Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Károlyi Gergely

Speciális szerkesztések a középiskolában

diplomamunka

Témavezető:

Juhász Péter

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2012.

Tartalomjegyzék

Bevezető

Szakdolgozatomban didaktikai szempontból közelítek meg egy speciális szerkesztéseket magába foglaló tételt. A Mohr-Mascheroni tétel kimondja, hogy minden, ami megszerkeszthető körzővel és vonalzóval, az megszerkeszthető csak körzővel is. Munkám során azt vezetem végig, hogy ezt a tételt hogyan lehet felépíteni a középiskolai tanulmányok során. Amit nyújtok, nem az egyetlen út - ez egy fajta megközelítés, amely mentén haladva el lehet vezetni a diákokat a tétel teljes megértéséhez, annak bizonyításával együtt.

Az inverzió alkalmazásán keresztül jutok el a tétel bizonyításához, így annak felépítése külön fejezetet kapott. Az inverzió önmagában is egy olyan dolog, amelyről nem esik elég szó a mai matematika oktatásban, vagy legalábbis nem a megfelelő szemszögből tekintve.

Célom segítséget nyújtani mindazok számára, akik szeretnek ezzel a témakörrel foglalkozni, és szívesen tanítanák azt tehetségesebb diákjaik számára. Reményeim szerint egy olyan dolgozat kerül ki kezeim közül, amelynek használatával világosan és érthetően tanítható a Mohr-Mascheroni tétel, vagy akár csak a hozzá vezető lépcsők egyike.

1. fejezet

Mit nevezünk szerkesztésnek?

Amikor ezt a tételt egy hozzá nem értőnek elmondom, az első reakciója általában az, hogy ez nem is igaz. Mert ő vonalzóval tud húzni egyenest, ezt pedig körzővel nyilván nem lehet megtenni. Fontosnak tartom tehát mindjárt az elején tisztázni, hogy mit is nevezünk szerkesztésnek. Ugyanis lényeges különbség, hogy amikor azt mondom: egyenest húzok, akkor azt értem alatta, hogy annak végtelen sok pontját megadom, illetve a későbbiekben fel tudom használni arra, hogy más alakzattal való metszéspontját vegyem. Ezt pedig körzővel ugyanúgy meg lehet tenni.

Tehát a teljesség kedvéért következzen egy felsorolás, melyben rögzítünk minden egyes lépést, amelyet szerkesztésnek nevezünk.

- pontot kijelölünk tetszőleges helyen
- két ponton át egyenest húzunk
- pontot kijelölünk egy alakzaton
- adott középpontból adott ponton át kört írunk

- két egyenesnek vesszük a metszéspontját
- két körnek vesszük a metszéspontját
- egyenes és kör metszéspontját vesszük

Segíthet a tétel megértésében, ha belegondolunk, hogy elegendő a bizonyításhoz a fenti lépéseket megvalósítani csak körzővel, ekkor nyilván bármely szerkesztést elő tudjuk állítani, amit körzővel és vonalzóval lehetett. Van a tételnek így egy teljesen elemi bizonyítása is, amely egész egyszerűen megad minden szerkesztéshez egy megfelelő szerkesztéssorozatot, csak körző használatával. Most mégis azt a megközelítést választottam, hogy a lépéseket inverzió segítségével helyettesítem csak körzővel, ugyanis ezen a ponton ki tudjuk használni, hogy a gyerekek úgy tanuljanak meg új, érdekes dolgokat, hogy aztán lássák annak értelmét.

Tudniillik ha elmondjuk az inverzió lényegét, tételekkel, és adunk számos példát, abból még nem látják, hogy mire jó az inverzió azon kívül, hogy a házi feladatot meg lehet vele csinálni. Ha viszont az inverzió elsajátítása után elővesszük ezt a tételt, és annak segítségével bizonyítjuk, akkor talán az érdektelenebb gyerekek is örömmel fogják nyugtázni, hogy mégiscsak volt értelme az eddigi bűvészkedésnek. Ugyanis, ha az inverzió önmagában nem is, de ez egy érdekes tétel, ami magával ragadja, s érdekessé teheti az inverziót is.

2. fejezet

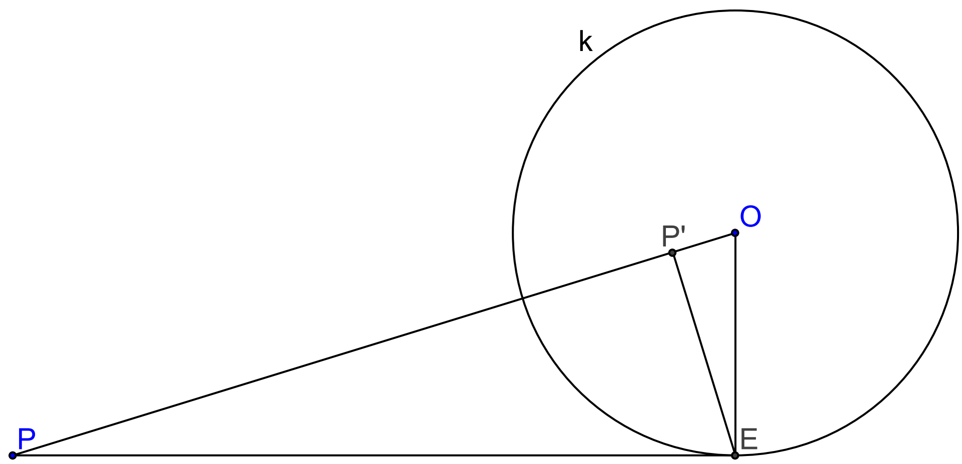
Inverzió

2.1. Bevezető feladat

Feladat. Húzzunk érintőt adott O középű k körhöz adott P külső pontból. Legyen az érintési pont merőleges vetülete OP szakaszra P'. Adjuk meg $|OP||OP'|$ értékét a kör sugarának függvényében!

Megoldás. Nézzük a 2.1. ábrát! PEO derékszögű háromszögben alkalmazzuk a befogótételt EO befogóra. Eszerint, mivel EP' magasságvonal, $|OE|^2 = |OP'||OP|$, s mivel OE éppen a sugár, így beláttuk, hogy a keresett érték mindig a sugár négyzetével lesz azonos.

Ha jobban tetszik, bevezethetjük fordítva is, bár az szerintem túlságosan konkrét módon irányítja a gondolatokat, és nem hagyja, hogy a tanulók felfedezzenek. Ez akkor lehet előnyös, ha nem akarunk sok időt szánni az inverzió tanítására. Ebben az esetben a feladat a következő: szerkesszük meg adott körhöz és ponthoz azt a pontot, ami rajta van a pontot a kör középpontjával összekötő szakaszon, és amely esetén az előbb említett szorzat a sugár



2.1. ábra. Bevezető feladat

négyzetével lesz egyenlő. Vagyis definiáljuk az inverziót, és feladatnak adjuk, hogy találjanak hozzá megfelelő szerkesztést.

A megoldást, vagyis az előző feladatban szereplő szerkesztést a diákok többsége nem találja meg magától, mert ötlet kell hozzá. Utána pedig adja magát a szituáció, hogy most azokat a képeket keressük, minden pontra, amire a megfelelő szorzat értéke r^2.

Én innentől ajánlom az egységsugár bevezetését, hogy azzal ne kelljen külön foglalkozni, hiszen már értik eléggé, hogy miről van szó. Mielőtt az inverzió fogalmát kiejtenénk, vizsgáljuk meg, hogy egyáltalán minden pontra értelmes-e a fenti szerkesztés, illetve hogy hogyan kell a képpontot keresni! Hamar kiderül, hogy a kör középpontjának nincsen képe. Az is nyilvánvaló, hogy egy pont képének a képe önmaga.

Ha ezzel megvagyunk, már definiálhatjuk az inverziót, mint geometriai transzformáció, amely a síkon, egy adott egység sugarú, O középpontú körrel van definiálva, és a középponton kívül minden P pontot egy olyan P' képpontba visz, amely rajta van PO egyenesén, és amelyre $|PO||P'O| = 1$. Ezt hívhatjuk magyarul körre vonatkozó tükrözésnek is. A transzformáció hasonló a tükrözéshez olyan szempontból, hogy a négyzete az identitás. Másrészt nagyon különbözik abban, hogy ez nem egy egybevágósági transzformáció, így természetes módon idegenebb tőlünk.

2.2. Alaptulajdonságok

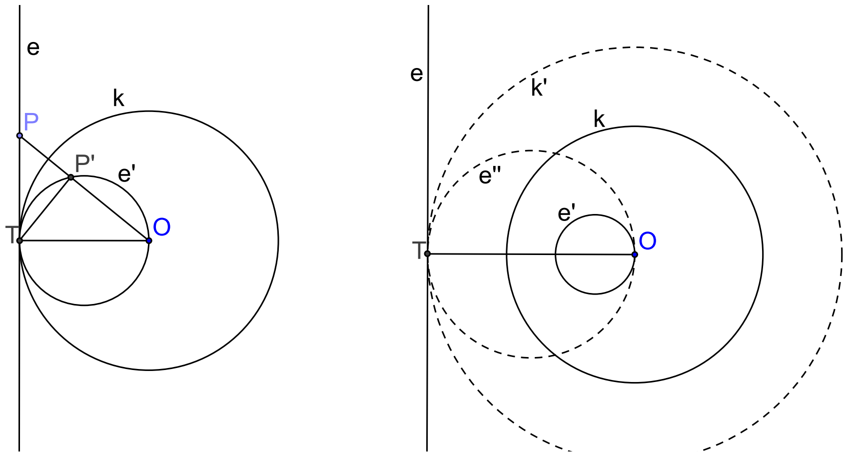
A most következő feladatok az inverzió alaptulajdonságaira vezetnek rá, amely nélkül nem lehet használni a transzformációt. Ezek fontos dolgok, javaslom, hogy a gyerekek próbálják meg maguk megoldani, bebizonyítani ezeket. Ha ez nem működik, akkor is mindenképp mondjuk ki a következő feladatok állításait! Az itt felsoroltak azt a célt szolgálják, hogy a diákok elsajátítsák az inverzió fogalmát azon a szinten, hogy a vele kapcsolatos egyszerűbb tételeket be tudják bizonyítani. Ha ezek megvannak, akkor nézhetünk néhány olyan feladatot is, amely közönséges geometria feladatnak tűnik, mégis, inverziót alkalmazva sokkal gyorsabb, egyszerűbb megoldásra juthatunk.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az inverzió középpontján átmenő egyenesek képe önmaga!

Megoldás. Az nyilvánvaló, hogy az egyenes pontjain kívül nem lesz képpont, hiszen minden pont képe rajta van e egyenesen. Kérdés, hogy megkapunk-e minden pontot? Ez könnyen belátható, hiszen tetszőleges pontot veszünk az egyenesen, meg tudjuk róla állapítani, hogy melyik pontnak lett ő az inverz képe. A diszkusszióhoz hozzá tartozik, hogy a középpontra nem értelmezzük a leképezést, így se annak nincs képe, se az nem képe semminek. Ha úgy tekintünk rá, hogy az helyben marad, akkor valóban igaz a bizonyítandó állítás, egyébként csak két nyílt félegyenes önmagára való leképezéséről beszélhetünk.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a középponton átmenő kör képe középponton nem átmenő egyenes lesz!

Megoldás. Mivel az inverzió négyzete az identitás, ezzel ekvivalens állítás, hogy a középponton nem átmenő egyenesek képe középponton átmenő kör lesz. A bizonyítás kezdődjön azzal, hogy az inverzió alapkörét érintő egyenes képét vizsgáljuk! Az e egyenes tetszőleges P pontjának a képét úgy szerkeszthetjük meg, hogy vesszük a PT érintőt, ami minden esetben az e egyenes. T pontból bocsássunk merőlegest PO szakaszra! A kapott P' pont olyan, hogy OTP' háromszögben P' csúcsnál derékszög van. Mivel O és T állandó, az egyenes pontjainak képe azon P' pontok mértani helye, amelyekből TO szakasz derékszögben látszik. Vagyis ez egy Thálesz kör. Hozzátartozik a vizsgálathoz, hogy T képe önmaga, tehát a középponttól eltekintve valóban az egész kört megkapjuk. A 2.2. ábrán jól látható az előző magyarázat. Már csak az van hátra, hogy tetszőleges más egyenesre is belássuk. Ez azért nem igényel külön bizonyítást, mert az inverzió alapkörét helyettesíthetjük egy másik, k' körrel, aminek a középpontja ugyanaz, sugara pedig akkora, hogy érintse az adott egyenest. Ekkor az előbb láttuk be, hogy a kép egy e" kör lesz. Nézzük, hogy mi a különbség az eredeti e' kép és e" között! Kiderül, hogy ezek középpontos hasonlósággal egymásba vihetők, hiszen az inverzió-



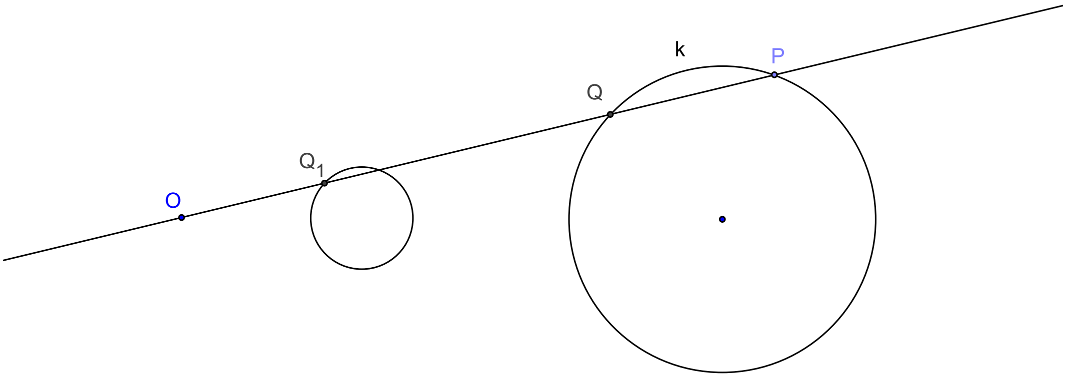
2.2. ábra. Egyenes inverz képe

hoz voltaképpen csak a kör sugarára van szükségünk, és az pedig majdnem mindegy, hogy $|PO||P'O| = r^2$ vagy $|PO||P'O| = r'^2$, a kép ugyanolyan lesz, csak más arányú.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a középponton nem átmenő körök képe középponton nem átmenő kör lesz!

Megoldás. Ez a feladat nehéz az előzőekhez képest. Nem matematika tagozatos osztályban lehet, hogy szerencsésebb, ha csak kimondjuk az állítást, és a bizonyítást vagy hozzátesszük, vagy nem. A teljesség kedvéért azonban álljon itt.

Nézzük az O-n nem átmenő k kört, és ennek tetszőleges P pontját a 2.3. ábrán látható módon! Legyen az OP egyenes k-val vett másik metszéspontja Q. A pont körre vonatkozó hatványáról szóló tétel ismeretében nyilvánvaló, hogy $|OP||OQ| = O_k$ érték független P választásától. Tekintsük az O közepű, $\frac{1}{O_k}$ arányú hasonlóságot! Legyen Q képe Q_1! Ekkor $|OQ_1||OP| = \frac{|OQ|}{O_k}|OP| = 1$. Ebből következik, hogy a vizsgált kör képe éppen a hasonlósággal megka-



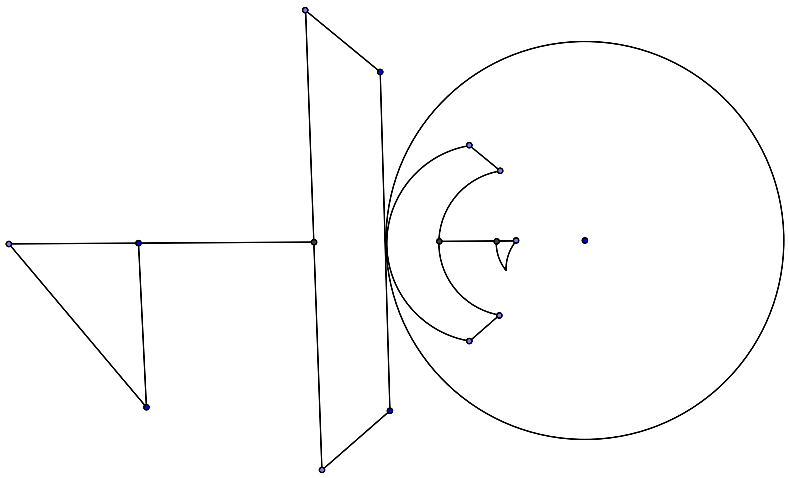
2.3. ábra. Középponton nem átmenő kör képe

pott kör lesz, mégpedig olyan módon, hogy a közös érintők érintési pontjai által meghatározott körívek helyet cserélnek.

Ezen tételek birtokában gyakorlatilag bármilyen, inverzióval kapcsolatos feladat megoldható. A játékosság kedvéért feladhatunk egy egyszerű szerkesztési feladatot, egy olyan alakzat képének megszerkesztését, amely csak körívekből és egyenes szakaszokból áll. Ilyen lehet egy vitorláshajó, mint például a 2.4. ábrán.

Az inverziónak a fent említetteken kívül nagyon fontos és rendkívül hasznos tulajdonsága, hogy egyenesek és körök egymással bezárt szögeinek nagyságát megtartja a transzformáció során. Ez azt is jelenti, hogy ha két alakzat érinti egymást, akkor azok inverz képei is érinteni fogják egymást, sőt azt is tudjuk, hogy az érintési pontok egymás inverz képei. Rendkívül sok látványos, erre rávilágító feladat létezik. Most álljon itt egy ezek közül.

Feladat. Adott egy pont és két kör. Szerkesztendő olyan kör, amely átmegy



2.4. ábra. Vitorláshajó inverz képe

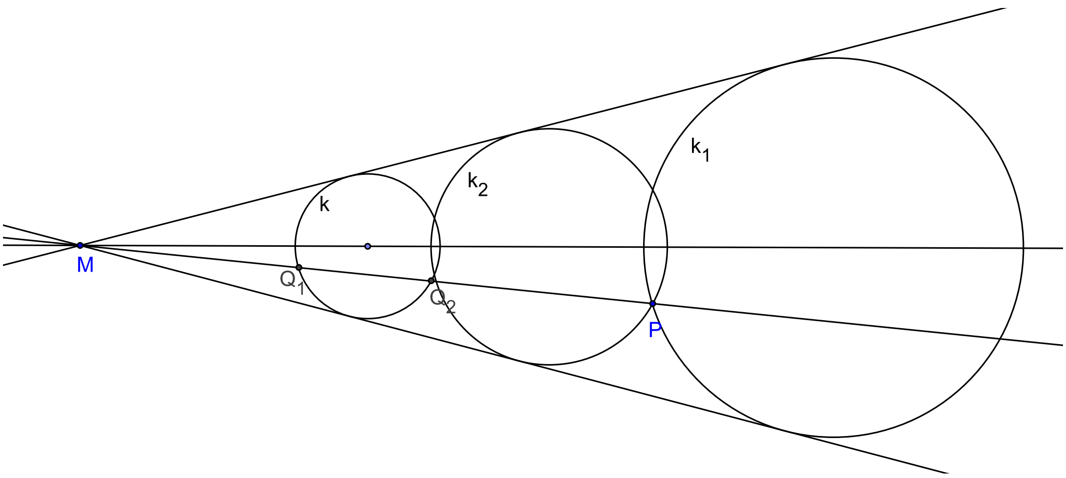
a ponton és érinti a két adott alakzatot!

Megoldás. Itt is az a kulcs, mint az összes ilyen típusú feladatnál, hogy valamely inverzió által nyert képen könnyebben tudunk szerkeszteni, és az így megkapott érintési pontokat, vagy metszéspontokat visszainvertálva, máris megkapjuk a keresett pontokat, amikkel a feladat megoldható.

Nem árt azonban, ha néhány rávezető feladatot adunk, mielőtt ez előkerül, hogy ha valaki megtalálja az inverzió helyes alkalmazását, akkor onnan már ne kelljen sokat vesződnie a megoldással. Sokkal jobb neki is, ha onnan egy olyan feladatra tér át, amelyet már ismer, vagy látott hasonlót. Tehát legyen az első feladat (és ebben még nem szerepel az inverzió) a következő.

Feladat. Adott két egyenes és egy pont. Szerkesszünk kört, mely átmegy az adott ponton, és érinti a két egyenest!

Megoldás. A feladat megoldását a 2.5. ábra mutatja. A kör középpontja nyilván abban a síknegyedben lesz, amelyben a pont is van. Ezen kívül tudjuk,

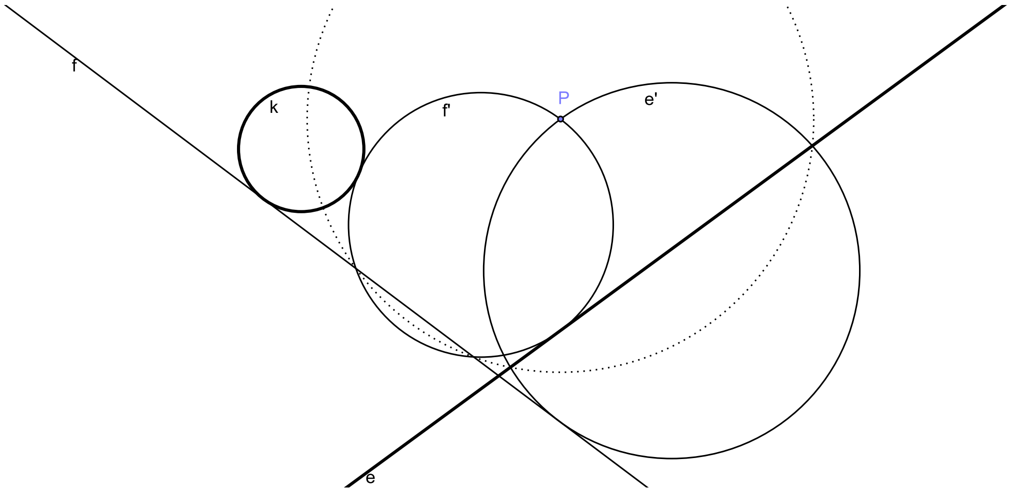


2.5. ábra. Két egyenes és egy pont adott

hogy rajta van a két egyenes szögfelezőjén. Rajzoljunk k kört a szögfelező tetszőleges pontjából úgy, hogy érintse a két egyenest! Ezután alkalmazzunk hasonlóságot M metszéspontból úgy, hogy a kapott kör átmenjen P-n. Ehhez vegyük MP egyenesnek k-val való metszéspontjait, Q_1-et és Q_2-t, majd az $\frac{|MP|}{|MQ_1|}$ vagy az $\frac{|MP|}{|MQ_2|}$ aránnyal nagyítsuk k-t, így megkapjuk a két lehetséges megoldást, k_1-et és k_2-t.

Feladat. Második feladatként legyen adott egy egyenes, egy kör és ezeken kívül egy pont. Szerkesszünk kört, mely átmegy a ponton és érinti a kört és az egyenest!

Megoldás. Itt mindjárt invertáljuk az egész ábrát! Legyen az inverzió középpontja az adott P pont, az inverzió alapkörét választhatjuk úgy, hogy az merőleges legyen k-ra (a 2.6. ábrán szaggatottal jelölt), ekkor k helyben marad, így nem kell annak szerkesztésével bajlódnunk. Az e egyenes képe egy, a P-n átmenő kör lesz. A két kör négy közös érintőjéből mindenkép-



2.6. ábra. Kör, egyenes és pont adott

pen lesz olyan (jelen esetben például f), amelyik nem megy át P-n. Ezt az egyenest meg tudjuk szerkeszteni. Vegyük észre, hogy az egyenest visszainvertálva olyan kört kapunk, ami érinteni fogja a két kör inverz képét, azaz k-t és e-t, valamint átmegy P-n. Ezzel tehát megkaptuk a keresett kört. A szerkesztésből az is látszik, hogy több megoldás lehetséges, itt most csak egy szerepel ezek közül az ábrán.

Ezek után a feladat könnyen megoldható, hiszen egyetlen inverziót kell alkalmaznunk, s azzal már visszavezettük a problémát egy már megoldottra. Ha a két kör metszi egymást, legyen az inverzió középpontja az egyik metszéspont. Ekkor a két körből két egyenes lesz, amelyek metszik egymást, a pontból egy másik pont. Ha ezekre az alakzatokra megoldjuk az első feladatot, majd ugyanazt az inverziót végrehajtjuk a kapott körre, megkapjuk a megoldást. Ha a két kör érintette egymást, akkor két párhuzamos egyenesünk lesz, erre a megfelelő kör szerkesztése igen egyszerű.

Ha a két kör nem metszette egymást, akkor jelöljünk ki az egyik körön egy pontot, s erre nézve invertáljuk az ábrát valamilyen r sugárral. (Itt is praktikus úgy megválasztani a sugarat, hogy az inverzió alapköre merőleges legyen a másik körre, azaz átmenjen az inverzió középpontjából húzott érintő érintési pontján.) Ekkor kapunk egy kört, egy egyenest és egy pontot, a feladat továbbra is a ponton átmenő, másik két alakzatot érintő kört szerkeszteni. Mivel ennek is ismerjük már a megoldását, azt megszerkesztve és visszainvertálva megkapjuk a keresett kört.

Fontos megjegyeznünk, hogy a megoldás nem függ attól, hogy a körnek melyik pontját választottuk ki középpontnak. Ettől a szabadságtól a megoldásszám nem változik, csak abban van különbség, hogy milyen köztes ábrával jutunk el a megoldáshoz. Ennek sokfélesége viszont nem befolyásolja már a megoldások számát. Ugyanígy egyik esetben sem érdekes, hogy milyen sugarat választunk az inverzió alapköréhez, hiszen a végén úgyis újra végrehajtunk egy inverziót, ugyanazzal a sugárral.

3. fejezet

A Mohr-Mascheroni tétel

3.1. A tétel

Georg Mohr a XVII. század végén publikálta a tételt, ám az ő bizonyítása csak a XX. században került elő. Egy évszázaddal később azonban Lorenzo Mascheroni bizonyítást is adott rá, így fűzhető az ő nevükhöz a tétel. Mindkettejük bizonyítása elég komplikált volt, később találtak ki a tételre egyszerűbb bizonyításokat. Ilyen ez is, amit most megközelítünk az inverzió segítségével.

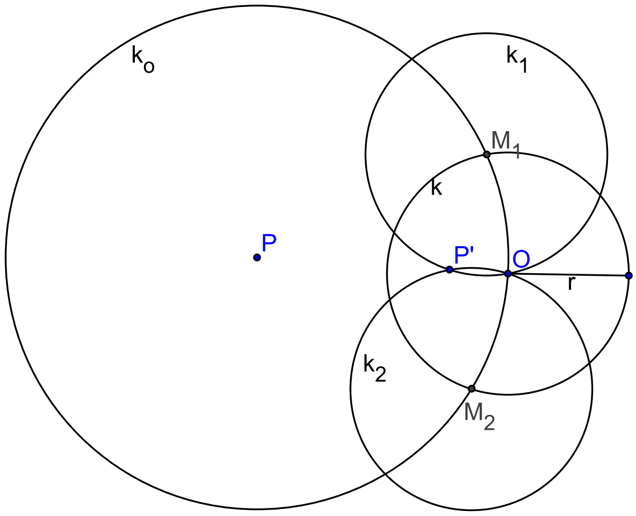
Tehát a bizonyítandó tétel: minden geometriai szerkesztés amely körzővel és vonalzóval elvégezhető, az elvégezhető vonalzó nélkül is.

3.2. Rávezető feladatok

Most, hogy a kezünkben van az inverzió, mindenki tudja használni, nehezítsünk rajta! Első feladatként legyen a következő.

Feladat. Adott egy kör a középpontjával és egy további pont. Szerkesszük meg az adott pont adott körre vonatkozó inverz képét csak körzővel!

Megoldás. A megoldást a 3.1. ábra szemlélteti. Első lépésként kört rajzo-

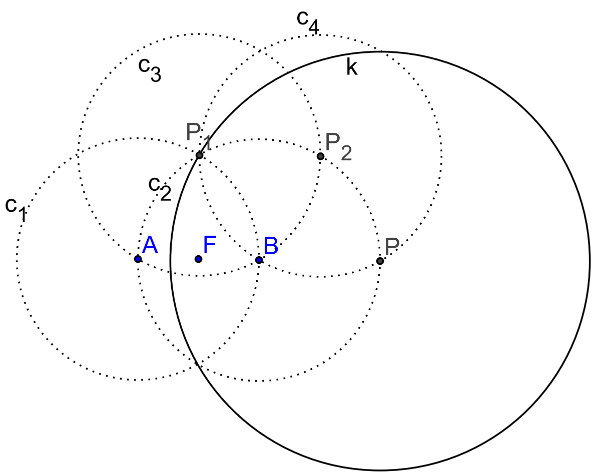


3.1. ábra. Inverz kép csak körzővel

lunk P középpontból $|PO|$ sugárral. Ennek k-val vett metszéspontjai M_1 és M_2. Mindkét pontból körözzünk r távolsággal! A kapott köröknek két metszéspontja lesz: az egyik nyilván O, a másik pedig éppen P' lesz. Ez egyszerű számolással ellenőrizhető.

Feladat. Újabb feladatként szerkesszük meg két adott pont felezőpontját, illetve harmadolópontját csak körző használatával.

Megoldás. Felezőpont szerkesztéséhez a 3.2. ábrán látható módon először szerkesszük meg AB szakasz kétszeresét! Például c_1, c_2, c_3, c_4 körök segítségével könnyen megkapjuk a P pontot. Ezután körözzünk P-ből $|PP_1|$ távolsággal, így adódik k kör. A pontot k-ra invertálva megkapjuk AB szakasz felezőpontját.

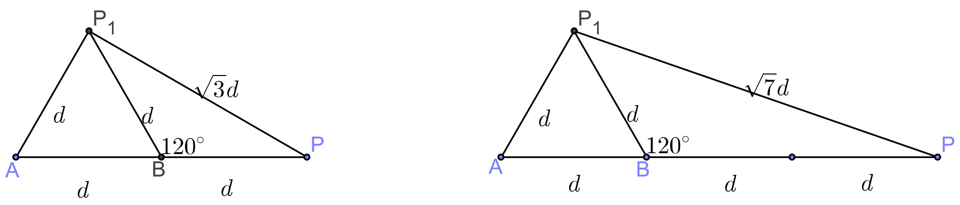


3.2. ábra. Felezőpont szerkesztése

Az eljárás helyességének bizonyításához készítsünk új ábrát, amelyen a távolságokat jelöljük! Látható, hogy ha $|AB| = d$, akkor $|PP_1| = \sqrt{3}d$, hiszen egy 120°-os, egyenlőszárú háromszögről van szó, amelynek szárai d hosszúságúak. Az inverzió definícióját felírva egyszerűen adódik a bizonyítandó állítás, hiszen az $|AP||A'P| = |PP_1|$ egyenletet a következőképpen írhatjuk: $2d|A'P| = (\sqrt{3}d)^2$, amiből $|A'P| = 1,5d$ adódik. Ez pedig pont azt jelenti, hogy A' felezőpontja AB szakasznak. Segítségként lásd a 3.3. ábrát!

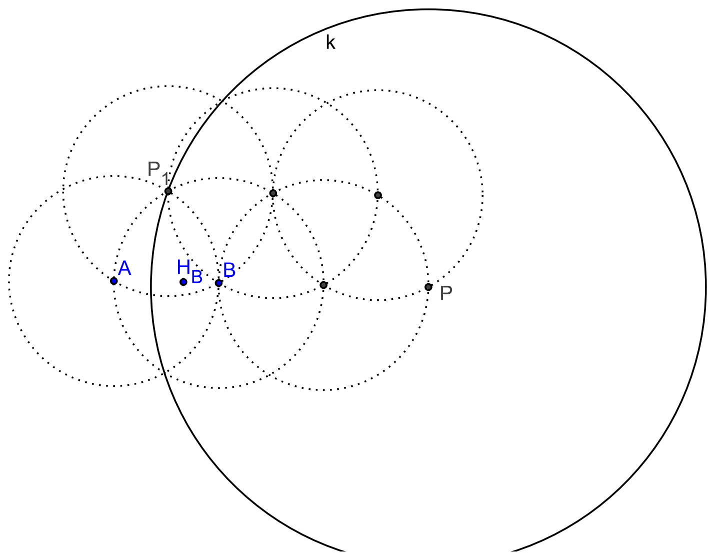
Harmadolópont esetében hasonlóan járhatunk el: a szakasz háromszorosának végpontjából körözünk, szintén úgy, hogy a kör átmenjen a 3.4. ábra P_1 pontján. Az így kapott körre invertálva A-t, megkapjuk AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontját.

Az indoklás szintén egy egyszerű számolás, az egyetlen nehézséget $|PP_1|$ kiszámolása adhatja, de a *koszinusz-tétel* ismeretében ez sem bonyolult, mi-



3.3. ábra. Bizonyítás

vel ismert, hogy $|BP_1| = d, |BP| = 2d$ és a két szár által bezárt szög $120°$. Felírva adódik, hogy $|PP_1| = 7d^2$, amiből az előzőhöz hasonló módon megkapjuk $|PA'|$-t, ami nem lesz más, mint $\frac{7}{3}d$. Ez pedig épp azt jelenti, hogy



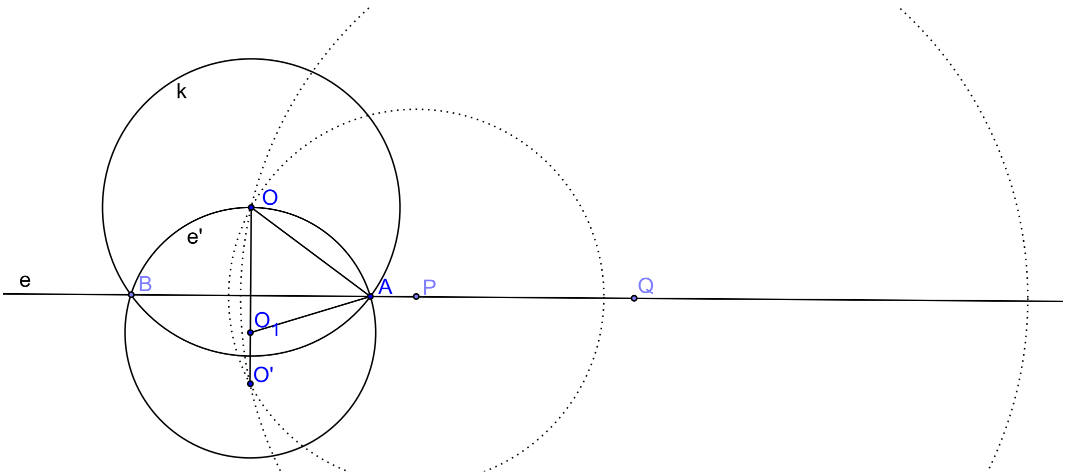
3.4. ábra. Harmadolópont szerkesztése

A' harmadolja AB szakaszt, mivel $|PB| = 2d$.

Ha ezzel megvagyunk, következik a tétel bizonyításának egyik fontos része.

Feladat. Szerkesztendő egy egyenes és egy kör metszéspontja csak körzővel, ha az egyenes két pontjával van definiálva.

Megoldás. Ehhez először szerkesszük meg az egyenes inverz képét az adott körre nézve! Tükrözzük a kör O középpontját az egyenesre oly módon, hogy körözünk P középpontból $|PO|$, illetve Q középpontból $|QO|$ távolsággal. A két kör másik metszéspontja O'. Szerkesszük meg O' inverz képét! Ez legyen O_1, ahogy a 3.5. ábrán is láthatjuk. Lássuk be, hogy az O_1 közepű, $|O_1O|$



3.5. ábra. Egyenes inverz képe

sugarú kör lesz a PQ egyenes inverz képe!

Az állítást egyszerű számolással igazoljuk. Legyen a kör sugara 1, továbbá $|TO| = d$, ahol T az O merőleges vetülete az egyenesre (vagyis OO' felezőpontja). Ekkor felírhatjuk az egyenes és a kör A, B metszéspontjaira a következő egyenlőségeket: $|TA| = |TB| = \sqrt{1-d^2}$. Mivel az inverzió miatt $|OO_1| = \frac{1}{2d}$, az O_1TA háromszögre is felírva a *Pithagorasz-tételt* kapjuk, hogy $|O_1A| = |O_1B| = \sqrt{(\frac{1}{2d} - d)^2 + 1 - d^2} = \sqrt{\frac{1}{4d^2}} = \frac{1}{2d}$. Ez éppen azt jelenti, hogy A, illetve B rajta van az O_1 középű, $|O_1O|$ sugarú körön, vagyis a vizsgált kör lesz az, amit kerestünk.

Ha tehát meg tudjuk szerkeszteni egy egyenesnek a körre vonatkozó inverz képét, azzal egyben meg is kapjuk a metszéspontjaikat, mivel a kör pontjai fixek.

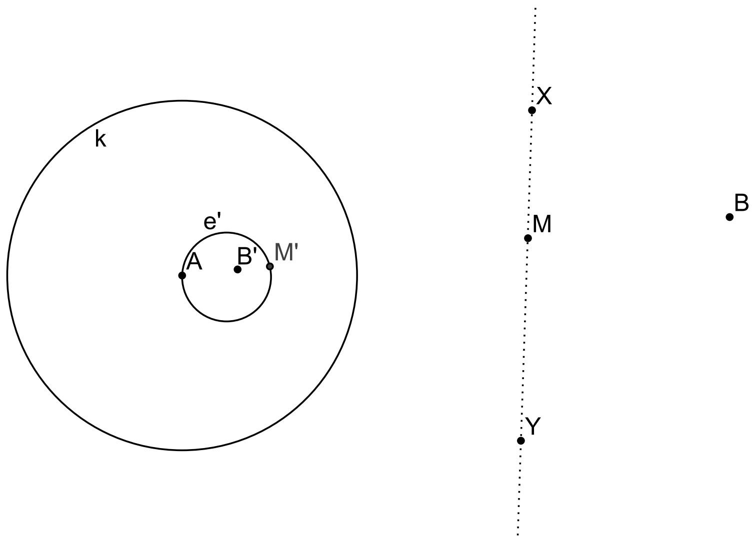
Itt azt nem vettük még számításba, hogy mi van, ha az egyenes átmegy a kör középpontján! Természetesen akkor az inverz képe önmaga, ezzel nincs baj, csak akkor nem kaptuk meg a metszéspontokat! Ekkor vegyünk föl a körön egy tetszőleges pontot, és arra invertáljunk! Ekkor a körből egyenes lesz (két pontját megszerkesztjük), az egyenes képét az előbb látottak szerint teljesen megszerkeszthetjük. Az így kapott alakzatok metszéspontját véve, majd azt invertálva az előzővel azonos körre, megkapjuk az egyenes és a kör metszéspontját.

3.3. A tétel megértése

Az okosabb tanulók között lesz, aki ekkor már rájön arra, hogy hiszen akkor minden megszerkeszthető csak körzővel is! Szerintem ezen a ponton el lehet árulni a diákoknak, hogy milyen irányba haladunk, hogy valóban ezt szeretnénk kihozni az egészből, amit néhányan jól megláttak. Ha jól lett előkészítve a feladat, akkor a gyerekek tisztán látják, hogy még a következő hiányzik.

Feladat. Szerkesszük meg két egyenes metszéspontját, ha az egyenesek két-két pontjukkal vannak megadva.

Megoldás. Ehhez a szerkesztéshez fel fogjuk használni a kör és egyenes metszéspontjának szerkesztését. Vegyük az egyik egyenes egyik pontját (legyen ez A), és e körül egy k alapkört. Invertáljuk a két egyenest k-ra! A szerkesztést a 3.6. ábrán követhetjük. AB egyenes önmagába megy, hiszen



3.6. ábra. Két egyenes metszéspontja

átmegy a középponton. XY képét, e' kört meg tudjuk szerkeszteni. Ekkor használjuk az előbb tanultakat: vesszük AB egyenes és e' metszéspontjait. Az egyik nyilván A lesz, a másik valami M'. Ezt a pontot invertálva k-ra, megkapjuk a két egyenes M metszéspontját.

Mindeközben, hogy az előrehaladott nebulók se unatkozzanak, felvethetjük nekik, hogy a tétel bebizonyítható inverzió nélkül is, és gondolkozzanak azon, hogy egyáltalán merre lehetne akkor elindulni, ha nem az inverzióval. A gondolat az kell, hogy legyen, hogy az összes elemi lépést megpróbáljuk megszerkeszteni csak körzővel. El lehet gondolkozni azon, hogy valójában mik is lesznek azok a szerksztéssorozatok, amelyek kiváltják a vonalzót, aminek segítségével végül minden szerkesztés helyettesíthető egy csak körzős szerkesztéssel.

3.4. A tétel precíz bizonyítása

A bizonyításhoz tulajdonképpen csak össze kell foglalni az eddig tapasztaltakat, mindazt, amit ennek kapcsán új dolgot tanultunk. Vegyük át, hogy mik voltak az elemi szerkesztési lépések, illetve szögezzük le, hogy egy egyenest két különböző pontjával definiálunk, és két különböző pontot már egy meghatározott egyenesnek tekintünk. Ezután sorban elmondathatjuk a diákokkal, hogy melyik lépés hogyan váltható ki az inverzió segítségével csak körzővel. Ha ez megtörtént, befejezésül csak annyit kell már mondanunk, hogy így, mivel minden euklideszi szerkesztés lebontható elemi szerkesztések egy sorozatára, így bármely euklideszi szerkesztés helyettesíthető csak körzővel is.

4. fejezet

Kitekintés - a tétel alkalmazása

4.1. Körülírt kör szerkesztése

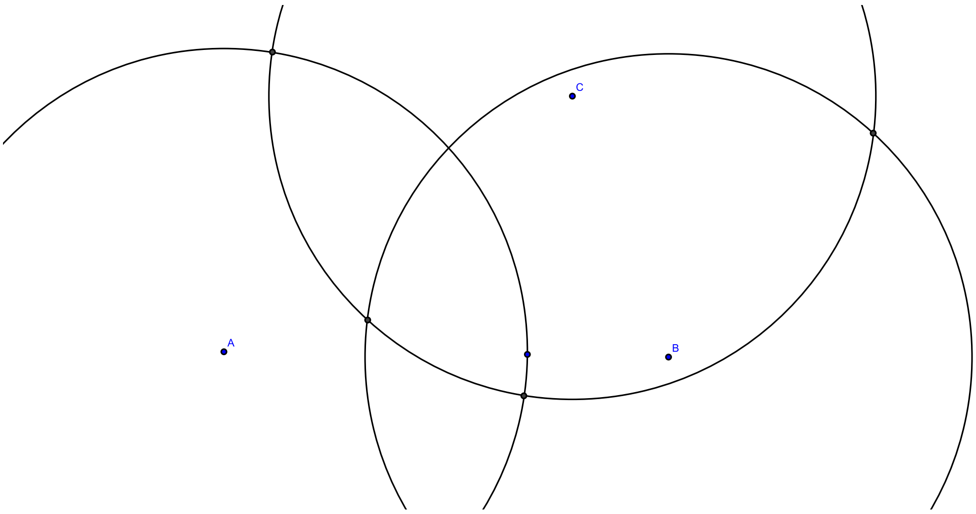
Most pedig nézzünk meg egy konkrét feladatot, hogy lássuk, miként hasznosíthatjuk az eddigieket! Végezzünk el egy szerkesztést lépésről lépésre csak körző segítségével! Legyen ez egy egyszerűnek tűnő.

Feladat. Szerkesszük meg adott háromszög köré írható körének középpontját csak körző használatával!

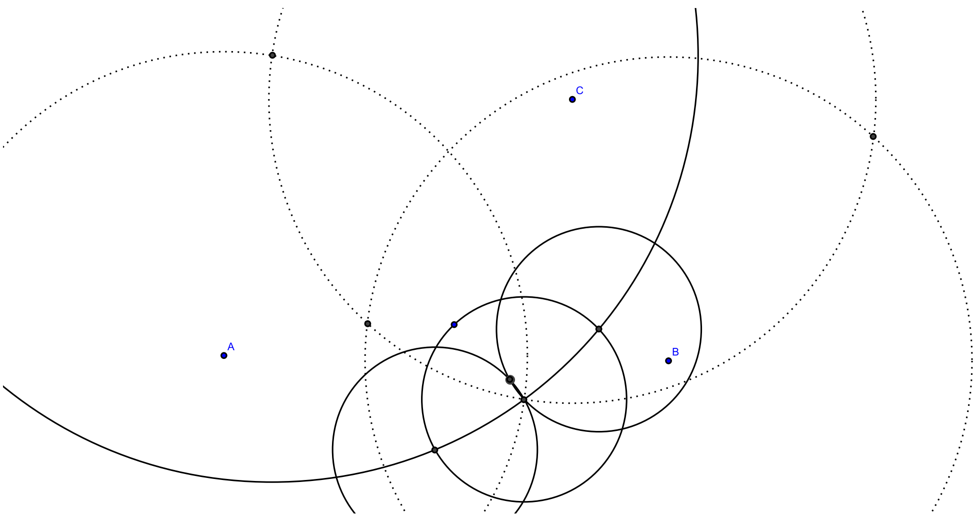
Megoldás. A következő képsoron végig követhetjük a szerkesztés lépéseit. A 4.1. ábrán látható, hogy három kör segítségével meghatározhatjuk két oldalfelező merőleges egyenesének két-két pontját.

Következő lépésként a 4.2. ábra szerint megszerkesztjük az egyik pont inverzét a vele egy egyenesen levő pont körül vett tetszőleges körre. Ez újabb négy darab körzőhasználatot vesz igénybe.

Ezután a másik egyenest is invertáljuk az előbbi körre: a 4.3. ábra mutatja. Újabb hat körzőzés.

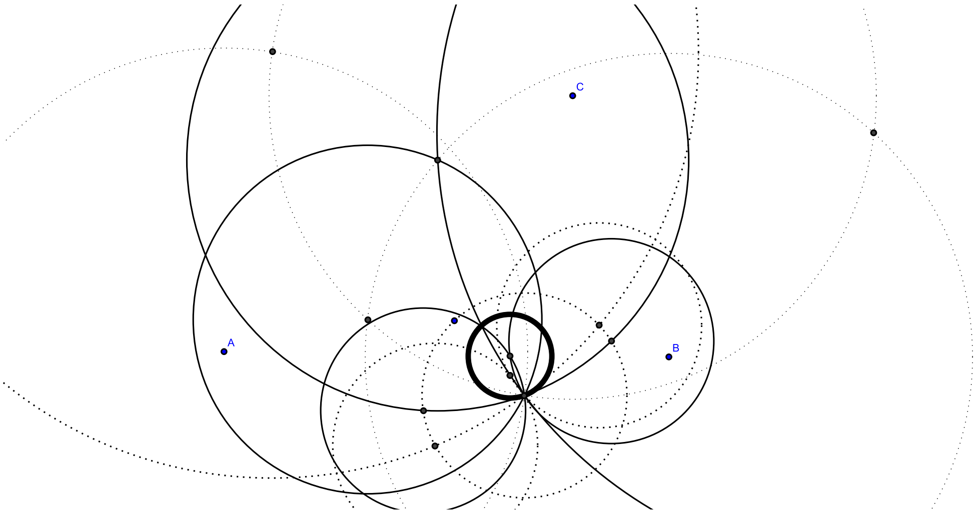


4.1. ábra. Oldalfelező merőlegesek

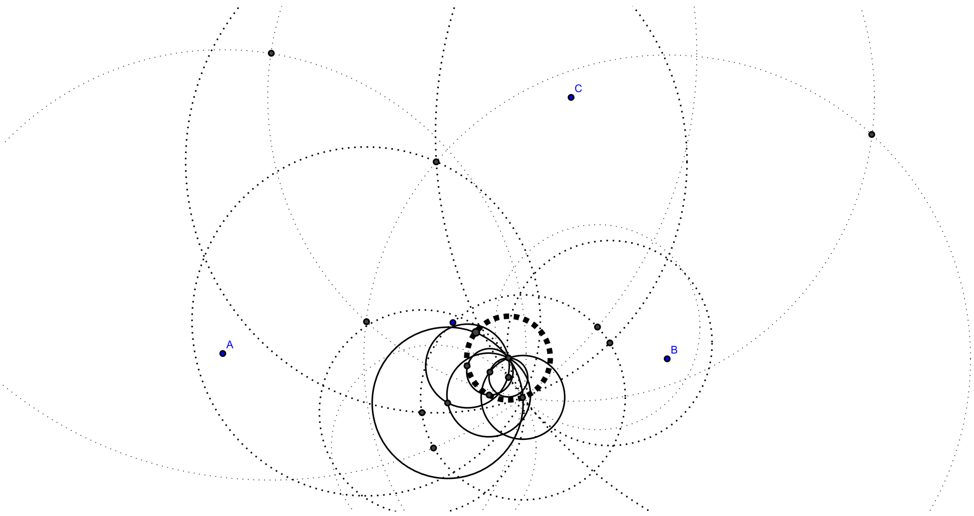


4.2. ábra. Pont inverze

Utolsó előtti lépésként a kapott kör és egyenes metszéspontját szerkesztjük meg. A 4.4. ábra folytonos vonallal jelzett körei mutatják az újonnan szerkesztett alakzatokat. (Ez ismét hat kör.)

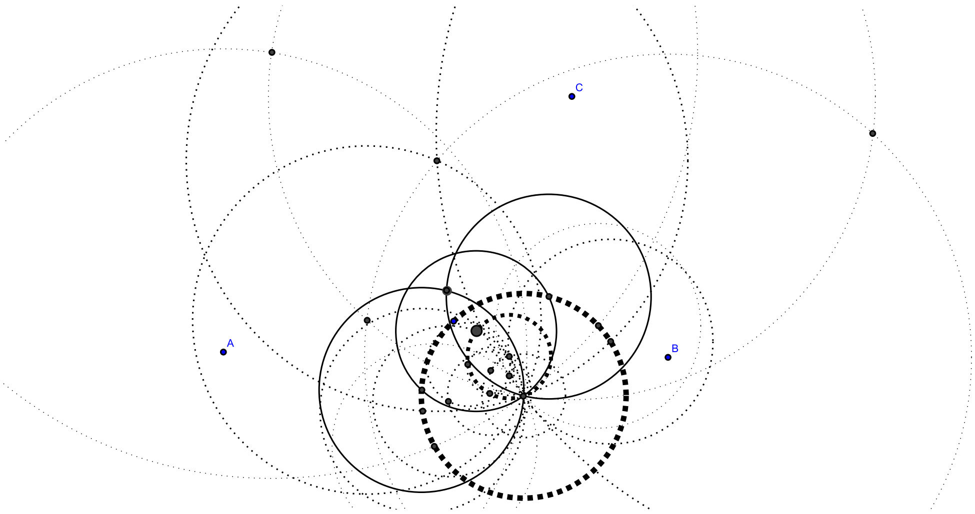


4.3. ábra. Egyenes inverze



4.4. ábra. Kör és egyenes metszéspontja

Végül az eredeti körre (a 4.5. ábrán vastagon szaggatott) invertáljuk az előbb nyert metszéspontot, ezzel megkapjuk mindössze három újabb kör szerkesztése útján a két felezőmerőleges metszéspontját, vagyis a háromszög köré írható kör középpontját.



4.5. ábra. Körülírható kör középpontja

Ha összeszámoljuk, vonalzó segítségével szükség lett volna a körzőre három alkalommal, vonalzóra pedig kétszer. Ehelyett most csak körzőt használtunk, de azt huszonkétszer. Ez tehát nem egy gyorsító eljárás, de mindenképp érdekesség.

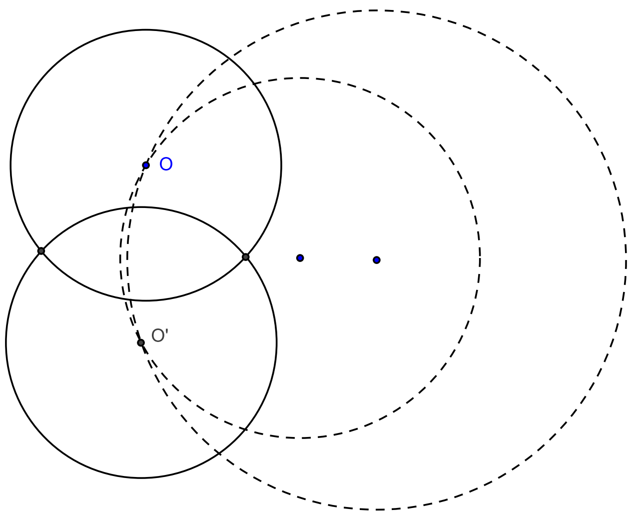
4.2. Egy elemi bizonyítás

Az előző folyamat azonban csak egy lehetőség. Nem feltétlenül a lehető legrövidebb. Itt mindig az inverziót használtuk, az annak segítségével megismert lépéseket. Néhol azonban rövidebb inverzió nélkül megszerkeszteni bizonyos dolgokat. Ilyen például egy egyenes és kör metszéspontja.

Lássunk tehát egy elemi bizonyítást is! A következő két szerkesztést kell megvalósítanunk csak körzővel:

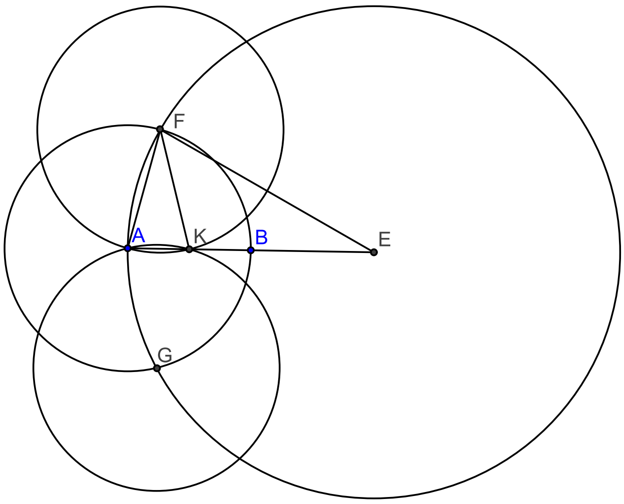
- Kör és két pontjával adott egyenes metszéspontjának szerkesztése
- Két egyenes metszéspontjának szerkesztése, ahol mindkét egyenes két-két pontjával van megadva

A többi lépés végrehajtásához eleve nem kell vonalzó, ezekkel tehát most nem kell foglalkoznunk. Egyenes és kör metszéspontjának szerkesztéséhez mindössze három kört kell rajzolnunk, ha az egyenes nem megy át a kör középpontján. Tükrözzük a kör középpontját az egyenesre (4.6 ábra), majd a tükörképből körözünk ugyanakkora sugárral. Az így kapott metszéspontok rajta lesznek az egyenesen is, mivel ugyanolyan távol vannak O-tól és O'-től.



4.6. ábra. Kör és egyenes metszéspontja

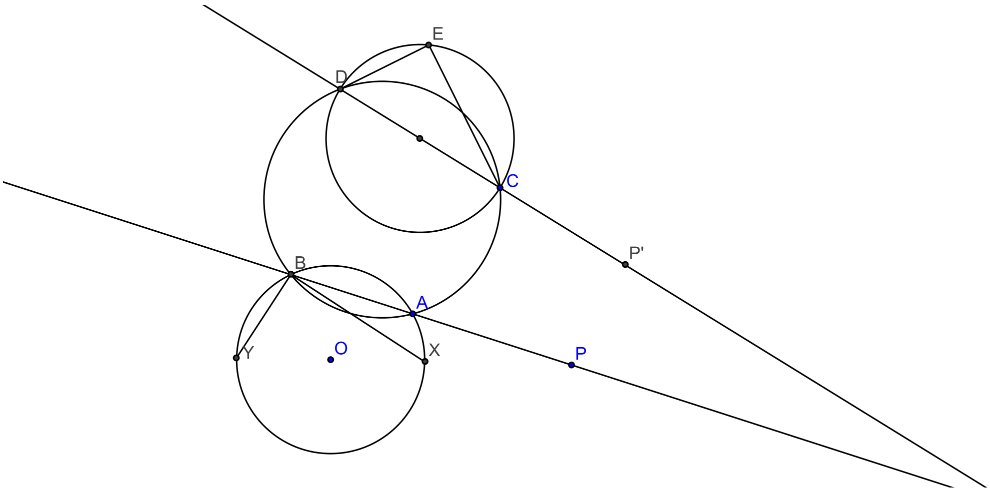
Mielőtt továbbmennénk, és a középponton átmenő egyenes metszéspontját szerkesztenénk, adjunk eljárást arra, hogy adott AB szakasz felezőpontját hogyan tudjuk megszerkeszteni vonalzó nélkül! Ezt most látszólag inverzió nélkül oldjuk meg, bár természetesen ott van mögötte az is, noha máshogy oldjuk meg, mint 3.2-ben. Vegyük most is AB szakasz kétszeresét, AE-t. Ezután E-ből körözzünk $|AE|$ távolsággal. Ennek metszéspontja az A körüli, $|AB|$ sugarú körrel F és G. Ezek mindegyikéből körözzünk A-n át, a második metszéspontjuk lesz AB szakasz felezőpontja.



4.7. ábra. Felezőpont inverzió nélkül

A 4.7. ábrán két hasonló háromszöget látunk: AEF-et és KFA-t. Hasonlósági arányuk $\frac{|FE|}{|AF|} = \frac{|AE|}{|AB|} = 2$, tehát $\frac{|AF|}{|AK|} = 2$, vagyis K valóban felezi AB szakaszt.

Legyen adott az O közepű, r sugarú k kör, és egy P pont. Szerkesszük meg OP egyenesnek k körrel való metszéspontjait! Ehhez vegyünk fel tetszőleges A pontot k-n. Legyen PA másik metszéspontja k-val B. (Ezt az előző szerkesztés szerint megkaphatjuk.) Rajzoljuk r-nél nagyobb sugarú kört, ami



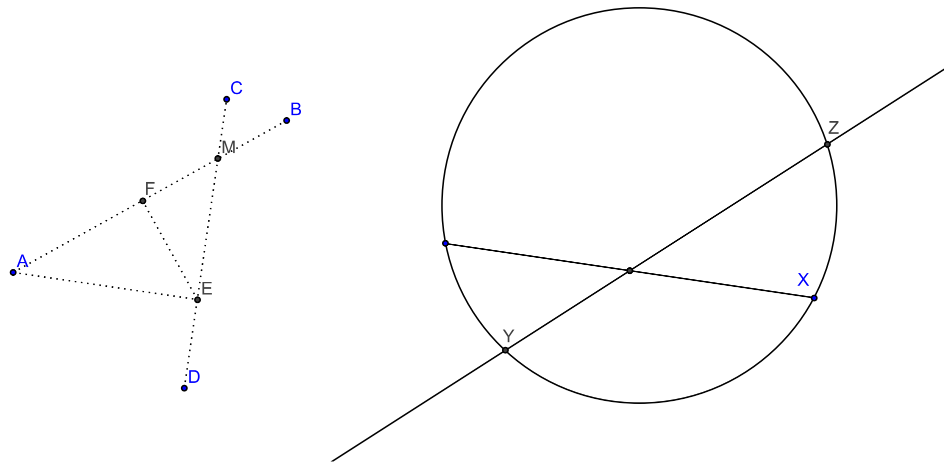
4.8. ábra. Felezőpont speciális esetben

átmegy A-n és B-n. Ezen legyenek egymástól $2r$ távolságra C és D pontok. Szerkesszük meg CD szakasz felezőpontját! Ebből rajzoljunk kört $|OP|$ sugárral, ahol ez metszi CD egyenesét, kapjuk P'-t. Mérjük fel $|PB|$ távolságot P'-ből a DC átmérőjű körre! Az így kapott E pontra és a keresett X, Y pontokra igaz lesz a következő: $|EC| = |BX|$, valamint $|ED| = |BY|$. Ezzel megkaptuk tehát a keresett metszéspontokat, ahogy az a 4.8. ábrán látható.

Az eljárás helyessége könnyen igazolható, hiszen a kívánttal egybevágó ábrát szerkesztünk meg, amit azután egyszerű távolság felmérésekkel az eredeti ábrába tudunk vinni.

Két egyenes metszéspontjának szerkesztéséhez először gondoljuk meg, hogy miként tudjuk adott pontnak adott egyenesre vett merőleges vetületét megszerkeszteni! Először tükrözzük a pontot az egyenesre, majd vegyük a pont és tükörképe által meghatározott szakasz felezőpontját. Ezen lépéseket mind ismerjük már, tehát itt nem ütközünk akadályba.

Most nézzük AB és CD egyenesek metszéspontját! Legyen A merőleges vetülete CD-re E, továbbá E vetülete AB-re F, ahogy a 4.9. ábrán láthatjuk. Ekkor a következőt írhatjuk föl a két egyenes M metszéspontjára:



4.9. ábra. Két egyenes metszéspontja

$|AE|^2 = |AF||AM|$. Ha |AM| szakasz hosszát meg tudjuk szerkeszteni, készen vagyunk, hiszen akkor már csak venni kell az A közepű, $|AM|$ sugarú kör és a CD egyenes metszéspontját. A keresett távolságot pedig a következőképp szerkesztjük (szintén a 4.9. ábrán látható):

Először megkétszerezzük $|AE|$-t, ez legyen AX szakasz. A és X pontokon át veszünk egy tetszőleges (ám elegendően nagy) sugarú kört. E pontból mérjük föl a körre $|AF|$ távolságot. Az így kapott pont legyen Y. YE egyenes másik metszéspontja a körrel Z. Az így kapott $|EZ|$ hossz éppen akkora, mint a keresett $|AM|$, hiszen a pont körre vonatkozó hatvány miatt $|EA||EX| = |EA|^2 = |EY||EZ| = |AF||EZ|$, tehát valóban $|EZ| = |AM|$ kell legyen.

Összegzés

A tétel és a hozzá vezető út úgy gondolom remek lehetőség arra, hogy egy matematikát kedvelő osztály számára érdekeset, maradandót mutassunk. Ezzel a felépítéssel valóban elmélyül a diákokban mindaz, amit szeretnénk, és annál inkább, minél jobban hagyjuk őket felfedezni. Azt gondolom tehát, hogy ez nem egy rövid anyag, nem kell ezzel két-három tanóra alatt végezni. Akkor megértik, amit megbeszélünk, de kevésbé valószínű, hogy meg is marad bennük. Ha azonban hagyunk rá elegendő időt, és így ők maguk jöhetnek rá az előkészített példák megoldásaira, ezzel bizonyítva a szükséges tulajdonságokat, végül a tételt, akkor sokkal inkább szeretik meg ezt a témakört.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Juhász Péternek, aki segített végiggondolnom, hogy miként lehet jól felépíteni a témát, valamint Hraskó Andrásnak, aki a középiskolában megszerettette velem az inverziót és hagyta, hogy én magam fedezzem fel a geometria ezen csodáit.

Irodalomjegyzék

[Hungerbühler, 1994] Norbert Hungerbühler: *A Short Elementary Proof of the Mohr-Masceroni Theorem*
http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk5/js/geometry/compass/short.pdf

[G. Horváth, Szirmai, 2004] G. Horváth Ákos - Szirmai Jenő: *Nemeuklideszi geometriák modelljei*, Typotex, 2004.

[Georg Mohr, 1672] Georg Mohr: *Euclides Danicus*, Amsterdam, 1672

[L. Mascheroni, 1797] Lorenzo Mascheroni: *La Geometria del Compasso*, Pavia, 1797