Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Szép gráfok

Szakdolgozat

Témavezető:
Dr. Sziklai Péter
egyetemi docens

Készítette:
Kovács Mária

Budapest
2012

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Sziklai Péter Tanár Úrnak a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségéért, útmutatásaiért. Hermann Györgynek tanácsaiért és lelkes segitőkészségéért. Köszönettel tartozom a családomnak támogatásukért, édesapámnak a segítségéért, valamint barátaimnak a biztatásukért.

Bevezetés

„Euler mester fejét búsan rázza:
Oly talány ez, nincsen megoldása;
nincs oly út, mint uraságtok kérik,
amely minden hidat egyszer érint.” *

A gráfelmélet kialakulását nem lehet egyértelműen meghatározni, ma is vitatott pont, hogy a gráfelmélet, mint önálló tudományága a matematikának, mikor alakult ki. Vannak, akik szerint 1735-ben, amikor is Euler megoldást talált a *Königsbergi hidak* problémájára, mely röviden erről szól: a poroszországi Königsberg lakói azzal a kérdéssel fordultak Eulerhez, hogy végig lehet-e menni a város mind a hét hídján (melyek a folyó két szigetét is érintették) úgy, hogy mindegyik hídon pontosan egyszer haladnak át, és a végén visszaérnek a kiindulási pontjukra. Euler bebizonyította azt, hogy ez lehetetlen. (Euler munkásságáról bővebben: [4]) Más feltevések a gráfelmélet alakulását Kirchhoff nevéhez kötik, ő ugyanis 1847-ben publikálta eredményeit elektromos hálózatokra vonatkozóan, melyben gráfelméleti módszereket alkalmazott villamos hálózatok analízisére: a villamos hálózatok alkatrészeinek összekapcsolási módját gráfokkal modellezte, melynek során az alkatrészek a gráfok éleinek feleltek meg (eredményei ennek megfelelően csak kétpólusú alkatrészekből összekapcsolt hálózatokra alkalmazhatóak közvetlenül). (Lásd: [9]). Mások Cayley 1857-ben megjelent cikkéhez kötik, melyet egy szerves kémiai alkalmazás motivált. Mellettük Guthrie neve is szerepel a listán, aki De Morgan tanítványa volt, és ő fogalmazta meg először a négyszín-tételt (akkor négyszín sejtésnek nevezték): Egy tetszőleges részekre (régiókra) osztott síkot (térképet) ki tudunk úgy színezni négy színnel, hogy két szomszédos régió (ország/megye) ne legyen azonos színű. A gráfelmélet kialakulásáról tudhatunk meg többet [3] könyvéből.

Így nincsen olyan konkrét történelmi dátum, amire kimondhatjuk, hogy a gráfelmélet születéspontja, azonban az nyilvánvaló, hogy az elmúlt évszázadban jelentős fejlődésen ment keresztül a matematika ezen ága. Elterjedtségét

*Eredeti szöveg: Bohdan Zelina, magyar szöveg: Ádám András, Ponticulus Hungaricus, II. évfolyam, 11. szám, 1998 november szemléletességének, egyszerűségének köszönheti, bár ez az egyszerűség csak látszólagos. A matematikán kívül is rengeteg alkalmazása van a gráfelméletnek: műszaki, közgazdasági, informatikai, biológiai, társadalomtudományi területeken.

A szakdolgozatban valamilyen szempontból esztétikus, például nagyon szimmetrikus gráfok konstrukcióinak, tulajdonságainak összegyűjtésére törekszünk. Azért választottam ezt a témát, mert már elsőre megragadott a címe, hiszen nemcsak matematika van benne, hanem szerephez jut a művészet is. A szépség maga szubjektív fogalom, és nincs olyan eszköz a kezünkben, mely egyértelműen meg tudná mondani minden adott dologról, hogy az szép-e avagy sem. Így a dolgozat esetében is előfordulhat, hogy bekerülnek olyan gráfok, melyek első ránézésre nem „szépek”, mégis rendelkeznek olyan tulajdonsággal (tulajdonságokkal), ami érdemesnek teszi őket arra, hogy bekerüljenek a dolgozatba.

Az első fejezetben általánosan foglalkozunk a gráfokkal, definiáljuk, mit is jelent ez a fogalom, valamint a fontosabb, egy-egy gráfot jól jellemző tulajdonságokra is kitérünk.

A második fejezetben igyekszünk választ találni arra a kérdésre, mit is jelent valójában az, hogy egy gráf szép? Ki mit ért alatta, és mik azok a gráfok, amiket a dolgozat szempontjából szépnek tekintünk? Mikor mondjuk egy adott dologról, hogy szimmetrikus? Definiáljuk, hogy a dolgozat szempontjából mikor tekintünk egy gráfot szépnek.

A harmadik fejezetben pedig konkrét gráfokat vizsgálunk meg (Petersen-gráf, Kneser-gráfok), ezeknek a különböző tulajdonságait gyűjtjük össze. Valamint más, szimmetrikus gráfok is bemutatásra kerülnek.

A negyedik fejezet egy rövid összefoglalót tartalmaz a LaTeX-ben használatos csomagokról, ábrák létrehozásáról a PGF/TikZ segítségével, mely alkalmas különböző gráfok megrajzolására.

1. fejezet

Gráfelméleti alapfogalmak

Az alábbiakban [10] alapján áttekintjük a gráfelmélet alapfogalmait.

1.1. Definíciók

1.1. Definíció. Gráf: egy rendezett pár, $G = (V, E)$, ahol V egy nem-üres halmaz, E pedig ebből a halmazból képezhető párok egy halmaza. V elemeit **pontoknak** vagy **csúcsoknak/csomópontoknak**, E elemeit **éleknek** nevezzük. Ha egy G gráfról beszélünk, akkor $V(G)$-vel illetve $E(G)$-vel jelöljük a gráf pontjainak illetve éleinek halmazát, míg a pontok illetve élek számát $v(G)$-vel illetve $e(G)$-vel jelöljük.

1.2. Definíció. Ha az $e \in E$ él a $\{v_1, v_2\}$ párnak felel meg, akkor ez a két pont e **végpontja**. Ha $v_1 = v_2$, akkor e **hurokél**. Ha két különböző nem hurokélnek a végpontjai azonosak, a két élet **párhuzamos** vagy **többszörös élnek** nevezzük. Azokat a gráfokat, amelyekben nincsenek hurokélek és többszörös élek, **egyszerű gráfnak** nevezzük.

A dolgozatban egyszerű gráfok fognak előfordulni.

1.3. Definíció. Ha $e, f \in E$ végpontjai $\{v_1, v_2\}$ illetve $\{w_1, w_2\}$, és $\{v_1, v_2\} \cap \{w_1, w_2\} \neq \emptyset$, akkor e, f **szomszédos élek**. Hasonlóan, v_1 és v_2 **szomszédos pontok**, ha $\{v_1, v_2\} \in E$. v_1 **illeszkedik** e-re, ha annak egyik végpontja.

1.4. Definíció. Egy pont **izolált pont**, ha nincsen vele szomszédos másik pont, vagyis nem illeszkedik egyetlen élre sem. Egy pontra illeszkedő élek száma a pont **fokszáma**. Egy esetleges hurokél kettővel növeli a fokszámot. A v pont fokszámát $d(v)$-vel jelöljük. A maximális fokszámot Δ-val, a minimálist δ-val jelöljük.

1.5. Definíció. k**-reguláris** egy gráf, ha minden pontjának foka k.

1.6. Definíció. Ha egy n pontú egyszerű gráf tetszőleges két pontja szomszédos, akkor n pontú **teljes gráfnak** nevezzük, jelölése: K_n.

1.7. Definíció. A $G' = (V', E')$ gráf a $G = (V, E)$ gráf **részgráfja**, ha $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, valamint egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra G'-ben, ha G-ben is illeszkedők.

1.8. Definíció. Egy $G' = (V', E')$ gráf a $G = (V, E)$ gráf **feszítő részgráfja**, ha G' részgráfja G-nek, és $V' = V$, azaz ha a részgráf G összes pontját tartalmazza. Ha E' pontosan azokból az E beli élekből áll, amelyeknek mindkét végpontja V'-ben van, és E' az összes ilyen élet tartalmazza, akkor G' a G gráf V' által **feszített részgráfja**.

1.9. Definíció. Egy G gráf **komplementerén** azt a $\bar{G}$ gráfot értjük, amelyben azok a $V(G)$-beli pontpárok vannak összekötve, amelyek G-ben nincsenek.

1.10. Definíció. Egy **irányított él** reprezentálható egy rendezett csúcspárral. Az **irányított gráf** hasonló az irányítatlan gráfhoz, azzal a különbséggel, hogy élei irányítottak.

Egy gráf definíció szerint élek és csúcsok halmazából áll, melyet többféleképpen megadhatunk:

- halmazokkal: Megadjuk a csúcsok halmazát, majd ezután az élek halmazát: vesszük a csúcsok halmazának önmagával való direkt szorzatának egy részhalmazát:

  1.11. Definíció. A és B halmazok **direkt szorzatán** azt a halmazt értjük, melynek elemei olyan rendezett párok, melyek első elem A-beli, második eleme B-beli, és vesszük az összes lehetséges ilyen rendezett párt.

- szomszédsági mátrixszal:

  1.12. Definíció. Az n csúcsú G gráf $A(G) = (a_{ij})$ **szomszédsági mátrixán** a következő $n \times n$-es mátrixot értjük:

  $$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{ha az } i\text{-edik és } j\text{-edik pont között } k \text{ darab párhuzamos él halad} \\ l, & \text{ha } i = j \text{ és az } i\text{-edik ponthoz } l \text{ darab hurokél illeszkedik} \end{cases}$$

- illeszkedési mátrixszal:

1.13. Definíció. Az n csúcsú, e élű G gráf $B(G) = (b_{ij})$ **illeszkedési mátrixán** a következő $n^{\times}e$-es mátrixot értjük:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha a } j\text{-edik él nem illeszkedik az } i\text{-edik ponthoz} \\ 1, & \text{ha a } j\text{-edik élnek az } i\text{-edik pont a kezdőpontja} \\ -1, & \text{ha a } j\text{-edik élnek az } i\text{-edik pont a végpontja} \end{cases}$$

- grafikusan:

  1.14. Definíció. Egy gráf **lerajzolása**: a gráf csúcsainak a sík pontjait feleltetjük meg (különbözőeknek különbözőt), és ezeket kicsi körlapokkal jelöljük, az éleknek pedig önmagukat nem metsző görbéket feleltetünk meg.

1.15. Definíció. Síkbarajzolható gráf: olyan gráf, mely lerajzolható úgy a síkba, hogy az élei nem metszik egymást.

1.16. Definíció. Egy síkbarajzolható gráf **duális gráfja** az a gráf, melynek csúcsai az eredeti gráf tartományai, és két csúcs annyi éllel van összekötve, ahány közös határszakasza volt a megfelelő tartományoknak.

1.17. Definíció. Egy G hurokmentes gráf k **színnel kiszínezhető**, hogyha minden csúcsot ki lehet színezni k szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen. G **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha G k színnel kiszínezhető, de $k - 1$ színnel nem. Egy ilyen színezésnél az azonos színt kapott pontok halmazát **színosztálynak nevezzük**.

1.18. Definíció. Egy G gráf egy teljes részgráfját **klikknek** nevezzük. A G-ben található maximális méretű klikk méretét, azaz pontjainak számát $\omega(G)$-vel jelöljük, és a gráf **klikkszámának** nevezzük.

2. fejezet

Szép gráfok

„Mi az a szimmetria? elmélkedett magában Alice, amikor meglátta Tükörország kapuja felett a feliratot. Csupaút erdőben találkozott a diákkal, a sportolóval és a tudóssal. Nyomban meg is kérdezte tőlük, hogy mit tudnak róla. A diák szerint: olyan dolgok, melyek különböző nézőpontból tekintve is ugyanúgy néznek ki ... egy dologgal valamit teszel, akkor ugyanolyan marad, mint előtte volt. A tudós véleménye: A szimmetria, bármily tágan vagy szűken is értelmezzük, egyike azoknak a fogalmaknak, amelyek segítségével a történelem folyamán az emberek igyekeztek a rendet, szépséget és tökéletességet megérteni és megvalósítani. (H. Weyl) A szimmetria gyönyörködteti az emberi elmét; mindenki szereti az olyan mintás tárgyakat, amelyek valamilyen módon szimmetrikusak ... de ami minket a szimmetriában leginkább érdekel, az az, hogy magukban az alapvető törvényekben is létezik(R. P. Feynman). Mit gondolt a sportoló? Amikor kosárra dobok, tudom, hogy a labda tökéletesen szimmetrikus parabolapályán fog szállni, amit a kosár megtör. Ez olyan jópofa, hogy a kosár mindig megszakítja a szimmetriát. (Michael Jordan). Ezek után Alice teljesen összezavarodott ... ” [*]

A szimmetria valamilyen arányosságot, egységet, összhangot fejez ki, megnyugvást ad a szemlélődő embernek. A *szimmetria* görög eredetű szó, a $\sigma\nu\mu$ (snm) és $\mu\varepsilon\tau\rho o\sigma$ (metros) szavak összetételéből ered: „a dolgok közös mérték”-ét jelenti, és ez nem csak a matematika területére korlátozódik.

Az emberek már ősidők óta szeretik a szimmetrikus dolgokat, a korai művészeti alkotásokban is fellelhetőek az erre utaló nyomok. Az ókori görögök kedvelték az aranymetszést, szimmetriát, ez leginkább épületeiken, edé-

[*] Fekete Soma cikke: Természet Világa, 133. évfolyam, 7. szám, 2002. július

nyeiken, szobraikon figyelhető meg, melyeknek arcait mesterségesen tették szimmetrikussá, hogy még vonzóbb legyen az emberek számára. Ezen kívül a természet maga is tele van szimmetriákkal: ez leginkább a biológiával és kémiával foglalkozó szakemberek számára látható: a virágok, növények szinte mindegyike rendelkezik valamilyen szimmetriával. A molekulák szerkezete, vagy a DNS is bizonyos szimmetriával rendelkeznek. Akár időben is gondolkodhatunk: az éjszakák és nappalok váltakozása is egy meghatározott rend szerint történik, csakúgy, mint az évszakoké. Még a zenében is jelen van a szimmetria: A dodekafónia, mely a 12 zenei hang egyenrangúságát jelenti, bizonyos szabályok keretei közé „kényszeríti” a zeneszerzőt, és az alapsornak 3 változata lehetséges: tükörfordítás (azonos hangról indulva a hangközök az eredetivel ellenkező irányban mozognak), rákfordítás (az alapsor hátulról visszafelé olvasva), ráktükör (a rákfordítás tükörfordítása). Számomra az egyik legszebb a kristályok szerkezete, és a hópelyheké (amik valójában vízkristályok). Itt azonban már megjelennek a fraktálok is, melyekről szintén nagyon sokat lehetne írni.

Így azt gondolom, hogy a szépség és a szimmetria fogalma nem választhatók el egymástól, és az egyik nincs a másik nélkül. A matematikában előfordul a szimmetria szigorúbb, egzaktabb értelmezése is:

- szimmetrikus számok: olyan számok, melyek számjegyeit fordított sorrendben is az eredeti számot kapjuk.
- szimmetrikus mátrixok: olyan négyzetes mátrixok, melyek egyenlők a transzponáltjukkal. *
- szimmetrikus differencia képzés: olyan halmazművelet, mely két halmazból egy olyan új halmazt hoz létre, melynek elemei azok, amiket pontosan az egyik halmaz tartalmaz.
- szimmetrikus polinom: olyan többváltozós polinom, melynél két változó felcserélésével vele egyenlő polinomot kapunk.
- szimmetria a geometriában: egy alakzat lehet tengelyesen-, középpontosan-, illetve forgásszimmetrikus. A **geometriai transzformációk** olyan függvények, melyeknek értelmezési tartományuk és értékkészletük is ponthalmaz. A szimmetrikus transzformációk olyan transzformációk, melyek megegyeznek az inverzükkel (involúció) és távolságtartóak (izometria). Egy alakzat akkor szimmetrikus, ha van olyan szimmetria, mely az alakzatot önmagába képezi le. Egy síkbeli alakzat **tengelyesen szimmetrikus**, ha az alakzat síkjában létezik olyan tengely, amelyre

*Azaz $a_{ij} = a_{ji}$ minden i, j-re.

vonatkozó tükrözésnél az alakzat képe önmaga. Egy alakzat **középpontosan szimmetrikus**, ha létezik olyan pont, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat képe önmaga. Egy alakzat **forgásszimmetrikus**, ha létezik olyan forgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át. ([6] alapján.)

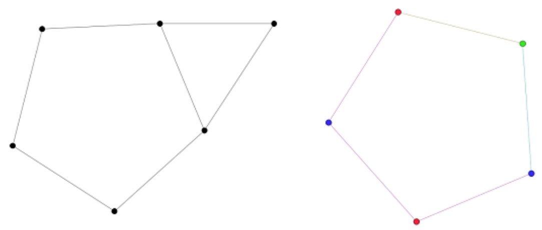
Mik is azok a szép gráfok? A szépség nem egy egzakt fogalom, és matematikailag nincsen egyértelműen definiálva, mit tartunk annak. A szép szerkezet arányosat, tökéleteset jelent. Erre a kérdésre azonban többen többféle választ is adtak, és ezek a válaszok különbözőek, mindegyik más-más tulajdonsága alapján nevez egy gráfot szépnek. Így az is előfordulhat, hogy bár egy gráf lerajzolása nem éppen nevezhető szépnek esztétikai szempontból, mégis van valamilyen olyan matematikai tulajdonsága, ami alapján szépnek nevezhető. Az irodalomban több megközelítés is létezik a szép gráf fogalmára:

Elsőként [15] alapján definiáljuk a szép gráfokat, mely a perfekt gráfok felől közelíti meg a „szépséget”.

2.1. Definíció. Egy G gráf **perfekt**, ha $\chi(G) = \omega(G)$ és G minden G' feszített részgráfjára is teljesül, hogy $\chi(G') = \omega(G')$.

2.2. Definíció. Egy G gráfot **szépnek** nevezünk, ha a klikkszáma és a kromatikus száma megegyezik.

2.3. Példa. Azaz [15] szerint a perfektség erősebb a szépségnél: Ha egy gráf perfekt, akkor szép is, de fordítva nem igaz. a 2.1 ábrán egy példát láthatunk erre. A gráfra: $\chi(G) = 3$ és $\omega(G) = 3$, azaz a gráf szép, de nem igaz, hogy $\forall G'$ feszített részgráfjára is teljesül, hogy $\chi(G') = \omega(G') : \chi(G') = 3$ és $\omega(G') = 2$.



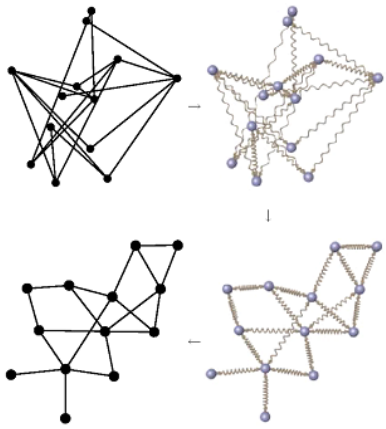
2.1. ábra. A gráf szép, de nem perfekt, mert a jobb oldali feszített részgráfja nem teljesíti a perfektség feltételeit

Yehuda Koren [11] szerint a szépség problémájának megközelítése a következőt jelenti:

2.4. Definíció. Egy gráfot akkor nevez **szépnek**, ha a lerajzolt gráfnak energiaminimuma van.

A gráf szépsége a grafikai alakhoz köthető: a grafikon akkor szép, ha kielégít egy bizonyos energiaminimum követelményt. * Ezen minimum elérése esetén a pontok és élek elrendezése optimális, és szépnek nevezhető. Ehhez a „force-based” algoritmust használja: az eljárás célja esztétikusan ábrázolni nagy méretű gráfokat úgy, hogy minél kevesebb keresztezés legyen az élek között, és az élek többé-kevésbé egyenlő hosszúságúak legyenek. Az algoritmus a következőképpen működik: erőket rendel mind az élekhez, mind a csomópontokhoz, a következő módon: az éleket rugónak tekinti (vonzó erő), a csomópontokat pedig elektromosan töltött részecskéknek (taszító erő). Így az egész gráf egy fizikai rendszernek tekinthető: a csomópontok vagy vonzzák, vagy taszítják egymást a töltésüktől függően, amíg egyensúlyi helyzetbe nem kerülnek. Ha ez megtörtént, akkor a gráf lerajzolása befejeződött. Erre láthatunk példát a 2.2 ábrán.

*Egy fizikai modellt használ a gráf megrajzolásához, melyhez a gráf elrendezését, ábrázolását veszi alapul. Az energiaminimum a következőt jelenti: két pont között egy vonzó és egy taszítóerő lép fel. A vonzó erő arányos az összekötő él hosszával, mintha rugó lenne ($F = k \cdot (x - x_0)$). A taszító erő az elektromos töltés analógiáját használja ($F = \frac{-k}{x^2}$)-itt x a távolság. Ha x kicsi, nagyobb a taszítás, ha x nagy, nagyobb a vonzás. Egyensúlyban az erők egyenlők.



2.2. ábra. A kiindulási gráf nehezen áttekinthető, de a „force-based” algoritmus után egy jobban átlátható gráfot kapunk

Most olyan gráfokkal szeretnénk foglalkozni, ahol a „szépség” azt a tulajdonságot jelenti, hogy egy gráf rendelkezik valamilyen szimmetrikus tulajdonsággal. Ehhez először definiálni kell, pontosan mi is az a művelet, hogyan lehet bármit is értelmezni gráfok között, mi is az a szimmetria. Itt ismét [10]-re támaszkodom.

2.5. Definíció. Legyen H tetszőleges halmaz, jelölje H^n a H halmaz elemeiből képzett n hosszú sorozatokat. Az $f : H^n \to H$ mindenütt értelmezett függvényt n változós **műveletnek** nevezzük.

2.6. Definíció. Egy G nem üres halmaz **csoport**, ha értelmezett rajta egy $\circ$ kétváltozós művelet a következő tulajdonságokkal:

(a) a művelet asszociatív: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ $\quad \forall f, g, h \in G$-re

(b) létezik egységeleme: $\exists e \in G$, hogy: $f \circ e = e \circ f = f$ $\quad \forall f \in G$-re

(c) G $\forall$ elemének $\exists$ inverze: $\forall f \in G$-re $\exists f' \in G$, hogy: $f \circ f' = f' \circ f = e$

2.7. Definíció. A G csoport elemszámát $|G|$-vel jelöljük, és G **rendjének** hívjuk.

2.8. Definíció. n-ed fokú **szimmetrikus csoportnak** nevezzük n elem permutációit. (önmagára való bijektív leképezéseit).

2.9. Definíció. Egy gráf **szimmetriája (automorfizmusa)** a csúcsainak olyan permutációja, amely megtartja az élekkel való összekötöttséget (és így a nem összekötöttséget is). Ezek a szimmetriák a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak. Jelölése: $\mathrm{Aut}(G)$.

[13] alapján: Egy gráf **szimmetrikus**, ha él- és csúcstranzitív. (Egy gráf **éltranzitív**, ha az összes (e_1, e_2) élpár esetén létezik egy $\lambda \in \mathrm{Aut}^*(G)$ élautomorfizmus, hogy $\lambda(e_1) = e_2$. **Csúcstranzitív** gráf egy olyan gráf, aminek az automorfizmus csoportja tranzitív). Ezzel a definícióval azonban vigyázni kell, mert gyakran az irányított él-tranzitív gráfokat nevezik szimmetrikus gráfoknak (irányított él-tranzitív gráf: olyan gráf, melynek automorfizmusa tranzitívan hat az irányított éleken), annak ellenére, hogy vannak olyan gráfok, melyek szimmetrikusak (hiszen él- és csúcs tranzitívak), és mégsem irányított él-tranzitívak. A szimmetrikus gráfok mindig regulárisak. **Félszimmetrikus gráfok** azok a gráfok, melyek regulárisak, éltranzitívak, de nem csúcstranzitívak. **Nullszimmetrikusak** azok a gráfok, melyek 3-regulárisak és csúcstranzitívak, és melyeknek az éleit három orbitra osztja az automorfizmuscsoportja. Ennek speciális esete, amikor a gráf éltranzitív is, ezeket a gráfokat hívjuk 3**-reguláris szimmetrikus gráfoknak** vagy más néven **Foster gráfoknak**.

Más értelmezések szerint azok a gráfok szimmetrikusak, melyek irányított éltranzitívak. Így az él- és csúcstranzitív gráfok a félszimmetrikus gráfok.

A dolgozatomban az első definíció alapján igyekszünk összegyűjteni és csoportosítani a szép gráfokat. De még ez a definíció sem teljes, hiszen nem foglalkozik azzal, hogy a síkban milyen elrendezés alapján rajzoljuk fel a gráfot, pedig ez egy lényeges feltétele annak, hogy első ránézésre el tudjuk dönteni egy gráfról, hogy szép-e, vagy sem.

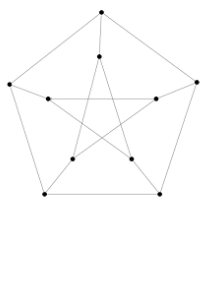
3. fejezet

Petersen- és Kneser-gráfok, egyéb példák

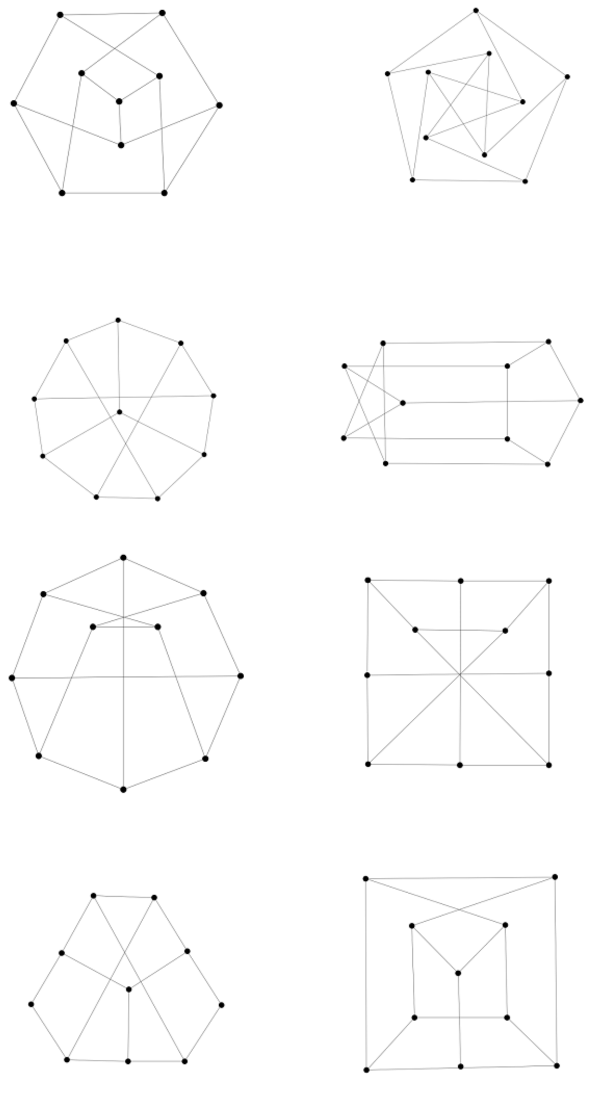
3.1. Petersen-gráf

A Petersen-gráf nevét Julius Peter Christian Petersen dán matematikusról kapta. Petersen többek között foglalkozott a matematikán kívül fizikával, közgazdasággal, azonban a legfontosabbnak tartott munkáit gráfelméletben érte el. 1891-ben írta első ilyen témájú cikkét, a róla elnevezett gráf azonban csak egy 1898-as munkájában jelent meg.

3.1. Definíció. Petersen-gráf: Legyen $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ egy 5 elemű halmaz. Ebből a P halmazból kiválasztjuk az összes kételemű részhalmazt, ezek száma: $\binom{5}{2} = 10$. Ezeket a kételemű halmazokat megfeleltetjük a gráf csúcsainak: $V = \{\{0, 1\}\{0, 2\}\{0, 3\}\{0, 4\}\{1, 2\}\{1, 3\}\{1, 4\}\{2, 3\}\{2, 4\}\{3, 4\}\}$. Akkor van él a gráf két $u, v \in V$ csúcsa között ha a csúcsoknak megfelelő halmazok diszjunktak: $E = \left\{\{u, v\} \in \binom{V}{2} : u \cap v = \emptyset\right\}$



3.1. ábra. A Petersen gráf egy lerajzolása



3.2. ábra. A Petersen-gráf más lerajzolásai

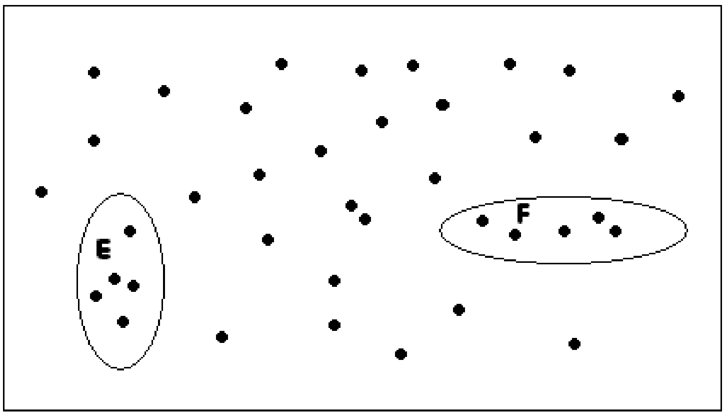
3.2. Definíció. **Halmazrendszernek** egy alaphalmaz részhalmazainak családját nevezzük. A halmazrendszer **elemei** az alaphalmaz részhalmazai. Jelölés: $A \in F$. Az alaphalmaz elemeit kisbetűkkel jelöljük: $x, y \in A$. Halmazrendszer például egy V alaphalmaz néhány kételemű részhalmaza. Ez egy gráfnak felel meg, a kételemű részhalmazok az élek. Emiatt a halmazrendszereket **hipergráfoknak** is nevezik. Ha az összes részhalmaz r elemű, akkor r**-uniform** hipergráfról (vagy halmazrendszerekről beszélünk).

A következő tétel (C.Berge - [1]) azt mondja ki, hogy ha van egy hipergráf, melynek α egy automorfizmusa, akkor minden ilyen α automorfizmus úgy jön létre, hogy veszem az n elem permutációját, és más automorfizmus nem létezik.

3.3. Tétel. *Legyen α az $n(n \geq 3r)$ pont összes r-eséből álló K_n^r hipergráf élgráfjának egy automorfizmusa. Ekkor α -t K_n^r egy automorfizmusa (vagyis $V(K_n^r)$ egy permutációja) indukálja. Ez az eredmény $3r \geq n > 2r$-re is igaz, de $n \leq 2r$-re már nem.*

A K_n^r hipergráf élgráfja egy olyan gráf, melynek csúcsai az eredeti gráf élei, és él megy két csúcs között, ha a metszetük nem üres. A bizonyítás [12] alapján készült, kiegészítve a megértést segítő megjegyzésekkel. Az α permutáció az r-eseket „kavargatja”, megtartja a diszjunktságot. A kérdés az, hogy vajon az elemek útját is vissza tudjuk-e követni?

Bizonyítás. Legyen $E, F \in E(K_n^r)$ (E és F két hiperél). Ekkor K_n^r E-től és F-től diszjunkt éleinek száma (sem E-vel, sem F-fel nincsen közös része):



3.3. ábra. például: n pontunk van, és $r = 5$-ös csoportokat készítünk

Mindkét oldal az E-től és F-től diszjunkt éleket számolja: a bal oldal: a maradék $n - |E \cup F|$ élből készítünk r-eseket, a jobb oldal: az összes $(= n)$ pontból levonjuk az E-ben vagy F-ben lévő pontokat:

$$\binom{n - |E \cup F|}{r} = \binom{n - 2r + |E \cap F|}{r}$$

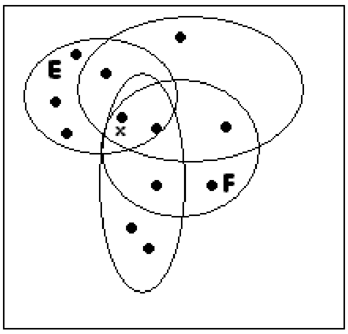
Hasonlóan a K_n^r $\alpha(E)$-től és $\alpha(F)$-től diszjunkt éleinek száma:

$$\binom{n - 2r + |\alpha(E) \cap \alpha(F)|}{r}$$

Tehát

$$\binom{n - 2r + |E \cap F|}{r} = \binom{n - 2r + |\alpha(E) \cap \alpha(F)|}{r}$$

Mivel az volt a feltétel, hogy $n \geq 3r$, így $n - 2r \geq r$ azaz a számláló mindkét oldalt pozitív, így: $|E \cap F| = |\alpha(E) \cap \alpha(F)|$. Azt akarjuk megmutatni, hogy bármely adott x pontot tartalmazó r-esek halmaza egy $\beta(x)$ pontot tartalmazó r-esek halmazába képződik le. Ez így definiálja $V(K_n^r)$ egy β permutációját, ami α-t indukálja. Tehát legyen $x \in V(K_n^r)$, és E, F két olyan él, melyekre $E \cap F = \{x\}$:

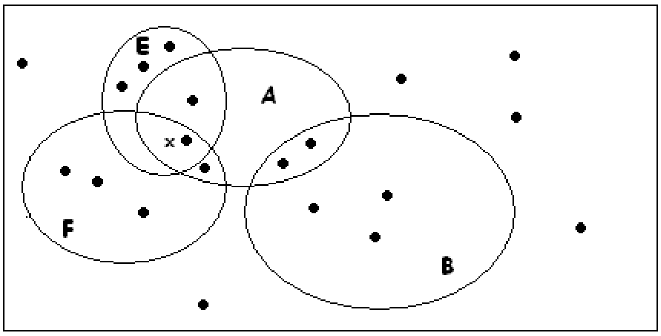


3.4. ábra. E és F olyan r-esek, melyeknek egyetlen közös pontja: x

Ekkor a fentiek szerint $\alpha(E)$-nek és $\alpha(F)$-nek van egy egyértelmű közös $\beta(x)$ pontja. (Ezt láttuk be az előbb). Azt állítjuk, hogy ha bármely $A \in E(K_n^r)$ él tartalmazza x-et, akkor $\alpha(A)$ tartalmazza $\beta(x)$-et (és megfordítva). Legyen $A \in E(K_n^r)$, $x \in A$, és legyen B olyan r-es, melyre $B \cap A = A - E - F$. Lásd: a 3.5 ábrán.

Így a szita-formula felhasználásával:

$$|B \cap A| = |A - E - F| = |A| - |A \cap E| - |A \cap F| + |A \cap E \cap F| =$$



3.5. ábra. $A \in E(K_n^r)$, $x \in A$, és B olyan r-es, melyre $B \cap A = A - E - F$

$$= r + 1 - |A \cap E| - |A \cap F|$$

Mivel

$$|\alpha(B) \cap \alpha(E)| = |B \cap E| = 0$$

$$|\alpha(B) \cap \alpha(F)| = |B \cap F| = 0$$

azt kapjuk, hogy

$$|\alpha(B) \cap \alpha(A)| \leq |\alpha(A) - \alpha(E) - \alpha(F)| =$$

$$= r - |\alpha(A) \cap \alpha(E)| - |\alpha(A) \cap \alpha(F)| + |\alpha(A) \cap \alpha(E) \cap \alpha(F)|$$

Itt $|\alpha(A) \cap \alpha(B)| = |B \cap A|$, $|\alpha(A) \cap \alpha(E)| = |A \cap E|$, $|\alpha(A) \cap \alpha(F)| = |A \cap F|$, tehát $|B \cap A| = r + 1 - |A \cap E| - |A \cap F|$-ből következik, hogy:

$$|\alpha(A) \cap \alpha(E) \cap \alpha(F)| \geq 1$$

azaz $\beta(x) \in \alpha(A)$.
A második rész bizonyítása:
Két olyan adott E és F r-estől diszjunkt r-esek száma, melyekre: $|E \cap F| = r - 1$:

$$\binom{n-r-1}{r} > 0$$

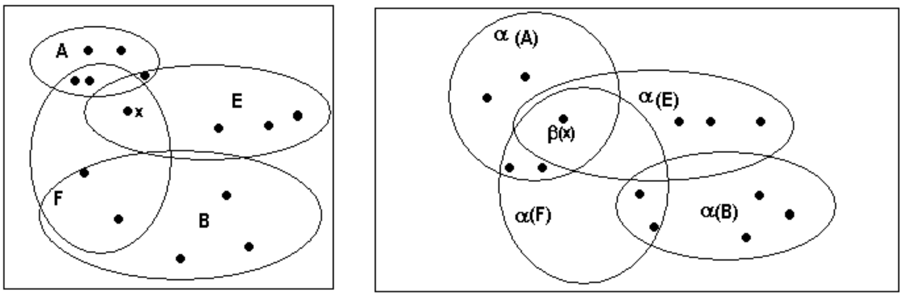
Azaz E-nek és F-nek a lehető legtöbb közös pontja van. Az $n > 2r$ feltételre szükség van, hiszen a binomiális együttható tulajdonságai miatt kell, hogy $n - r - 1 > r$ amiből következik, hogy $n > 2r$.

És ennél kevesebb, ha $|E \cap F| < r - 1$. Emiatt $|E \cap F| = r - 1$ akkor és csak akkor, ha $|\alpha(E) \cap \alpha(F)| = r - 1$. Vagyis most már tudjuk, hogy ha a metszet üres, illetve ha a metszet elemszáma $r - 1$, akkor az automorfizmus után is igaz lesz, hogy üres metszetű r-esek képe üres metszetű lesz, és ha eredetileg $r-1$-ben metszette egymást két r-es, akkor ez igaz a képükre is.

Most tegyük fel, hogy már minden $k = 0, 1, \dots k_0$-ra tudjuk (indukció), hogy $|E \cap F| = k$ akkor és csak akkor, ha $|\alpha(E) \cap \alpha(F)| = k$ ($k = 0$-ra biztosan tudjuk ezt). Ekkor $|E \cap F| = k_0 + 1$ akkor és csak akkor, ha $|E \cap F| > k_0$, és van olyan A r-es, melyre $|E \cap A| = r - 1$ és $|F \cap A| = k_0$; ez akkor és csak akkor áll, ha $|\alpha(E) \cap \alpha(F)| > k_0$, és van olyan A r-es, melyre $|\alpha(E) \cap \alpha(A)| = r - 1$ és $|\alpha(F) \cap \alpha(A)| = k_0$; ami viszont azzal ekvivalens, hogy $|\alpha(E) \cap \alpha(F)| = k_0 + 1$.

Ez bizonyítja, hogy $|E \cap F| = |\alpha(E) \cap \alpha(F)|$ bármely két E és F r-esre.

Legyen x a K_n^r egy pontja, E és F pedig két olyan r-es K_n^r-ben, melyekre $E \cap F = \{x\}$. Legyen $\alpha(E) \cap \alpha(F) = \{\beta(x)\}$, megmutatjuk, hogy $x \in A$-ból $\beta(x) \in \alpha(A)$ következik, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy $x \notin A$-ból $\beta(x) \notin \alpha(A)$ következik.



3.6. ábra. $x \notin A$ és tegyük fel indirekt, hogy $\beta(x) \in \alpha(A)$

Legyen $x \notin A$ és tegyük fel indirekt, hogy $\beta(x) \in \alpha(A)$. Legyen $|A \cap E| = i$, $|A \cap F| = j$, $d = |V(K_n^r) - A - E - F|$. (a 3.6 ábrán.) Ekkor

$$d = n - (3r - 1 - i - j) \leq i + j + 1 \leq r$$

Azt is tudjuk, hogy

$$|V(K_n^r) - A - \{x\}| = n - r - 1 \geq r$$

tehát találtunk olyan B r-est, melyre

$$V(K_n^r) - A - E - F \subseteq B \subseteq V(K_n^r) - A - \{x\}$$

Tekintsük $\alpha(B)$-t. Nyilvánvaló, hogy $\alpha(B) \cap \alpha(A) = \emptyset$, tehát $\beta(x) \notin \alpha(B)$. Továbbá

$$|\alpha(B) \cap \alpha(E)| = |B \cap E|$$

$$|\alpha(B) \cap \alpha(F)| = |B \cap F|$$

és így

$$|\alpha(B) - \alpha(E) - \alpha(F)| = |B| - |B \cap E| - |B \cap F| = d$$

Emiatt

$$|V(K_n^r) - \alpha(A) - \alpha(E) - \alpha(F)| \geq |\alpha(B) - \alpha(E) - \alpha(F)| = d$$

De

$$|V(K_n^r) - \alpha(A) - \alpha(E) - \alpha(F)| = n - 3r + |\alpha(A) \cap \alpha(E)| +$$
$$+ |\alpha(A) \cap \alpha(F)| + |\alpha(E) \cap \alpha(F)| - |\alpha(A) \cap \alpha(E) \cap \alpha(F)| =$$
$$n - 3r + i + j + 1 - 1 = d - 1$$

ami ellentmondás □

A tételt alkalmazva a Petersen-gráfra, azt kapjuk, hogy a szimmetriák száma: $5! = 120$.

3.2. Kneser-gráf

A Kneser-gráfok nevüket Martin Kneser, német matematikusról kapták.

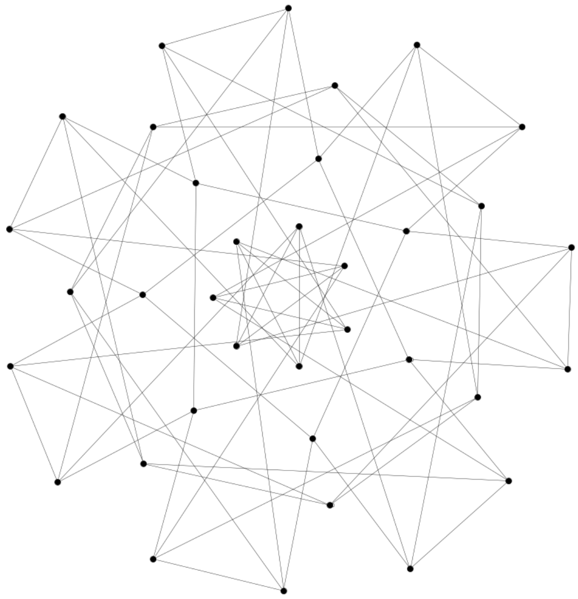
3.4. Definíció. Kneser-gráf: Legyenek $1 \leq k < n$. $k, n \in \mathbb{N}$. Ekkor a $KG(n, k)$ Kneser-gráf csúcspontjait egy n-elemű halmaz k-elemű részhalmazai alkotják, két csúcsot összekötünk, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Csúcsainak száma: $\binom{n}{k}$; egy csúcsának fokszáma: $\binom{n-k}{k}$ Ha $k > \frac{n}{2}$, akkor érdektelen a dolog, hiszen nincsenek diszjunkt halmazok, így nincsenek élek, hasonlóan a $k = \frac{n}{2}$ eset sem érdekes számunkra. Így $k < \frac{n}{2}$ esetben alkalmazhatjuk a tételt.

3.5. Definíció. Johnson-gráf:A Kneser-gráf komplementere. Csúcsai egy n elemű halmaz k elemű részhalmazai, két csúcsa akkor van összekötve, ha $k - 1$ elemű részhalmazban találkoznak. Jelölése: $J(n, k)$. Csúcsainak száma: $\binom{n}{k}$; egy csúcsának fokszáma: $k(n - k)$

3.6. Példa. A $KG(5, 2)$ gráf megegyezik a Petersen gráffal.

3.7. Példa. A $KG(7, 3)$ gráf látható a 3.7 ábrán. Csúcsai száma: $\binom{7}{3} = 35$

A Kneser gráfokra is igaz, hogy a $KG(n, r)$ szimmetriáinak száma az n elem permutációi, azaz a $KG(n, r)$ szimmetriáinak száma: $n!$

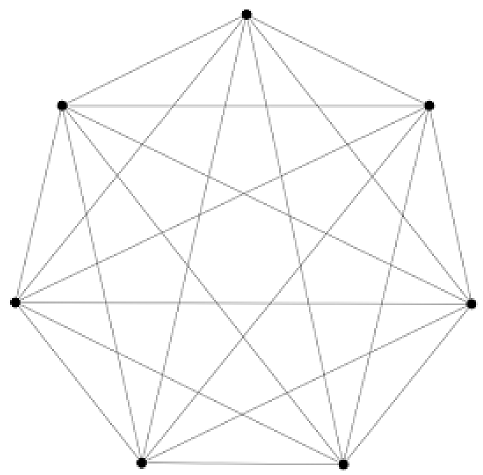


3.7. ábra. A $KG(7,3)$ gráf

3.3. További példák

Ez a szakasz [13] alapján készült.

- Szimmetrikus gráfok: Petersen, Clebsch, Möbius-Kantor, Pappus, Desargues, Doyle, Coxeter.
- Félszimmetrikus gráf: Folkman.
- Irányított él-tranzitív gráfok: Möbius-Kantor, Desargues, Nauru, Shrikhande.
- 3 reguláris szimmetrikus: Petersen, Möbius-Kantor, Pappus, Desargues, Nauru, Coxeter, Dyck.
- Bármely n pontú teljes gráf is szimmetrikus, csúcsszáma: n, élszáma: $\frac{n(n-1)}{2}$, automorfizmusainak száma: $n!$



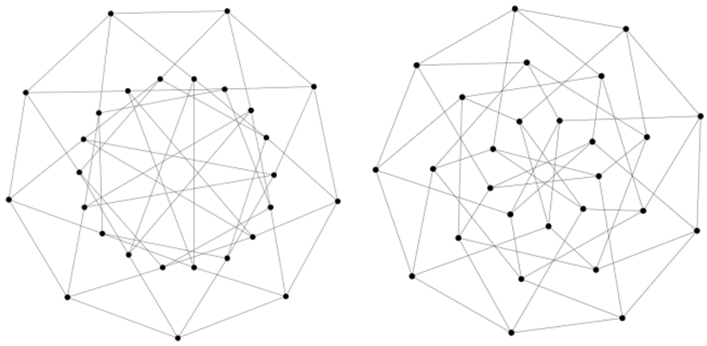
3.8. ábra. A K_7 teljes gráf

3.8. Definíció. Egy G összefüggő gráf **átmérőjének** hívjuk a két legtávolabbi csúcsának távolságát (az összes csúcspár közötti legrövidebb utak közül a leghosszabbnak a hossza).

3.9. Definíció. Egy G gráfban egy kört **Hamilton-körnek** nevezünk, ha a gráf minden csúcsán pontosan egyszer halad át.

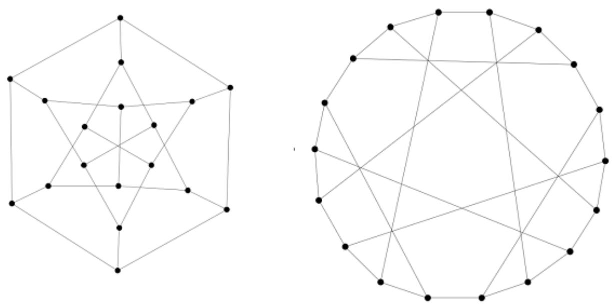
A következőkben a fent felsorolt gráfokra kétféle lerajzolási módot is megadunk, hogy lássuk, nem csak egyféleképpen tudunk ábrázolni egy-egy gráfot, illetve nem csak egy „szépnek” nevezhető lerajzolásuk létezik, hanem esetenként több is.

Doyle gráf vagy **Holt gráf**: A nevét Peter G. Doyle és Derek F. Holt után kapta, akik egymástól függetlenül fedezték fel 1976-ban illetve 1981-ben. A gráfnak 27 csúcsa, és 54 éle van, automorfizmusainak száma 54. A gráf átmérője 3. Összesen 98472 különböző Hamilton-köre van, és 4-reguláris, szimmetrikus.



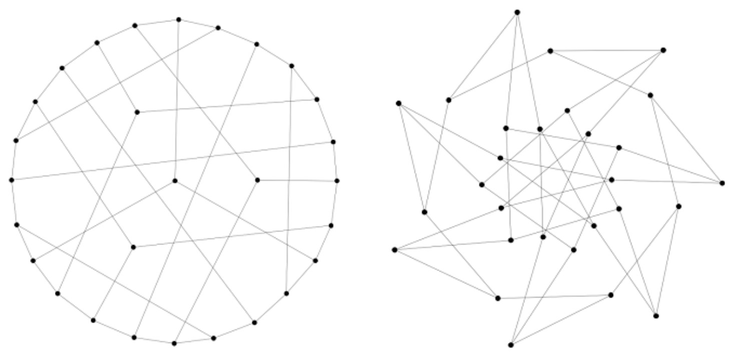
3.9. ábra. Doyle gráf

Pappus gráf: A görög matematikusról, Alexandriai Pappusról nevezték el. Csúcsszáma: 18, élszáma: 27. 3-reguláris, szimmetrikus, automorfizmusainak száma: 216. Hamilton-körei száma 72.



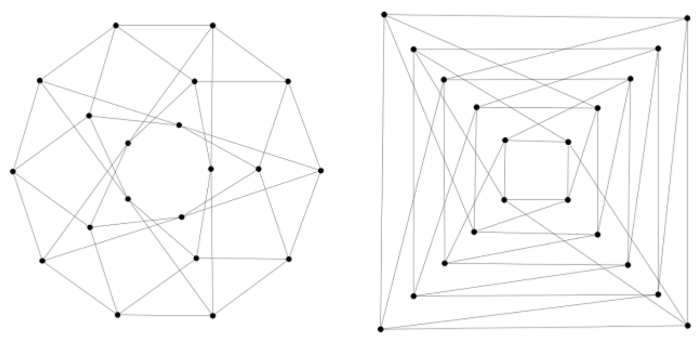
3.10. ábra. Pappus gráf

Coxeter gráf: 3-reguláris szimmetrikus. 28 csúcsa, 42 éle van, automorfizmusainak száma: 336. Nincsen Hamilton köre, de ha csak egy csúcsot veszünk el - bármelyiket is - akkor már van benne Hamilton kör.



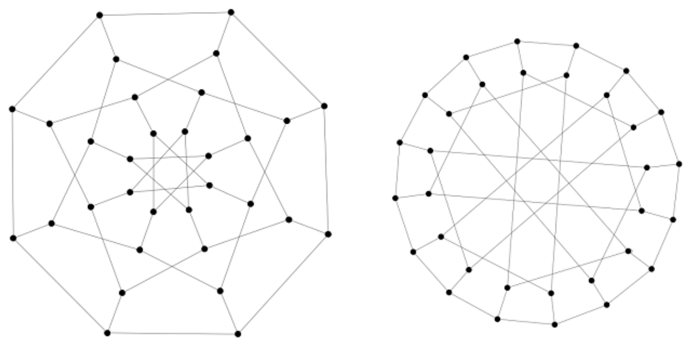
3.11. ábra. Coxeter gráf

Folkman gráf: J. Folkman után kapta a nevét, aki 1967-ben fedezte fel. Páros, 4-reguláris, csúcsszáma 20, élszáma 40. automorfizmuscsoportja tranzitívan hat az élein, de a csúcsain nem, így félszimmetrikus.



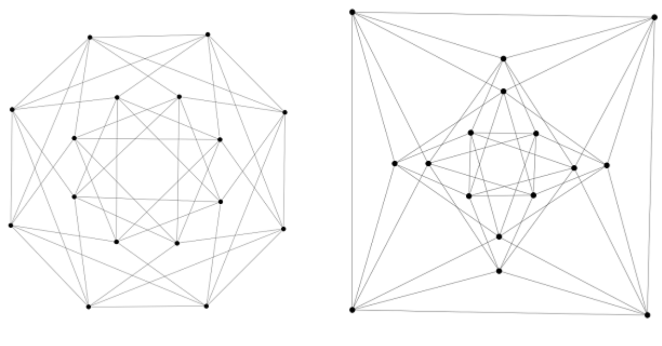
3.12. ábra. Folkman gráf

Dyck gráf: 3 reguláris szimmetrikus, 32 csúcsa, 48 éle van, automorfizmusainak száma: 192. Van Hamilton köre, ezek száma: 120. Tóruszra rajzolható.



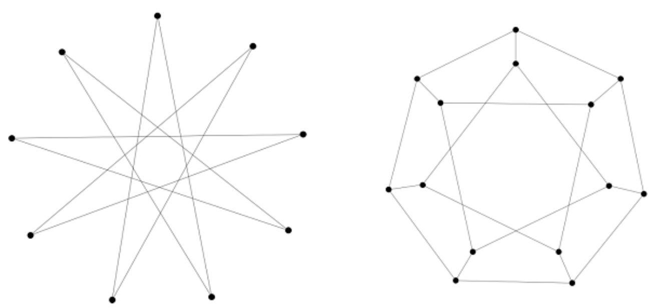
3.13. ábra. Dyck gráf

Shrikhande gráf: Nevét S. S. Shrikhande után kapta, aki 1959-ben fedezte fel. 16 csúcsa és 48 éle van, 6 reguláris. Automorfizmusainak száma: 192. Szimmetrikus.



3.14. ábra. Shrikhande gráf

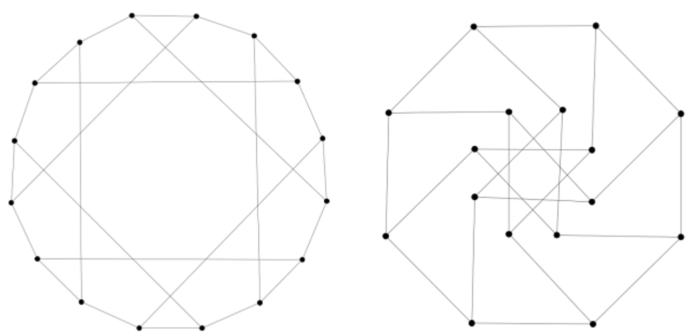
A **csillagsokszög** olyan sokszög, mely nem konvex, és kinézetre hasonlít a csillagokhoz: olyan zárt töröttvonal a síkban, mely metszi saját magát. A matematikában idáig a szabályos csillagsokszögekkel foglalkoztak részletesebben, így általában ezt is értik csillagsokszög alatt. Csillagsokszöget kapunk, ha egy szabályos sokszög csúcsait összekötjük a nem szomszédos csúcsokkal, akár úgy, hogy bizonyos szabály szerint nem az összes nem-szomszédjával kötjük össze. A csillagsokszögek jelölésére a következő szimbólumot használjuk: $\{n/k\}$, ahol n jelöli, hogy hány csúcsa van a szabályos sokszögnek, k pedig azt jelöli, hogy hányadik szomszédjával van összekötve egy csúcs. Az $\{n/k\}$ szimbólummal jelölt csillagsokszög szimmetriacsoportja a D_n, k-tól függetlenül. $|D_n| = 2n$. A $\{9/4\}$ csillagsokszög szimmetriáinak száma: 18. Csúcs-és élszáma is 9.



3.15. ábra. $\{9/4\}$ és a $G(7,2) = \{7\} + \{7/2\}$

A következő gráfokat az általánosított Petersen gráfok családjába sorolhatjuk: olyan 3 reguláris gráfok, melyeket úgy kapunk, hogy egy szabályos sokszög csúcsait összekötjük az ugyanannyi csúcsú csillagsokszög csúcsaival, melyek a sokszög belsejében helyezkednek el. Jelölése: $GP(n, k)$, ahol n a sokszög csúcsszámát jelenti, k pedig azt mondja meg, hogy csillagsokszög mely csúcsát melyikkel kötjük össze. H.S.M. Coxeter 1950-ben hozta nyilvánosságra ezt a gráfcsaládot, az elnevezésük pedig Mark Watkinstól származik. Az általánosított Petersen gráf akkor és csak akkor csúcstranzitív, ha $n = 10$ és $k = 2$ vagy $k^2 \equiv \pm 1\ (n)$ és éltranzitív a következő esetekben: $(n, k) = (4, 1), (5, 2), (8, 3), (10, 2), (10, 3), (12, 5), (24, 5)$. Azaz összesen 7 szimmetrikus általánosított Petersen gráf létezik.

Möbius-Kantor gráf: nevét August F. Möbius és Seligmann Kantorról kapta. A gráf páros, 3reguláris, 16 csúcsa, és 24 éle van. Szimmetrikus, automorfizmusainak száma 96. Jelölése: $GP(8,3)$.

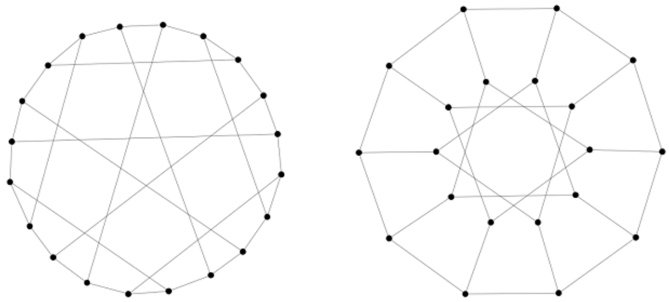


3.16. ábra. Möbius-Kantor gráf

Desargues-gráf: A nevét Gérard Desargues után kapta. A gráfnak 20 csúcsa és 30 éle van, automorfizmusainak száma: 240 Jelölése: $GP(10,3)$. A Desargues-tétel kimondja, hogy ha két háromszög egy pontra nézve perspektív, akkor egyenesre nézve is az. * A tételben összesen 10 pont és 10 egyenes szerepel, és ha készítünk belőle egy olyan páros gráfot,* melyben az egyeneseknek és a csúcsoknak is egy-egy pont felel meg, és a csúcsoknak megfelelő pontokat azokkal az éleknek megfelelő pontokkal kötjük össze, melyre illeszkednek, akkor a Derargues-gráfot kapjuk meg. A Petersen-gráf pedig a Desargues-tétel „nem kollineáris" gráfja: a 10 csúcsnak megfelelő pontot vesszük, és ha azokat a pontokat kötjük össze, melyeknek megfelelő csúcsok nem illeszkednek egy egyenesre, akkor a Petersen-gráfot kapjuk.

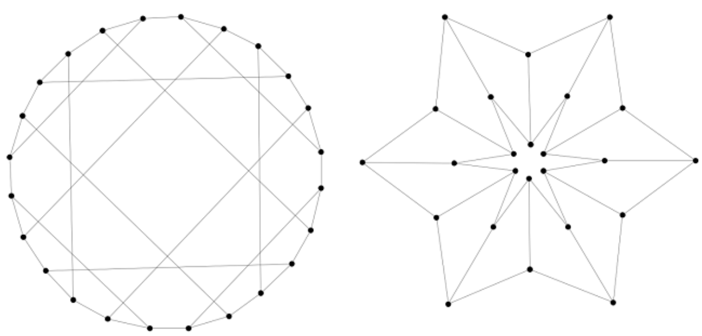
*Hajós György: Bevezetés a geometriába

*Egy G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha a G pontjainak $V(G)$ halmaza két részre, egy A és B halmazra osztható úgy, hogy G minden élének egyik végpontja A-ban, másik végpontja B-ben van. Ennek jelölése : $G = (A; B)$



3.17. ábra. Desargues gráf

Nauru gráf: Nevét Eppstein-től kapta 2007-ben. Nauru egy a Csendes óceán nyugati részén lévő szigetállam. A zászlója egy csillagsokszöget ábrázol, melynek 12 csúcsa van. A $GP(12, 5)$.nek felel meg. 24 csúcsa, 36 éle van. Automorfizmusainak száma 144.



3.18. ábra. Nauru gráf

4. fejezet

Ábrák készítése PGF/TikZ-vel

4.1. LaTeX grafikai csomagjai

A fejezet elkészítésében [14] és [8] valamint [16] cikkeket vettük alapul. A LaTeX dokumentumokban sokszor előfordul, hogy ábrákat szeretnénk beilleszteni, ez azonban nem olyan egyszerű feladat. Különböző lehetőségeink vannak arra, hogy képeket tegyünk a készülő munkába. Egyik lehetőség, hogy kész képállományt szúrunk be. Ehhez előbb egy külső képszerkesztővel (pl. visio, photoshop, gephi ...) a képet létrehozzuk, majd a `\graphicx` csomag segítségével beillesztjük a dokumentumba. A LaTeX csak néhány képformátumot támogat (gif, jpeg, eps). Eps fájlokat gif, jpeg formátumú képekből is tudunk konvertálni, melyet a következőképpen használunk: A LaTeX forráspreambulumába be kell tölteni a:

```
\usepackage[driver]{graphicx}
```

csomagot, majd a forrásban, ahová a képet szeretnénk illeszteni, a következő parancsokat kell kiadni:

```
\begin{figure}
\begin{center}
\includegraphics[kapcsolók]{nev.eps}
\end{center}
\end{figure}
```

A graphicx csomag változói, melyek a kapcsolóba kerülhetnek:
width: az ábra szélessége
height: az ábra magassága
angle: forgatás az óramutató járásának irányában

Előfordul azonban, hogy nem külső fájlból szeretnénk ábrát, rajzot, képet beilleszteni, ilyenkor a LaTeX forráskódon belül írjuk meg a kódot, erre is van lehetőségünk. A LaTeX több grafikus parancsot és környezetet is támogat.

ezek közé taroznak:

- a szabvány LaTeX {picture} környezet
- pstricks csomag
- xypic csomag
- dratex csomag
- metapost csomag
- xfig csomag
- PGF csomag

A leggazdagabb funkcionalitást biztosító grafikai rendszerek közé tartozik a PGF-TikZ rendszer. A PGF (portable graphics format) eszközfüggetlen grafika leíró nyelv LaTeX-közeli parancsokkal. Nagy előnye, hogy bárhol megjeleníthető. Minden PGF működéséhez három rétegre van szükség:

1. *rendszer/driver/meghajtó szint*: a magas szintű parancsokat eszközspecifikus parancsokká fordítja le.
2. *alap szint*: az alap parancsokat fogja össze: ilyen primitív parancs például két pont összekötése.
3. *elülső szint*: összetett alakzatok parancsait építi fel primitív parancsokból, és ezt átküldi a drivernek.

A PGF elülső szintje a TikZ, melynek előnye, hogy kiválóan alkalmas gráfok lerajzolására a dokumentumon belül. Till Tantau (német származású informatikus) a PGF nyelvek létrehozója, legfőbb fejlesztője.

A TikZ ábrákat `pdflatex` paranccsal fordítjuk, erre két lehetőség van:

1. A Tex fájlba beillesztjük a TikZ kódot, ekkor azonban csak pdf-et tudunk fordítani a `pdflatex` paranccsal.
2. Egy speciális preambulummal elkészített tex fájlban elkészítjük a rajzot, majd pdf fájlt generálunk belőle, ebből pedig eps fájlt konvertálunk.

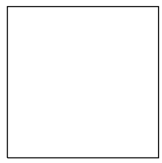
A működéshez a preambulumba be kell tölteni a `\usepackage{tikz}` csomagot.

A parancsok rövid áttekintése: a parancsokat érdemes úgy felfogni, mintha szegmenseket adnánk meg.

- `\draw` : ha szegmensként gondolunk rá: a $(0,0)$ pontból indulunk, majd mindegyik parancs $--$ (x,y) alakú. Jelentésük: az előző szegmens végéről húzz egy vonalat a megadott koordinátához.
- `\circle`: kört rajzol
- `\arc`: ívet rajzol
- `\filldraw`: kitölti az ábrát
- `\foreach`: ciklusok megadása

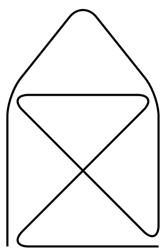
4.1. Példa. Egy egyszerű négyzet, melynek kódja:

```
\begin{tikzpicture}
\draw (0,0) -- (2,0) -- (2,2) -- (0,2) -- (0,0);
\end{tikzpicture}
```



4.2. Példa. Egy kis házikó, kóddal együtt:

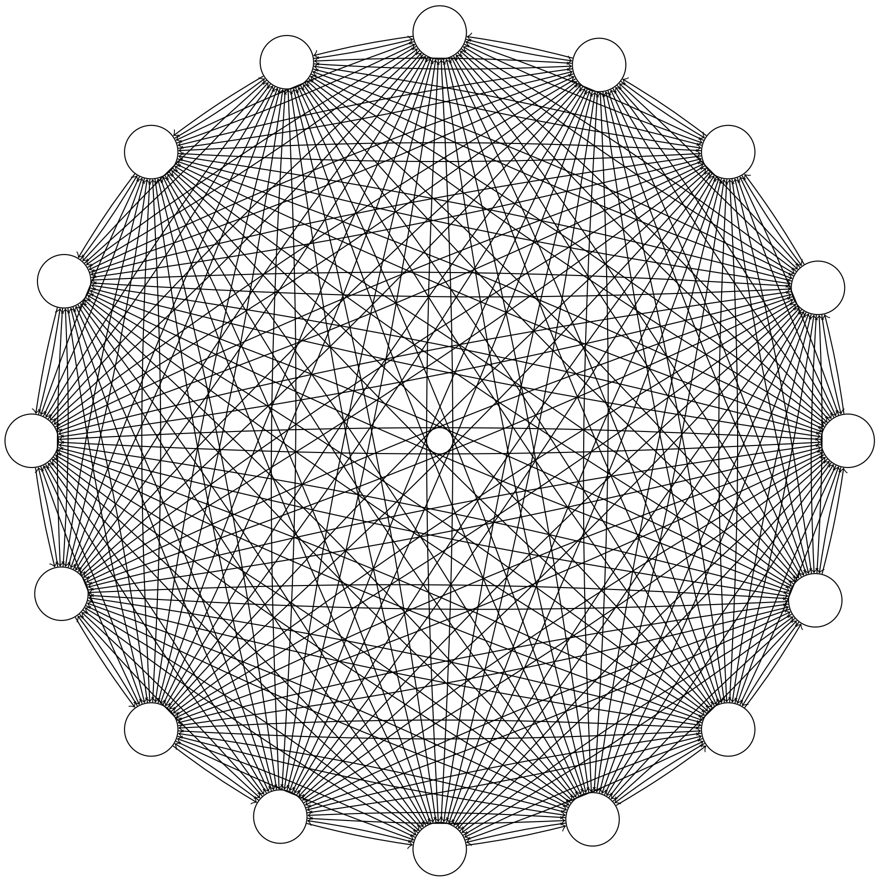
```
\tikz \draw[thick,rounded corners=8pt]\par
 (0,0) -- (0,2) -- (1,3.25) -- (2,2) -- (2,0) --
 (0,2) -- (2,2) -- (0,0) -- (2,0);
```



4.3. Példa. És akár gráfokat is lehet rajzolni, a teljes 16 pontú gráfot, K_{16}-ot adja meg a következő kód (lásd: [8]):

```
\begin{tikzpicture}[transform shape]
  \foreach \number in {1,...,8}{
        \mycount=\number
        \advance\mycount by -1
  \multiply\mycount by 45
        \advance\mycount by 0
      \node[draw,circle,inner sep=0.25cm]
      (N-\number) at (\the\mycount:5.4cm) {};
    }
  \foreach \number in {9,...,16}{
        \mycount=\number
        \advance\mycount by -1
  \multiply\mycount by 45
        \advance\mycount by 22.5
      \node[draw,circle,inner sep=0.25cm]
      (N-\number) at (\the\mycount:5.4cm) {};
    }
  \foreach \number in {1,...,15}{
        \mycount=\number
        \advance\mycount by 1
  \foreach \numbera in {\the\mycount,...,16}{
    \path (N-\number) edge[->,bend right=3]
    (N-\numbera)  edge[<-,bend
      left=3] (N-\numbera);
  }
}
\end{tikzpicture}
```

A programban a `\newcount, \ mycount` a változók létrehozására szolgálnak, a `begin{tikzpicture}[transform shape]` a rajz szegmens kezdet, elkezdi kirajzolni a gráf pontjait. A `\foreach` parancs egy ciklus kezdetét jelenti, az első ciklus a programban a csomópontokat adja meg. A `\node` parancs kirajzolja a pontokat, majd összeköti a megfelelő csúcsokat.



4.1. ábra. A K_{16} teljes gráf

Summary

Nice graphs

This thesis was written on graph theory. The aim was to find out what makes a graph nice. I decided to choose this topic because I am interested in mathematics and in art, too. I tried to collect graphs which are aesthetic from a certain point of view. I seek to collect the properties of symmetric graphs and the ways they are constructed. Nice in itself is a subjective concept: we do not have any tool/algorithm which could help us decide if a graph is nice or not. The word ”symmetry” comes from the Greek $\sigma\nu\mu$ (snm) and $\mu\varepsilon\tau\rho o\sigma$ (metros) = ”measure together” words. In this thesis we call a graph nice if it is symmetric or semi-symmetric. A graph is symmetric if it is both edge- and vertex-transitive. On the other hand a graph is semi-symmetric if it is regular and edge-transitive, but not vertex-transitive. (Sometimes arc-transitive graphs are said to be symmetric, which causes misunderstanding).

The first chapter is about graph theory in general: what a graph is, basic definitions, what the most important parameters of a graph are.

The second one is about symmetric graphs. Here, we try to define what a nice graph is.

The third chapter gives us examples for symmetric and semi-symmetric graphs: Petersen graph, Kneser graph, Doyle graph, Pappus graph, Coxeter graph, Folkman graph, Dyck graph, Skrikhande graph, Möbius-Kantor graph, Desrgues graph, Nauru graph.

The last chapter is mainly about PGF and TikZ. PGF is a TeX macro package for generating graphics. It is platform- and format-independent and works together with the most important TeX backend drivers, including pdftex and dvips. It comes with a user-friendly syntax layer called TikZ([2]).

Irodalomjegyzék

[1] Claude Berge: *Hypergraph Seminar* Lecture notes in Math, 411, Springer, 1974

[2] CTAN website: `http://ctan.org/pkg/pgf` (letöltés dátuma: 2012.05.18)

[3] Narsingh Deo: *Graph Theory With Applications To Engineering And Computer Science* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1974

[4] Leonhard Euler: `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/` (letöltés dátuma: 2012.04.20)

[5] Fekete Soma: *Természet Világa*, 133. évfolyam, 7. szám, 2002. július

[6] Hajnal - Számadó - Békéssy: *Matematika 9.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 2004

[7] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1995, cop. 1971

[8] Quintin Jean-Noël: `http://www.texample.net/tikz/examples/complete-graph/` (letöltés dátuma: 2012.05.18.)

[9] Jordán Tibor - Recski András - Szeszlér Dávid: *Rendszeroptimalizálás*, Typotex, Budapest, 2004.

[10] Katona Gyula Y. - Recski András - Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*, Typotex, Budapest, 2006.

[11] Yehuda Koren: `https://secure.cs.uvic.ca/twiki/pub/.../drawing\_large\_graphs.ppt` (letöltés dátuma: 2012.04.12.)

[12] Lovász László: *Kombinatorikai problémák és feladatok*, Typotex, Budapest, 1999.

[13] Mathworld: http://mathworld.wolfram.com (letöltés dátuma: 2012.04.11.)

[14] Móra Péter: http://www.math.bme.hu/~morap/informatika1-2009/latex/4ea.pdf (letöltés dátuma: 2012.05.18.)

[15] Peter Shor: http://www-math.mit.edu/~shor/PAM/some_graph_theory (letöltés dátuma: 2012.04.10.)

[16] Till Tantau: PGF & TikZ: http://ftp.roedu.net/mirrors/ctan.org/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf (letöltés dátuma: 2012.05.18.)

[17] Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_graph (letöltés dátuma: 2012.04.12.)

[18] Bohdan Zelinka - Zdĕnek Ryjáček http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/humor/himnusz.html (letöltés dátuma: 2012.04.12)