Differenciálszámítás és alkalmazásai

Szakdolgozat

Írta: Katona Edina Mária
Matematika Bsc szak
Tanári szakirány

Témavezető:
Sikolya Eszter, adjunktus
Alkalmazott Analízis és Számításmatematika Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar
2012.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

A szakdolgozatomban a matematikai analízis egyik központi jelentőségű témakörét a differenciálszámítást, valamint hozzá kapcsolódó példákat mutatok be. A differenciálszámítással már a középiskolában megismerkedünk, de mélyebb ismeretre csak az egyetemi évek alatt lesz rá lehetőség. A differenciálszámítás szerepe nem csak a matematikában, hanem más tudományok területén (pl.: fizika, kémia, közgazdaságtudomány, stb) is alapvető. Segítségével számos elméleti és gyakorlati probléma megoldása válik lehetővé.

A dolgozatot 2 fő részre lehet osztani. Az első felében bemutatom a differenciálhányados fogalmát, valamint a legfontosabb tételeket és definíciókat, differenciálási szabályokat, ezt követik a lokális tulajdonságok, melyek a függvényelemzés során segítségül szolgálnak, végül a kétváltozós függvények differenciálása következik. A dolgozat második felében különböző példákon keresztül szemléltettem a kétváltozós függvények differenciálszámításának alkalmazhatóságát.

2. Differenciálszámítás

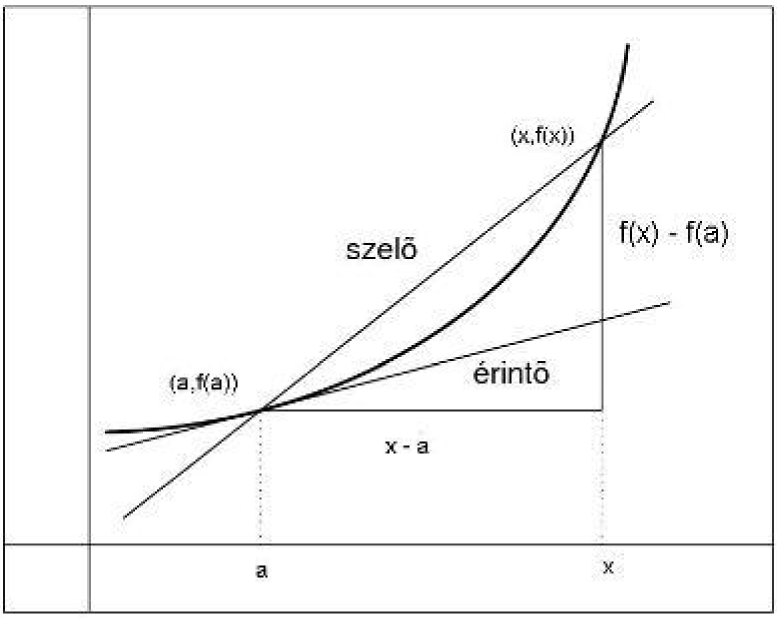
2.1. A differenciálhányados fogalma

A különbségi hányados mint a megfelelő szelő meredeksége fontos szerepet játszik a differenciálszámítás geometriai megalapozásában.

A koordináta-rendszer $(a, f(a))$ és a tőle különböző $(x, f(x))$ pontjain át fektessünk egy egyenest (szelőt). Az egyenes meredeksége (iránytangese)

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Ha x-szel a-hoz tartva a szelők tartanak egy határhelyzethez, akkor az így kapott egyenest fogjuk az f függvény a pontbeli érintőjének nevezni, melynek meredeksége a szelők meredekségeinek határértéke (lásd 1. ábra). (Ezt a határértéket nevezzük majd el deriváltnak.)



1. ábra

Ha az f függvény értelmezve van az a és b pontokban, akkor az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hányadost az f függvény a és b helyekhez tartozó **különbségi hányadosának** nevezik. Egyértelmű, hogy az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ különbségi hányados megegyezik az ($a,f(a)$) és ($b,f(b)$) pontokon átmenő egyenes meredekségével.

Definíció: Az a valós szám **környezeteinek** nevezzük az $(a-\delta, a+\delta)$ alakú intervallumokat, ahol δ tetszőleges pozitív szám.

Definíció: Legyen f értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban **differenciálható**, ha a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

véges határérték létezik. A határérték az f függvény a pontbeli **differenciálhányadosa** vagy **deriváltja**.

Jelölés: Az a pontbeli differenciálhányadost leggyakrabban $f'(a)$-val jelöljük. Előforduló jelölések még

$$\dot{f}(a),\ y'(a),\ \frac{dy}{dx}$$

Az f függvény a pontbeli érintőjén azt az egyenest értjük, amely átmegy az $(a, f(a))$ ponton és a meredeksége

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

Az előbbiek szerint az érintő egyenesének egyenletét a következő módon definiálhatjuk.

Definíció: Legyen f differenciálható az a pontban. Az f függvény a pontbeli **érintőjén** az $y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$ egyenletű egyenest értjük.

Tétel: Ha f differenciálható a-ban, akkor f folytonos a-ban.

Ez mutatja, hogy a differenciálhatóság erősebb tulajdonság, mint a folytonosság. A folytonosság szükséges, de nem elégséges feltétele a differenciálhatóságnak. Van olyan f függvény, amely egy a pontban folytonos, de ott mégsem differenciálható. Erre egy példa az $f(x) = |x|$ függvény $a = 0$-ban.

Példa:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & ha\ x \geq 0, \\ -x, & ha\ x < 0 \end{cases},$$

tehát

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1, & ha\ x > 0, \\ -1, & ha\ x < 0. \end{cases}$$

Így

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1,$$

ezért *f* nem differenciálható 0-ban.

Definíció: Az f függvény **deriváltfüggvényének** nevezzük és *f'*-vel jelöljük azt a függvényt, amely értelmezve van mindazon x helyen, ahol *f* differenciálható, és ott az értéke $f'(x)$.

2.2 Differenciálási szabályok

A következőkben a differenciálási szabályokkal ismerkedünk meg, melyeket szinte minden feladat során alkalmazunk. Az (1)-(7) szabályok egyszerűen következnek a differenciálhatóság definíciójából.

(1) Konstans differenciálhányadosa.
Ha az *f=a* (*a* állandó), akkor *f'=0*. Tehát a konstansfüggvény deriváltja minden pontban 0.

(2) Állandóval szorzott függvény differenciálhányadosa.
A $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, ahol c állandó. Tehát a differenciálhányadost úgy kapjuk, hogy a deriváltat megszorozzuk a konstanssal.

(3) Összegfüggvény differenciálhányadosa.
Az $(f + g)' = f' + g'$, tehát a differenciálhányados a tagok deriváltjainak az összege. A szabály bármennyi tag differenciálására vonatkozik.

(4) Két függvény különbségének differenciálhányadosa.

Az $(f-g)' = f' - g'$, a különbséget az összeghez hasonlóan tagonként differenciáljuk.

(5) Két függvény szorzatának differenciálhányadosa.

Az $(f \cdot g)' = (f' \cdot g) + (f \cdot g')$, tehát a differenciálhányadost úgy kapjuk, hogy az első tényező deriváltját megszorozzuk a változatlanul hagyott második tényezővel, majd hozzáadjuk a változatlan első tényező és a második tényező deriváltjának a szorzatát.

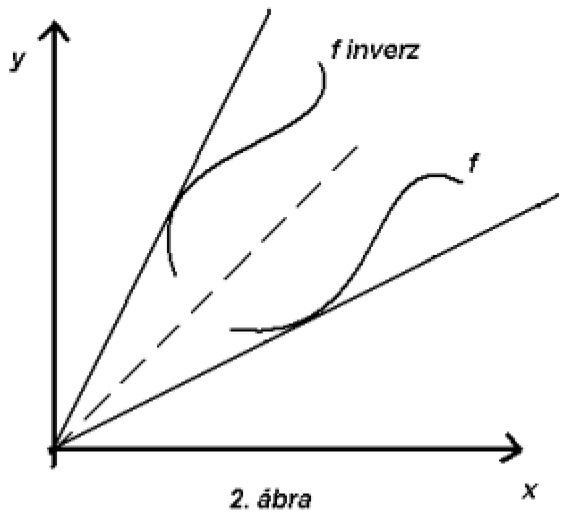
(6) Két függvény hányadosának differenciálhányadosa.

Az $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(f' \cdot g) - (f \cdot g')}{g^2}$, ha $g \neq 0$, tehát a differenciálhányadost úgy kapjuk, hogy a számláló nevezőjének deriváltját megszorozzuk a nevezővel, majd ebből kivonjuk a változatlanul hagyott számlálónak és a nevező deriváltjának a szorzatát. Végezetül a különbséget elosztjuk a nevező négyzetével.

(7) Inverz függvény differenciálhányadosa.

Legyen f szigorúan monoton és folytonos az (a,b) intervallumban, és legyen differenciálható a $c \epsilon (a,b)$ pontban. Ha $f'(c) \neq 0$, akkor f inverz függvénye, f^{-1} differenciálható $f(c)$-ben és

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$



2. ábra

(8) Összetett függvény differenciálhányadosa.

Ha a g függvény differenciálható a-ban és az f függvény differenciálható $g(a)$-ban, akkor a $h=f \circ g$ függvény is differenciálható a-ban, és

$$h'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a)$$

Ezt szokás láncszabálynak nevezni.

2.3. Elemi függvények deriváltja

A legfontosabb elemi függvényeket és deriváltjukat mutatjuk be az alábbiakban.

Nevezetes függvényderiváltak:

a) $(id^n)'=nid^{n-1}$

b) $sin'=cos$

c) $cos'= - sin$

d) $tg'=\frac{1}{cos^2}$

e) $ctg'= - \frac{1}{sin^2}$

f) $(e^x)'=e^x$, ahol $x \in \mathbb{R}$

g) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ahol $x > 0$

h) $sh'=ch$

i) $ch'=sh$

j) $th'=\frac{1}{ch^2}$

k) $cth'= - \frac{1}{sh^2}$

l) $arcsin'x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ahol $x \in (-1,1)$

m) $arccos'x= - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ahol $x \in (-1,1)$

n) $arctg'x=\frac{1}{1+x^2}$, ahol $x \in \mathbb{R}$

o) $arcctg'x= - \frac{1}{1+x^2}$, ahol $x \in \mathbb{R}$

p) $arsh'x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, ahol $x \in \mathbb{R}$

q) $arch'x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, ahol $(x > 1)$

r) *arth'x*=$\frac{1}{1-x^2}$, ahol -1 < x < 1

s) *arcth'x*=$\frac{1}{1-x^2}$, ahol $|x| > 1$

2.4. Magasabb rendű differenciálhányadosok

Egy függvényt nem csak egyszer lehet deriválni, hanem többször is, feltéve, ha megfelel azoknak a feltételeknek, melyekkel az alábbiakban ismerkedünk meg.

Definíció: Legyen az *f* függvény differenciálható az *a* pont egy környezetében. Ha az *f'* deriváltfüggvénynek létezik a deriváltja *a*-ban, akkor *f' a*-beli deriváltját az *f* függvény *a*-beli **második differenciálhányadosának** nevezzük. Jelölése: *f''(a)*. Definíció szerint

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

Ha *f''*(*a*) létezik, akkor azt mondjuk, hogy *f* kétszer differenciálható *a*-ban. Az *f* függvény **második deriváltfüggvényének** nevezzük és *f''*-vel jelöljük azt a függvényt, amely azokban az *x* pontokban van értelmezve, ahol *f* kétszer differenciálható, és ott az értéke *f''*(*x*).

A *k*-adik differenciálhányados hasonlóképpen értelmezhető indukcióval.

Definíció: Legyen az *f* függvény *k*-1-szer differenciálható az *a* pont egy környezetében. Jelöljük az *f* függvény *k*-1-edik deriváltfüggvényét $f^{(k-1)}$-gyel. Az $f^{(k-1)}$ függvény *a*-beli differenciálhányadosát – feltéve, ha létezik – az *f* függvény *k*-adik differenciálhányadosának nevezzük. Ekkor *f*-et *a*-ban *k*-szor differenciálhatónak nevezzük. A *k*-adik deriváltfüggvényt $f^{(k)}$-val jelöljük. Előforduló jelölések még:

$$\frac{d^k f}{dx^k}, \frac{d^k f(x)}{dx^k}, y^{(k)}(a)$$

Ha $f^{(k)}$ minden $k \in \mathbb{N}^+$-ra létezik *a*-ban, akkor azt mondjuk, hogy *f* végtelen sokszor differenciálható *a*-ban.

Példa:

Racionális és egész kitevőjű hatványok magasabbrendű deriváltja:

$$f(x) = x^q, \ \ x \in \mathbb{R}^+$$

racionális q esetén a k-adik deriváltja

$$f^{(k)}(x) = q(q-1)\dots(q-k+1)x^{q-k}, \ \ x \in \mathbb{R}^+$$

pozitív egész q esetén

$$f^{(q)}(x) = q!,$$

ahol $q! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q$ és $f^{(q+1)}(x) = f^{(q+2)}(x) = \ldots = 0$.

Exponenciális függvények magasabbrendű deriváltja:

$$f(x) = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

és $f'(x) = f"(x) = \ldots = f^{(q)}(x) = e^x$,

$$f(x) = e^{bx}, \ \ x \in \mathbb{R}$$

esetén $f'(x) = be^{bx}, \dots, f^{(q)}(x) = b^q e^{bx}$

2.5. Lokális tulajdonságok

Ebben a fejezetben a differenciálható függvények lokális tulajdonságainak és deriváltjainak összefüggéseivel ismerkedünk meg. Az itt szereplő tételek rendkívül fontosak az adott függvény alaki vizsgálatához.

Definíció: Legyen az *f* függvény értelmezve az *a* pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy *f* **lokálisan növekedő** *a*-ban, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $a - \delta < x < a$ esetén $f(x) \leq f(a)$, és minden $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) \geq f(a)$.
Analóg módon értelmezzük az *a*-ban lokálisan csökkenő függvényt.

Az előbbi definícióból igazolható a következő tétel, melyben megfogalmazzuk, hogy ha az *f* függvény lokálisan növekedő, akkor az *f* deriváltjának az értéke 0 vagy annál nagyobb pozitív szám.

Tétel: Ha *f* differenciálható *a*-ban és *f* lokálisan növekedő (csökkenő) *a*-ban, akkor $f'(a) \geq 0$ ($f'(a) \leq 0$).

A fenti definícióhoz hasonlóan megfogalmazhatjuk az a-ban szigorúan növekedő, illetve a szigorúan csökkenő függvényt, mely csak abban különbözik az előzőtől, hogy itt nem engedjük meg az egyenlőséget.

<u>Definíció:</u> Legyen az f függvény értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f **szigorúan lokálisan növekedő** a-ban, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $a - \delta < x < a$ esetén $f(x) < f(a)$, és minden $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) > f(a)$.

Az előző definícióhoz ismét megfogalmazható egy tétel, mely szintén nagyon hasonló a fentebb említett tételhez, csak fordított irányú következtetést tartalmaz.

<u>Tétel:</u> Ha az f differenciálható a-ban és $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), akkor f szigorúan lokálisan növekedő (szigorúan lokálisan csökkenő) a-ban.

Miután megismerkedtünk a lokálisan növekedő, illetve lokálisan csökkenő függvény fogalmával, nézzük meg, hogyan állapíthatjuk meg egy függvény lokális maximumát, illetve lokális minimumát.
A következőkben bevezetjük a lokális maximum, illetve a lokális minimum fogalmát, melyeknek a közös elnevezése lokális szélsőérték. A lokális maximumhelyet és a lokális minimumhelyet pedig közösen lokális szélsőértékhelynek nevezzük. Előtte viszont még definiáljuk a definícióban szereplő környezet fogalmát.

<u>Definíció:</u> Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban **lokális maximuma (minimuma)** van, ha a-nak van olyan U környezete, amelyben f értelmezve van, és minden $x \in U$-ra $f(x) \leq f(a)$ (illetve $f(x) \geq f(a)$). Ekkor az a pontot az f függvény lokális maximumhelyének (lokális minimumhelyének) nevezzük.
Ha minden $x \in U \setminus \{a\}$-ra $f(x) < f(a)$ (vagy $f(x) > f(a)$), akkor a függvénynek szigorú lokális maximuma (szigorú lokális minimuma) van a-ban.

Igazolható a következő tétel, mely szükséges feltételt ad differenciálható függvény lokális szélsőértékének létezésére.

<u>Tétel:</u> Ha f differenciálható a-ban és f-nek lokális szélsőértékhelye van a-ban, akkor $f'(a) = 0$.

Fontos, hogy ez a tétel csak szükséges feltétel ad a lokális szélsőérték létezésére, és nem fordítható meg!

<u>Példa:</u> Vegyük az $f(x) = x^3$ függvényt. Mivel $f'(x) = 3x^2$, ezért $f'(0) = 0$, de f-nek nincs lokális szélsőértéke a 0-ban.

<u>Szélsőérték létezésének elégséges feltétele</u> (2. deriválttal): Legyen f 2-szer differenciálható (a, b)-n, $x \in (a, b)$ és $f'(x) = 0$. Ha $f''(x) < 0$, akkor x lokális maximumhely, ha $f''(x) > 0$, akkor pedig x lokális minimumhely.

A maximum- és minimumhelyek említése kapcsán mindenképpen meg kell említenünk a Weierstrass-tételt, mely folytonos függvény abszolút maximum- illetve abszolút minimumhelyének létezéséről szól.

Weierstrass-tétel: Ha $f \in C[a, b]$, akkor van olyan $\alpha \in [a, b]$, és $\beta \in [a, b]$, amelyekre teljesül, hogy $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ minden $x \in [a, b]$-re. Más szóval, egy korlátos, zárt intervallumban folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye.

2.6. Középértéktételek

A differenciálszámítás tételei közül a következő három (Rolle-tétele, Lagrange-középértéktétel és Cauchy-középértéktétel) a leggyakrabban használt. Általában valamelyik tételt alkalmazzuk, ha a függvény és deriváltjai közötti kapcsolatot keressük.

Rolle-tétel: Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos $[a,b]$-ben és differenciálható (a,b)-ben. Ha $f(a)=f(b)$, akkor létezik olyan $c\in(a,b)$, amelyre $f'(c)=0$.

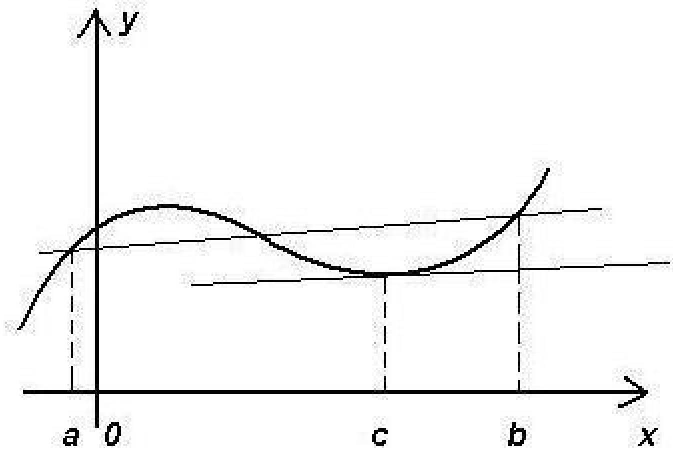
A Lagrange-középértéktétel a fent említett Rolle-tétel általánosítása, és a következőt mondja ki.

Lagrange-középértéktétel: Ha az f folytonos $[a,b]$-ben és differenciálható (a,b)-ben, akkor létezik olyan $c\in(a,b)$, amelyre

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

teljesül.

A tétel állítását a következő ábra szemlélteti:



3. ábra Lagrange-középértéktétel

A Lagrange-középértéktétel szemléletes jelentése a következő: ha az f függvény folytonos $[a,b]$-ben és differenciálható (a,b)-ben, akkor f grafikonjának létezik olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos a $h_{a,b}$ húrral.

Az $(a,f(a))$ és $(b,f(b))$ pontokon átmenő húr egyenesének egyenlete

$$h_{ab}(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

A következőkben a **Cauchy-középértéktétellel** ismerkedünk meg:

Ha az f és g függvények folytonosak $[a,b]$-ben, differenciálhatók (a,b)-ben, és $x \in (a,b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $c \in (a,b)$, amelyre

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

2.7. Kétváltozós függvények differenciálása

2.7.1. Legfontosabb tételek, definíciók

Legyen f egy kétváltozós függvény, (a,b) pedig értelmezési tartományának egy belső pontja. Ha az

$$f_1(x) = f(x,b),\ (x,b) \in D_f$$

illetve

$$f_2(y) = f(a,y),\ (a,y) \in D_f$$

egyváltozós függvénynek az *a*, illetve *b* pontban differenciálhatók, akkor azt mondjuk, hogy az *f* az (a,b) pontban *x* (első változó) szerint, illetve *y* (második változó) szerint **parciálisan differenciálható**, és parciális differenciálhányadosai az (a,b) pontban:

$$f_1'(a), \text{ illetve } f_2'(b).$$

A fent említett belső pontot az a következőképpen definiáljuk.

Definíció: Az $u \in \mathbb{R}^2$ pont körüli $r > 0$ sugarú **nyílt gömb**: $B(u,r) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 : d(u,x) < r\}$.

Definíció: Legyen $H \subset \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}^2$. Az u **pont belső pontja** H-nak, ha létezik $r > 0$, hogy $B(u,r) \subset H$. H belső pontjait jelölje int H.

Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan a következőkben definiáljuk a kétváltozós függvények parciális deriváltfüggvényének fogalmát.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f kétváltozós függvény az $A \subset D_f$ halmaz minden pontjában parciálisan differenciálható az *x* (első változó) szerint. Azt a függvényt, amely az A halmaz minden pontjához hozzárendeli az *f* függvény *x* szerinti parciális differenciálhányadosát, az *f* függvény *x* szerinti **parciális deriváltfüggvényének** nevezzük.

Hasonlóan definiálható az *y* szerinti parciális deriváltfüggvény is.

A parciális deriváltfüggvények jelölése:

$$\partial_1 f,\, f'_x \ \text{ vagy } \ \frac{\partial f}{\partial x} \ \text{ illetve } \ \partial_2 f,\, f'_y \ \text{ vagy } \ \frac{\partial f}{\partial y}$$

A következőkben definiáljuk mikor differenciálható az *f* függvény az (a, b) pontban, valamint kimondjuk az ezzel kapcsolatos tételeket.

Definíció: Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, $(a, b) \in \operatorname{int} D(f)$. Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{f}$ **differenciálható az** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ **pontban**, ha létezik olyan $\ell = \ell_{(a,b)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \ell(x - a, y - b)}{|(x - a, y - b)|} = 0.$$

Tétel: Ha *f* differenciálható (a, b)-ben, akkor *f*-nek léteznek parciális deriváltjai (a, b)-ben, és az előző definícióban

$$\ell(x, y) = f'_x(a, b) \cdot x + f'_y(a, b) \cdot y.$$

Definíció: Ha f differenciálható (a, b)-ben, akkor az $\nabla(a, b) := (f'_x(a, b), f'_y(a, b)) \in \mathbb{R}^2$ vektort a függvény (a, b)-beli **deriváltvektorának** vagy **gradiensének** nevezzük.

Jele: $\nabla f(a, b)$

Tétel: Legyen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a, b) \in \text{int } D(f)$., és tegyük fel, hogy az f'_x és az f'_y parciális deriváltfüggvények léteznek az (a, b) pont egy környezetében és folytonosak (a, b)-ben. Ekkor *f* differenciálható (a, b)-ben.

Példa kétváltozós függvény parciális deriváltjaira:

Legyen $f(x, y) = x^2 + xy^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ennek a kétváltozós függvénynek két parciális deriváltja van. Az *x* szerinti parciális derivált meghatározásánál az *y*-t, az *y* szerintinél pedig az *x*-et tekintjük konstansnak. A parciális deriváltak ezek után a következők:

$$f'_x(x, y) = 2x + y^2, \quad D_{f'_x} = \mathbb{R}^2,$$
$$f'_y(x, y) = 2xy, \qquad D_{f'_y} = \mathbb{R}^2.$$

Definíció: Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **másodrendű vagy második parciális deriváltjait** az első, illetve a második parciális deriváltfüggvények további parciális deriváltjaiból nyerjük:

$$f''_{xx} := (f'_x)'_x, f''_{xy} := (f'_x)'_y, f''_{yx} := (f'_y)'_x, f''_{yy} := (f'_y)'_y.$$

Az alábbiakban megfogalmazzuk a Young-tételt, mely kimondja, hogy egy *f* függvény vegyes másodrendű parciális deriváltjai bizonyos feltételek mellett azonosak.

Young-tétel: Tegyük fel, hogy az f kétváltozós függvény másodrendű parciális deriváltjai léteznek az (a, b) pont környezetében és folytonosak (a, b)-ben. Ekkor

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Definíció: Legyen *f* differenciálható az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha f parciális deriváltfüggvényei differenciálhatók az (a, b) pontban, akkor azt mondjuk, hogy az *f* **kétszer differenciálható** az (a, b) pontban.

A definícióból és fenti tételből látható, hogy a Young-tétel feltételeiből következik *f* kétszeres differenciálhatósága.

A későbbiekben szükségünk lesz a következő fogalomra.

Definíció: Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény **folytonosan differenciálható** az $a \in \operatorname{int} D(f)$ pontban, ha f differenciálható az a pont egy környezetében, és parciális deriváltjai folytonosak a-ban.

2.7.2. Lokális tulajdonságok

Ezek után lássuk a parciális derivált és a lokális szélsőérték közötti kapcsolatot, hiszen nemcsak egyváltozós függvény esetén, hanem többváltozós függvény estén is összefüggés mutatható a derivált és a lokális tulajdonság között.

Definíció: Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek **lokális minimuma**, illetve **maximuma** (lokális szélsőértéke) van az $(a, b) \in \operatorname{int} D(f)$ pontban, ha (a, b)-nek létezik olyan $U = B((a, b), r)$ környezete, hogy

$$f(x, y) \geq f(a, b) \text{ illetve } f(x, y) \leq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in U.$$

Az $f(a, b) \in \mathbb{R}$ szám az f lokális minimuma, illetve maximuma (a, b)-ben.
Ha

$$f(x, y) > f(a, b) \text{ illetve } f(x, y) < f(a, b) \quad \forall (x, y) \in U$$

teljesül, akkor f-nek szigorú lokális minimuma, illetve maximuma (szigorú lokális szélsőértéke) van (a, b)-ben.

Tétel: (Lokális szélsőérték szükséges feltétele) Ha az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(a, b) \in \operatorname{int} D(f)$ pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek a parciális deriváltjai (a, b)-ben, akkor

$$f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0.$$

A lokális tulajdonságokkal kapcsolatban meg kell említenünk egy fontos tételt, mely a témakörhöz kapcsolódó feladatok megoldása során hasznos lesz számunkra, hiszen erre hivatkozva tudjuk, hogy egy kétváltozós folytonos f függvénynek mikor van legnagyobb és legkisebb értéke.

Weierstrass-tétel: Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt, és legyen $f: A \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f korlátos az A halmazon, és az A-n felvett értékei között van legnagyobb és van legkisebb.

A következőkben a célunk, hogy az egyváltozós esethez hasonlóan elégséges feltételt adjunk kétszer differenciálható függvények lokális szélsőértékének létezésére. Ehhez szükséges bevezetnünk a kvadratikus alak fogalmát.

<u>Definíció:</u> Legyen $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polinom. Azt mondjuk, hogy q **kvadratikus alak**, ha

$$q(x,y) = c_{11}x^2 + c_{21}xy + c_{12}yx + c_{22}y^2.$$

<u>Példa:</u> Kvadratikus alakra: f kétszer differenciálható (a,b)-ben, $q = d^2f(a,b)$

$$(d^2f(a,b))(x,y) = f''_{xx}(a,b) \cdot x^2 + f''_{yx}(a,b) \cdot x \cdot y + f''_{xy}(a,b) \cdot x \cdot y + f''_{yy} \cdot y^2.$$

<u>Definíció</u>: Egy $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak **pozitív**, illetve **negatív definit**, ha minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esetén $q(x,y) > 0$, illetve $q(x,y) < 0$. A kvadratikus alakot **pozitív**, illetve **negatív szemidefinitnek** hívjuk, ha az előbbiekben egyenlőség is meg van engedve. Egy $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak **indefinit**, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.

Egy q kvadratikus alak definitsége a $q(x,y) = c_{11}x^2 + c_{21}xy + c_{12}yx + c_{22}y^2$ egyenletben szereplő együtthatókból képzett

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix definitségével egyezik meg. Ha $\det C > 0$ és $c_{11} > 0$, akkor C pozitív definit, ha $\det C > 0$ és $c_{11} < 0$, akkor C negatív definit. A $c_{21} = c_{12}$ (szimmetrikus mátrix) esetben, ha $\det C = 0$, akkor C (pozitív vagy negatív) szemidefinit, ha $\det C < 0$, akkor C indefinit.

A következő tétel arról szól, hogy ha egy függvény kétszer differenciálható (a,b)-ben, akkor a $d^2f(a,b)$ kvadratikus alak definitsége hasonló szerepet játszik a lokális szélsőérték létezésében, mint egyváltozós függvények esetén az adott pontbeli második derivált előjele.

Tétel: (Lokális szélsőérték létezése) Legyen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int} D(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$.

1. Ha f-nek (a,b)-ben lokális minimuma, illetve maximuma van, akkor a $d^2f(a,b)$ kvadratikus alak pozitív, illetve negatív szemidefinit.
2. Ha a $d^2f(a,b)$ kvadratikus alak pozitív, illetve negatív definit, akkor f-nek (szigorú) lokális minimuma, illetve maximuma van (a,b)-ben.

A következőkben ismertetjük a Lagrange multiplikátor módszert, melyet szintén szélsőérték keresésnél alkalmazunk, de előtte definiáljuk a módszerben használatos feltételes szélsőértéket.

Definíció: Legyenek $g_1, g_2, \dots, g_q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, továbbá

$$H \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \big| g_1(x) = 0, \dots, g_q(x) = 0\}.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek $g_1 = 0, \dots, g_q = 0$ feltétel mellett **feltételes szélsőértéke** van az $a \in H$ pontban, ha az a pontban az $f_{|H}$ függvénynek lokális szélsőértéke van.

Lagrange multiplikátor módszer: Ha $f, g: G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények és az $(x_0, y_0) \in G$ pontban az f-nek a $g(x,y) = k$ feltétel mellett szélsőértéke van, akkor vagy $\nabla g(x_0, y_0) = 0$, vagy $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ amelyre $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

2.7.3. Implicit függvény

Ezek után ismerkedjünk meg az **implicit függvénnyel**.

Probléma: Az $f(x,y) = 0$ alakú összefüggésből kifejezhető-e az y az x segítségével? Vagyis van-e olyan φ függvény, hogy $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0\ \forall x \in D(\varphi)$?

Tétel: (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel) Legyen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $f(a,b) = 0$, $(a,b) \in D(f)$. Tegyük fel, hogy f folytonos az (a,b) pont egy környezetében és $\exists f'_y \neq 0$ ebben a környezetben. Ekkor létezik a-nak, illetve b-nek olyan $K(a) \subset \mathbb{R}$, illetve $K(b) \subset \mathbb{R}$ környezete, hogy

1. Minden $x \in K(a)$ esetén $\exists!\, \varphi(x) \in K(b)$, melyre
$$f\big(x, \varphi(x)\big) = 0.$$
2. A $\varphi: K(a) \to K(b)$ függvény folytonos $K(a)$-n, $\varphi(a) = b$.
3. Ha f folytonosan differenciálható (a,b)-ben, akkor φ differenciálható is az a pontban, és
$$\varphi'(a) = -\frac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}.$$

A következő példában szemléletes magyarázatot adunk az implicitfüggvény-tétel feltételeinek szükségéről, az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet megoldásával.

Példa: Az $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ függvény mindenütt folytonos és mindenütt differenciálható.
Ha $a^2 + b^2 = 1$ és $-1 < a < 1$, akkor $f'_y(a,b) = 2b \neq 0$, tehát az egyváltozós implicitfüggvény-tétel feltételei teljesülnek. Ennek megfelelően van olyan, az a pont egy környezetében folytonos φ függvény, amelyre $\varphi(a) = b$ és $x^2 + \varphi(x)^2 - 1 = 0$. Nevezetesen, ha $b > 0$, akkor ilyen a $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ függvény a $(-1,1)$ intervallumban, ha pedig $b < 0$, akkor a $\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ függvény elégíti ki a feltételeket $(-1,1)$-ben.
Ha viszont $a = 1$, akkor a semmilyen környezetében nem létezik ilyen függvény, hiszen $x > 1$ esetén $x^2 + y^2 - 1 > 0$ minden y-ra. Az egyváltozós implicitfüggvény-tétel feltételei persze itt nem is teljesülnek, hiszen $a = 1$ esetén $b = 0$ és $f'_y(1,0) = 0$. Ugyanez a helyzet az $a = -1$ pontban.

3. Alkalmazások, példák

3.1.

Ebben a feladatban példát adunk arra, hogy ha nem folytonosak a függvények másodrendű parciális deriváltjai, akkor nem feltétlenül teljesül a Young-tétel (lásd 16. oldal).

Feladat: Igazoljuk, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & ha\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & ha\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény esetében

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$$

Megoldás:

Az $f'_x(0,0)$, illetve $f'_y(0,0)$ értékeit az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left\{x\cdot 0\cdot\frac{(x)^2-0}{(x)^2+0}\right\}-0}{x} = 0.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\left\{0\cdot y\cdot\frac{0-(y)^2}{0+(y)^2}\right\}-0}{y} = 0.$$

Az *f* függvény *x* illetve *y* szerinti parciális deriváltja a következő alakú:

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & ha\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & ha\ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & ha\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & ha\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Azt, hogy f, f'_x, f'_y az origóban folytonos, egyszerűen igazolhatjuk polárkoordinátákra való áttéréssel.

Legyen

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$x = r\cos\varphi\,,\ \ r \to 0$$

$$y = r\sin\varphi\,,\ \ r \to 0.$$

Vegyük az $f'_x = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ függvényt, és helyettesítsük be a polárkoordinátákat, így a következőt kapjuk:

$$y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = r\sin\varphi\frac{r^2(cos^2\varphi - sin^2\varphi)}{r^2} + r^2 sin\varphi cos\varphi\frac{4r^3 cos\varphi sin^2\varphi}{r^4} =$$
$$= r(sin\varphi cos2\varphi + cos^2\varphi sin^3\varphi)$$

Utolsó lépésként belátjuk, hogy $\lim_{r\to 0} r(sin\varphi cos2\varphi + cos^2\varphi sin^3\varphi) = 0$, mivel $r \to 0$ és $(sin\varphi cos2\varphi + cos^2\varphi sin^3\varphi)$ korlátos, ugyanis $-2 \leq (sin\varphi cos2\varphi + cos^2\varphi sin^3\varphi) \leq 2$. Tehát a határérték valóban nulla, így f'_x folytonos az origóban.

Az f-ről és az f'_y-ról hasonló módon belátható, hogy folytonos az origóban.

Végül meghatározzuk az $f''_{xy}(0,0)$, illetve $f''_{yx}(0,0)$ értékét:

A definíció szerint:

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\left\{y\frac{0-(y)^2}{0+(y)^2}+0\right\}-0}{y} = -1.$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left\{x\frac{(x)^2-0}{(x)^2+0}-0\right\}-0}{x} = 1.$$

A vegyes másodrendű parciálisok értékei tehát az origóban különbözőek. Ennek oka az, hogy a második parciális deriváltak nem folytonosak az origóban, ugyanis

$$f''_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2)-2y(x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\mathbf{12xy^2(x^2+y^2)}-16x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}, & ha\ (x,y) \neq (0,0) \\ -1, & ha\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Itt is a poolárkoordinátákra áttérve: a számláló megjelölt tagja r^5szerint, a nevező r^6szerint tart nullához, így f''_{xy} nem korlátos.

A számláló megjelölt tagja a $\mathbf{12xy^2}(\mathbf{x^2} + \mathbf{y^2})$, ezen kívül az összes többi tag r^6szerint tart a nullához.

Az f''_{yx}-ről hasonlóan látható, hogy nem korlátos a (0,0)-ban.

3.2.

A következőkben példát látunk arra, hogy a differenciálszámítás hogyan alkalmazható a fizika területén.

Feladat: Határozzuk meg soros, illetve párhuzamos kapcsolások esetén az eredő ellenállás relatív hibáját!

Ha az ellenállások névleges értékei:

$$R_1 = 150\Omega, \qquad R_2 = 500\Omega.$$

Mindkét érték 2% pontosságú, azaz

$$\Delta R_1 = 3\Omega, \qquad \Delta R_2 = 10\Omega.$$

A feladat megoldása előtt nézzük a fizikai hátteret:

Az elektromos ellenállás (jele: **R**, mértékegysége: **Ω**) az anyag azon tulajdonsága, hogy az áram folyását gátolja. Az egyenáramú ellenállás azért keletkezik, mert a töltést hordozó részecskék ütköznek az adott anyag atomjaival.

Az Ohm-törvény használatával:

$R = \frac{U}{I}$, ahol U az elektromos feszültség, az I az elektromos áram jele.

Eredő ellenállás: Ellenállások kapcsolása esetén a rendszer eredő ellenállása a kapcsolat módjáról függ:

- Soros kapcsolás:

Soros kapcsolás esetén az eredő ellenállás az egyes ellenállások összege. Azaz

$$R_s = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

- Párhuzamos kapcsolás:

Párhuzamos kapcsolás esetén az eredő ellenállás reciproka az egyes ellenállások reciprokainak az összege. Azaz

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

A feladat megoldásához szükséges definíció a következő:

Definíció: Ha *f* differenciálható az (x, y) helyen, akkor abszolút hibája:

$$\Delta f = |f_x'(x,y)\Delta x| + |f_y'(x,y)\Delta y|.$$

Elnevezések:

Δf abszolút hiba,

$f \neq 0$ esetén $\frac{\Delta f}{f}$ relatív hiba,

$\frac{\Delta f}{f} \cdot 100$ százalékos hiba.

Megoldás:

a, Soros kapcsolás esetén a névleges érték:

$$R_s = R_1 + R_2 = 650\Omega.$$

Mivel összeg hibája a tagok hibáinak összegével egyenlő, így:

$$\Delta \mathrm{R_s} = 13\Omega,$$

a relatív hiba pedig:

$$\frac{\Delta R_s}{R_s} = 0{,}02\Omega,$$

tehát az eredő ellenállás ugyancsak 2% pontosságú.

b, Párhuzamos kapcsolás esetén:

$$f(R_1, R_2) = R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 115{,}4\Omega,$$

$$\Delta R_p = \left|f'_{R_1}(R_1, R_2)\Delta R_1\right| + \left|f'_{R_2}(R_1, R_2)\Delta R_2\right| =$$

$$= \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}\Delta R_1 + \frac{R_1(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}\Delta R_2,$$

rendezve:

$$\Delta R_p = \frac{R_2^2 \Delta R_1 + R_1^2 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} = 2{,}3\Omega.$$

A relatív hiba

$$\frac{\Delta R_p}{R_p} = 0{,}02\Omega,$$

tehát az eredő ellenállás most is 2% pontosságú. Lássuk be általánosan is, hogy ez nem véletlenül egyezik meg az összetevők pontosságával!

Alakítsuk át a ΔR_p-re kapott alakot!

$$\Delta R_p = \frac{R_2^2 \Delta R_1 + R_1^2 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2 R_1 \frac{\Delta R_1}{R_1} + R_1^2 R_2 \frac{\Delta R_2}{R_2}}{(R_1 + R_2)^2};$$

ha

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2},$$

tehát R_1 $és$ R_2 azonos pontosságú, akkor e közös tényezőt kiemelve:

$$\Delta R_p = \frac{\Delta R_1}{R_1} \cdot \frac{R_2 R_1 (R_2 + R_1)}{(R_2 + R_1)^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1} R_p,$$

így

$$\frac{\Delta R_p}{R_p} = \frac{\Delta R_1}{R_1}.$$

Azonos pontosságú elemekből tehát soros, illetve párhuzamos kapcsolásokkal ugyanakkora pontosságú eredőt kapunk.

3.3.

Az alábbiakban példát mutatunk az implicitfüggvény-tétel alkalmazására.

<u>Feladat:</u> Határozzuk meg, mely pontokban nulla az

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

egyenlettel definiált *y* függvény deriváltja!

<u>Megoldás:</u>

A feladatban

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

$$F_x' = 3x^2 - 3ay,$$

$$F_y' = 3y^2 - 3ax.$$

Az implicit függvény-tételt (lásd 20. oldal) használva:

$$y'(x) = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \qquad y^2 \neq ax.$$

Ha $y' = 0$, akkor $ay - x^2 = 0$, tehát $y = \frac{x^2}{a}$. Ezt az értéket az eredeti egyenletbe helyettesítve:

$$x^3 + \frac{x^6}{a^3} - 3ax\frac{x^2}{a} = 0,$$

vagyis

$$x^3\left(1 + \frac{x^3}{a^3} - 3\right) = 0,$$

amely egyenlet gyökei:

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = a\sqrt[3]{2}.$$

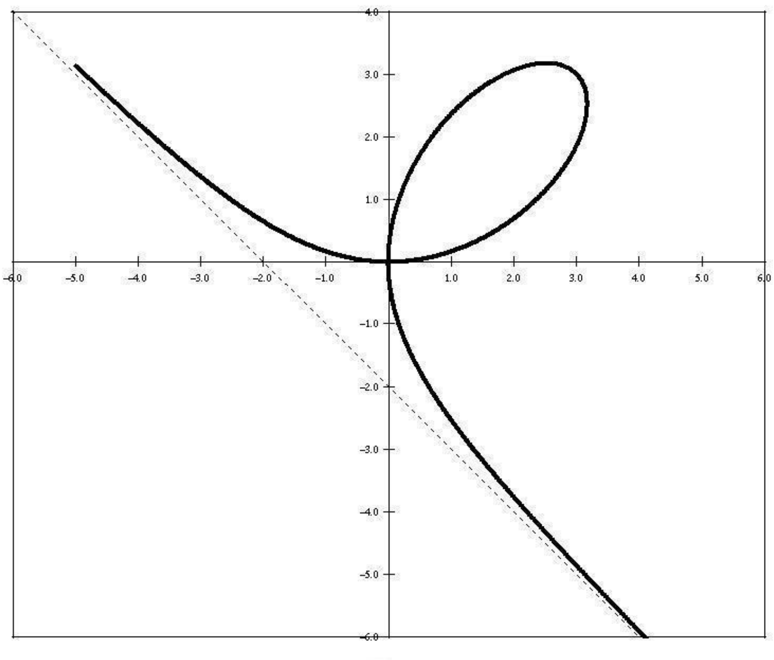
Az $x_1 = 0$ esetben: $y_1 = 0$, így $f_y' = 0$, tehát $y'(0)$ a fenti képlet alapján nem értelmezhető. Az

$$x_2 = a\sqrt[3]{2} \text{ esetében } y_2 = a\sqrt[3]{4}$$

és

$$y_2^2 \neq ax_2, \text{ így e helyen valóban értelmezhető } y' \text{ és } y'(x_2) = 0.$$

Az ábrán ábrázoljuk az $f(x, y) = 0$ nívóhalmazt, ahol az $a = 2$.



4. ábra

Az utolsó két feladatban kétváltozós szélsőértékkeresésre mutatunk példákat.

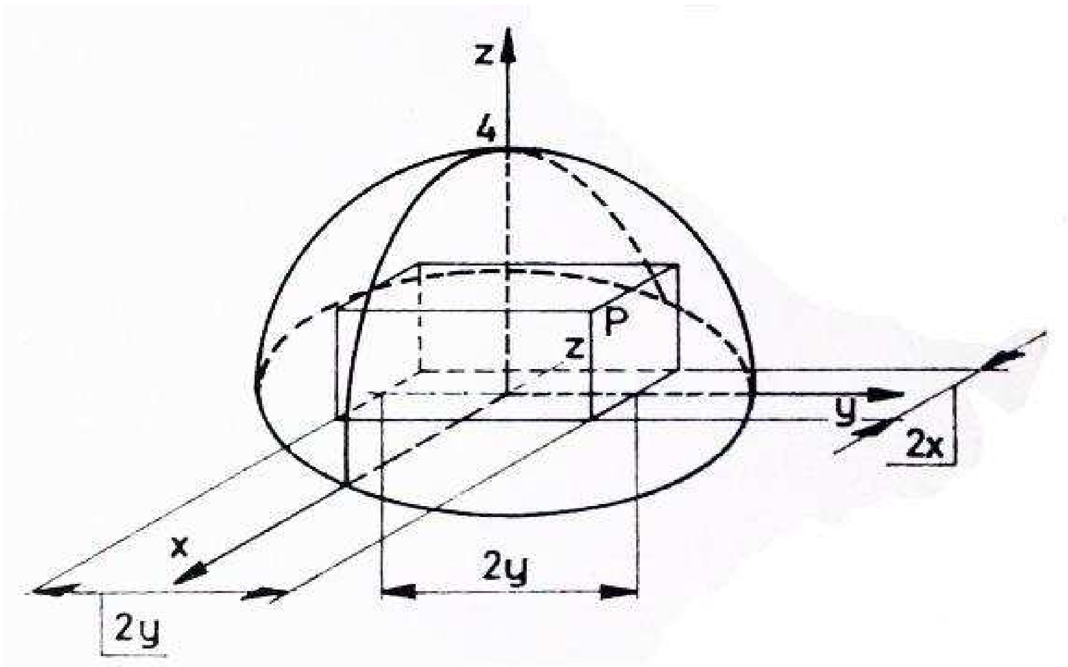
3.4.

<u>Feladat:</u> Határozzuk meg a

$$z = 4 - x^2 - 2y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak!

<u>Megoldás:</u>



5. ábra

a, Az ábrából láthatóan

$$V = 4xyz,$$

ahol, mivel a *P* pont a felületen van

$$z = 4 - x^2 - 2y^2.$$

Tehát a

$$V = 4xy(4 - x^2 - 2y^2) = 16xy - 4x^3y - 8xy^3,$$

$$D_V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

kétváltozós függvény abszolút szélsőértékét keressük. Mivel a függvény értéke a határokon mindenütt nulla, belül pozitív, ezért a maximumhely csak lokális szélsőértékhely lehet.

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$V_x' = 16y - 12x^2y - 8y^3 = 4y(4 - 3x^2 - 2y^2),$$

$$V_y' = 16x - 4x^3 - 24xy^2 = 4x(4 - x^2 - 6y^2).$$

Mivel $x = 0$, illetve $y = 0$ esetén a térfogat nem lehet maximális, így a lehetséges szélsőértékhelyeket az alábbi egyenletrendszer szolgáltatja:

$$3x^2 + 2y^2 = 4,$$

$$x^2 + 6y^2 = 4,$$

amelynek megoldása (csak a pozitív értékek figyelembevételével):

$x = 1$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; tehát $z = 2$. Így a téglatest oldalai: 2,$\sqrt{2}$, 2.

Mivel egy korlátos, zárt tartományon folytonos függvény itt felveszi legnagyobb értékét (a Weierstrass-tételből következik, lásd: 18. oldal), s a tartomány határain $f(x, y) = 0$, biztos, hogy e pont valóban maximumhely. Azt, hogy tényleg a maximális térfogatú téglatest adatait határoztuk meg, az elégséges feltétel vizsgálatával is beláthatjuk:

$$V_{xx}''\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -24xy = -12\sqrt{2} < 0,$$

$$V_{yy}''\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -48xy = -24\sqrt{2},$$

$$V_{xy}''\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16 - 12x^2 - 24y^2 = -8.$$

A determináns

$$\begin{vmatrix} -12\sqrt{2} & -8 \\ -8 & -24\sqrt{2} \end{vmatrix} = 512 > 0,$$

tehát van szélsőérték, és az maximum, mert V_{xx}'' e helyen negatív, $-12\sqrt{2}$.

b, Oldjuk meg a feladatot feltételes szélsőértékfeladatként!

Keressük a

$$V = 4xyz \qquad\qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^{+3}$$

függvény maximumát azzal a feltétellel, hogy a $P(x, y, z)$ pont az $x^2 + 2y^2 + z - 4 = 0$ felületen van.

A $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z - 4$ és legyen $f(x, y, z) = 4xyz$.

Először vesszük az g függvény, majd az f függvény összes változó szerinti parciális deriváltját:

$$g'_x(x, y, z) = 2x,$$
$$g'_y(x, y, z) = 4y,$$
$$g'_z(x, y, z) = 1,$$

ezekből megkapjuk,hogy a $\nabla g = (2x, 4y, 1)$.

$$f'_x(x, y, z) = 4yz,$$
$$f'_y(x, y, z) = 4xz,$$
$$f'_z(x, y, z) = 4xy,$$

ebből következik, hogy $\nabla f = (4yz, 4xz, 4xy)$.

A Lagrange multiplikátor módszert (lásd 19. oldal) alkalmazva:

$\lambda\nabla g = \nabla f$, azaz $\lambda(2x, 4y, 1) = (4yz, 4xz, 4xy)$.

Három egyenletet kapunk: $\begin{cases} \lambda 2x = 4yz \\ \lambda 4y = 4xz \\ \lambda = 4xy \end{cases}$

A három egyenletet átrendezzük úgy, hogy a baloldalon csak a λ maradjon és ebből következik, hogy

$$\frac{4yz}{2x} = \frac{4xz}{4y} = 4xy,$$

majd közös nevezőre hozzuk őket és beszorzunk a kapott nevezővel, így

$$16y^2z = 8x^2z = 4x^2y^2,$$

az egyenletet elosztjuk 4-el,

$$4y^2z = 2x^2z = 4x^2y^2.$$

Ebből:

- $2y^2z = 4x^2y^2$, mindkét oldalt osztva $2y^2$-tel megkapjuk, hogy $z = 2x^2$.
- $x^2z = 4x^2y^2$, mindkét oldalt x^2-tel elosztjuk,így az eredmény $z = 4y^2$.

Tehát a megoldás a következő: $2x^2 = 4y^2 = z$.

A kapott eredményt behelyettesítjük az $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z - 4 = 0$ feltételbe és így megkapjuk, hogy $z = 2$, tehát $x = 1$ és $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ami megfelel előző eredményünknek.

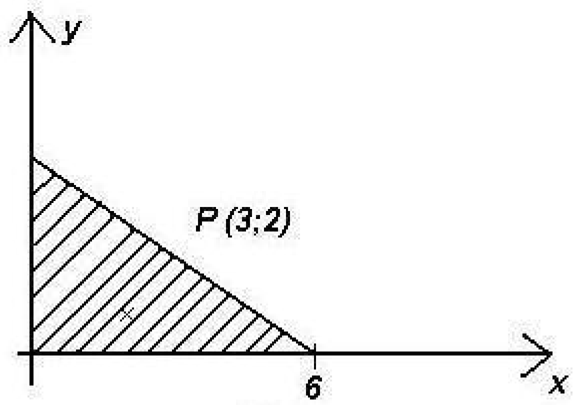
3.5.

<u>Feladat:</u> Határozzuk meg az

$$f: (x, y) \longmapsto (x^2 - 6x)(y^2 - 4y) \qquad\qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény legkisebb és legnagyobb értékét az $x = 0, y = 0, x + y = 6$ egyenesekkel határolt zárt tartományban!

<u>Megoldás:</u>



6. ábra

Korlátos, zárt tartományról van szó, ezért f itt biztosan felveszi legkisebb, illetve legnagyobb értékeit (a Weierstrass-tételből következik, lásd: 18. oldal).

Az első rendű parciálisok:

$$f_x'(x, y) = (2x - 6)(y^2 - 4y),$$

$$f_y'(x, y) = (x^2 - 6x)(2y - 4).$$

Lokális szélsőérték csak azokban a pontokban lehet, amelyekre:

$$(2x - 6)y(y - 4) = 0$$

és

$$x(x - 6)(2y - 4) = 0.$$

Az első egyenletből $x = 3$ vagy $y = 0$, illetve $y = 4$; hasonlóan a másodikból $y = 2$ vagy $x = 0$, illetve $x = 6$. Ennek megfelelően a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(3{,}2);\ P_2(0{,}0);\ P_3(0{,}4);\ P_4(6{,}0);\ P_5(6{,}4).$$

A második parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 2(y^2 - 4y), \;\; f''_{yy}(x,y) = 2(x^2 - 6x), \;\; f''_{xy}(x,y) = (2x-6)(2y-4).$$

A P_1 pontban a determináns:

$$\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} > 0,$$

tehát van lokális szélsőértéke, s mivel $f''_{xx}(P_1) < 0$, így ez lokális maximum.

E pont a tartomány belsejében van, és itt

$$f(3{,}2) = 36.$$

A többi pontról pedig tudjuk, hogy a $P_2(0{,}0)$; $P_3(0{,}4)$; $P_4(6{,}0)$ pontok tartomány határain vannak, a $P_5(6{,}4)$ pont pedig kívül esik a tartományon.

Vizsgáljuk meg az *f* viselkedését a tartomány határain!

Ha $x = 0$, vagy $y = 0$, akkor $f = 0$.

Ha $x + y = 6$, azaz $x = 6 - y$,

akkor a függvény

$$f(y) = (y^2 - 6y)(y^2 - 4y) \qquad y \in [0{,}6].$$

Keressük ezen egyváltozós függvény szélsőértékhelyeit. $y = 0$, illetve 6 esetén a függvényérték zérus, így csak belső pontban lehet szélsőérték. A függvény deriváltja:

$$f'(y) = (2y-6)(y^2-4y) + (y^2-6y)(2y-4).$$

A derivált zérushelyei:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = \frac{3}{4}\left(5+\sqrt{3}\right); \quad y_3 = \frac{3}{4}\left(-\sqrt{3}\right).$$

Mivel $x = 6 - y$, így

$$x_1 = 6; \quad x_2 = \frac{3}{4}(3-\sqrt{3}; \quad x_3 = \frac{3}{4}\left(3+\sqrt{3}\right).$$

f helyettesítési értékei e pontokban:

$$f(Q_1) = 0,$$

$$f(Q_2) \approx -25{,}43,$$

$$f(Q_3) \approx 33{,}08.$$

A függvény tehát adott tartománybeli legnagyobb értékét a tartomány belsejében, a $P(3{,}2)$ pontban; legkisebb értékét a tartomány határán a $Q_2\left(\frac{3}{4}\left(5+\sqrt{3}\right), \frac{3}{4}\left(3-\sqrt{3}\right)\right)$ pontban veszi fel.

Irodalomjegyzék

[1] Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1997

[2] Fekete Zoltán – Zalay Miklós: Többváltozós függvények analízise
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985

[3] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Analízis I.
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005

[4] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis II.
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007

NYILATKOZAT

Név: Katona Edina Mária

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

ETR azonosító: KAEOAAT.ELTE

Szakdolgozat címe: Differenciálszámítás és alkalmazásai

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2011-12-19

a hallgató aláírása