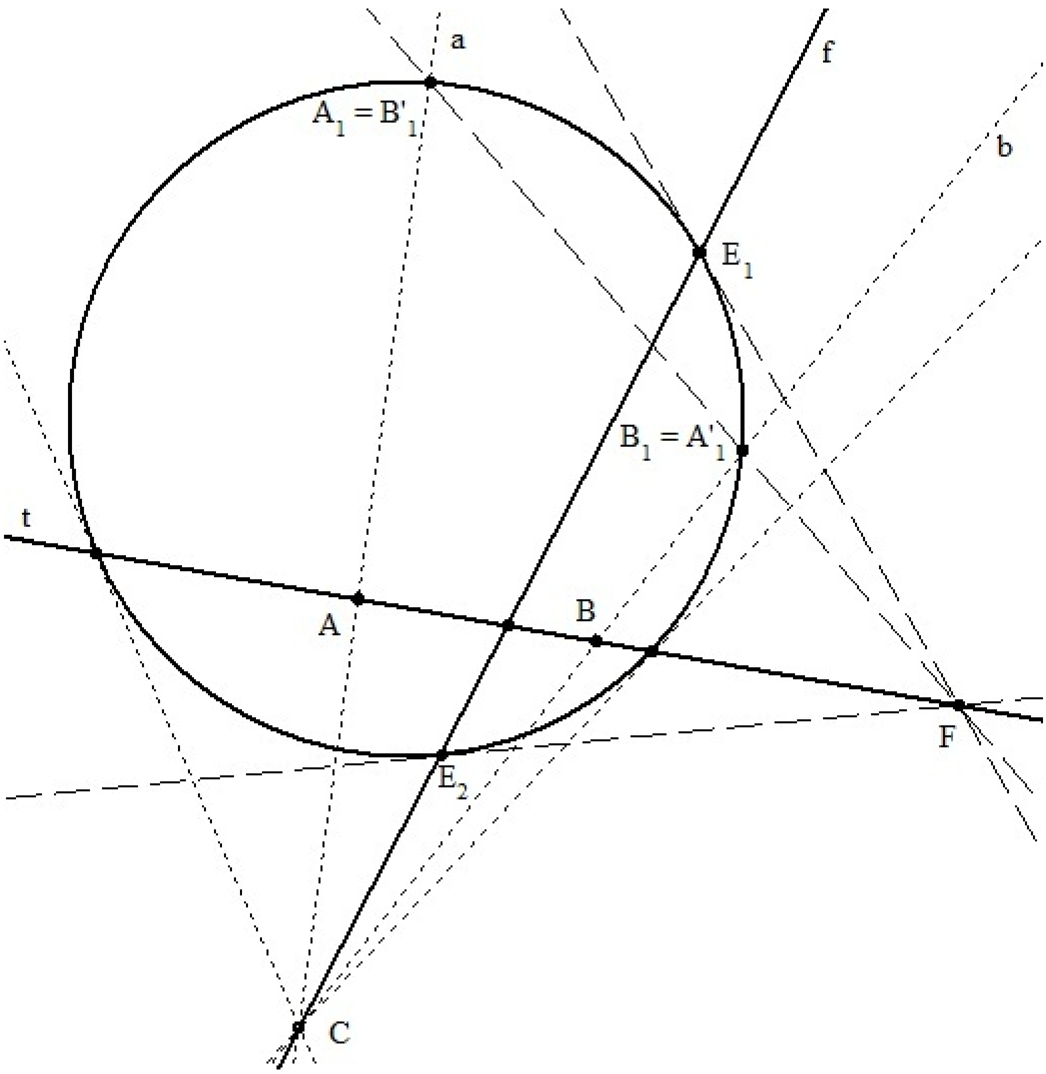


3. 7. 1. ÁBRA

3. 8. Szakaszfelező merőleges szerkesztése

Az eddigiekben elsajátított ismereteinket egy újabb érdekes feladat, a szakasz felezőmerőlegesének szerkesztésénél is felhasználhatjuk.

Vegyünk fel a modellben egy tetszőleges $\overline{AB}$ szakaszt, amelynek a felezőmerőlegesét szeretnénk megszerkeszteni. A rajta keresztülmenő *t* egyenes *C* pólusát a körérintők megszerkesztésével kaphatjuk meg. A póluson és az *A*, *B* pontokan keresztülhaladó *a* és *b* egyenesek az A_1 és B_1 pontokban metszik a modellkört. Az utoljára kapott két ponton keresztülmenő egyenes és a *t* tengely metszéspontjaként kapott *F* pontból húzzunk érintőket a körhöz. Az érintési pontok összekötésével egy *C*-n átmenő *f* egyenest kapunk, amely az *F* pont polárisa lesz.



3. 8. 1. ÁBRA

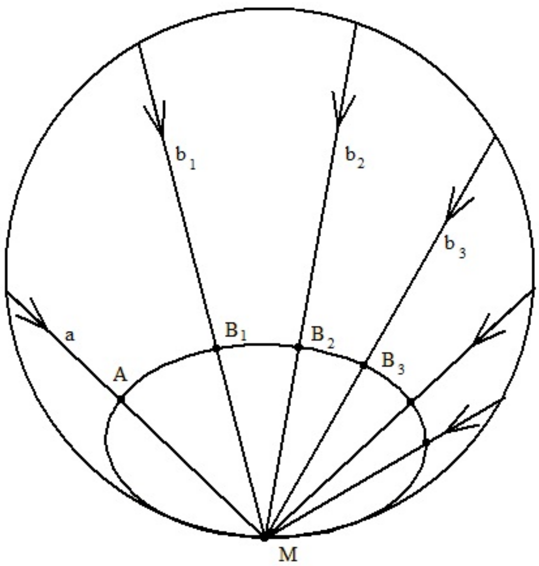
Legyen κ az *f* egyenesre való tükrözés a modellben, vagyis az a centrális-tengelyes kollineáció, amelynek *F* a centruma, *f* a tengely és karakterisztikus kettősviszonya -1. Erre teljesül, hogy $\kappa(A_1)=B_1$ és $\kappa(B_1)=A_1$. Emiatt $\kappa(a)=b$ és $\kappa(b)=a$ és így $\kappa(A)=B$, $\kappa(B)=A$. Mivel az *f*-re történő κ tükrözés felcseréli az *A*, *B* pontokat, *f* éppen az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegese.

3. 9. A korrespondeálásra épülő fogalmak

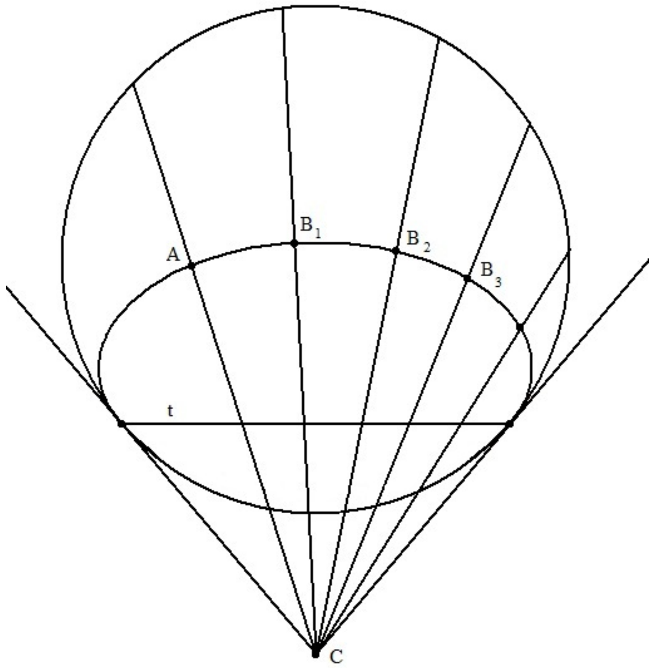
Végezetül határozzunk meg néhány olyan fogalmat, amelyek a fentebb már definiált korrespondeáló pontokat használják fel.

DEFINÍCIÓ:

Vegyünk a modellben egy irányított *a* egyenest, és azon egy *A* pontot. Tekintsük az összes olyan irányított egyenest, amelyek egyállásúak *a*-val. Ha ezeken rendre kijelöljük az *A*-val korrespondeáló pontokat, akkor ezen pontok által alkotott görbét *paraciklus*nak nevezzük *(3. 9. 1./A ábra)*.



3. 9. 1./A ÁBRA



3. 9. 1./B ÁBRA

DEFINÍCIÓ:

Vegyünk egy *t* egyenest és az azt derékszögben metsző egyeneseket. Ezek egyikén jelöljünk ki egy A pontot. Amennyiben a *t*-re merőleges egyenesek mindegyikén kijelöljük az *A*-val korrespondeáló pontokat, akkor az általuk alkotott görbét hiperciklusnak nevezzük *(3. 9. 1./B ábra)*.

Irodalomjegyzék

H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*. Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó.

Hajós György–Strohmajer János: *A geometria alapjai*. Budapest, 1996, Nemzeti Tankönyvkiadó.

G. Horváth Ákos, Szirmai Jenő: *Nemeuklideszi geometriák modelljei*. Budapest, 2004, Typotex.

Reiman István: *A geometria és határterületei*. Budapest, 1986, Gondolat.

Verhóczki László: *Axiómarendszerek és modellek*. (http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/Axiomak2010.pdf)

Verhóczki László: *Projektív geometria*. (http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/ProjGeom.pdf)